

ГИГАНТСКИЕ ВОЛНЫ В СЛАБО-СКРЕЩЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*В. П. Рубан**

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 24 сентября 2009 г.

Образование аномальных волн в состояниях морского волнения с двумя близкими спектральными максимумами вблизи волновых векторов $\mathbf{k}_0 \pm \Delta\mathbf{k}/2$ в фурье-плоскости исследуется путем численного моделирования с использованием полностью нелинейной модели для длинно-гребневых поверхностных волн [24]. В зависимости от угла θ между векторами \mathbf{k}_0 и $\Delta\mathbf{k}$, который задает типичную ориентацию интерференционных полос в физической плоскости, возникающие экстремальные волны имеют различную пространственную структуру. Если $\theta \lesssim \arctg(1/\sqrt{2})$, то типичные гигантские волны представляют собой относительно длинные фрагменты существенно двумерных гряд, разделенных широкими долинами и состоящих из чередующихся наклонно ориентированных гребней и впадин. При почти перпендикулярных векторах \mathbf{k}_0 и $\Delta\mathbf{k}$ интерференционные минимумы развиваются в когерентные структуры, подобные темным солитонам дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера, и двумерная волна-убийца выглядит во многом похожей на одномерную гигантскую волну, ограниченную в поперечном направлении двумя такими темными солитонами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема аномальных волн на поверхности океана (известных также как волны-убийцы) привлекает к себе внимание на протяжении уже ряда лет (см., например, обзоры [1, 2], где обсуждаются различные физические механизмы этого явления, а также приведены ссылки на многие имеющиеся по данной теме работы; с некоторыми недавними достижениями в этой области можно ознакомиться также в статьях [3–17]). Под словами «аномальная» или «экстремальная» волна подразумевается обычно такая индивидуальная волна, высота гребня которой Y_{max} в несколько раз превышает характерную амплитуду A_0 соседних волн. При длине волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ в диапазоне 100...250 метров и «фоновой» амплитуде $A_0 \approx [0.015 \dots 0.02]\lambda_0$, в максимуме подъема свободной поверхности может достигаться неравенство $Y_{max} > 0.06\lambda_0$, что сравнимо с высотой предельной волны Стокса. При этом профиль аномальной волны сильно отличается от синусоидальной формы и имеет большую крутизну, что свидетельствует о сильной нелинейности рассматриваемого яв-

ления. Известно, что в различных обстоятельствах гигантские волны вызываются различными причинами и, соответственно, имеется несколько возможных сценариев, объясняющих формирование таких волн. В качестве одной из важнейших причин появления волн-убийц признана модуляционная неустойчивость Бенджамена – Фейра – Захарова, которая существенно определяет динамику достаточно длинных и высоких групп волн [18–20]. Эффективность этого механизма обычно характеризуется так называемым индексом Бенджамена – Фейра (BFI) [4], $BFI \sim \lambda_0^{-2} A_0 l_0$, где l_0 — типичная длина группы. Чем выше значение этого индекса, тем более вероятно появление волн-убийц в данном состоянии волнения. Очевидно, что большие значения BFI соответствуют спектрально узким распределениям волнового действия, т.е. достаточно когерентным волнам. Напротив, малые значения индекса Бенджамена – Фейра присущи широким спектрам, т.е. некогерентным состояниям взволнованной поверхности моря. При малых BFI модуляционная неустойчивость практически полностью подавлена, и поэтому довольно редкие случаи появления аномально высоких волн хорошо описываются теорией почти невзаимодействующих нормальных волновых мод, подчи-

