

# АНОМАЛЬНАЯ ДИФFUЗИЯ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ДЫХНЕ

*О. А. Дворецкая, П. С. Кондратенко\*, Л. В. Матвеев*

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук  
115191, Москва, Россия*

*Московский физико-технический институт  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 10 июля 2009 г.

Исследуется перенос примеси в обобщенной модели Дыхне, отличающейся от простой модели Дыхне наличием адвекции в сильнопроницаемой среде. Проанализированы режимы переноса и структура хвостов концентрации в сильнопроницаемой среде. Установлено, что среди режимов переноса имеются аномальные — субдиффузия и квазидиффузия. Перенос в продольном и поперечном направлениях происходит по-разному. Смена режимов переноса во времени приводит к многоступенчатой структуре асимптотик концентрации на далеких расстояниях. Проведена аналогия между рассмотренными задачами и переносом примеси в гребешковых структурах.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия аномальная диффузия является предметом интенсивных исследований [1–6] и темой многих обзоров, наиболее популярными из которых являются работы [7, 8]. Одним из факторов, способных привести к аномальным режимам переноса примеси, является резкий контраст в распределении характеристик среды (неоднородность среды). Мы рассмотрим простой, но в то же время интересный пример переноса в неоднородной резкоконтрастной среде — обобщенную модель Дыхне.

В простой модели Дыхне (впервые исследованной в работе [9]) рассматривается перенос примеси в системе, состоящей из сильнопроницаемой среды, ограниченной в одном либо двух измерениях, и слабопроницаемой среды, заполняющей остальное пространство. В качестве механизма переноса принята классическая диффузия. В работе [9] были найдены характерные режимы переноса и показано, что имеет место смена режимов во времени. Детальное исследование пространственно-временных характеристик концентрации примеси в простой модели Дыхне проведено в работе [10]. Отличие обобщенной модели Дыхне — предмета исследования настоящей

работы — от простой модели из работ [9, 10] заключается в том, что наряду с диффузией в сильнопроницаемой среде в качестве механизма переноса рассматривается адвекция. Как мы увидим далее, учет адвекции приводит к новым, во многом нетривиальным, закономерностям переноса.

Цель настоящей работы — проанализировать режимы переноса и асимптотики концентрации на больших расстояниях в обобщенной модели Дыхне для двух различных конфигураций сильнопроницаемой среды.

В следующем разделе изложена постановка задачи и получены основные соотношения. Вспомогательные задачи решены в разд. 3. В разд. 4 исследуется перенос в обобщенной модели Дыхне. Краткие выводы приведены в заключительном разделе.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Будем рассматривать перенос примесей в неоднородной резкоконтрастной среде. Контрастная среда предполагает наличие сильнопроницаемой среды (I) с коэффициентом диффузии  $D$  и слабопроницаемой среды (II) с коэффициентом  $d$ , так что  $D \gg d$ . Будем считать, что перенос примеси в сильнопроницаемой

\*E-mail: kondrat@ibrae.ac.ru

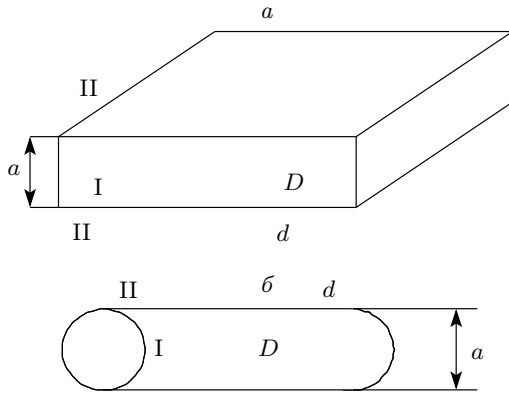


Рис. 1. Геометрия задачи в случаях плоскопараллельного слоя (а), прямого цилиндра (б)

среде происходит за счет адвекции и диффузии в соответствии с уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla n = D \Delta n, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  — скорость адвекции, а  $n$  — распределение концентрации частиц примеси. Далее частицы, локализованные в сильнопроницаемой среде, будем называть активными.

Распределение концентрации частиц в слабопроницаемой среде обозначим как  $c$ . Положим, что перенос примеси в этой среде происходит только за счет диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = d \Delta c. \quad (2)$$

Как обычно, граничные условия заключаются в непрерывности концентрации и нормальной компоненты плотности потока частиц.

Сильнопроницаемая среда ограничена в  $l$  измерениях. Рассмотрим два случая:

- 1)  $l = 1$  — случай плоскопараллельного слоя толщиной  $a$  (рис. 1а);
- 2)  $l = 2$  — случай прямого цилиндра (необязательно круглого сечения) с площадью сечения цилиндра  $S \sim a^2$  (рис. 1б).

Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  частицы сосредоточены в среде I и занимают объем  $\sigma_0 < a$ . Начальное распределение обозначим  $n^{(0)}(\mathbf{r})$ . Начало координат выберем внутри объема  $\sigma_0$ . Поведение концентрации  $n(\mathbf{r}, t)$  будем рассматривать на временах  $t \gg t_0$ , где  $t_0 = a^2/4D$ . Тогда распределение активных частиц будет однородным по  $l$  направлениям, вдоль которых ограничена среда I.

Проинтегрировав уравнение (1) по  $l$  координатам и выполнив преобразование Фурье по осталь-

ным  $3 - l$  координатам и преобразованием Лапласа по времени, получим

$$(Dk^2 + i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} + p) n_{p\mathbf{k}} + \frac{q_{p\mathbf{k}}}{S_l} = \frac{N_0}{S_l}. \quad (3)$$

Здесь

$$n_{p\mathbf{k}} = \int_0^\infty dt \int d^{3-l} \rho \exp(-pt - i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}) n(\mathbf{r}, t),$$

$$S_1 = a, \quad S_2 = S,$$

$q_{p\mathbf{k}}$  — образ Фурье–Лапласа плотности потока частиц через границу, отнесенного к единице ее площади для  $l = 1$  и к единице длины для  $l = 2$ ;  $\boldsymbol{\rho}$  —  $(3 - l)$ -мерный радиус-вектор,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор;  $N_0 = N(0)$ , где  $N(t)$  — полное число активных частиц.

