

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ВОЛНЫ УДАРНОЙ ИОНИЗАЦИИ

*А. С. Кюрегян**

*Всероссийский электротехнический институт им. В. И. Ленина
111250, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 мая 2009 г.

Рассмотрен вопрос о существовании обобщенно-автомодельных решений системы уравнений непрерывности и Пуассона применительно к задаче об эволюции волн ударной ионизации (ВУИ). Показано, что при любых физически обоснованных зависимостях коэффициентов ударной ионизации от напряженности поля возможны только асимптотические экспоненциально-автомодельные (предельные) решения. Они описывают ВУИ, все пространственные масштабы и скорость распространения которых экспоненциально увеличиваются со временем. Найдены условия, необходимые для существования плоских, цилиндрических и сферических волн такого типа, описана их структура и получены аналитические соотношения между основными параметрами, изучено влияние рекомбинации (прилипания) и туннельной ионизации. Показано, что такие ВУИ являются промежуточной асимптотикой решений соответствующих задач Коши, полученных численным методом. Наиболее важным и интересным типом экспоненциально-автомодельных ВУИ являются стримеры в однородном электрическом поле, простейшей, но наглядной и весьма полной моделью которых могут служить сферические ВУИ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Импульсный электрический пробой различных сред обычно обусловлен возникновением и распространением волн ударной ионизации (ВУИ), в частности стримеров [1–4]. Однако теория этого важного и интересного объекта многолетних исследований еще далека от завершения. Причина такого положения дел очевидна: даже при использовании простейшего гидродинамического приближения для описания структуры и эволюции ВУИ необходимо решить нестационарную, неоднородную и нелинейную систему уравнений непрерывности и Пуассона. Аналитическое исследование этой системы возможно, только если она допускает существенные упрощения (например, понижение порядка или сокращение числа независимых переменных) с помощью каких-либо преобразований, а сами ВУИ обладают высокой степенью пространственной симметрии. Среди них простейшими являются стационарные плоские волны в газах, для которых получены некоторые точные результаты [4–6], обобщенные затем на характерный для полупроводников случай биполяр-

ной ионизации [7]. Между тем большинство ВУИ, изученных экспериментально или путем численного моделирования, не являются ни стационарными, ни плоскими. Поэтому поиск решений, описывающих нестационарные ВУИ иной, более реалистичной формы, представляется весьма актуальным.

Недавно в этом направлении были получены первые результаты. Авторы работ [8, 9] изучили цилиндрические и сферические ВУИ в газах, предполагая отсутствие полного тока и, следовательно, постоянство заряда Q волны. Это допущение приводит к снижению максимальной напряженности поля $E_M \equiv |E(r_f)|$ на фронте с ростом его радиуса r_f по тому же степенному закону, что и исходное невозмущенное поле. Такие волны замедляются и затухают со временем t , а их эволюция становится автомодельной, но лишь при столь малых E_M , что ударной ионизацией можно пренебречь и волна распространяется только за счет дрейфа электронов. В работе [10] также были рассмотрены сферические ВУИ в газах. Однако, в отличие от работ [8, 9], предполагалось, что через волну протекает ток, который поддерживает постоянными E_M и заряд $Q/4\pi r_f^2$, приходящийся на единицу площади поверхности фронта волны. Было показано, что при этом условии суще-

*E-mail: ask@vei.ru

ствуют асимптотические автомодельные решения, которые описывают незатухающие и ускоряющиеся по экспоненциальному закону ВУИ.

В настоящей работе сформулированная выше проблема исследована более полно и подробно. Во-первых, изучен вопрос о том, какими обобщенно-автомодельными решениями могут описываться ВУИ. Показано, что при любых физически обоснованных зависимостях скорости ударной ионизации от поля такие решения могут быть только экспоненциально-автомодельными [11] (иногда их называют предельными автомодельными [12]). Во-вторых, проанализированы экспоненциально-автомодельные решения для случаев плоской, цилиндрической и сферической ВУИ. В-третьих, рассмотрены ВУИ не только в газах, но и в полупроводниках. Это важно не только потому, что вариант задачи с биполярными переносом и ударной ионизацией является более общим, но и вследствие ряда других существенных особенностей ВУИ в полупроводниках. В-четвертых, изучено влияние рекомбинации (прилипания) и туннельной ионизации на распространение ВУИ. Наконец, проведено сравнение полученных решений с результатами численного моделирования стримеров в однородном внешнем поле, показавшее, что экспоненциально-автомодельные сферические волны могут служить простейшей, но весьма полной и наглядной моделью этих важных и интересных объектов.

2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПУАССОНА

Как и авторы большинства работ, посвященных теоретическому исследованию и численному моделированию ВУИ, мы будем использовать диффузионно-дрейфовое приближение, в рамках которого распределения электронов $n(t, \mathbf{r})$ и дырок (в полупроводниках) или положительно заряженных ионов (в газах) $p(t, \mathbf{r})$ описываются системой уравнений непрерывности, которые нам удобно представить в виде

$$\frac{\partial(p+n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_h + \mathbf{j}_e) = 2[(\alpha_e \mu_e n + \alpha_h \mu_h p)|E| + s], \quad (1)$$

$$\frac{\partial(p-n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_h - \mathbf{j}_e) = 0. \quad (2)$$

Такая форма записи подразумевает, что все механизмы ионизации и рекомбинации, описываемые слагаемым $s = s(n, p, E)$, приводят только к парному рождению и исчезновению свободных электронов и дырок (ионов). Плотности потоков свободных носителей заряда равны

$$\mathbf{j}_e = -\mu_e \mathbf{E}n - \nabla D_e n, \quad \mathbf{j}_h = \mu_h \mathbf{E}p - \nabla D_h p,$$

коэффициенты ударной ионизации $\alpha_{e,h} = \alpha_{e,h}(E)$, дрейфовые подвижности $\mu_{e,h} = \mu_{e,h}(E)$ и коэффициенты диффузии $D_{e,h} = D_{e,h}(E)$ являются заданными мгновенными и локальными функциями напряженности поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, удовлетворяющей уравнению Пуассона

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon}(p-n) = -\Delta\varphi. \quad (3)$$

Здесь φ — потенциал, q — элементарный заряд, ε — диэлектрическая проницаемость среды, индексы «e» и «h» соответствуют электронам и дыркам (ионам).

Нашей целью является поиск обобщенно-автомодельных решений вида [11]

$$\begin{vmatrix} p+n \\ p-n \\ \varphi \\ \mathbf{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_\sigma(t)\sigma(\hat{\mathbf{r}}) \\ \phi_\rho(t)\rho(\hat{\mathbf{r}}) \\ \phi_\varphi(t)\Phi(\hat{\mathbf{r}}) \\ \phi_F(t)\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где автомодельная координата $\hat{\mathbf{r}} = \psi(t)\mathbf{r}$. Подставляя соотношение (4) в уравнения (1)–(3), получим после несложных преобразований новые представления уравнений непрерывности:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\dot{\phi}_\sigma \psi}{\phi_\sigma \dot{\psi}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\nabla} \sigma + \frac{\psi^2 \phi_\rho \phi_F}{\dot{\psi} \phi_\sigma} \hat{\nabla} \cdot \left[\left(\rho - \frac{\phi_\sigma \mu_-}{\phi_\rho \mu_+} \sigma \right) \mu_+ \mathbf{F} \right] - \\ - \frac{\psi^3}{\dot{\psi}} \hat{\Delta} \left(\sigma D_+ + \frac{\phi_\rho}{\phi_\sigma} \rho D_- \right) = \\ = 2 \frac{\psi}{\dot{\psi}} \left(g_+ \sigma + \frac{g_- \phi_\rho \rho + s}{\phi_\sigma} \right), \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\dot{\phi}_\rho \psi}{\phi_\rho \dot{\psi}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\nabla} \rho + \frac{\psi^2 \phi_\sigma \phi_F}{\dot{\psi} \phi_\rho} \hat{\nabla} \cdot \left[\left(\sigma - \frac{\phi_\rho \mu_-}{\phi_\sigma \mu_+} \rho \right) \mu_+ \mathbf{F} \right] - \\ - \frac{\psi^3}{\dot{\psi}} \hat{\Delta} \left(\rho D_+ + \frac{\phi_\sigma}{\phi_\rho} \sigma D_- \right) = 0, \quad (6) \end{aligned}$$

и уравнения Пуассона

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \frac{q}{\varepsilon} \frac{\phi_\rho}{\psi \phi_F} \rho = -\frac{\psi \phi_\varphi}{\phi_F} \hat{\Delta} \Phi, \quad (7)$$

где

$$g_{\pm} = \frac{1}{2}(\mu_h \alpha_h \pm \mu_e \alpha_e)|E|, \quad \mu_{\pm} = \frac{\mu_h \pm \mu_e}{2},$$

$$D_{\pm} = \frac{D_h \pm D_e}{2},$$

точка над функциями означает дифференцирование по t , в операторах $\hat{\nabla}$ и $\hat{\Delta}$ дифференцирование проводится по $\hat{\mathbf{r}}$. Масштабные функции $\psi(t)$ и $\phi_{\sigma, \rho, F}(t)$ следует выбирать таким образом, чтобы все содержащиеся их множители в уравнениях (5)–(7) были постоянными. Необходимыми условиями этого являются, в частности, равенства

$$\phi_F = \phi_{\varphi} \psi, \quad \phi_F \psi = c_1 \phi_{\rho}, \quad \psi^2 \phi_{\sigma} \phi_F = c_2 \dot{\psi} \phi_{\rho}, \quad (8)$$

а достаточными — переопределенная система дифференциальных и алгебраических уравнений. Она является совместной и имеет решение только в особых случаях (они кратко рассмотрены в Приложении А), которые могут представлять самостоятельный интерес, но не имеют отношения к нашей проблеме. Если же не ограничиваться специально подобранными зависимостями $\alpha_{e, h}(E)$ и $\mu_{e, h}(E)$, то обеспечить постоянство множителя $\psi g_{\pm} / \dot{\psi}$ в правой части уравнения (5) можно только при условиях

$$\phi_F = \phi_{F0}, \quad \psi = \psi_0 \exp(-t/t_0), \quad (9)$$

подстановка которых в равенства (8) приводит к формулам

$$\phi_{\rho} = \phi_{\rho 0} \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right), \quad \phi_{\varphi} = \phi_{\varphi 0} \exp\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad (10)$$

$$\phi_{\sigma} = \phi_{\sigma 0},$$

где ϕ_{F0} , $\phi_{\varphi 0}$, $\phi_{\rho 0}$, $\phi_{\sigma 0}$ и ψ_0 — нормировочные константы, а t_0 — постоянная интегрирования. Решения вида (4) с такими масштабными функциями называются экспоненциально-автомодельными [11] или предельными автомодельными [12]. Они являются вырожденными в том смысле, что две из пяти масштабных функций (ϕ_F и ϕ_{σ}) не зависят от времени.