*E-mail: ruban@itp.ac.ru

няющихся гауссовой статистике, причем трехволновые нерезонансные процессы исключаются подходящим слабо-нелинейным каноническим преобразованием (см., например, [2, 5, 21] и ссылки там). Когда индекс Бенджамена–Фейра достаточно велик, то на передний план выступают нелинейные взаимодействия волн, которые приводят к формированию когерентных структур, результатом эволюции которых и являются волны-убийцы. Статистика волновых мод при этом существенно отличается от гауссовой. В частности, такой сценарий нашел свое подтверждение в недавних численных экспериментах [8, 9], где моделировалась сильно нелинейная динамика двумерной свободной поверхности, начиная со слабо возмущенной плоской волны. На нелинейной стадии развития модуляционной неустойчивости наблюдались специфические зигзагообразные, наклонно ориентированные полосы огибающей, причем аномальные волны развивались в основном в углах зигзагов. Эти численные эксперименты примерно соответствуют одному из известных сценариев, когда имеет место предварительное усиление амплитуды океанской зыби крупномасштабными пространственно-неоднородными течениями в области каустики до таких значений A_0 , при которых начинается быстрое развитие модуляционной неустойчивости [22, 23]. Следует упомянуть, что несколько иной тип долгоживущих когерентных структур был недавно распознан в численных экспериментах по моделированию плоских течений со свободной поверхностью — так называемые гигантские бризеры или фриконы [10], которые по существу являются предельно короткими и высокими солитонами огибающей, содержащими всего 1–2 волны.

Очевидно однако, что при наличии когерентных структур один только индекс Бенджамена–Фейра не может исчерпывающе характеризовать вероятность появления волн-убийц, поскольку свойства когерентных структур зависят, вообще говоря, также и от других параметров. Примером тому могут служить так называемые скрещенные состояния морской поверхности, часто имеющие место в реальных условиях, когда имеется не один, а по меньшей мере два ярко выраженных спектральных максимума в фурье-плоскости, вблизи волновых векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 . Случай равных по модулю векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 с конечным углом α между ними исследовался в работах [16, 17] в рамках слабонелинейной модели, которая состоит из двух зацепленных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) для волновых огибающих и учитывает только резонансные процессы $2 \leftrightarrow 2$. Там были найдены инкременты

неустойчивости и численно исследована эволюция системы вплоть до возрастания максимальной амплитуды примерно в три раза по сравнению с начальным значением. В настоящей работе также рассматривается задача о скрещенных состояниях, но в несколько отличной постановке. А именно, мы исследуем здесь случай вообще говоря не равных по модулю волновых векторов $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 - \Delta\mathbf{k}/2$ и $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_0 + \Delta\mathbf{k}/2$, но с дополнительным условием $|\Delta\mathbf{k}| \ll |\mathbf{k}_0|$, откуда автоматически следует также, что $\alpha \ll 1$. Здесь важно отметить, что рассматриваемая ситуация с двумя близкими спектральными максимумами соответствует наличию относительно широких и длинных интерференционных полос на поверхности моря, причем угол θ между векторами $\Delta\mathbf{k}$ и \mathbf{k}_0 определяет ориентацию полос по отношению к волновым фронтам. Что касается физической осуществимости, то подобные слабо-скрещенные состояния, вполне вероятно, могут возникать над неоднородными течениями в областях, расположенных за каустиками волновых фронтов.

Нашей основной целью далее будет путем численного моделирования исследовать вопрос о том, как зависит процесс образования волн-убийц от взаимного расположения спектральных максимумов, т. е. от угла θ . Условие узости углового распределения волнового поля $\alpha \ll 1$ позволит нам применить для численных расчетов полностью нелинейную теоретическую модель, основанную на спрямлении трехмерной области течения семейством двумерных конформных отображений. Указанная модель была предложена и развита в работах [24, 25] и затем успешно применена в уже упоминавшихся работах [8, 9]. Модель имеет первый порядок точности по малому параметру $\epsilon \sim \alpha^2 \ll 1$ и является промежуточной между точной эйлеровской динамикой потенциальных течений и приближенными уравнениями для волновых огибающих (обобщения НУШ), предложенными в работах [26–28]. Следует подчеркнуть, что наш метод позволяет вычислять профили индивидуальных, сильно нелинейных длинно-гребневых волн, тогда как в работах [16, 17] могли быть исследованы только слабонелинейные волны с гладкими огибающими, хотя и для конечных углов α .