Выражение для потока  $q_{p\mathbf{k}}$  получим, решив уравнение (2) с учетом граничных условий:

$$q_{p\mathbf{k}} = S_l M(p, \mathbf{k}) n_{p\mathbf{k}}. \quad (4)$$

Вид функции  $M(p, \mathbf{k})$  зависит от конфигурации среды и для каждого случая будет установлен ниже.

Подставляя (4) в (3), приходим к общему выражению для концентрации активных частиц:

$$n(\boldsymbol{\rho}, t) = \frac{1}{S_l} \int_{-\infty}^\infty d^3 r' G(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', t) \bar{n}^{(0)}(\mathbf{r}'), \quad (5)$$

где  $\bar{n}^{(0)}(\mathbf{r})$  — начальное распределение, усредненное по  $S_l$ , и  $G(\boldsymbol{\rho}, t)$  — функция Грина:

$$G(\boldsymbol{\rho}, t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d^{3-l} \mathbf{k}}{(2\pi)^{3-l}} \times \\ \times \frac{1}{Dk^2 + i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} + p + M(p, \mathbf{k})} \times \\ \times \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} + pt), \quad \text{Re } b > 0. \quad (6)$$

Заметим, что в представлении Фурье–Лапласа уравнение (2) имеет вид

$$\left( p + dk^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) c_{p\mathbf{k}}(y) = 0.$$

Отсюда следует, что определенная соотношением (4) функция  $M(p, \mathbf{k})$  зависит от своих аргументов следующим образом:

$$M(p, \mathbf{k}) = M(p + dk^2).$$

Поэтому в выражении (6) удобно сделать замену переменной интегрирования:  $p \rightarrow p' = p + dk^2$ . Тогда функция Грина в представлении Фурье–Лапласа приобретает вид (ниже мы опускаем штрих над  $p$ )

$$G_{p\mathbf{k}} = G'_{p\mathbf{k}} \exp(-dk^2t), \quad (7)$$

где

$$G'_{p\mathbf{k}} = (Dk^2 + i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} + p + M(p))^{-1}. \quad (8)$$

Здесь учтено, что  $D - d \approx D$ .

Используя свойства свертки, находим

$$G(\boldsymbol{\rho}, t) = \left( \frac{1}{4\pi dt} \right)^{(3-l)/2} \times \int_{-\infty}^{\infty} d^{(3-l)} \boldsymbol{\rho}' \exp \left( -\frac{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{4dt} \right) G'(\boldsymbol{\rho}', t). \quad (9)$$

Здесь функция  $G'(\boldsymbol{\rho}, t)$  дается обратным преобразованием Фурье–Лапласа функции  $G'_{p\mathbf{k}}$ , определенной выражением (8). Вычислению функции  $G'(\boldsymbol{\rho}, t)$  посвящен разд. 3.

Режим переноса определяют две характеристики: дрейфовый снос  $\mathbf{X}$  и среднеквадратичная дисперсия  $\sigma(t)$ :

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N(t)} \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\rho} n(\boldsymbol{\rho}, t) \boldsymbol{\rho}, \quad (10)$$

$$(\sigma(t))^2 = \frac{1}{N(t)} \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\rho} n(\boldsymbol{\rho}, t) (\boldsymbol{\rho} - \langle \boldsymbol{\rho} \rangle)^2.$$

Далее будем рассматривать перенос примеси на временах, когда  $\sigma(t) \gg \sigma_0$ . Поэтому согласно уравнению (5) для концентрации активных частиц справедливо следующее выражение:

$$n(\boldsymbol{\rho}, t) \approx \frac{N_0}{S_l} G(\boldsymbol{\rho}, t). \quad (11)$$

Полное число активных частиц выражается через нулевую фурье-гармонику функции Грина:

$$N(t) = N_0 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} G_{p\mathbf{k}}|_{\mathbf{k}=0}. \quad (12)$$

### 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Сделанная выше при выводе выражения (9) замена  $p \rightarrow p' = p + dk^2$  фактически сводит задачу определения  $M$  к одномерной (исключением зависимо-

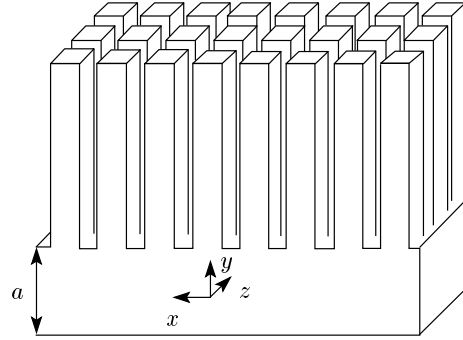


Рис. 2. Квазидвумерная гребешковая структура

сти от  $(3-l)$  координат, вдоль которых сильнопроницаемая среда неограниченна). Соответственно, уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = d \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \quad (13)$$

Следует отметить, что вспомогательная задача о вычислении функции  $G'(\boldsymbol{\rho}, t)$  из уравнения (9) имеет вполне конкретную физическую реализацию. При определенных условиях, которые будут указаны ниже, она соответствует задаче переноса примеси в гребешковых структурах, в которых слабопроницаемая среда представляется системой зубцов, вытянутых в направлении, перпендикулярном направлению переноса примеси в сильнопроницаемой среде.