Ограничимся рассмотрением наиболее естественного случая расходящихся ВУИ, для которого $t_0 > 0$, все зависящие от времени слагаемые в уравнениях (5)–(7) экспоненциально уменьшаются с ростом t и при $t \gg t_0$ могут быть опущены. В результате наша система уравнений асимптотически принимает автомодельный вид:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\nabla} \sigma = -\tau(\sigma|V|A + S), \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\nabla} \rho + \rho = \tau \hat{\nabla} \cdot (\sigma \mathbf{V}), \quad (12)$$

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \rho = -\hat{\Delta} \Phi. \quad (13)$$

Из выражений (12), (13) следует полезное соотношение

$$\hat{\nabla} \cdot [\hat{\mathbf{r}}(\hat{\nabla} \cdot \mathbf{F}) - k\mathbf{F} - \tau\sigma\mathbf{V}] = 0, \quad (14)$$

где $k+1$ — размерность задачи. Оно отражает тот общеизвестный факт, что дивергенция плотности полного тока (проводимости и смещения) равна нулю. Здесь приняты следующие значения произвольных констант:

$$\phi_{\varphi 0} = \frac{\phi_{F0}}{\psi_0}, \quad c_1 = \frac{q}{\varepsilon}, \quad c_2 = \frac{\tau}{\tilde{\mu}},$$

$$\frac{\phi_{\sigma 0}}{2} = \phi_{\rho 0} = \frac{\varepsilon \psi_0 \phi_{F0}}{q},$$

и использованы обозначения

$$\tau = 2\tilde{\mu}\phi_{F0}\psi_0 t_0, \quad \mathbf{V} = (\mu_+ / \tilde{\mu})\mathbf{F}, \quad \tilde{\mu} = \mu_+(\phi_{F0}),$$

$$S = \frac{qs}{2\varepsilon\tilde{\mu}\psi_0^2\phi_{F0}^2}, \quad A = \frac{\alpha_e\mu_e + \alpha_h\mu_h}{(\mu_e + \mu_h)\psi_0}.$$

Целесообразный выбор последних двух произвольных констант, ϕ_{F0} и ψ_0 , зависит от вида функции $A(F)$. В настоящей работе при выполнении конкретных расчетов и оценок будем использовать аппроксимации

$$\alpha_{e, h} = \tilde{\alpha}_{e, h} \exp(-\tilde{E}_{e, h}/E),$$

$$\mu_{e, h} = \mu_{e, h}^0 E_{e, h}^s / (E + E_{e, h}^s),$$

где $\tilde{\alpha}_{e, h}$, $\tilde{E}_{e, h}$, $\mu_{e, h}^0$ и $E_{e, h}^s$ — константы, характеризующие материал. В газах (где можно пренебречь подвижностью ионов) $\mu_h = 0 = \alpha_h$, а в полупроводниках (где все кинетические коэффициенты электронов и дырок соизмеримы) для простоты будем считать, что $\mu_e = \mu_h$ и $\alpha_e = \alpha_h$. В обоих случаях удобно положить $\psi_0 = \tilde{\alpha}_e$ и $\phi_{F0} = \tilde{E}_e$, так чтобы

$$A = \exp(-1/F), \quad \mathbf{V} = \mathbf{F}(1 + F_s)/(F + F_s), \quad (15)$$

где $F_s = E_e^s / \tilde{E}_e$. Одно из важных различий между газами и полупроводниками состоит в том, что в первом случае обычно полагают $F_s \gg 1$ и поэтому $\mathbf{V} = \mathbf{F}$ [4–6, 8] при всех актуальных значениях $F \lesssim 1$, а во втором типичное значение $F_s = 0.01$

(именно его мы использовали во всех численных расчетах параметров ВУИ в полупроводниках) и зависимость $V(F)$ насыщается в относительно слабых полях.

Предположение о парном рождении и исчезновении свободных электронов и дырок (положительно заряженных ионов) обычно выполняется в полупроводниках и электроположительных газах (азот, благородные газы). Однако оно неприменимо, в частности, для электроотрицательных газов (воздух, SF_6), где важную роль играют также прилипание электронов со скоростью n/t_a (t_a — время рекомбинации) и рекомбинация разнополярных ионов со скоростью bpn_i (b — константа квадратичной рекомбинации, n_i — концентрация отрицательно заряженных ионов). В этом случае концентрация n_i удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\partial n_i / \partial t = n/t_a - bpn_i, \quad (16)$$

а в правых частях уравнений (1), (2) появляются дополнительные слагаемые $-(bpn_i \pm n/t_a)$. Тем не менее эти изменения не вносят ничего качественно нового, если считать, что в газах перенос заряда и ударная ионизация осуществляются только электронами, а $s = s(n, E)$ и не зависит от p и n_i . Действительно, нетрудно показать, что в этом случае уравнения (11)–(13) остаются справедливыми, если в определениях (4) функций σ и ρ заменить p на $p - n_i$, а в определении S заменить s на $s - n/t_a$. Используя обобщенно-автомодельное представление функции $n_i(t, \mathbf{r}) = \phi_{\mathcal{N}}(t)\mathcal{N}(\hat{\mathbf{r}})$, уравнение (16) можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\nabla} \mathcal{N} = -\frac{\tau}{\tau_a} \sigma + B\mathcal{N}(\mathcal{N} + \sigma) \quad (17)$$

только при $\dot{\phi}_{\mathcal{N}} = 0$ (здесь приняты обозначения $\tau_a = 2\tilde{\mu}\phi_{F0}\psi_0 t_a$, $B = t_0 b \phi_{\mathcal{N}}$ и использовано значение нормировочной константы $\phi_{\mathcal{N}} = \phi_{\rho 0}$). Оно должно решаться после того, как функции $\sigma(\hat{\mathbf{r}})$ и $F(\hat{\mathbf{r}})$ будут найдены путем решения основной системы (11)–(13). Одновременный учет других подобных процессов (например, отлипания электронов или прямой электронно-ионной рекомбинации) также не нарушает экспоненциальной автомодельности ВУИ, но не позволяет «отцепить» уравнения (1), (2) от (16) и приводит к необходимости увеличить число совместно решаемых уравнений.

Физический смысл использованного выше приближения $\exp(-t/t_0) \rightarrow 0$ состоит в том, что при больших t скорость фронта $u_f = r_f/t_0 \propto \exp(t/t_0)$

становится много больше средней направленной скорости носителей заряда. В этом пределе их перенос непосредственно не влияет на изменение σ , которое обусловлено только ионизацией¹⁾ (и, возможно, рекомбинацией) в соответствии с уравнением (11). Роль дрейфа сводится к образованию объемного заряда (см. уравнение (12)), который подавляет поле за фронтом в соответствии с уравнением Пуассона (13) и определяет структуру ВУИ в целом. Экспоненциальное увеличение всех размеров волны приводит к тому, что со временем градиенты n , p и E становятся пренебрежимо малыми. Именно поэтому, во-первых, оправдано использование локально-полевого приближения, во-вторых, диффузионные и термоэлектрические токи не входят в уравнения (11), (12) и, в-третьих, эти уравнения инвариантны относительно одновременной смены знаков \mathbf{F} и ρ , так что параметры экспоненциально-автомодельных ВУИ не зависят от направления электрического поля при любом соотношении между кинетическими коэффициентами электронов и дырок (ионов).

Следует отметить, что ускорение и расширение реальных ВУИ не может продолжаться бесконечно долго хотя бы из-за конечности²⁾ межэлектродного расстояния d . Поэтому экспоненциально-автомодельное решение на самом деле является промежуточной асимптотикой [12] решения задачи Коши: оно применимо для описания ВУИ только в ограниченном интервале значений t , удовлетворяющем неравенствам $t_0 \ll t \ll t_{end}$, где t_{end} — время прохождения фронтом волны расстояния d .

Система уравнений (11)–(13) должна быть дополнена подходящими граничными условиями, которые обеспечат существование экспоненциально-автомодельных решений. В качестве таковых следует использовать равенства

$$F(\infty) = F_+, \quad \sigma(\infty) = \sigma_+, \quad \rho(\infty) = 0, \quad (18)$$

поскольку концентрация σ_+ фоновых носителей заряда и напряженность F_+ поля далеко перед фронтом волны являются естественными параметрами,

¹⁾ На возможность подобного механизма распространения стационарных бегущих волн было указано еще в пионерской работе [13]. Предельный переход $\mu E_M/u_f \rightarrow 0$, приводящий к исчезновению слагаемых $\nabla \cdot \mathbf{j}_{e,h}$ в (1), использовался ранее при построении теории быстрых квазистационарных стримеров [14].

²⁾ Если это расстояние достаточно велико, то экспоненциальная автомодельность ВУИ может быть нарушена из-за «включения» ряда физических процессов, которые не учитываются в нашей математической модели [10, 14, 15].

управляющими эволюцией ВУИ. Постоянная времени τ является по сути дела собственным значением соответствующей краевой задачи, которое подлежит определению, как и собственные функции σ, ρ, \mathbf{F} . В некоторых случаях это можно сделать, используя закон сохранения заряда. Действительно, полный заряд волны

$$Q = q \int_{\Omega} (p - n) d\mathbf{r} = \phi_{\rho} \psi^{-k-1} \hat{Q}, \quad (19)$$

где $\hat{Q} = q \int_{\Omega} \rho d\hat{r}$ и интегрирование ведется по всему объему Ω . Если условия задачи таковы, что изменение Q определяется межэлектродным током $J = dQ/dt$, то для автомодельности ВУИ этот ток должен возрастать по закону

$$J = \hat{Q} \frac{d(\phi_{\rho} \psi^{-k-1})}{dt} = \hat{Q} \frac{k\phi_{\rho 0}}{t_0 \psi_0^{k+1}} \exp\left(k \frac{t}{t_0}\right), \quad (20)$$

где второе равенство справедливо при экспоненциальной автомодельности ВУИ. Тогда постоянная времени τ является еще одним независимым управляющим параметром, величина которого контролируется внешней электрической цепью. Именно этот вариант реализуется в случаях цилиндрической и сферической ВУИ, которые будут рассмотрены в следующем разделе.

3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ВУИ

Если ВУИ обладает цилиндрической ($k = 1$) или сферической ($k = 2$) симметрией, то соотношение (14) может быть проинтегрировано и для описания волны достаточно решить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} = -\frac{\tau}{\hat{r}} [\sigma |V| A + S], \quad (21)$$

$$\frac{dF}{d\hat{r}} = \frac{\tau}{\hat{r}} \left[\sigma V - \hat{j}_c \left(\frac{\hat{r}_c}{\hat{r}} \right)^k \right]. \quad (22)$$

После этого остальные неизвестные функции, $\rho(\hat{r})$ и $\Phi(\hat{r})$, легко найти, используя уравнение Пуассона (13). Уравнение (22) представляет собой автомодельную форму закона сохранения полного тока J (проводимости и смещения) вдоль направления распространения волны. Поэтому множитель \hat{j}_c в постоянной интегрирования $\hat{j}_c \hat{r}_c^k$ равен нормированной надлежащим образом плотности полного тока

j_c , протекающего через поверхность $r = r_c$ (которую для определенности будем считать поверхностью катода), т. е.

$$\hat{j}_c \hat{r}_c^k = \frac{\tilde{\alpha}_e^{k-1} r_c^k}{2\varepsilon \tilde{\mu} \tilde{E}_e^2} j_c \exp\left(-\frac{k\vartheta}{\tau}\right),$$

где $\vartheta = 2\tilde{\mu}\phi_{F0}\psi_0 t$. В соответствии с соотношением (20), автомодельность уравнения (22) не нарушается только при $j_c = j_{c0} \exp(k\vartheta/\tau)$, где j_{c0} — начальная плотность тока на катоде. В рассматриваемом случае формула (20) является следствием теоремы Гаусса, согласно которой равенства (9) могут быть выполнены одновременно, только если заряд внутри любой поверхности $\hat{r} = \text{const}$ (в том числе и полный заряд Q волны) растет со временем по закону $Q(\vartheta) \propto \exp(k\vartheta/\tau)$.

Правые части уравнений (21), (22) непрерывны по переменным \hat{r}, F и σ вместе со своими вторыми производными при $F > 0$ и $\hat{r} > 0$. Поэтому единственное решение краевой задачи (18)–(22) существует при всех значениях постоянной времени $\tau > 0$ [16], которая, как было указано выше, определяется внешней цепью.

В этом разделе целесообразно провести замену переменной \hat{r} на

$$\chi = \frac{\hat{r}}{\hat{r}_c} \hat{j}_c^{-1/k} = \left(\frac{2\varepsilon \tilde{\alpha}_e \tilde{\mu} \tilde{E}_e^2}{j_{c0}} \right)^{1/k} \frac{r}{r_c} \exp\left(-\frac{\vartheta}{\tau}\right),$$

в результате чего получается система уравнений

$$\frac{d\sigma}{d\chi} = -\frac{\tau}{\chi} (\sigma |V| A + S), \quad (23)$$

$$\frac{dF}{d\chi} = \frac{\tau}{\chi} (\sigma V - \chi^{-k}), \quad (24)$$

содержащая на один свободный параметр меньше, чем система (21), (22). Кроме того, будем считать, что радиус внешнего электрода $r_a \gg r_f$; тогда во втором из граничных условий (18) следует положить $F_+ = 0$.