Основные результаты настоящей работы можно сформулировать следующим образом. Если $\theta \lesssim \arctg(1/\sqrt{2})$, то нелинейность действует фокусирующим образом в направлении поперек интерференционных полос. Ситуация противоположна для случая примерно перпендикулярных векторов \mathbf{k}_0 и $\Delta\mathbf{k}$. Соответственно, аномальные

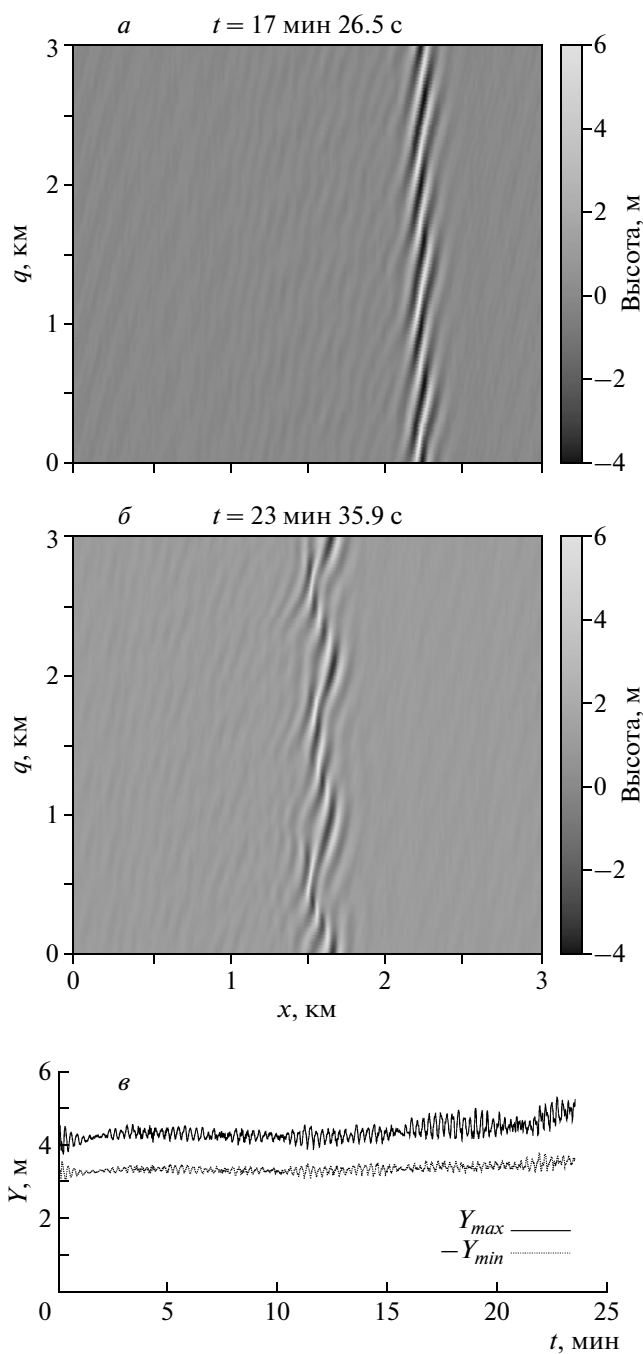


Рис. 1. *a, б* — Эволюция возмущенного косо-го солитона большой амплитуды с $\lambda_0 \approx 100$ м, $\theta \approx \arctg(1/5)$, $s \approx 0.22$ в зигзагообразную структуру. *в* — Максимальная высота гребня и наибольшая глубина впадины косо-го солитона в зависимости от времени

волны, появляющиеся на поверхности моря, получают различными в этих двух случаях. В первом случае волны-убийцы выглядят как фрагменты структур, подобных солитонным решениям фокусирующего НУШ для волновой огибающей. Такие экстремально узкие и крутые солитоны являются по существу рядами чередующихся косо ориентированных гребней и впадин (см. рис. 1*a*). При наличии случайного двумерного возмущения косые солитоны могут существовать на протяжении многих десятков волновых периодов почти без изменений, и после они преобразуются в зигзагообразные структуры, подобные тем, что описаны в работе [9] (см. рис. 1 в качестве примера). Заметим, что в пределе $\theta \rightarrow 0$ такие экстремально косые солитоны совпадают с недавно открытыми одномерными гигантскими бризерами [10]. Таким образом, подтверждается фундаментальная роль этих когерентных структур в динамике поверхностных волн на воде. При почти перпендикулярных векторах \mathbf{k}_0 и $\Delta\mathbf{k}$ в игру вступают когерентные структуры другого вида, подобные так называемым темным солитонам дефокусирующего НУШ. Темные солитоны развиваются вдоль интерференционных минимумов и поперечно разделяют волновые группы, подверженные продольной модуляционной неустойчивости. Волны-убийцы в этом случае имеют почти одномерные профили, но при этом они ограничены в поперечном направлении двумя темными солитонами.