Указанной вспомогательной задаче в геометрии плоскопараллельного слоя соответствует перенос примеси в квазидвумерной гребешковой структуре с бесконечными зубцами (рис. 2). Структура состоит из хребта, ограниченного в одном измерении ( $l = 1$ ), и периодической системы зубцов. Хребет представляет собой плоскопараллельный слой шириной  $a$ . Каждый зубец является бесконечным по оси  $y$  параллелепипедом шириной  $b$ . Расстояние между зубцами равно  $L$ . Механизмом переноса в хребте являются диффузия с коэффициентом  $D$  и адвекция со скоростью  $\mathbf{u}$ , а в зубцах — только диффузия с коэффициентом  $d$ . Если выполняются условия  $t \gg L^2/4D$ ,  $t \gg b^2/4d$ , то, с точки зрения переноса в хребте, систему зубцов можно рассматривать как сплошную среду, а диффузию в зубцах считать одномерной вдоль  $y$ . В этом случае перенос примеси в квазидвумерной гребешковой структуре описывается теми же уравнением (1) и условиями на границе хребет–зубцы, что и в обобщенной модели Дыхне для  $l = 1$ , но вместо уравнения (2) теперь имеем выражение (13). В итоге, перенос примеси в такой

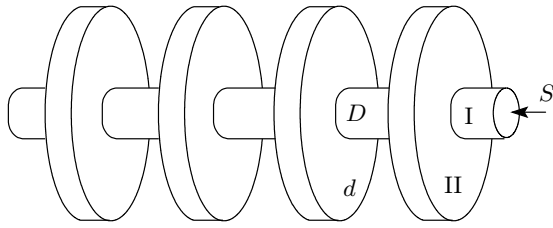


Рис. 3. Квазиодномерная гребешковая структура с дисками

структуре описывается той же функцией  $G'$ , что и для вспомогательной задачи (формула (8)).

Аналогично, физической реализацией для вспомогательной задачи с  $l = 2$  является квазиодномерная гребешковая структура с дисками (рис. 3) толщиной  $b$  и расстоянием между ними  $L$ . При соответствующих ограничениях на диапазон времени функция Грина для задачи переноса активных частиц в такой структуре совпадает со вспомогательной функцией Грина  $G'$  обобщенной модели Дыхне для  $l = 2$ .

Гребешковые структуры в простейших вариантах (без учета адвекции в хребте) неоднократно становились предметом исследований [11–18]. Одна из причин столь пристального внимания — их аналогия с перколяционным кластером. В работе [19] исследовались режимы переноса в гребешковой структуре с конечной длиной зубцов при наличии адвекции в хребте, но только в двумерном пространстве, что соответствует случаю  $l = 1$ , ограниченному вдоль  $z$ .

Ниже в разд. 3.1 и 3.2 мы рассмотрим вспомогательные задачи для случаев  $l = 1$  и  $l = 2$ .

### 3.1. Случай $l = 1$

Решая уравнение (13) в представлении Лапласа с учетом граничных условий, для функции  $M(p)$ , определенной соотношением (4), находим выражение

$$M(p) = \sqrt{p/t_1}, \tag{14}$$

где

$$t_1 = a^2/4d. \tag{15}$$

Выполнив интегрирование по волновому вектору  $\mathbf{k}$  в выражении (6), получим

$$G'(\boldsymbol{\rho}, t) = \frac{\exp(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}/2D)}{2\pi D} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \times K_0\left(\frac{\Lambda(p)u\rho}{2D}\right), \quad \text{Re} b > 0. \tag{16}$$

Здесь  $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$ ,  $K_0$  — функция Макдональда нулевого порядка и

$$\Lambda(p) = \sqrt{1 + t_u \left(p + \sqrt{p/t_1}\right)}, \tag{17}$$

где

$$t_u = 4D/u^2. \tag{18}$$

Вектор  $\boldsymbol{\rho}$  содержит две компоненты: продольную  $x$  (относительно скорости адвекции  $\mathbf{u}$ ) и поперечную  $z$ .

Очевидно, что в общем случае обратное преобразование Лапласа в выражении (16) выполнить невозможно. Однако существуют временные интервалы, когда функцию Грина удастся получить в явном виде. Последовательность этих интервалов зависит от соотношения между характерными временами  $t_u$  и  $t_1$ . Возможны два варианта:  $t_u \ll t_1$  (I) и  $t_u \gg t_1$  (II).

I.  $t_u \ll t_1$ .

I.1.  $t \ll t_u$ . Этот случай равносильен пределу  $u \rightarrow 0$ ,  $t_1 \rightarrow \infty$ . Поэтому здесь функция Грина принимает вид, соответствующий известному выражению двумерной классической диффузии:

$$G'(\boldsymbol{\rho}, t) \approx \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4Dt}\right). \tag{19}$$

I.2.  $t_u \ll t \ll t_1$ . В этом интервале аргумент функции Макдональда в формуле (16) много больше единицы, поэтому воспользуемся известной асимптотикой:  $K_0(z) \approx \sqrt{\pi/2z} e^{-z}$ ,  $z \gg 1$ , тогда

$$G'(\boldsymbol{\rho}, t) = \frac{\exp(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}/2D)}{2\sqrt{2\pi D}u\rho} \times \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{\exp(-\Phi(p; \boldsymbol{\rho}, t))}{\Lambda(p)}, \quad \text{Re} b > 0, \tag{20}$$

где

$$\Lambda(p) \approx 1 + \frac{t_u}{2} \left(p + \sqrt{\frac{p}{t_1}} - \frac{1}{4}t_u p^2\right), \tag{21}$$

$$\Phi(p; x, t) = \frac{\rho}{u} \left(\sqrt{\frac{p}{t_1}} - \frac{1}{4}t_u p^2\right) - pt', \tag{22}$$

$t' = t - \rho/u$  (рассматривается область  $x > 0$ ).

Ниже мы убедимся, что структура  $G'$ -функции зависит от того, является ли текущее время  $t$  большим или меньшим характерного времени  $t_3 = (t_u t_1^2)^{1/3}$ . Следовательно, случаи  $t_u \ll t \ll t_3$  и  $t \gg t_3$  необходимо проанализировать отдельно.