Полное решение нелинейной краевой задачи (18), (23), (24) можно получить только численными методами. Мы применяли для этого метод Рунге–Куты четвертого порядка с адаптивной сеткой, используя независимую переменную $y = 1/\chi$ и решая задачу в конечном интервале $0 < y < 1/\chi_c$. Правая граница этого интервала χ_c^{-1} соответствует значению $r = r_c$, т. е. поверхности внутреннего электрода (катода).

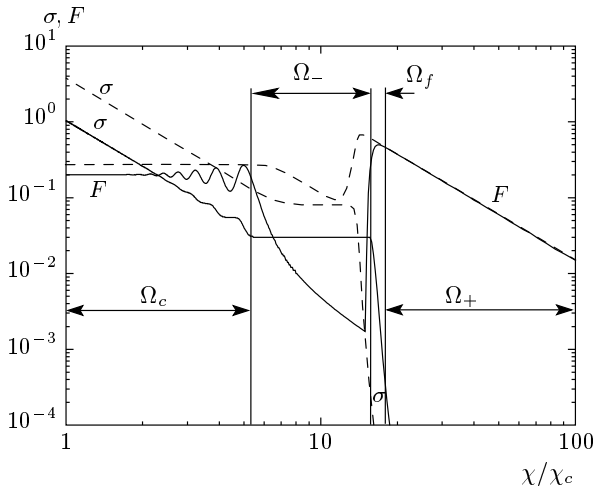


Рис. 1. Структура сферических волн в газах (штриховые линии) и в полупроводниках (сплошные линии) в момент времени $t = 5\tau$ при $S = 0$, $j_{c0} = 10^{-4} \varepsilon \tilde{\alpha}_e \tilde{\mu} \tilde{E}_e^2$, $\tau = 300$, $\sigma_+ = 10^{-6}$. Границы $\chi = \chi_-, \chi_f, \chi_+$ между областями $\Omega_c, \Omega_-, \Omega_f, \Omega_+$ волны в полупроводниках обозначены вертикальными линиями

3.1. ВУИ при наличии фоновых носителей заряда и $S = 0$

В этом разделе будем считать, что $S = 0$ и волна распространяется исключительно за счет лавинного размножения однородного фона свободных носителей заряда с концентрацией $\sigma_+ \neq 0$. Типичные распределения напряженности поля и концентрации в сферических³⁾ ВУИ для этого случая приведены на рис. 1. Результаты для других моментов времени получаются простым сдвигом вдоль логарифмической оси абсцисс. Как видно, волны состоят из четырех качественно различных областей $\Omega_c, \Omega_-, \Omega_f$ и Ω_+ .

В области Ω_+ перед фронтом концентрация электронов пренебрежимо мала, поэтому из уравнения (24) следует формула

$$F \approx \frac{\tau}{k} \chi^{-k}, \quad (25)$$

которая описывает распределение поля вокруг заряженного цилиндра или сферы и применима до тех пор, пока $\sigma \ll kF/\tau V$. Подстановка (25) в (23) дает после интегрирования взаимосвязь между концентрацией и напряженностью поля:

³⁾ Цилиндрические волны в качественном отношении полностью аналогичны сферическим, так как параметр размерности задачи k входит во все формулы только в комбинации τ/k . В том, что так и должно быть, легко убедиться, заменяя в (23), (24) переменную χ на $\chi_k = \chi^k$.

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_+} \approx \frac{\tau}{k} \eta_1(0, F),$$

$$\eta_m(F_+, F) = \int_{F_+}^F A(F_1) \left[\frac{V(F_1)}{F_1} \right]^m dF_1. \quad (26)$$

Быстрое нарастание концентрации носителей заряда на фронте волны приводит к образованию области Ω_f , в которой поле сначала достигает максимального значения F_M при $\chi = \chi_M$, а затем начинает уменьшаться. В этой области важную роль играют и подавление поля за счет конечной проводимости плазмы, и резкое изменение этой проводимости из-за интенсивной ударной ионизации. Толщина δ_f области Ω_f обычно много меньше χ_M , и напряженность поля в ней изменяется незначительно. Поэтому в уравнениях (23), (24) можно положить $\chi = \chi_M$ и $V(F) = V_M \equiv V(F_M)$, но резкую экспоненциальную зависимость $A(F)$ следует сохранить. Для этого случая решение было получено в работе [7] и в наших обозначениях имеет вид

$$\chi \approx \chi_M \left[1 - \frac{1}{\tau V_M} \int_F^{F_M} \frac{dF_1}{\eta_0(F_1, F_M) - \sigma_M \lambda} \right], \quad (27)$$

$$\sigma \approx \sigma_M e^{-\lambda}, \quad (28)$$

где $\sigma_M = \sigma(\chi_M)$, а λ — положительный (при $\chi > \chi_M$) или отрицательный (при $\chi < \chi_M$) корень уравнения

$$\lambda - 1 + e^{-\lambda} = \eta_0(F, F_M)/\sigma_M. \quad (29)$$

Можно показать, что при $\chi > \chi_M$ это решение применимо (т. е. $|\chi_M - \chi| \ll \chi_M$ и $|F_M - F| \ll F_M$) вплоть до значений $\sigma \ll \sigma_M$, если выполнено неравенство

$$2k \ll \tau V_M A_M, \quad (30)$$

которое является условием малости δ_f по сравнению с радиусом кривизны фронта. Оно означает, что за время τ концентрация носителей заряда увеличивается во много раз за счет ударной ионизации в поле F_M .

Ослабление поля за фронтом приводит к образованию при $\chi < \chi_f$ области Ω_- , в которой $F < F_f$, ударной ионизацией можно пренебречь, и поэтому концентрация постоянна:

$$\sigma \approx \sigma_- = 1/V_m \chi_m^k. \quad (31)$$

Здесь $F_f = F(\chi_f)$ — порог ударной ионизации, $V_m = V(F_m)$, $F_m = F(\chi_m)$ — минимальное значение напряженности поля, которое достигается при

$\chi = \chi_m$. Если $V \propto F$, то интегрирование уравнения (24) с учетом (31) дает

$$F \approx \frac{F_m}{\omega_- + k} \left[k \left(\frac{\chi}{\chi_m} \right)^{\omega_-} + \omega_- \left(\frac{\chi_m}{\chi} \right)^k \right], \quad (32)$$

где $\omega_- = \tau \sigma_-(1 + F_s)/F_s$. Эта формула описывает распределение поля во всей области Ω_- при $F_s \gg 1$, т. е. в газах. В полупроводниках она также применима, но лишь в непосредственной близости от поверхности $\chi = \chi_m$, где⁴⁾ $F \ll F_s$. Кроме того, существует широкий интервал значений $F_s \lesssim F < F_f$, при которых $V \approx 1$, и из уравнений (24), (31) следует

$$F = F_f - \tau \sigma_- \ln \frac{\chi_f}{\chi} + \frac{\tau}{k \chi_f^k} \left[\left(\frac{\chi_f}{\chi} \right)^k - 1 \right], \quad (33)$$

причем здесь $\chi_m < \chi < \chi_f < \chi_M$. Так как $\sigma_- \chi_f^k > \sigma_- \chi_m^k = 1/V_m \approx F_s/F_m \gg 1$, последним слагаемым в выражении (33) можно пренебречь и оно совпадает с формулой (60), полученной ниже для плоской волны. При $\chi < \chi_m$ также существует интервал, внутри которого $V \approx 1$ и распределение поля можно описать формулой, аналогичной (33). Однако проще воспользоваться тем обстоятельством, что в области Ω_- ток смещения много меньше тока проводимости при всех $\chi < \chi_m$, если

$$k \ll \tau \sigma_- F_s (1 + F_s) (F + F_s)^{-2}. \quad (34)$$

В этом случае можно пренебречь левой частью уравнения (24) и использовать для определения F приближенное уравнение $\sigma_- V(F) \chi^k \approx 1$, которое можно переписать в виде

$$F \approx F_s [\sigma_- \chi^k (1 + F_s) - 1]^{-1}. \quad (35)$$

Разумеется, при $V = F$ (т. е. при $F_s \rightarrow \infty$) эта формула совпадает с (32), если выполнено условие (34).

Напряженность поля увеличивается в соответствии с (35) до тех пор, пока в области Ω_c (при $\chi < \chi_-$) не начнется повторный рост σ из-за ударной ионизации. Вследствие резкой зависимости $A(F)$ необходимый для сохранения полного тока рост σ обеспечивается за счет очень малого приращения F . Поэтому по мере приближения к катоду поле должно стремиться к некоторой постоянной величине F_c , а концентрация расти по степенному закону:

$$F = F_c, \quad \sigma = \sigma_c(\chi) = 1/V(F_c) \chi^k. \quad (36)$$

⁴⁾ Такая область существует, поскольку, как далее будет показано, в полупроводниках $F_m/F_s \ll 1$, если волна достаточно «сильная».

Если F_c является корнем уравнения

$$k = \tau V(F_c) A(F_c), \quad (37)$$

то формулы (36) дают одно из точных решений системы (23), (24). Оно не удовлетворяет граничным условиям (18), но при $\chi \rightarrow 0$ является предельным для реальных решений, характер приближения которых к (36) существенно различен для газов и полупроводников (см. рис. 1). Анализ этого вопроса, приведенный в Приложении В, показывает, что поле и концентрация приближаются к F_c и $\sigma_c(\chi)$ монотонно, как в газах, если

$$F_s > \frac{\pi}{2} F_c \sqrt{\frac{k}{\tau \sigma_-}} \sim 0.1. \quad (38)$$

В противном случае это приближение должно иметь характер затухающих колебаний, что подтверждается численными расчетами (см. рис. 1). Физической причиной появления этих колебаний является очень быстрый (гиперболический, см. (35)) рост поля при $\chi \rightarrow \sigma_-^{-1/k}$. Из-за этого объемный заряд ρ , необходимый для замедления роста F , начинает возникать за счет дрейфа с заметной задержкой по отношению к началу увеличения σ за счет ударной ионизации. Поэтому поле успевает дорасти до значений, заметно больших F_c , и лишь после этого ρ станет достаточным для подавления поля. Таким образом формируются вторичные волны, которые в качественном отношении не отличаются от основной (первичной) волны, но затухают по мере удаления от поверхности $\chi = \chi_-$. Это затухание обусловлено тем, что «амплитуда» ВУИ (т. е. отношение F_M/F_m) уменьшается с ростом концентрации носителей заряда перед фронтом (см. ниже рис. 3). Она равна σ_+ перед первичной волной и $\sigma_- \gg \sigma_+$ перед первой из вторичных волн, а далее увеличивается в соответствии с (36). На самом катоде концентрация равна $\sigma \approx \sigma_c(\chi_c) = 1/V(F_c) \chi_c^k$ и увеличивается со временем по экспоненте с инкрементом k/t_0 , как и должно быть для обеспечения такого же роста тока.

Чтобы получить полное описание ВУИ, необходимо сшить полученные выше решения между собой. С учетом равенства $\sigma_M V_M \chi_M^k = 1$ формулу (25) можно переписать в виде $\tau \sigma_M V_M = k F_M (\chi_{0M}/\chi_M)^k$, где, по определению, $\chi_{0M} = (\tau/k F_M)^{1/k}$. Малость δ_f позволяет пренебречь различием между χ_M и χ_{0M} . В результате сразу получаются оценки концентрации

$$\sigma_M \approx k F_M / \tau V_M \quad (39)$$

и положения максимума поля

$$\chi_M \approx (\tau/kF_M)^{1/k}, \quad (40)$$

которое в силу малости δ_f почти совпадает с положением фронта χ_f .