Следует сказать, что данная статья представляет собой более подробную версию недавно опубликованного короткого сообщения [29].

2. КАЧЕСТВЕННОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ЭФФЕКТА

Чтобы лучше понимать получаемые численные результаты, полезно иметь в виду простую качественную модель, описывающую слабонелинейные волны на бесконечно глубокой воде в терминах комплексной волновой амплитуды $A(x_1, x_2, t)$, которая определяет подъем свободной поверхности следующим образом:

$$Y(x_1, x_2, t) \approx \text{Re}[A(x_1, x_2, t) \exp(ik_0x_1 - i\omega_0t)]. \quad (1)$$

Здесь x_1, x_2 — горизонтальные координаты, причем ось x_1 направлена вдоль волнового вектора \mathbf{k}_0 , вблизи которого сосредоточен спектр, $\omega_0 = (gk_0)^{1/2}$ — частота несущей волны, g — ускорение свободного падения. Как известно, функция $A(x_1, x_2, t)$ приближенно удовлетворяет двумерному НУШ [19]:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2k_0} \frac{\partial A}{\partial x_1} &= \\ &= \frac{1}{8k_0^2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} \right) + \frac{k_0^2}{2} |A|^2 A. \end{aligned} \quad (2)$$

Нетрудно понять, что косые волновые полосы грубо соответствуют следующим одномерным редукциям уравнения (2):

$$\begin{aligned} A &= k_0^{-1} \Psi(\xi, \tau), \\ \xi &= k_0[(x_1 - V_{gr}t) \cos \theta + x_2 \sin \theta], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau = \omega_0 t$, $V_{gr} = \omega_0/2k_0$ — групповая скорость. В результате мы имеем одномерное НУШ, которое описывает поперечную динамику идеализированных, бесконечно длинных полос:

$$i\Psi_\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \Psi_{\xi\xi} + \frac{1}{2} |\Psi|^2 \Psi. \quad (4)$$

Весьма важно, что в зависимости от знака дисперсионного коэффициента

$$D(\theta) = (1/2) \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

имеем либо фокусирующее, либо дефокусирующее уравнение. Как следствие этого, динамика процесса кардинально различается в этих двух случаях. Так, в фокусирующем случае (когда $D > 0$) нелинейность может насыщаться на известных солитонных решениях (bright solitons)

$$\Psi_{bs} = \frac{s}{\text{ch} \left[\left(\frac{s}{\sqrt{D}} \right) (\xi - \xi_0) \right]} \exp \left(-\frac{i\tau s^2}{4} + i\phi_0 \right), \quad (5)$$

где s — волновая крутизна, ξ_0 и ϕ_0 — произвольные константы. Эти решения описывают бесконечно длинные гряды волн, состоящие из чередующихся косых гребней и впадин. Физические условия применимости формулы (5) подразумевают выполнение неравенств $s \lesssim 0.1$ и $s/\sqrt{D} \ll 1$, но, как выяснилось в численных экспериментах, фактически эти структуры существуют и при значительно больших значениях $s \lesssim 0.27$. Долговременное поведение таких экстремальных солитонов специально нами исследовалось как для случая $\theta = 0$ (гигантские бризеры, или фриконы, на двумерной поверхности, см. рис. 2), так и для случая $\theta \neq 0$ (см. рис. 1). Как один из наиболее важных результатов данной работы можно отметить тот факт, что в двух горизонтальных измерениях экстремальные солитоны существуют на протяжении длительного времени прежде чем станут заметными их изменения в сторону образования зигзагообразных структур. Два численных примера