I.2a.  $t_u \ll t \ll t_3$ . Рассмотрим сначала область изменения пространственной переменной  $\boldsymbol{\rho}$ , в которой сосредоточена основная часть примеси (пик концентрации). Предположим, что для данного интервала

времени существенные значения переменной интегрирования в уравнении (20) определяются слагаемым в экспоненте порядка  $p^2$  из формулы (22). Согласно структуре интеграла в уравнении (20) эти значения имеют порядок  $p \sim (t_u t)^{-1/2}$ . Для них слагаемое, пропорциональное  $\sqrt{p}$  в выражении (22), имеет оценку

$$\frac{\rho}{u} \sqrt{\frac{p}{t_1}} \sim \left(\frac{x}{ut_3}\right)^{3/4}.$$

Дальнейшие вычисления покажут, что в основной области пространственная переменная  $\rho$  удовлетворяет неравенству  $\rho < ut$ . С учетом этого обстоятельства приходим к неравенству

$$\frac{\rho}{u} \sqrt{\frac{p}{t_1}} < \left(\frac{t}{t_3}\right)^{3/4} \ll 1, \quad (23)$$

которое подтверждает сделанное выше предположение. Таким образом, слагаемым порядка  $\sqrt{p}$  из выражения (22) можно пренебречь при вычислении интеграла в формуле (20). В итоге получаем

$$G'(\rho, t) \approx \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{(\rho - ut)^2}{4Dt}\right). \quad (24)$$

Данное выражение, как известно, характерно для двумерной классической адвекции-диффузии. Дрейфовый снос и дисперсия равны соответственно  $\mathbf{X} = ut$ ,  $\sigma = \sqrt{4Dt}$ , откуда  $\sigma \ll |\mathbf{X}|$ .

Выражение (24) справедливо там, где экспонента не слишком мала по сравнению с единицей. В далеких крыльях функции  $G(\rho, t)$  (в асимптотиках) следует воспользоваться методом перевала при интегрировании в формуле (20). С помощью уравнения  $\partial\Phi(p_0; x, t)/\partial p_0 = 0$  находим точку перевала  $p_0 = -t'/2t_u t$ . Нужно обратить внимание на то, что величина  $p_0$  вещественна и имеет знак, противоположный знаку  $t'$ . Это значит, что выражение (24) продолжает быть справедливым в далеком правом крыле (т. е. при  $t' < 0$ ) функции  $G'(\rho, t)$ . Иная ситуация складывается для левого крыла, т. е. где  $t' > 0$ . Здесь точка перевала отрицательна. Поэтому при вычислении асимптотики следует учитывать вклад  $\delta_b G'$ , возникающий от интегрирования по берегам разреза влево от точки ветвления функции  $\Phi(p; \rho, t)|_{p=0}$ . Упомянутая точка ветвления обусловлена присутствием слагаемого порядка  $\sqrt{p}$  в формуле (22), следовательно, членом порядка  $p^2$  в формуле (22) можно пренебречь. После подстановки выражений (21) и (22) в (20) необходимо провести разложение подынтегрального выражения до первого

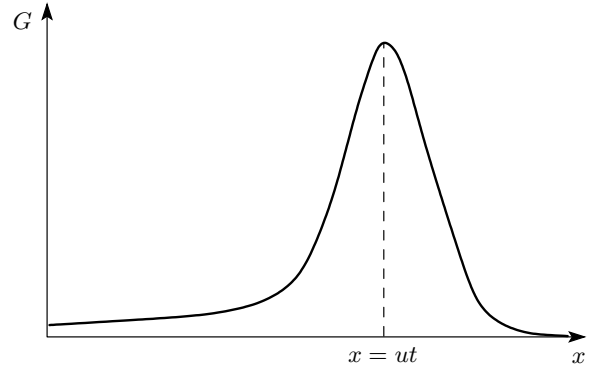


Рис. 4. Качественное поведение функции Грина на временах  $t_u \ll t \ll t_3$

порядка по величинам порядка  $\sqrt{p}$ . В результате находим

$$\delta G'_b = \frac{ut_u + 4\rho}{16\pi\sqrt{2D}\rho u^3 t_1 t'^3} \times \exp\left[-\frac{u\rho}{2D}(1 - \cos\varphi)\right], \quad (25)$$

где  $\cos\varphi = x/\rho$ ,  $t' = t - \rho/u$ .

Вклад (25) приводит к необычному поведению распределения концентрации на временах  $t_u \ll t \ll t_3$ . Обладая степенным убыванием пропорциональным  $(\rho - ut)^{-3/2}$ , вклад  $\delta_b G'$  «перебивает» экспоненциальное убывание (24) на расстояниях относительно далеких от центра пика распределения. Сравнивая выражения (24) и (25), заключаем, что вклад (25) является определяющим, когда  $t' > \sqrt{t_u t \ln(t_3/t)}$ .

Таким образом, на временах  $t_u \ll t \ll t_3$  мы имеем режим близкий к классической адвекции-диффузии (24) с почти симметричным гауссовым профилем концентрации (рис. 4), слегка испорченным присутствием степенного шлейфа (25).

I.2b.  $t_3 \ll t \ll t_1$ . В соответствии с оценкой (23), при переходе от интервала  $t_u \ll t \ll t_3$  к интервалу  $t \gg t_3$  слагаемые порядка  $p^2$  и  $\sqrt{p}$  в выражении (21) меняются ролями. Поэтому в данном случае справедлива аппроксимация

$$\Lambda(p) \approx 1 + \frac{t_u}{2} \left(p + \sqrt{\frac{p}{t_1}}\right). \quad (26)$$

С учетом аппроксимации (26) из выражения (20) находим

$$G'(\rho, t) \approx \frac{ut_u + 4\rho}{16\pi\sqrt{2D\rho u^3 t_1 t'^3}} \times \exp\left[-\frac{u\rho}{2D}(1 - \cos\varphi) - \frac{\rho^2}{4D_u t'}\right], \quad (27)$$

где

$$D_u = u^2 t_1. \quad (28)$$

В асимптотических участках функции Грина следует исходя из равенств (21), (22) воспользоваться методом перевала. При  $t' > 0$  имеют место две точки перевала. Естественно, принимать во внимание следует только ту из них, которая приводит к меньшему значению показателя экспоненты. При  $|t'| \gg t(t_u/2t_1)^{1/3}$  таковой является точка  $p_0 = x^2/4D_u t'^2$ . Ее вклад сводится к выражению (27).