Вследствие неравенства (30) области применимости решений (26) и (28) перекрываются между собой, поэтому эти решения можно сшить на поверхности $\chi = \chi_+$, где $F_M - F \ll F_M$ и $V_M \eta_0(F, F_M) \approx F_M \eta_1(F, F_M)$. В результате с учетом (39) получается приближенное уравнение

$$\ln \frac{kF_M}{\tau V_M \sigma_+} \approx \frac{\tau}{k} \eta_1^0 + 1, \quad (41)$$

устанавливающее связь максимального поля с управляющими параметрами τ , σ_+ , где $\eta_m^0 = \eta_m(0, F_M)$. Формула для концентрации электронов σ_- за фронтом следует из выражений (28) и (39):

$$\sigma_- = a_\sigma \eta_0^0, \quad a_\sigma = 1 + \frac{kF_M}{\eta_0^0 \tau V_M} (1 - \lambda_-), \quad (42)$$

где λ_- — отрицательный корень уравнения

$$\lambda_- - 1 + \exp(-\lambda_-) = \eta_0^0 \tau V_M / kF_M.$$

Для слабой функции $a_\sigma(F_M, \sigma_+)$ можно использовать простую аппроксимацию

$$a_\sigma = 1 + \frac{9}{2 \ln(\eta_0^0 / \sigma_+)}, \quad (43)$$

которая отличается от (42) меньше чем на 2% при обычно выполняемом условии $\eta_0^0 > 15\sigma_+$. Появление в (42) дополнительного (по сравнению с плоскими ВУИ, см. ниже формулу (55) и формулы для σ_- в работах [4–7]) множителя $a_\sigma \approx 2$ обусловлено существованием максимума поля на фронте, вследствие чего лавинное размножение происходит почти в равной степени и при $\chi > \chi_M$, и при $\chi < \chi_M$.

Далее, приравнивая токи проводимости через поверхности $\chi = \chi_m$ и $\chi = \chi_M$ (на которых токи смещения равны нулю), можно получить уравнение $\sigma_- V_m = a_\chi k F_M / \tau$, решение которого для аппроксимации (15) дает оценку F_m :

$$F_m \approx F_s \left[\frac{\tau \sigma_-}{a_\chi k F_M} (1 + F_s) - 1 \right]^{-1}. \quad (44)$$

где $a_\chi = (\chi_{0M} / \chi_M)^k$. Наконец, сшивая решения (31) или (35) с (36), можно получить формулу

$$\chi_- \approx [\sigma_- V(F_c)]^{-1/k} \quad (45)$$

для положения границы χ_- между областями Ω_- и Ω_c .

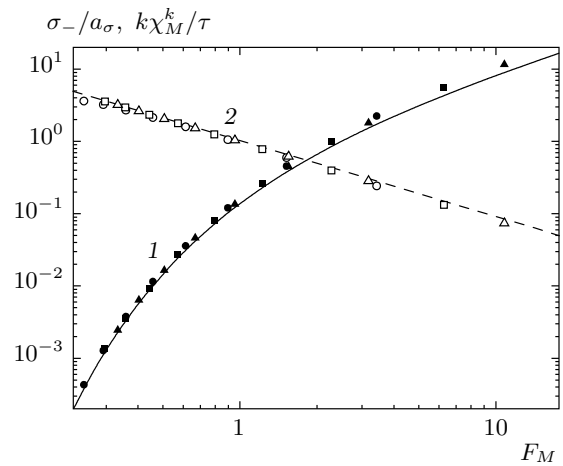


Рис. 2. Зависимости нормированной концентрации σ_- электронов за фронтом (кривая 1) и положения фронта $\chi_f \approx \chi_M$ (кривая 2) от максимальной напряженности поля F_M при $S = 0$, $k = 2$ и различных значениях концентрации σ_+ затравочных носителей заряда в полупроводниках: $\sigma_+ = 10^{-5}$ (кружки), 10^{-7} (квадраты), 10^{-9} (треугольники). Символы — результаты численного решения, сплошная линия — расчет по формуле (42), штриховая — по (40)

В частном случае $k = 2$, $\alpha_h = 0 = \mu_h$ и $\mu_e = \text{const}$ ($F_s \rightarrow \infty$) формулы из этого раздела описывают сферические ВУИ в газах и совпадают с результатами работы [10].

В этом разделе мы использовали сильные неравенства, которые несколько отличаются от неравенства (30) по форме, но количественно почти эквивалентны ему и в совокупности являются условиями того, что амплитуда ВУИ велика, а толщина фронта мала по сравнению с радиусом его кривизны. Оказалось, что при актуальных значениях τ и σ_+ эти неравенства обычно выполняются. В частности, приближение $(\chi_{0M} / \chi_M)^2 \approx 1$ оправдано, поскольку обычно $(\chi_{0M} / \chi_M)^2 < 1.1$. Прямое сравнение численных результатов с формулами (37), (40)–(44) для полупроводников⁵⁾ показывает (рис. 2, 3), что они на самом деле выполняются с хорошей точностью во всех рассмотренных нами случаях. Наибольшая ошибка возникает при расчете F_m по формуле (44) из-за пренебрежения зависимостью величины a_χ от τ и σ_+ . Эта ошибка увеличивается с ростом τ и σ_+ (рис. 3б), но не превосходит 20% при «оптимальном» значе-

⁵⁾ Для сферических ВУИ в газах совпадение результатов численных и аналитических расчетов было продемонстрировано в работе [10].

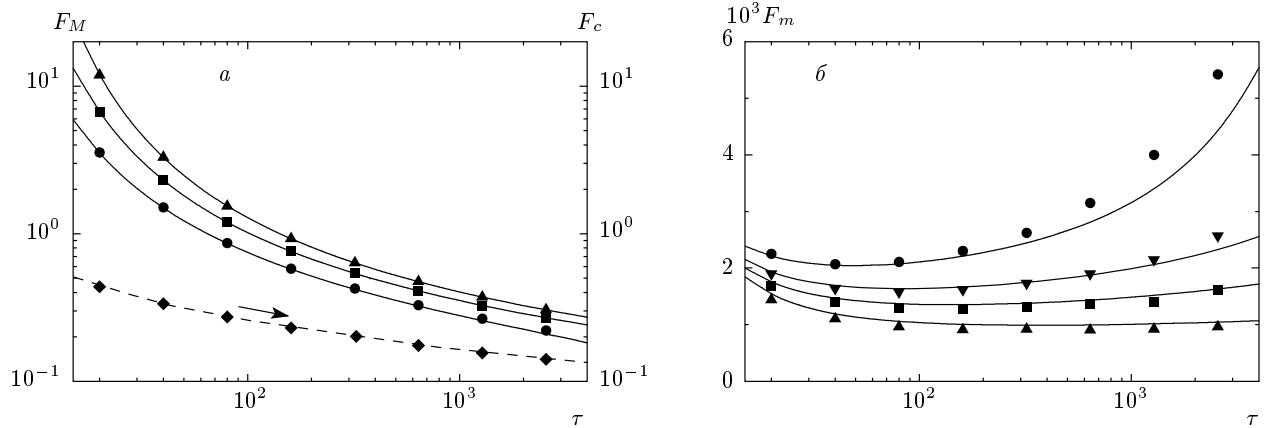


Рис. 3. Зависимости максимальной F_M и минимальной F_m напряженностей поля, а также поля на внутреннем электроде F_c от постоянной времени τ при $S = 0$, $k = 2$ и различных значениях концентрации σ_+ затравочных носителей заряда в полупроводниках: $\sigma_+ = 10^{-5}$ (\bullet), 10^{-6} (\blacktriangledown), 10^{-7} (\blacksquare), 10^{-9} (\blacktriangle). Символы — результаты численного решения системы уравнений (23), (24), сплошные линии — расчет по формулам (41) (а) и (44) (б), штриховая — расчет по (37)

нии $a_\chi = 1.2$. Зависимости $F_c(\tau)$, приведенные на рис. 3а, при всех значениях σ_+ различаются между собой меньше, чем на 0.1%, как и должно быть в соответствии с уравнением (37).

3.2. Влияние рекомбинации

Однородный фон носителей заряда может быть создан, в частности, слабопоглощаемым ионизирующим излучением внешнего источника⁶⁾. Если время жизни t_r неравновесных носителей заряда много больше времени распространения ВУИ (такое соотношение времен типично для полупроводников и электроположительных газов), то источник излучения должен быть импульсным и реализуется ситуация, рассмотренная в разд. 3.1. В противном случае (например, в электроотрицательных газах) для поддержания неизменного во времени фона σ_+ необходим постоянный источник излучения со скоростью ионизации g_0 , так что

$$s = g_0 - n/t_r \quad \text{или} \quad S = G_0 - \sigma/\tau_r, \quad (46)$$

где $\tau_r = 2\tilde{\alpha}_e \tilde{\mu}_e \tilde{E}_e t_r$ и должно выполняться соотношение $G_0 = \sigma_+/\tau_r$. Если $\tau_r \gg \tau$, то роль рекомбинации этим исчерпывается и все результаты разд. 3.1 остаются верными. Однако при $\tau_r \lesssim \tau$ рекомбинация начинает существенно искажать структуру волны за фронтом. Аналитические результаты легко получить в простейшем случае, когда τ_r не зависит от σ

⁶⁾ В полупроводниках однородным фоном могут быть и равновесные носители заряда.

(как, например, в случае прилипания, когда $\tau_r = \tau_a$, см. конец разд. 2). Тогда в областях Ω_c , Ω_f и Ω_+ , где существенна ударная ионизация, учет рекомбинации сводится просто к замене безразмерного коэффициента A на $A - 1/V\tau_r$. При прочих равных условиях это приведет к незначительному (в силу резкой зависимости A от F) увеличению F_c , F_M и уменьшению σ_- . Более существенным оказывается влияние рекомбинации в области Ω_- , где концентрация σ начинает сразу за фронтом уменьшаться; если τ_r не зависит и от F , то

$$\sigma = \sigma_- (\chi/\chi_f)^{\tau/\tau_r}. \quad (47)$$

Вследствие этого напряженность поля здесь должна расти при уменьшении χ быстрее, чем по формулам (26), (35), а именно

$$F \approx F_s \left[\sigma_- \chi_f^k (\chi/\chi_f)^{(k+\tau/\tau_r)} (1 + F_s) - 1 \right]^{-1}. \quad (48)$$

Положение границы между областями Ω_- и Ω_c определяется теперь формулой

$$\chi_- \approx \left(\frac{\tau}{kF_M} \right)^{1/k} \left[\frac{kF_M}{\tau\sigma_- V(F_c)} \right]^{\tau_r/(k\tau_r+\tau)} \quad (49)$$

и сдвигается из-за рекомбинации в сторону фронта. Это является дополнительным фактором (см. Приложение В), облегчающим условие возникновения колебаний поля вблизи правой границы области Ω_c . Все сказанное подтверждается результатами численного решения краевой задачи (21), (23), (24) с учетом (46), приведенными на рис. 4.

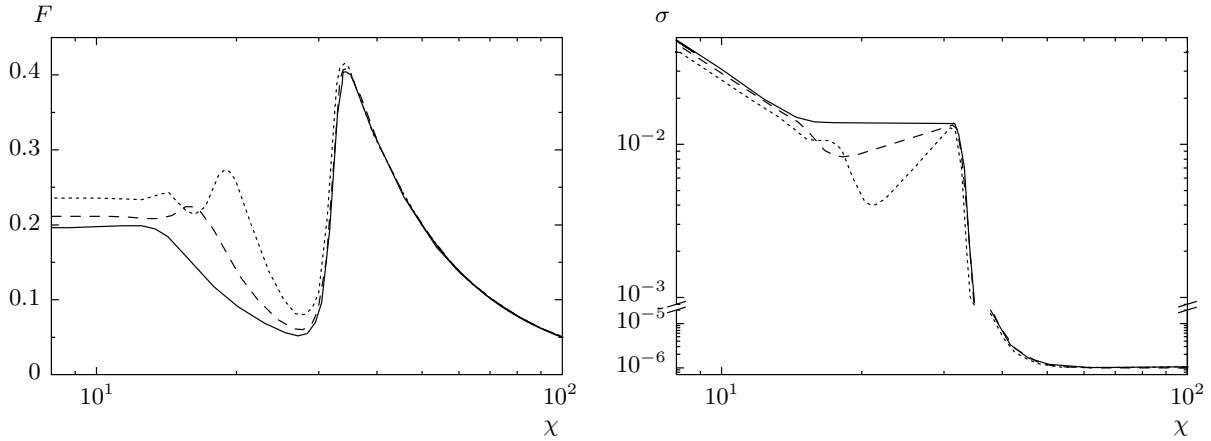


Рис. 4. Влияние линейной рекомбинации (прилипания) на структуру сферической ВУИ при $\tau = 1000$, $\sigma_+ = 10^{-6}$, $\tilde{G}_t = 0$, $F_s = 1$ и различных временах жизни τ_r : сплошные кривые — $\tau_r = 10^7 \tau$; штриховые — $\tau_r = \tau$; пунктирные — $\tau_r = 0.3\tau$

3.3. Влияние туннельной ионизации

Использованное в предыдущем разделе предположение о существовании перед фронтом однородного фона затравочных носителей заряда упрощает аналитическое решение задачи, но далеко не всегда соответствует условиям экспериментов по импульсному пробою. На самом деле обычно этот фон отсутствует, т. е. $\sigma_+ = 0$. Однако и в этих случаях экспоненциально-автомодельная эволюция ВУИ возможна, если перед фронтом существует какой-нибудь дополнительный механизм ионизации среды.