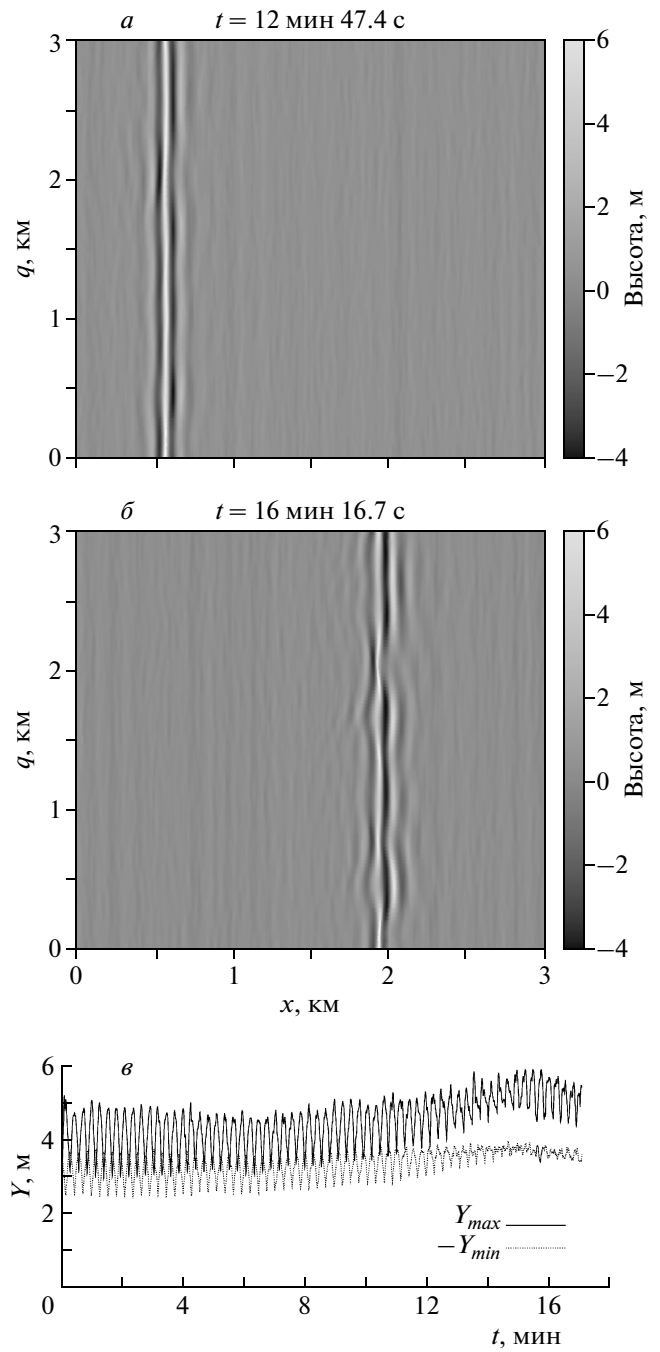


Рис. 2. *a, б* — Эволюция возмущенного гигантского бризера в двух горизонтальных измерениях. *в* — Максимальная высота гребня и наибольшая глубина впадины гигантского бризера в зависимости от времени

эволюции, один для косого солитона и другой для гигантского бризера, представлены на рис. 1, 2.

В дефокусирующем случае (когда $D < 0$) возможны так называемые темные солитоны,

$$\Psi_{ds} = s \operatorname{th} \left[\frac{s}{\sqrt{-D}} (\xi - \xi_0) \right] \exp \left(-\frac{i\tau s^2}{2} + i\phi_0 \right), \quad (6)$$

которые разделяют две области с противоположными амплитудами.

Ввиду сказанного выше становится ясно, что поскольку эффективный коэффициент дисперсии $D(\theta)$ изменяет знак при $\theta_* = \arctg(1/\sqrt{2})$, в полной двумерной динамике случайных волновых полей должно иметься два режима, один режим при $\theta \lesssim \theta_*$, другой — при θ близких к $\pi/2$. Эта гипотеза в целом нашла свое подтверждение в численных экспериментах, описанных далее.