В области  $|t'| \ll t(t_u/2t_1)^{1/3}$  остается только одна точка перевала,  $p_0 \approx (t_u^2 t_1)^{-1/3}$ . Она дает вклад

$$G'(\rho, t) \propto \exp(-3t/4t_3). \quad (29)$$

При отрицательных значениях переменной  $t'$  снова имеется только одна точка перевала  $p_0 = -t'/2t_u t$ , если  $t' < 0$  и  $|t'| \gg t(t_u/2t_1)^{1/3}$ . Ее вклад сводится к выражению (24).

Выражение (27) справедливо во всем интервале  $t \gg t_3$ . Однако качественное поведение функции Грина существенно различается в двух случаях:  $t_3 \ll t \ll t_1$  и  $t \gg t_1$ . На временах  $t_3 \ll t \ll t_1$  дрейфовый снос  $\mathbf{X} = \mathbf{u}t$  и дисперсия (ширина пика)  $\sigma \sim ut^2/t_1$ . Очевидно, что  $|\mathbf{X}| \gg \sigma$ . Соответственно,  $\rho^2$  можно заменить на  $(ut)^2$  в показателе экспоненты (27):

$$G'(\rho, t) \approx \frac{ut_u + 4\rho}{16\pi\sqrt{2D\rho u^3 t_1 t'^3}} \times \exp\left[-\frac{u\rho}{2D}(1 - \cos\varphi) - \frac{u^2 t^2}{4D_u t'}\right]. \quad (30)$$

Таким образом, реализуется режим классической адвекции-диффузии с резко асимметричным профилем концентрации (рис. 5). При этом левое крыло распределения концентрации имеет форму степенного шлейфа. Правое крыло является сначала коротким экспоненциальным (27), а в далеком участке при  $|t'| \gg t(t_u/2t_1)^{1/3}$ ,  $t' < 0$  принимает классическую гауссову форму (19).

На первый взгляд, появление степенного шлейфа на временах  $t \ll t_1$  весьма неожиданно. Казалось бы, среда II еще не должна оказывать существенного влияния на процесс переноса примеси. Однако необычное поведение распределения концентрации

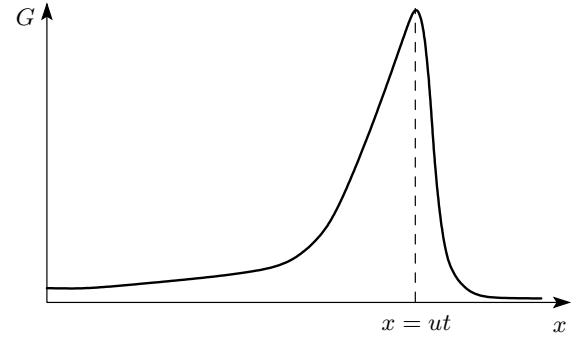


Рис. 5. Качественное поведение функции Грина на временах  $t_3 \ll t \ll t_1$

вполне объяснимо: по мере продвижения пика концентрации часть активных частиц уходит в среду II, затем пик двигается дальше и позади него возникает обратный градиент концентраций и, чтобы восстановить равновесие, частицы из среды II возвращаются в среду I. Следовательно, наличие степенного шлейфа обусловлено временным уходом частиц в слабопроницаемую среду.

I.2c.  $t \gg t_1$ . Здесь дрейфовый снос и дисперсия имеют один порядок:  $|\mathbf{X}| \sim \sigma \sim \sqrt{D_u t}$  и  $\sqrt{D_u t} \ll ut$ . Следовательно, в выражении (27)  $t'$  можно заменить на  $t$ , если речь идет о пике распределения и первой ступени хвоста. В результате, находим

$$G'(\rho, t) \approx \frac{ut_u + 4\rho}{16\pi\sqrt{2D\rho u^3 t_1 t^3}} \times \exp\left[-\frac{u\rho}{2D}(1 - \cos\varphi) - \frac{\rho^2}{4D_u t}\right]. \quad (31)$$

Этот режим впервые был установлен в работе [20] и назван квазидиффузией. Несмотря на то что в режиме квазидиффузии дисперсия зависит от времени по классическому закону  $\sigma \propto t^{1/2}$ , данный режим является аномальным, так как полное количество активных частиц не сохраняется. Действительно, с помощью выражения (12) нетрудно получить

$$N(t) \approx N_0 \sqrt{t_1/\pi t}, \quad t \gg t_1. \quad (32)$$

Вторая и третья ступени хвоста концентрации в данном интервале полностью совпадают с теми, которые получены для случая I.2b.

Все результаты, изложенные выше, справедливы для переноса примеси в продольном направлении. Посмотрим, как происходит перенос в поперечном направлении. Очевидно, что в случаях I.1 и I.2a реализуется классическая диффузия. В случае I.2b зависимость показателя экспоненты в (27) от попереч-

ной координаты сводится к выражению  $-z^2/4Dt$ , если учесть, что  $x \approx ut$ . Следовательно, снова имеет место классическая диффузия. Обратимся к случаю I.2с. С учетом  $\sigma \sim \sqrt{D_u t}$  находим, что показатель экспоненты в формуле (31) равен примерно  $z^2/4D\sqrt{t_1 t}$ . Таким образом, реализуется субдиффузия.

Итак, в поперечном направлении на временах  $t \ll t_1$  имеет место классическая диффузия, а на временах  $t \gg t_2$  — субдиффузия.

Принимая во внимание результаты, полученные для хвостов концентрации, приходим к следующей закономерности: с увеличением расстояний в хвостах осуществляется тот режим переноса, который был характерен для пика распределения в более раннем временном интервале. Аналогичный вывод был сделан в работах [10, 19, 21]. Таким образом, зная, как меняется поведение пика распределения во времени, можно определить поведение концентрации на далеких расстояниях. Это обстоятельство позволяет нам везде далее опускать подробный анализ хвостов концентрации.

II.  $t_u \gg t_1$ . На временах меньших чем  $t_u^2/t_1$  следует использовать аппроксимацию

$$\Lambda(p) \approx \frac{2}{u} \sqrt{D \left( p + \sqrt{p/t_1} \right)}, \quad t \ll t_u. \quad (33)$$

II.1.  $t \ll t_1$ . Этот случай полностью аналогичен случаю I.1.