В полупроводниках таким механизмом может быть межзонное туннелирование [17, 18], учет которого не нарушает автомодельности ВУИ, так как скорость g_t туннельной ионизации зависит только от напряженности поля. Если использовать обычную аппроксимацию $g_t = \tilde{g}_t (E/E_t)^2 \exp(-E_t/E)$ [19], то слагаемое S в уравнениях (11) и (23) принимает вид

$$S = G_t = \tilde{G}_t F^2 \exp(-F_t/F), \tag{50}$$

где $\tilde{G}_t = q\tilde{g}_t\tilde{E}_e/2\varepsilon\tilde{\mu}\tilde{\alpha}_e^2 E_t^2$ и $F_t = E_t/\tilde{E}_e$. Обычно $F_t \gg 1$ (далее при выполнении конкретных расчетов мы используем значения $F_t = 15 = \tilde{G}_t$, характерные для Si [19]), поэтому туннельная ионизация проявляется только непосредственно перед фронтом (и, может быть, в части области Ω_f), где концентрация носителей заряда еще мала, а напряженность поля уже велика. Теперь вместо (26) получается бо-

лее сложная формула

$$\sigma = -\tau\tilde{G}_t \int_0^F F_1^2 \times \exp\left(-\frac{F_t}{F_1} - \tau \int_{F_1}^F VA \frac{dF_2}{f}\right) \frac{dF_1}{f}, \tag{51}$$

где $f(F) \equiv \chi dF/d\chi = -kF$. Ее можно упростить при

$$(F - \hat{F})^2 > 2\hat{F}^4 F_t^{-1} (1 + \hat{F})^{-1}, \tag{52}$$

где \hat{F} — корень уравнения $\hat{F}V(\hat{F})A(\hat{F}) = kF_t/\tau$. Действительно, в этом случае показатель экспоненты в (51) имеет острый максимум при $F_1 = \hat{F}$ внутри интервала $[0, F]$ и интеграл можно вычислить методом перевала, в результате чего получается

$$\sigma = \frac{\tau\hat{F}G_t(\hat{F})}{k} \sqrt{\frac{2\pi}{F_t(1+\hat{F})}} \exp\left[\frac{\tau}{k}\eta_1(\hat{F}, F)\right]. \tag{53}$$

Сшивая решения (53) и (28) в области значений $F_M > F > \hat{F}$, можно вывести соотношение

$$\ln \left[\frac{k^2 F_M}{\tau^2 \hat{F} G_t(\hat{F})} \sqrt{\frac{F_t(1+\hat{F})}{2\pi}} \right] \approx \frac{\tau}{k} \eta_1(\hat{F}, F_M) + 1, \tag{54}$$

которое в рассматриваемом сейчас случае заменяет (41). Подстановка F_M вместо F в неравенстве (52)

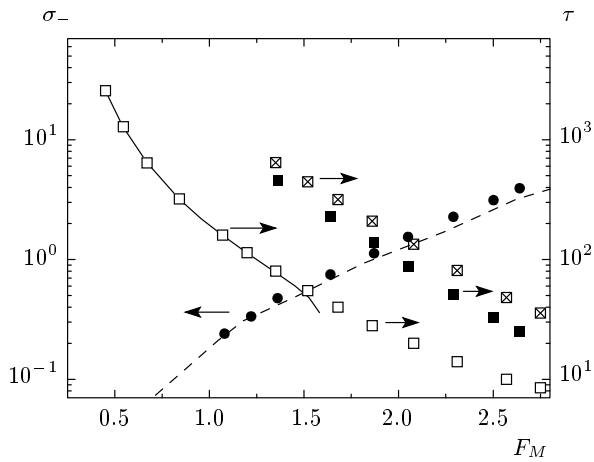


Рис. 5. Взаимосвязь концентрации электронов за фронтом σ_- и постоянной времени τ с максимальной напряженностью поля F_M при $\sigma_+ = 0$, $k = 2$, $F_t = 15 = \tilde{G}_t$. Сплошная линия — расчет по формуле (54), штриховая линия и \square — результаты численного решения уравнений (23), (24), перечеркнутые символы — значения \square , увеличенные в \hat{x}_f/\hat{r}_{cf} раз, темные символы — результаты моделирования стримеров по данным работы [15]

дает условие применимости соотношения (54); в частности, при $F_t = 15 = \tilde{G}_t$ и $k = 2$ оно выполняется, если $\tau > 2kF_t$. При меньших τ туннельная ионизация оказывается существенной и в части области Ω_f , так что решения (27), (28), (53) становятся непригодными (рис. 5) и простое соотношение для вычисления F_M получить не удастся. Однако на структуру волны за фронтом туннельная ионизация не должна оказывать влияния, поэтому формулы (39), (40), (42)–(45) остаются верными. Это подтверждается результатами численного решения: все параметры волны совпадают с точностью $\lesssim 1\%$, если разные механизмы возникновения затравочных носителей заряда перед фронтом обеспечивают равные значения F_M при одной и той же постоянной времени τ . В частности, при наличии однородного фона носителей заряда с концентрацией $\sigma_+ = \sigma_t(\tau)$ максимальное поле оказывается таким же, как и при туннельной ионизации без фона. График функции $\sigma_t(\tau)$ изображен на рис. 6. Он также разделяет плоскость рисунка на области, в которых преобладает туннельная ионизация (ниже кривой $\sigma_t(\tau)$ наличие фона пренебрежимо мало) или фон (выше кривой $\sigma_t(\tau)$ влияние туннельной ионизации пренебрежимо мало) при совместном действии этих двух факторов.

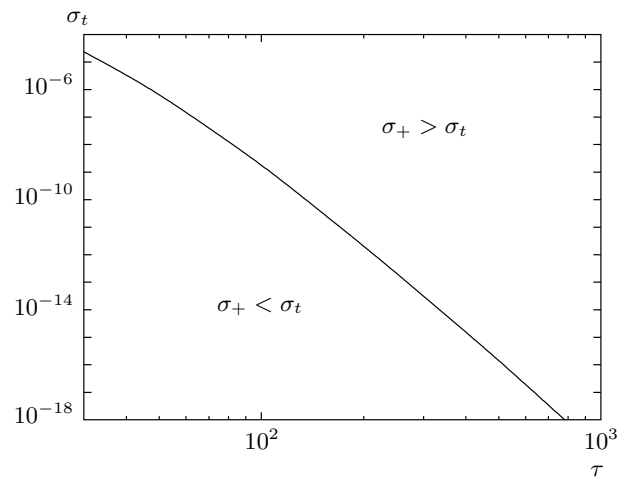


Рис. 6. Зависимость концентрации σ_t фоновых электронов от τ , которая при $k = 2$ обеспечивает те же значения F_M , что и туннельная ионизация с параметрами $F_t = 15 = \tilde{G}_t$

3.4. Экспоненциально-автомодельная ВУИ как асимптотика решения задачи Коши

Описанные выше экспоненциально-автомодельные решения имеют физический смысл, если только они являются асимптотикой (промежуточной) решения некоторой реалистичной задачи Коши. Строгое математическое доказательство такого соответствия весьма нетривиально даже в гораздо более простых случаях (см., например, работы [4, 13]). Поэтому для обоснования содержательности результатов этого раздела мы использовали более простой (хотя и менее убедительный) метод — сравнение результатов численных решений автомодельной краевой задачи (18), (21), (22) и эквивалентной задачи Коши. Оказалось, что во всех рассмотренных выше случаях эти решения при больших ϑ действительно совпадают почти везде, за исключением малой области вблизи начала координат. В этой «неавтомодельной» области решение задачи Коши зависит от способа введения (инъекции) заряда в волну, но ее относительные размеры экспоненциально уменьшаются со временем, в чем также проявляется асимптотический характер экспоненциально-автомодельной ВУИ.

Для иллюстрации сказанного на рис. 7 приведены два распределения напряженности поля в сферической ВУИ, распространяющейся в полупроводнике с фоновой концентрацией $\sigma_+ = 10^{-6}$ при $S = 0$. Одно из них является решением (численным) экспоненциально-автомодельной краевой задачи, а второе

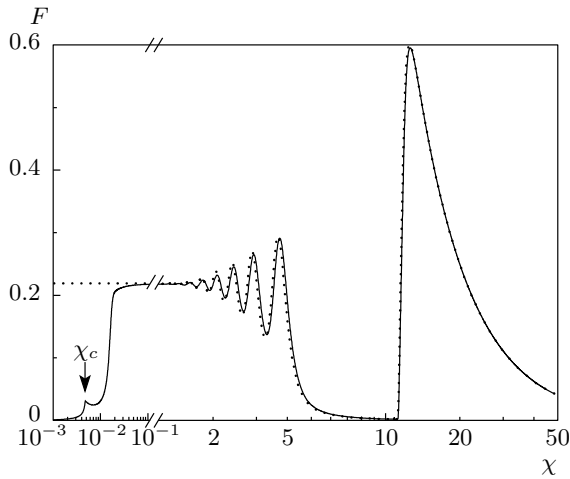


Рис. 7. Распределения напряженности поля $F(\chi)$, полученные путем решения экспоненциально-автомодельной краевой задачи (18), (23), (24) при $\tau = 200$, $k = 2$, $G_{t0} = 0$, $F_s = 0.01$, $\sigma_+ = 10^{-6}$ (точки) и эквивалентной задачи Коши (линия) в момент времени $\vartheta = 8\tau$ при $r_c = 10/\tilde{\alpha}_e$ и $s_0 = = 3 \cdot 10^{-5} \varepsilon \mu \tilde{\alpha}_e^2 \tilde{E}_e^2/q$. Стрелкой указан нормированный радиус действия источника носителей заряда одного знака

получено путем численного решения соответствующей задачи Коши. Зарождение ВУИ и экспоненциальное нарастание ее заряда обеспечивались источником электронов (или дырок), сосредоточенным вблизи начала координат⁷⁾. Для этого слагаемое s в уравнении (1) заменялось на $s'/2$, а ноль в правой части уравнения (2) — на $-s'$, где

$$s' = \begin{cases} s_0 \exp(2\vartheta/\tau), & r < r_c, \\ 0, & r \geq r_c. \end{cases}$$

Как видно, при больших ϑ эти два решения практически совпадают за пределами области диаметром порядка нескольких r_c . Более того, если произведение $s_0 r_c^{k+1}$ остается постоянным, то при $r \gg r_c$ решение задачи Коши вообще не зависит от r_c ; в противном случае оно просто сдвигается вдоль логарифмической оси координат.

4. ВУИ В ОДНОРОДНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Если ВУИ распространяется в однородном внешнем поле F_0 между бесконечно удаленными плоски-

⁷⁾ Таким источником может быть остро сфокусированный пучок электронов, падающий на поверхность полупроводника.