3. БОЛЕЕ ТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для ясности изложения приведем здесь основные уравнения более точной теории, которые послужили основой проведенного компьютерного моделирования (подробности используемого метода описаны в работах [24, 25], см. также [9]). Вертикальную координату обозначим буквой y , а две горизонтальные — x и q , причем волны предполагаются распространяющимися в основном вдоль оси x . Буквой z будет обозначаться комплексная комбинация $x + iy$. Форма свободной поверхности в некоторый момент времени t задается в параметрическом виде с помощью вещественной функции $Y(u, q, t)$:

$$Z = X + iY = u + (i - \hat{H})Y(u, q, t). \quad (7)$$

Здесь $u \in (-\infty, \infty)$ — вспомогательная независимая переменная (конформная координата), а оператор \hat{H} представляет собой преобразование Гильберта

$$\begin{aligned} \hat{H}Y(u, q, t) &= \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^2} i \operatorname{sign} k Y_{km}(t) e^{iku+imq} dk dm, \end{aligned} \quad (8)$$

причем $Y_{km}(t)$ — фурье-компоненты функции $Y(u, q, t)$, т. е.

$$Y_{km}(t) = \int Y(u, q, t) e^{-iku-imq} du dq. \quad (9)$$

Потенциал поля скорости, взятый на свободной границе, также выражается в переменных u, q, t и обозначается как $\psi(u, q, t)$.

Для двух неизвестных функций $Y(u, q, t)$ и $\psi(u, q, t)$ имеется два эволюционных уравнения, в которых фигурируют вариационные производные функционала кинетической энергии $\mathcal{K}\{\psi, Z, \bar{Z}\}$ (чертой над выражениями будем обозначать

комплексное сопряжение). Так называемое кинематическое условие в конформных переменных принимает вид

$$Y_t = \operatorname{Im} \left\{ iZ_u (1 + i\hat{H}) \frac{\delta\mathcal{K}/\delta\psi}{|Z_u|^2} \right\}, \quad (10)$$

а динамическое условие (уравнение Бернулли на свободной границе) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_t &= -g \operatorname{Im} Z - \psi_u \hat{H} \frac{\delta\mathcal{K}/\delta\psi}{|Z_u|^2} + \\ &+ \frac{1}{|Z_u|^2} \operatorname{Im} \left((1 - i\hat{H}) \left[2 \frac{\delta\mathcal{K}}{\delta Z} Z_u + \frac{\delta\mathcal{K}}{\delta\psi} \psi_u \right] \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку точно замкнутого выражения для функционала $\mathcal{K}\{\psi, Z, \bar{Z}\}$ в случае двух горизонтальных измерений не имеется, мы вынуждены использовать его некоторое приближение. Предполагая медленную зависимость всех величин от поперечной горизонтальной координаты q , проведем разложение $\mathcal{K}\{\psi, Z, \bar{Z}\}$ по четным степеням производных $\hat{\partial}_q$ или, что то же самое, по ранее упоминавшемуся малому параметру ϵ :

$$\mathcal{K} \approx \tilde{\mathcal{K}} = -\frac{1}{2} \int \psi \hat{H} \psi_u du dq + \tilde{\mathcal{F}}. \quad (12)$$

Написанный далее в явном виде функционал $\tilde{\mathcal{F}}$ обеспечивает точность первого порядка по ϵ и, кроме того, правильное дисперсионное соотношение $\omega = g^{1/2}(k^2 + m^2)^{1/4}$ во всей фурье-плоскости для волн малой амплитуды:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} &= \frac{i}{8} \int (Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u) \hat{G} \overline{(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)} du dq + \\ &+ \frac{i}{16} \int \left\{ \frac{(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)^2}{Z_u} \hat{E} \overline{(Z - u)} - \right. \\ &\left. - (Z - u) \hat{E} \left[\frac{(Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u)^2}{Z_u} \right] \right\} du dq. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь введены обозначение $\Psi \equiv (1 + i\hat{H})\psi$, а также диагональные в фурье-представлении операторы \hat{G} и \hat{E} , умножающие фурье-компоненты воздействующих функций соответственно на

$$G(k, m) = \frac{-2i}{\sqrt{k^2 + m^2} + |k|}, \quad (14)$$

$$E(k, m) = \frac{2|k|}{\sqrt{k^2 + m^2} + |k|}. \quad (15)$$

Отметим, что первый порядок точности по ϵ обеспечивается равенствами $G(k, 0) = -i/|k|$ и $E(k, 0) = 1$ (см. работы [9, 24, 25]).