II.2.  $t_1 \ll t \ll t_u^2/t_1$ . Членом порядка  $p$  под корнем в выражении (33) следует пренебречь. Затем подставим (33) в (16) и воспользуемся методом перевала, после чего получим

$$G'(\rho, t) = \frac{1}{2\pi Dt} F(\eta), \quad (34)$$

где

$$F(\eta) = 4 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} e^s K_0 \left( 2\eta^{1/2} s^{1/4} \right),$$

$$s = pt, \quad \eta = \frac{\rho^2}{4D\sqrt{t_1 t}}.$$

Очевидно, здесь  $\sigma \sim \sqrt{D\sqrt{t_1 t}}$ . Следовательно, выражение (34) соответствует режиму степенной субдиффузии. Первую ступень хвоста найдем, воспользовавшись асимптотическим выражением для функции Макдональда:

$$G'(\rho, t) \approx \frac{1}{2\sqrt{6} \pi Dt} \exp \left\{ -3 \left( \frac{\eta}{4} \right)^{2/3} \right\}. \quad (35)$$

Субдиффузионные выражения аналогичные (34), (35), а также структура хвоста для данного интервала времени были получены для простой модели Дыхне в работе [10].

II.3.  $t \gg t_u^2/t_1$ . В этом интервале для основной области и первой ступени хвоста справедливо квазидиффузионное выражение (31). Вторая ступень определяется формулой (35), а третья соответствует классическому диффузионному режиму (19).

В поперечном направлении снова получаем, что на временах  $t \ll t_1$  реализуется классическая диффузия, а на временах  $t \gg t_1$  — субдиффузия.

### 3.2. Случай $l = 2$

В случае прямого цилиндра функция Грина будет зависеть только от продольной координаты  $x$  и времени  $t$ .

Так же, как и в случае  $l = 1$ , находим функцию  $M(p)$ , которая в логарифмическом приближении имеет вид

$$M(p) = \left[ \tilde{t}_1 \ln \left( \frac{H}{p\tilde{t}_1} \right) \right]^{-1}; \quad (36)$$

$$\tilde{t}_1 = \frac{1}{d} \left( \frac{S}{P} \right)^2,$$

$P$  — периметр поперечного сечения цилиндра,  $H \sim 1$  зависит от формы сечения.

При  $t \gg \tilde{t}_1$  функция Грина  $G'$  в выражении (9) имеет вид

$$G'(x, t) = \frac{1}{u} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \{1 + t_u(p + M(p))\}^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ pt - \frac{xu}{2D} \left[ \sqrt{1 + t_u(p + M(p))} - 1 \right] \right\}. \quad (37)$$

Схожее выражение было получено в разд. 3.1 (см. (20)).

В данном разделе ограничимся описанием поведения частиц примеси в основном облаке. Асимптотики концентрации обсудим в разделе, посвященном обобщенной модели Дыхне.

Как и в разд. 3.1, возможны два случая:  $t_u \ll \tilde{t}_1$  и  $\tilde{t}_1 \ll t_u$ .

I.  $t_u \ll \tilde{t}_1$ . Данный случай частично совпадает со случаем I для квазидвумерного гребешка с учетом замены  $\rho \rightarrow x$ .

I.1.  $t \ll t_u$ :

$$G'(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left( -\frac{x^2}{4Dt} \right). \quad (38)$$

Реализуется одномерная классическая диффузия.

I.2a.  $t_u \ll t \ll t_3$ . Здесь необходимо провести рассуждения аналогичные тем, что имели место в случае I.2a из разд. 3.1. В итоге, пик распределения описывается одномерным аналогом выражения (24). Вычисление вклада, который в левом крыле распределения является определяющим вдали от пика, дает

$$\delta_b G'(x, t) \approx \frac{ut_u + 2x}{4u^2} \frac{1}{\sqrt{\pi \tilde{t}_1 t'^3}}. \quad (39)$$

I.2b.  $t_3 \ll t \ll \tilde{t}_1$ . Для этого интервала воспользуемся такими же соображениями, что и в случае I.2b из разд. 3.1. Тогда получаем режим квазидиффузии:

$$G'(x, t') = \frac{x + ut_u/2}{ut'} \frac{1}{\sqrt{4\pi D_u t'}} \exp\left(-\frac{u^2 t'^2}{4D_u t'}\right). \quad (40)$$

I.2c.  $t \gg \tilde{t}_1$ . В этом интервале появляется новый режим переноса:

$$G'(x, t) \approx \sqrt{\frac{t_1}{t}} \frac{1}{\pi R_2(t)} \left(\frac{ut_u + x}{R_2(t)}\right) \times \exp\left(-\frac{x}{R_2(t)}\right), \quad (41)$$

где

$$R_2(t) = u\tilde{t}_1 \ln t/\tilde{t}_1. \quad (42)$$

Он хотя и логарифмический, но приводит к более быстрому распространению примеси, чем субдиффузионный логарифмический режим в простой модели Дыхне (см. ниже (44)).

II.  $\tilde{t}_1 \ll t_u$ . Этот случай содержит следующие временные интервалы.

II.1. На временах  $t \ll \tilde{t}_1$  реализуется одномерная классическая диффузия (38).

II.2a. При  $\tilde{t}_1 \ll t \ll \tilde{t}_3$ , где

$$\tilde{t}_3 = t_1 \exp(t_u/t_1), \quad (43)$$

имеем

$$G'(x, t) \approx \sqrt{\frac{t_1}{t}} \frac{1}{\pi R_1(t)} \left(1 + \frac{x}{R_1(t)}\right) \times \exp\left(-\frac{x}{R_1(t)}\right). \quad (44)$$

Здесь  $R_1(t) = \sqrt{Dt_1 \ln t/t_1}$ .

Данное выражение соответствует логарифмической субдиффузии, так как  $\sigma \sim \sqrt{Dt_1 \ln t/t_1}$ . Оно также было получено в работе [10].