ми электродами, то для выполнения первого из условий (9) необходимо, чтобы это поле было еще и постоянным. Далее будем считать, что ударная ионизация в поле F_0 не скомпенсирована каким-нибудь механизмом рекомбинации. Тогда последнее из условий (10) может быть выполнено только при отсутствии фоновых носителей заряда далеко перед фронтом. Поэтому межэлектродный ток $J = 0$, полный заряд волны $Q = Q_0 = \text{const}$ (здесь Q_0 — заряд начального возмущения, породившего волну, который обычно полагают равным нулю), а в граничных условиях (18) следует использовать значения $F_+ = F_0$ и $\sigma_+ = 0$. В этом случае закон сохранения заряда вырождается в тождество и не может быть использован для вычисления постоянной времени τ , которая определяется величиной F_0 и асимптотикой начального возмущения $n, p(0, \mathbf{r})$, породившего волну.

4.1. Плоские ВУИ

В случае плоской ВУИ уравнения (21), (22) также справедливы. Однако теперь $j_c = 0$, поэтому система (21), (22) является автономной и при $S = 0$ аналитическое решение соответствующей краевой задачи легко получить для произвольных зависимостей $A(F)$ и $V(F)$. Если волна распространяется вдоль оси $x = \hat{x}\psi_0^{-1} \exp(t/t_0)$ в обе стороны от начала координат, то решение можно представить в неявном виде:

$$\tau \ln \left| \frac{\hat{x}}{\hat{x}_f} \right| = \int_{F_f}^F \frac{dF_1}{V(F_1)\eta_0(F_1, F_0)}, \quad (55)$$

$$\sigma = \eta_0(F, F_0),$$

где F_f — произвольная постоянная, удовлетворяющая неравенствам $0 < F_f = F(\hat{x}_f) < F_0$. В первой из формул (55) интеграл расходится при $F \rightarrow F_0$, так что далеко перед фронтом

$$\frac{\sigma}{A(F_0)} = (F_0 - F) = |\hat{x}|^{-\omega_+} =$$

$$= (\tilde{\alpha}_e |x|)^{-\omega_+} \exp\left(\frac{\omega_+ \vartheta}{\tau}\right), \quad (56)$$

где $\omega_+ = \tau V(F_0)A(F_0)$. Как и в предыдущем разделе, выберем такое значение F_f , чтобы при $F < F_f$ ударной ионизацией можно было пренебречь. Тогда при $|\hat{x}| < |\hat{x}_f|$

$$\sigma = \sigma_- = \eta_0(0, F_0), \quad (57)$$

$$\omega_- \ln \left| \frac{\hat{x}}{\hat{x}_f} \right| = \ln \frac{F}{F_f} + \frac{F - F_f}{F_s}. \quad (58)$$

В газах $F_s \gg 1$, поэтому $\omega_- \approx \tau\sigma_-$ и везде за фронтом

$$F = F_f |\hat{x}/\hat{x}_f|^{\omega_-}. \quad (59)$$

В полупроводниках поле уменьшается при $\hat{x} \rightarrow 0$ по тому же закону, но с показателем степени $\omega_- \approx \tau\sigma_-/F_s \gg \tau\sigma_-$ и только при $F \ll F_s$. Кроме того, существует еще широкий интервал значений $F_s \lesssim F < F_f$, для которых

$$F \approx F_f - \tau\sigma_- \ln |\hat{x}_f/\hat{x}|. \quad (60)$$

Поскольку обычно $F_s \ll F_0$, а F_f лишь немного меньше F_0 в силу резкой зависимости $A(F)$, почти все изменение поля приходится именно на этот интервал толщиной

$$\delta_{sc} \approx |\hat{x}_f| [1 - \exp(-F_0/\tau\sigma_-)], \quad (61)$$

где сосредоточен объемный заряд фронта. Сам фронт явно выражен (т. е. $\delta_{sc} \ll |\hat{x}_f|$) при выполнении неравенства $\tau\sigma_- \gg F_0$, которое почти эквивалентно условию (30).

Формула (56) указывает на то, что решение (55) с

$$\tau = \omega/V(F_0)A(F_0) \quad (62)$$

является предельным для решения соответствующей задачи Коши при $\vartheta \rightarrow \infty$, если⁸⁾ начальное возмущение, породившее волну, имеет асимптотику $n, p(0, x) \propto |x|^{-\omega}$ при $|x| \rightarrow \infty$. Это утверждение было доказано аналитически [4, 5] для газов в частном случае $\alpha_h = 0 = \mu_h$, $\alpha_e = \text{const}$ и $\mu_e = \text{const}$. Однако сравнение (55) с численными решениями одномерной задачи Коши показывает, что оно справедливо и при реалистических зависимостях $\alpha_{e,h}(E)$ и $\mu_{e,h}(E)$.

4.2. Стримеры

Сильнолокализованное начальное возмущение (в предельном случае — единичная электронно-дырочная (ионная) пара) в однородном электрическом поле порождает лавину, которая со временем превращается в стример, распространяющийся вдоль поля в обе стороны [1–3]. Многие характеристики таких стримеров, полученные экспериментально [20–22] и

⁸⁾ Вывод работы [9] о степенном ускорении плоской ВУИ, порожденной начальным возмущением с асимптотикой $|x|^{-\omega}$, является ошибочным.

путем численного моделирования [15, 23–26] указывают на экспоненциально-автомодельный характер их эволюции. Особенно показательны в этом отношении результаты работ Куликовского [23] для азота и воздуха и автора [15] для непрямоzonных полупроводников. В газах генерация затравочных электронов перед фронтом осуществляется фотоионизацией среды собственным излучением стримера. Этот процесс является нелокальным, поэтому его учет приводит к тому, что уравнение непрерывности (1) становится интегродифференциальным [27, 28]. Кроме того, интегральное выражение для скорости фотоионизации содержит независимый параметр размерности длины — обратный коэффициент поглощения излучения. Вследствие этого автомодельность уравнения (1) сохраняется только приближенно в ограниченном диапазоне значений радиуса фронта стримера и только при использовании специальной модели фотоионизации (см. Приложение С). Оба эти обстоятельства сильно затрудняют интерпретацию результатов работ [23–26]. Поэтому здесь мы ограничимся анализом результатов моделирования стримеров в непрямоzonных полупроводниках [15], где подобные проблемы не возникают.

Для моделирования стримеров в работе [15] использовалась система уравнений (1)–(3) с учетом туннельной ионизации⁹⁾, предполагалось, что стример аксиально-симметричен, а все кинетические коэффициенты электронов и дырок равны. Основной результат работы [15] состоит в том, что после некоторого «инкубационного периода» наступает основная стадия эволюции стримера в сильном однородном внешнем поле F_0 , во время которой

стример напоминает гантель с коническими грузами (рис. 8); основаниями этих конусов являются фронты стримера, форма которых очень близка к половинкам вытянутых эллипсоидов вращения;

форма стримера не изменяется со временем, а все его пространственные масштабы увеличиваются по экспоненте $\exp(t/t_0)$ с одной и той же постоянной времени t_0 , которая при заданных параметрах полупроводника однозначно определяется напряженностью внешнего поля F_0 (рис. 9);

концентрация σ и напряженность поля \mathbf{F} зависят только от одной автомодельной векторной координаты $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\psi_0 \exp(-t/t_0)$, а распределения плотности объемного заряда и потенциала можно соот-

⁹⁾ Аналогичные результаты получаются и без учета туннельной ионизации, но при наличии однородного фона носителей заряда перед фронтом.

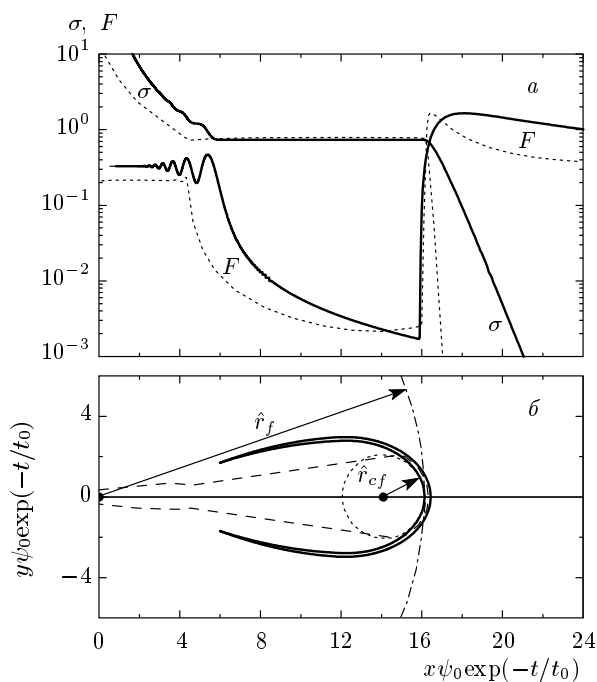


Рис. 8. а) Распределения напряженности поля F и концентрации электронов σ в сферической ВУИ при $\tau = 43$ (сплошные кривые) и вдоль оси стримера при $\tau = 230$ (пунктирные) на стадии экспоненциально-автомодельной эволюции во внешнем поле $F_0 = 0.285$ по данным работы [15]. б) Линии равных концентрации электронов $\sigma = \sigma_-/2$ (штриховые кривые) и плотности объемного заряда $\rho = \rho_M/4$ (сплошные) в стримере: \hat{r}_f и \hat{r}_{cf} — соответственно нормированные радиус фронта сферической ВУИ и радиус кривизны фронта стримера. Параметры j_{c0} и τ сферической ВУИ подобраны так, чтобы совпали положения фронтов и максимальные напряженности поля

ответственно представить в виде $\rho(\hat{\mathbf{r}})\phi_{\rho 0} \exp(-t/t_0)$ и $\Phi(\hat{\mathbf{r}})\phi_{\varphi 0} \exp(t/t_0)$.

Исключением является область вблизи начала координат (т. е. вблизи точки старта лавины, породившей стример), где концентрация явно зависит от времени при постоянных малых значениях $\hat{\mathbf{r}}$, а диаметр «ручки гантели» увеличивается очень медленно (пропорционально \sqrt{Dt}). Относительные размеры этой «неавтомодельной» области экспоненциально уменьшаются с ростом t , а абсолютные размеры близки к размерам стримера в конце инкубационного периода, который, по сути дела, является зародышем экспоненциально-автомодельного стримера. В начале координат $\sigma \propto \exp(2t/t_0)$. Этот рост обеспечивает протекание через плоскость $x = 0$ симметрии стримера тока проводимости $J_{C0} = dQ_f/dt$, необхо-

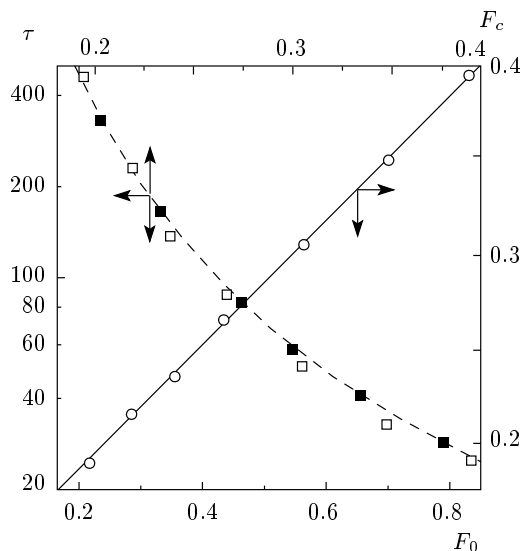


Рис. 9. Зависимости $F_c(F_0)$, $\tau(F_c)$, $\tau(F_0)$ для стримеров в однородном поле [15] (светлые символы) и $\tau(F_c)$ для сферических ВУИ с учетом туннельной ионизации при $\sigma_+ = 0$ (темные символы): сплошная линия — аппроксимация (64), штриховая — расчет по формуле (37) или (65)

димое для увеличения заряда каждой из половинок стримера по закону $Q_f(t) \propto \exp(2t/t_0)$.

Эти результаты были получены в работе [15] для стримеров, зародышем которых является единичная электронно-дырочная пара. Однако дополнительные расчеты показали, что размеры, форма и амплитуда зародыша влияют на характеристики стримеров только на начальной стадии их эволюции¹⁰⁾. Длительность этой стадии также зависит от параметров зародыша, но после того, как фронты проходят расстояния, много большие размеров зародыша, образуются два идентичных стримера, распространяющиеся в противоположных направлениях точно так, как описано выше. Важно отметить, что в соответствии с выводами разд. 2, разнонаправленные стримеры становятся идентичными при больших t , даже если кинетические коэффициенты электронов и дырок (ионов) существенно различаются (как, например, в Si, SiC и, конечно, в газах).

¹⁰⁾ Сказанное справедливо при условии сильной локализации зародыша (т. е. когда за пределами «границы» зародыша возмущение отсутствует или затухает быстрее простой экспоненты). Если же оно имеет асимптотику $n, p(0, \mathbf{r}) \propto |\mathbf{r}|^{-\omega}$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, то в качественном отношении структура и характер эволюции стримера не изменяются, но показатель степени ω определяет величину τ точно так, как и в случае плоской волны: при всех больших t с точностью до нескольких процентов выполняется соотношение (62).

Таким образом, при больших t и \mathbf{r} эволюция стримера в однородном поле действительно обладает всеми признаками экспоненциальной автомодельности, описанной в разд. 2. Форма стримера и его внутренняя структура должны описываться аксиально-симметричным решением¹¹⁾ нелинейной краевой задачи на собственные значения (11)–(13), (18) при $F_+ = F_0$ и $\sigma_+ = 0$, спектр которой состоит из одной точки, а само решение является промежуточной асимптотической решения соответствующей задачи Коши. К сожалению, решить эту задачу нам пока не удалось даже численными методами, однако многие свойства стримера можно описать с помощью гораздо более простой модели.

Действительно, каждая половинка стримера состоит из тех же четырех областей, что и сферическая ВУИ, так что продольные структуры этих двух объектов в качественном отношении совпадают (см. рис. 8). Отвлекаясь от деталей поперечной структуры стримеров можно даже сказать, что стример в однородном электрическом поле представляет собой просто коническую область с телесным углом при вершине порядка 0.1π , «вырезанную» из автомодельной сферической ВУИ. Однако эволюция такого стримера внутри плоского конденсатора обладает рядом особенностей по сравнению со сферической ВУИ.

Главное качественное отличие состоит в том, что необходимое для автомодельного распространения условие экспоненциального роста заряда фронта обеспечивается не за счет внешнего управления¹²⁾, а автоматически в процессе эволюции стримера как самоорганизующегося объекта. Энергия, необходимая для рождения равного количества электронов и дырок (ионов), черпается из внешнего однородного поля в конденсаторе, заряженном до начала стримерного разряда. При этом полный заряд двунаправленного стримера остается равным нулю, поэтому в пределе $d \rightarrow \infty$ межэлектродный ток $J \rightarrow 0$, но при конечных d он экспоненциально растет с инкрементом $3/t_0$ [15, 23], если разность потенциалов между электродами остается постоянной. Этот

¹¹⁾ Для того чтобы это решение существовало, необходимо «запретить» туннельную ионизацию в относительно слабых полях $F \leq F_0$. Такая формальная процедура предотвращает неограниченное нарастание σ за пределами стримера, где среднее расстояние между носителями заряда, порожденными туннельной ионизацией, больше всех характерных размеров задачи, и учет их лавинного размножения в рамках континуального приближения не имеет физического смысла.

¹²⁾ На практике добиться необходимого экспоненциального роста тока во внешней цепи очень трудно, так как значению $\tau = 1$ соответствует постоянная времени t_0 порядка 0.1–10 пс.

нетривиальный результат следует непосредственно из теоремы Сато [29] и условия экспоненциального роста всех пространственных масштабов стримера с инкрементом $1/t_0$ [15].

Количественные различия обусловлены тем, что стример является сильно вытянутым образованием: согласно работе [15], отношение положения \hat{x}_f фронта стримера к его радиусу кривизны \hat{r}_{cf} изменяется от 4.5 до 8 в зависимости от величины F_0 , тогда как в случае сферической ВУИ $\hat{x}_f = \hat{r}_{cf}$. Вследствие этого введенная в разд. 3.3 функция $f(F)$ непосредственно перед фронтом стримера приближенно равна

$$f(F) \approx -2F\hat{x}_f/\hat{r}_{cf}, \quad (63)$$

т. е. с ростом \hat{x} поле уменьшается значительно быстрее (см. рис. 8). Естественно, это должно приводить к замедлению распространения стримера (т. е. к увеличению τ) по сравнению со сферической ВУИ при одинаковых значениях F_M . Для оценки величины этого замедления достаточно подставить (63) в формулу (51) (которая в области Ω_+ верна и на оси стримера), в результате чего τ в уравнении (54) заменится на $\tau\hat{r}_{cf}/\hat{x}_f$, т. е. при заданном F_M постоянная времени ускорения стримера должна увеличиться примерно в \hat{x}_f/\hat{r}_{cf} раз. Эта оценка подтверждается данными, приведенными выше на рис. 5; оказалось, что она приемлема также и за пределами применимости (54), т. е. в области сильных полей. Вследствие этого «эффекта формы» параметры стримера (\hat{x}_f , F_m , χ_-), зависящие одновременно от τ и F_M , можно оценить в рамках модели сферической ВУИ лишь по порядку величины. Гораздо меньшую погрешность (см. рис. 5) дает формула (42), так как при заданной величине F_M концентрация электронов за фронтом зависит от τ очень слабо. А наибольшую точность обеспечивает формула (37), вообще не содержащая F_M . Так как зависимость $F_c(F_0)$ для стримера хорошо аппроксимируется линейной функцией

$$F_c = F_{c0} + a_c F_0 \quad (64)$$

($F_{c0} = 0.12$, $a_c = 0.33$ при использованных в работе [15] параметрах полупроводника), а $V(F_c) \approx 1$, из (37) следует эмпирическое соотношение

$$\tau = 2 \exp[1/(F_{c0} + a_c F_0)], \quad (65)$$

которое подтверждается результатами численных расчетов [15], приведенными на рис. 9.

Таким образом, сферическая экспоненциально-автомодельная ВУИ во многих отношениях является наиболее подходящей моделью стримера в

однородном поле¹³⁾. Она совершенно естественным образом и без привлечения каких бы то ни было дополнительных соображений правильно описывает характер эволюции стримера, его продольную структуру и дает возможность оценить или даже весьма точно рассчитать взаимосвязи между основными параметрами, характеризующими эту структуру. Однако и она не позволяет ответить на главные вопросы: почему фронт стримера имеет форму вытянутого эллипсоида вращения и как должны быть связаны заряд и эксцентриситет этого эллипсоида, максимальное поле на фронте и постоянная времени τ с напряженностью внешнего поля и параметрами среды. Решение этой сложной задачи является в настоящее время наиболее актуальной проблемой теории стримерного пробоя.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Степенная автомодельность уравнений непрерывности и Пуассона

Систему уравнений непрерывности и Пуассона можно привести к автомодельному виду и не ограничиваясь условиями (9). Однако для этого необходимо, чтобы подвижности $\mu_{e,h}$ были постоянными и кроме (8) выполнялись по крайней мере еще два равенства

$$\phi_\rho = c_3 \phi_\sigma, \quad \dot{\psi} \phi_\sigma = a \psi \dot{\phi}_\sigma. \quad (\text{A.1})$$

Только в этом случае первые и третьи слагаемые в уравнениях (5), (6) оказываются постоянными. Решения уравнений (8) и (A.1) имеют вид

$$\phi_\rho = \frac{\phi_{\rho 0}}{c_t + t/t_1}, \quad \phi_\sigma = \frac{\phi_{\sigma 0}}{c_t + t/t_1}, \quad (\text{A.2})$$

$$\psi = \frac{\psi_0}{(c_t + t/t_1)^a}, \quad \phi_F = \frac{\phi_{F0}}{(c_t + t/t_1)^{1-a}}, \quad (\text{A.3})$$

который обычно называется (просто) автомодельным, если постоянная интегрирования $c_t = 0$ [11, 12]. В некоторых случаях показатель степени a однозначно определяется размерностью задачи (т. е. числом k) и характером зависимости тока J через волну от времени. Если волна обладает цилиндрической или сферической симметрией, то из выражений (19), (20) следует, что для поддержания автомодельности

¹³⁾ Недостаточность моделей стримера в однородном поле, предложенных ранее [1, 14, 30], кратко обсуждена в работе [15].

эволюции полный заряд и ток должны изменяться по степенным законам:

$$Q \propto (c_t + t/t_1)^\nu, \quad J \propto \nu (c_t + t/t_1)^{\nu-1}, \quad (\text{A.4})$$

поэтому

$$a = (\nu + 1)/(k + 1). \quad (\text{A.5})$$

Полный заряд плоской волны, распространяющейся в однородном поле между бесконечно удаленными электродами, не изменяется со временем (и обычно равен нулю), а полный ток равен току смещения далеко перед фронтом, т. е. $J \propto \dot{\phi}_F$. Отсюда также следуют условие автомодельности (A.4) и формула (A.5), но при $k = 0$.

Если можно пренебречь ионизацией, рекомбинацией и диффузией, то автомодельность уравнений сохраняется при любых $\nu > -1$. В частном случае $\nu = 0$ и $J = 0$ получаются решения¹⁴⁾, которые описывают распыление электронно-дырочного (ионного) пакета только за счет дрейфа в поле его собственного заряда, величина которого определяется начальными условиями и не зависит от t .

Рекомбинация и ударная ионизация не нарушают автомодельность уравнений, если $s \propto np$, а $\alpha_{e,h} \propto E^h$. Однако при учете ударной ионизации возникает дополнительное ограничение на показатель степени ν , который должен быть равен

$$\nu = (kh - 1)/(h + 1). \quad (\text{A.6})$$

Если начальные условия таковы, что в дрейфовом приближении на границе пакета возникает скачок концентрации¹⁵⁾, то пренебрегать диффузией нельзя. В этом случае для сохранения автомодельности уравнений непрерывности требуется еще выполнение условия $\psi^3 = c_4 \dot{\psi}$, обеспечивающего постоянство четвертых слагаемых в уравнениях (5), (6). Из него следует необходимое равенство $a = 1/2$, которое может быть выполнено одновременно с (A.5), (A.6) только при $\nu = (k - 1)/2$ и $h = 1$.

¹⁴⁾ Именно они были получены в работах [8, 9] для описания поздней стадии эволюции ВУИ без тока, во время которой поле ослабевает настолько, что ударная ионизация становится пренебрежимо малой.

¹⁵⁾ Как, в частности, на фронте ВУИ, порожденной сильно локализованным начальным возмущением [4–6]. В этом случае диффузия не только размывает фронт и увеличивает его скорость [4, 6, 7], но может приводить к качественному изменению характера распространения волны [6].

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Решение линеаризованных уравнений (23), (24) в области Ω_c

В области Ω_c удобно ввести новые переменную $\xi = -\beta\chi^{-k}$ и функции

$$\mathfrak{S} = 1 - V_c \sigma \chi^k, \quad \mathfrak{F} = \frac{k}{\tau} \beta (F - F_c),$$

используя которые можно при $S = 0$ привести систему уравнений (23), (24) к виду

$$\xi \frac{d\mathfrak{S}}{d\xi} = (\mathfrak{S} - 1) \left(\frac{VA}{V_c A_c} - 1 \right), \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d\mathfrak{F}}{d\xi} = \frac{V}{V_c} - 1 - \frac{V}{V_c} \mathfrak{S}, \quad (\text{B.2})$$

где $V_c = V(F_c)$, $A_c = A(F_c)$, F_c — корень уравнения $k = \tau V_c A_c$,

$$\beta = \frac{\tau}{k} \left. \frac{d \ln V}{dF} \right|_{F=F_c} = \frac{\tau F_s}{k F_c (F_c + F_s)}.$$

При малых \mathfrak{S} и \mathfrak{F} правые части уравнений (B.1), (B.2) могут быть линеаризованы, в результате чего получается

$$\xi \frac{d\mathfrak{S}}{d\xi} = -\gamma \mathfrak{F}, \quad (\text{B.1}')$$

$$\frac{d\mathfrak{F}}{d\xi} = \mathfrak{F} - \mathfrak{S}, \quad (\text{B.2}')$$

где

$$\gamma = 1 + \left. \frac{d \ln A}{d \ln V} \right|_{F=F_c} = 1 + F_c^{-1} + F_s^{-1}.$$

Последние равенства в формулах для β и γ справедливы при использовании аппроксимаций (15).