II.1.3.  $t \gg \tilde{t}_3$  — справедливо выражение (41). Отметим, что в случае цилиндрической геометрии на временах  $t \gg \tilde{t}_1$  полное число активных частиц убывает как

$$N(t) \approx N_0 \frac{\tilde{t}_1}{t}. \quad (45)$$

#### 4. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЫХНЕ

Теперь, воспользовавшись результатами предыдущего раздела и формулами (9) и (11), рассмотрим поведение концентрации примеси в обобщенной модели Дыхне. При этом учтем, что на временах, когда дисперсия  $\sigma = \sqrt{4dt}$ , определяемая переносом примеси по слабопроницаемой среде II, мала по сравнению с дисперсией  $\sigma'$ , определяемой функцией  $G'$  вспомогательной задачи, поведение примеси согласно формуле (9) описывается закономерностями, полученными в разд. 3. В обратном случае перенос примеси в основном облаке (в том числе и активных частиц в среде I) определяется переносом по слабопроницаемой среде.

Из анализа поведения асимптотики концентрации в случае плоскопараллельной геометрии вспомогательной задачи (см. разд. 3.1) следует, что при смене режимов переноса в основном облаке со временем структура хвостов концентрации активных частиц становится многоступенчатой: чем дальше мы отдаляемся от основного облака, тем более ранний, из уже реализованных, режим переноса описывает поведение в хвосте. Данный вывод еще раз подтверждает установленное ранее правило [10, 19, 21]. Поэтому мы сочли целесообразным не выписывать каждый раз структуру формирующегося хвоста, а ограничиться описанием последовательности реализующихся режимов переноса в основном облаке, откуда структура хвоста без труда восстанавливается.

##### 4.1. Случай плоскопараллельного слоя ( $l = 1$ , рис. 1a)

В данном случае перенос в поперечном направлении происходит так же, как и в простой модели Дыхне [9].

В продольном направлении поведение концентрации зависит от соотношения между параметрами  $t_1$  и  $t_u$ .

1) Если  $t_u \gg t_1 D/d$ , то адвекция практически не влияет на формирование профиля концентрации. Здесь можно считать  $u \rightarrow 0$ , тогда выражение (6) полностью совпадает с функцией Грина в модели Дыхне [9] и миграция примеси происходит так же, как в простой модели Дыхне: при  $t \ll t_1$  имеет место классическая диффузия (19), далее при  $t_1 \ll t \ll t_2$ , где

$$t_2 = t_1 (D/d)^2, \quad (46)$$



следует режим субдиффузии (35) и затем при  $t \gg t_2$  наступает медленная классическая диффузия:

$$G(\rho, t) \approx \frac{a}{\sqrt[3]{4\pi dt}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4dt}\right). \quad (47)$$

2) Если характерные времена связаны соотношением  $t_1 \ll t_u \ll t_1 D/d$  имеет место следующая последовательность режимов: при  $t \ll t_1$  — классическая двумерная диффузия (19), далее при  $t_1 \ll t \ll t_u^2/t_1$  — субдиффузия (35), а затем при  $t_u^2/t_1 \ll t$  — квазидиффузия второго типа (31).

3) При столь больших значениях скорости  $u$ , что  $t_u \ll t_1$ , реализуются следующие режимы:  $t \ll t_u$  — классическая двумерная диффузия (19),  $t_u \ll t \ll t_3$  — классическая адвекция-диффузия (24),  $t_3 \ll t \ll t_1$  — квазидиффузия первого типа (27),  $t_1 \ll t$  — квазидиффузия второго типа (31).

Отметим, что в случаях 2) и 3) режим медленной диффузии не наступает, так как дисперсия, определяемая переносом по быстрой среде,  $\sigma' \sim \sqrt{D_u t}$ , оказывается больше дисперсии, определяемой режимом (47).

#### 4.2. Случай прямого цилиндра ( $l = 2$ , рис. 1б)

В этом случае задача для активных частиц является одномерной. Последовательность режимов переноса определяется соотношением между параметрами  $t_u$ ,  $\tilde{t}_1$  и  $\tilde{t}_1 \ln(D/d)$ .

1) При  $\tilde{t}_1 \ln D/d \ll t_u$  задача полностью совпадает со случаем прямого цилиндра простой модели Дыхне [9]. Действительно, на временах  $t \ll t_u$  адвекция вообще роли не играет. Более того, при условии  $\tilde{t}_1 \ln D/d \ll t_u$  время  $t_u$  оказывается настолько велико, что влияние адвекции на перенос примеси оказывается пренебрежимо малым, и на временах  $t \gg t_u$  перенос частиц в слабопроницаемой среде вносит куда более значительный вклад.

В итоге, из результатов для простой модели Дыхне следует, что на временах  $t \ll \tilde{t}_1$  имеет место классическая одномерная диффузия (38), на временах  $\tilde{t}_1 \ll t \ll \tilde{t}_2$  — логарифмическая субдиффузия (44), и, наконец, когда  $t \gg \tilde{t}_2$  — медленная классическая диффузия (47), где

$$\tilde{t}_2 = \tilde{t}_1 \frac{D}{d} \ln \frac{D}{d}, \quad (48)$$

и в формуле (47) мы должны положить  $\rho = x$ .

2) При  $\tilde{t}_1 \ll t_u \ll \tilde{t}_1 \ln(D/d)$ , так же, как и для цилиндрической гребенки, реализуется последователь-

ность режимов (38), (44), (41), после чего при  $t \gg \tilde{t}_2^1$ , где

$$\tilde{t}_2^1 = \tilde{t}_1 \frac{D_u}{d} \ln^2 \frac{D_u}{d}, \quad (49)$$

устанавливается режим медленной диффузии (47).

3) При  $t_u \ll \tilde{t}_1$  систематика режимов переноса следующая. Вплоть до времени  $\tilde{t}_2^1$  сохраняется последовательность режимов (38), (24) с левым крылом (39), (40) и (41), после чего, при  $t \gg \tilde{t}_2^1$  доминирующей становится медленная классическая диффузия (47).

Отметим, что для прямого цилиндра при любом соотношении между  $\tilde{t}_1$  и  $t_u$  окончательным режимом является режим медленной диффузии (47).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы проанализировали перенос примеси в рамках в обобщенной модели Дыхне, включающей помимо диффузии также и адвекцию в сильнопроницаемой среде. Показано, что выражение для концентрации активных частиц (частиц в сильнопроницаемой среде) представляется в виде свертки функций Грина вспомогательной задачи, для которой в слабопроницаемой среде отсутствует продольная диффузия, и задачи о продольной диффузии примеси в слабопроницаемой среде.

По сравнению с простой моделью Дыхне, в обобщенной модели возникают новые режимы переноса, возможность реализации которых определяется соотношением между характерными временами  $t_u$  и  $t_1$ . При малых скоростях адвекции обобщенная модель сводится к простой модели [9] и режим переноса последовательно проходит стадии быстрой классической диффузии, субдиффузии и медленной классической диффузии. При больших скоростях в плоскопараллельном случае возможны режимы адвекции-диффузии с сильно анизотропным профилем концентрации (степенным шлейфом позади фронта), а также режим квазидиффузии, при котором дисперсия определяется как скоростью адвекции в сильнопроницаемой среде, так и диффузией в слабопроницаемой матрице. Стоит отметить, что многие авторы [22–27] к аномальным режимам переноса относят режимы, где вместо закона Эйнштейна–Смолуховского,  $\sigma \propto t^{1/2}$ , имеет место зависимость  $\sigma \propto t^\alpha$ ,  $\alpha \neq 1/2$ . На наш взгляд, такое определение «аномальности» не является полным. Например, в режиме квазидиффузии справедлива классическая зависимость  $\sigma \propto t^{1/2}$ , однако полное число активных частиц не сохраняется. Следовательно, ква-

зидиффузию нельзя отнести к классическим режимам.

Еще один результат обобщенной модели Дыхне в геометрии плоскопараллельного слоя состоит в различии режимов переноса в продольном (относительно скорости адвекции) и поперечном направлениях.

В обобщенной модели Дыхне в цилиндрической геометрии при больших значениях скоростей адвекции появляется новый режим логарифмической субдиффузии, более быстрый по сравнению с режимом, полученным ранее для простой модели Дыхне [9, 10].

Следует отметить качественное отличие роли, которую играет сильнопроницаемая среда в формировании режима переноса примеси активных частиц на предельно больших временах для двух геометрий. В случае плоскопараллельного слоя окончательный (по времени) режим переноса зависит от величины скорости адвекции в сильнопроницаемой среде, и при достаточно большой скорости ею и определяется (квазидиффузионный режим с  $D_u$ ). Для цилиндрической геометрии конечным всегда является режим медленной диффузии, определяемый коэффициентом  $d$  слабопроницаемой среды.

Проведенный анализ асимптотического поведения концентрации на больших расстояниях для плоскопараллельной геометрии вспомогательной задачи обобщенной модели Дыхне показал, что наличие адвекции не влияет на установленный ранее вывод (см. [10, 19, 21]) о связи смены режимов переноса со структурой хвостов. Именно, что по мере увеличения времени смена режимов переноса приводит к возникновению сложной структуры асимптотики концентрации: чем более удален фрагмент хвоста, тем более ранний режим переноса частиц в основном облаке определяет его форму.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 08-08-01009а, 09-08-00573а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Gefen, A. Aharony, and S. Alexander, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 77 (1983).
2. J. Klafter, A. Blumen, and M. F. Shlesinger, *Phys. Rev. A* **35**, 3081 (1987).
3. T. H. Solomon, E. R. Weeks, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3975 (1993).
4. В. Ю. Забурдаев, К. В. Чукбар, *ЖЭТФ* **121**, 299 (2002).
5. J. Chuang, Y. Kantor, and M. Kardar, *Phys. Rev. E* **65**, 011802 (2002).
6. I. Y. Wong, M. L. Gardel, and D. R. Reichman, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 178101 (2004).
7. J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Phys. Rep.* **195**, 127 (1990).
8. P. S. Isichenko, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 961 (1992).
9. А. М. Дыхне, I. L. Dranikov, P. S. Kondratenko, and A. V. Popov, *J. Hydr. Res.* **43**, 213 (2005).
10. П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, *ЖЭТФ* **131**, 494 (2007).
11. В. Е. Архинчеев, Е. М. Баскин, *ЖЭТФ* **73**, 161 (1991).
12. S. Havlin, J. E. Kiefer, and G. H. Weiss, *Phys. Rev. A* **36**, 1403 (1987).
13. A. Iomin and E. Baskin, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 120603 (2004).
14. A. Iomin and E. Baskin, *Phys. Rev. E* **71**, 061101 (2005).
15. К. В. Чукбар, А. С. Романов, П. В. Попов, В. Ю. Забурдаев, *ЖЭТФ* **133**, 180 (2008).
16. В. Е. Архинчеев, *ЖЭТФ* **115**, 1285 (1999).
17. S. Havlin, *Phys. Rev. A* **34**, 3492 (1986).
18. S. Havlin and G. H. Weiss, *Physica* **134A**, 474 (1986).
19. О. А. Дворецкая и П. С. Кондратенко, *Phys. Rev. E* **79**, 1 (2009).
20. К. В. Чукбар, *ЖЭТФ* **81**, 1025 (1995).
21. А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, *Письма в ЖЭТФ* **80**, 464 (2004).
22. E. K. Lenzi, R. S. Mendes, and C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **67**, 031104 (2003).
23. T. Geisel and S. Thomaе, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1936 (1984).
24. E. Barkai and V. N. Fleurov, *Phys. Rev. E* **58**, 2 (1998).
25. D. Hernández, C. Varea, and R. A. Barrio, *Phys. Rev. E* **79**, 026109 (2009).
26. L. C. Malacarne, R. S. Mendes, I. T. Pedron, and E. K. Lenzi, *Phys. Rev. E* **63**, 030101 (2001).
27. T. Geisel and S. Thomaе, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1936 (1984).