Далее простые преобразования приводят к двум независимым уравнениям Куммера для \mathfrak{S} и \mathfrak{F} , действительные решения которых можно представить в виде [31]

$$\mathfrak{S} = C \Phi(\gamma, 1; -\beta\chi^{-k}), \quad (\text{B.3})$$

$$\mathfrak{F} = C \beta \chi^{-k} \Phi(1 + \gamma, 2; -\beta\chi^{-k}), \quad (\text{B.4})$$

где $\Phi(a, b; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Постоянная интегрирования C определяется граничными условиями (18) и поэтому может

быть найдена только путем полного решения нелинейной краевой задачи.

При $\chi \rightarrow 0$ справедливы асимптотические разложения [31]

$$\mathfrak{S} \approx \mathfrak{F} \approx C \chi^{k\gamma} / \Gamma(1 - \gamma),$$

которые доказывают, что решение (36) является предельным. Используя (B.4) и известные [31] свойства нулей функции $\Phi(a, b; z)$, можно показать, что минимальный положительный корень χ_{min} уравнения $\mathfrak{F}(\chi) = 0$ равен

$$\chi_{min} \approx [4\pi^{-2} \gamma \beta (\gamma - 3/4)^{-2}]^{1/k}.$$

Относительная погрешность этой формулы, примерно равная $4/\gamma$, пренебрежимо мала только в полупроводниках, где $\gamma \approx 1/F_s \gg 1$. Так как в этом случае $\beta \approx \tau F_s / k F_c^2$ и $\chi_- \approx \sigma_-^{1/k}$ (см. формулу (45)), то условие $\chi_{min} > \chi_-$ отсутствия колебаний функции $\mathfrak{F}(\chi)$ в области Ω_c принимает вид неравенства (38). Если учесть рекомбинацию, как это сделано в разд. 3.2, то для параметра γ получается формула

$$\gamma = 1 + (F_c^{-1} + F_s^{-1}) (1 + \tau/k\tau_r).$$

Легко видеть, что при малых τ_r условие $\chi_{min} < \chi_-$ появления колебаний поля заметно облегчается и они могут возникнуть даже при $F_s \gtrsim 1$ (см. рис. 6).

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Возможность существования экспоненциально-автомодельных ВУИ в газах при наличии фотоионизации

В газах основным механизмом рождения затраточных носителей заряда является фотоионизация среды излучением из-за фронта волны [27, 28]. Скорость фотоионизации равна¹⁶⁾

$$g_{ph}(t, \mathbf{r}) = p_i \int \frac{K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} I(t, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \quad (\text{C.1})$$

где интегрирование проводится по всему объему,

$$K(r) = \int_0^\infty \varkappa(\nu) \Psi(\nu) \exp[-\varkappa(\nu)r] d\nu,$$

¹⁶⁾ Формула (C.1) верна, если функции $\Psi(\nu)$ и $\varkappa(\nu)$ одинаковы во всем объеме. Для газов это допущение обычно предполагается выполненным [27, 28]. Однако для полупроводников оно заведомо не оправдано хотя бы потому, что при актуальных значениях $E \sim 1$ МВ/см коэффициент поглощения рекомбинационного излучения сильно зависит от E из-за эффекта Келдыша – Франца.

$I(t, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1$ — полное число квантов излучения, испускаемых из элемента объема $d\mathbf{r}_1$ в единицу времени, $\Psi(\nu)$ — нормированный на единицу спектр излучения, $\varkappa(\nu)$ — коэффициент поглощения квантов с частотой ν , а p_i — доля поглощенных квантов, вызывающих ионизацию. Обычно полагают [27, 28], что в газах

$$I(t, \mathbf{r}) \propto n(t, \mathbf{r}) \alpha_e [E(t, \mathbf{r})] \propto \sigma(\hat{\mathbf{r}}) A[F(\hat{\mathbf{r}})]. \quad (\text{C.2})$$

Тогда фотоионизация не нарушает экспоненциальной автомодельности, если

$$K(r) \propto r^{-1}, \quad (\text{C.3})$$

и после замены переменных \mathbf{r} на $\hat{\mathbf{r}}/\psi(t)$ все зависящие от времени множители $\psi(t)$ в правой части выражения (C.1) сокращаются. Разумеется, соотношение (C.3) не выполняется точно ни при каких условиях, однако по крайней мере в одном специальном случае оно может быть выполнено приближенно. Действительно, пусть ширина спектра излучения $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ и внутри этой полосы между функциями $\Psi(\nu)$ и $\varkappa(\nu)$ выполняется соотношение $d\varkappa/d\nu = \varkappa\Psi \ln(\varkappa_2/\varkappa_1)$, где $\varkappa_{1,2} = \varkappa(\nu_{1,2})$. Тогда

$$\varkappa(\nu) = \varkappa_1 \exp\left(\ln \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \int_{\nu_1}^{\nu} \Psi d\nu\right), \quad (\text{C.4})$$

$$K(r) = \frac{\exp(-\varkappa_1 r) - \exp(-\varkappa_2 r)}{r \ln(\varkappa_2/\varkappa_1)}. \quad (\text{C.5})$$

Если отношение \varkappa_2/\varkappa_1 очень велико, то существует интервал значений $\varkappa_2^{-1} \ll r \ll \varkappa_1^{-1}$, внутри которого $K(r)$ не содержит параметров $\varkappa_{1,2}^{-1}$ размерности длины и выражение (C.5) приближенно совпадает с (C.3). Влияние фотоионизации на баланс носителей заряда за фронтом ничтожен, но является определяющим на расстоянии порядка r_f перед фронтом [14], где $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \sim r_f$, так как источник излучения сосредоточен в узкой области на фронте (см. (C.2)). Поэтому при значениях r_f , удовлетворяющих неравенствам

$$\varkappa_2^{-1} \ll r_f \ll \varkappa_1^{-1}, \quad (\text{C.6})$$

фотоионизация приближенно описывается слагаемым

$$S(\hat{\mathbf{r}}) \propto g_{ph} \propto \int \frac{\sigma(\hat{\mathbf{r}}_1) A[F(\hat{\mathbf{r}}_1)]}{(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_1)^3} d\hat{\mathbf{r}}_1$$

в той области, где она важна, и ВУИ должна распространяться почти экспоненциально-автомодельно.

Этот результат не следует расценивать лишь как некий математический курьез: именно на формулах (C.4), (C.5) (полученных в частном случае $\Psi = 1/\Delta\nu$) при $\varkappa_2/\varkappa_1 \approx 57$ основана классическая модель прямой фотоионизации в азотно-кислородных смесях [32], которая использовалась в большинстве работ по численному моделированию стримеров. Это относится и к работам [23, 24], авторы которых моделировали стример в диапазоне значений r_f , удовлетворяющих неравенствам (C.6). Необходимо, однако, отметить, что в последней из работ [23] был предложен иной механизм экспоненциального ускорения и расширения стримера. Согласно работе [23], фотоионизация преобладает перед фронтом стримера только на начальной стадии эволюции. В это время она порождает затравочные электроны, концентрация которых уменьшается с расстоянием примерно по степенному закону и в дальнейшем увеличивается со временем главным образом за счет ударной ионизации. Иными словами, при больших t стример развивается как бы из «начального возмущения» с асимптотикой $n, p(0, \mathbf{r}) \propto |\mathbf{r}|^{-\omega}$ без заметного воздействия фотоионизации и поэтому должен экспоненциально ускоряться и расширяться. Это последнее рассуждение само по себе оказалось верным (см. сноску 10), однако в работе [23] не было приведено убедительного подтверждения степенной асимптотики «начального возмущения». Кроме того, согласно [23] темп фотоионизации перед фронтом был лишь в два-три раза меньше темпа ударной ионизации, вследствие чего полученная в [23] скорость распространения стримера оказалась заметно больше, чем это предсказывает формула (62). Поэтому объяснение характера эволюции стримера, предложенное в работе [23], представляется нам недостаточно убедительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Д. Лозанский, О. Б. Фирсов, *Теория искры*, Атомиздат, Москва (1975).
2. Ю. Д. Королев, Г. А. Месяц, *Физика импульсного пробоя газов*, Наука, Москва (1991).
3. Э. М. Базелян, Ю. П. Райзер, *Искровой разряд*, Изд-во МФТИ, Москва (1997).
4. А. Н. Лагарьков, И. М. Руткевич, *Волны электрического пробоя в ограниченной плазме*, Наука, Москва (1989).
5. И. М. Руткевич, *Физика плазмы* **15**, 844 (1989).

6. U. Ebert, W. Van Saarloos, and C. Caroli, Phys. Rev. Lett. **77**, 4178 (1996); Phys. Rev. E **55**, 1530 (1997).
7. А. С. Кюрегян, ФТП **41**, 761 (2007); Письма в ЖЭТФ **86**, 360 (2007).
8. M. Arrayas, M. A. Fontelos, and J. L. Trueba, Phys. Rev. E **71**, 037401 (2005).
9. M. Arrayas, M. A. Fontelos, and J. L. Trueba, J. Phys. A **39**, 7561 (2006).
10. A. S. Kuregyan, Phys. Rev. Lett. **101**, 174505 (2008).
11. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов, *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*, Физматлит, Москва (2005).
12. Г. И. Баренблатт, *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика*, Гидрометеиздат, Ленинград (1982).
13. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов, Бюлл. МГУ. Математика и механика **1**, 1 (1937).
14. М. И. Дьяконов, В. Ю. Качоровский, ЖЭТФ **95**, 1850 (1989).
15. А. С. Кюрегян, ЖЭТФ **136**, 962 (2009).
16. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, Москва (1976).
17. Н. Г. Басов, А. Г. Молчанов, А. С. Насибов и др., ЖЭТФ **70**, 1751 (1976).
18. P. Rodin, U. Ebert, W. Hundsdorfer et al., J. Appl. Phys. **92**, 958 (2002).
19. J. J. Liou, Sol. St. Electron. **33**, 971 (1990).
20. K. H. Wagner, Z. Phys. **189**, 465 (1966).
21. В. А. Давиденко, Б. А. Долгошеин, С. В. Сомов, ЖЭТФ **55**, 435 (1968).
22. Н. С. Руденко, В. И. Сметанин, ЖЭТФ **61**, 146 (1971).
23. A. A. Kulikovskiy, J. Phys. D **28**, 2483 (1995); **30**, 441, 1515 (1997).
24. N. Yu. Babaeva and G. V. Naidis, IEEE Trans. Plasma Sci. **25**, 375 (1997).
25. A. Luque, U. Ebert, C. Montijn et al., Appl. Phys. Lett. **90**, 081501 (2007).
26. A. Luque, V. Ratushnaya, and U. Ebert, J. Phys. D **41**, 234005 (2008).
27. P. Segur, A. Bourdon, E. Marode et al., Plasma Sources Sci. Technol. **15**, 648 (2006).
28. A. Bourdon, V. P. Pasko, N. Y. Liuet et al., Plasma Sources Sci. Technol. **16**, 656 (2007).
29. R. Morrow and N. Sato, J. Phys. D **32**, L20 (1999).
30. Э. Д. Лозанский, О. Б. Фирсов, ЖЭТФ **56**, 670 (1969); E. D. Lozanskii and O. B. Firsov, J. Phys. D **6**, 976 (1973).
31. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, Москва (1973).
32. Н. Б. Железняк, А. Х. Мнацаканян, С. В. Сизых, ТВТ **20**, 423 (1982).