Явный вид вариационных производных для постановки в уравнения (10) и (11) приведен ниже (при этом очевидно, что $\delta\tilde{\mathcal{K}}/\delta Z = \delta\tilde{\mathcal{F}}/\delta Z$):

$$\frac{\delta\tilde{\mathcal{K}}}{\delta\psi} = -\hat{H}\psi_u + 2 \operatorname{Re} \left[(1 - i\hat{H}) \frac{\delta\tilde{\mathcal{F}}}{\delta\Psi} \right], \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\tilde{\mathcal{F}}}{\delta\Psi} = & \frac{i}{8} Z_q \hat{\partial}_u \left[\hat{G}(\overline{Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u}) + \right. \\ & \left. + \left(\Psi_q - \frac{Z_q \Psi_u}{Z_u} \right) \hat{E}(\overline{Z - u}) \right] - \\ & - \frac{i}{8} Z_u \hat{\partial}_q \left[\hat{G}(\overline{Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u}) + \right. \\ & \left. + \left(\Psi_q - \frac{Z_q \Psi_u}{Z_u} \right) \hat{E}(\overline{Z - u}) \right], \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\tilde{\mathcal{F}}}{\delta Z} = & -\frac{i}{8} \Psi_q \hat{\partial}_u \left[\hat{G}(\overline{Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u}) + \right. \\ & \left. + \left(\Psi_q - \frac{Z_q \Psi_u}{Z_u} \right) \hat{E}(\overline{Z - u}) \right] + \\ & + \frac{i}{8} \Psi_u \hat{\partial}_q \left[\hat{G}(\overline{Z_u \Psi_q - Z_q \Psi_u}) + \right. \\ & \left. + \left(\Psi_q - \frac{Z_q \Psi_u}{Z_u} \right) \hat{E}(\overline{Z - u}) \right] + \\ & + \frac{i}{16} \left[\hat{\partial}_u \left[\left(\Psi_q - \frac{Z_q \Psi_u}{Z_u} \right)^2 \hat{E}(\overline{Z - u}) \right] - \right. \\ & \left. - \hat{E} \left(\overline{\left(\Psi_q - \frac{Z_q \Psi_u}{Z_u} \right)^2 Z_u} \right) \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Получающиеся уравнения движения достаточно просто и сравнительно быстро решаются на современном персональном компьютере с использованием алгоритмов быстрого преобразования Фурье. Подчеркнем, что при выводе этой модели нигде не предполагалось условие малости волновых амплитуд, поэтому уравнения формально пригодны для описания длинногребневых волн произвольной крутизны и высоты. С практической точки зрения однако приходится ограничивать пространственное разрешение и вводить искусственную диссипацию для устойчивости численной схемы при наличии экстремальных волн, что влечет за собой некоторую недооценку высоты гребней, в худшем случае на величину порядка нескольких процентов.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Вычисления проводились для величин, приведенных к безразмерному виду, в квадратной области

$2\pi \times 2\pi$ с периодическими граничными условиями по горизонтальным координатам x и q . Таким образом, все дискретные фурье-моды соответствуют безразмерным волновым векторам с целочисленными компонентами $\mathbf{k} = (k, m)$. Вектор \mathbf{k}_0 (и ось x_1) брались, вообще говоря, слегка отличными по направлению от оси x , для того чтобы принять во внимание эффект постепенного изменения ориентации волновых гребней, расположенных на косой полосе повышенной амплитуды. Указанный эффект, как было отмечено в работе [9], играет существенную роль в образовании аномальных волн на нелинейной стадии развития модуляционной неустойчивости. Конечные результаты затем были перенормированы к удобной для представления величине $\lambda_0 \approx 100$ м, которая вполне типична в естественных условиях моря. Соответствующий период волны есть $T_0 = [2\pi\lambda_0/g]^{1/2} \approx 8$ с. Из большого общего количества проведенных компьютерных вычислений далее будут представлены лишь две небольших серии численных экспериментов, обозначенных как А1–А4 и В1–В3. Результаты этих экспериментов позволяют достаточно полно обрисовать общую картину явления. В пределах каждой серии при $t = 0$ нормальные фурье-моды волнового поля брались в виде $a_{km}(0) = cF(k, m) \exp(i\gamma_{km})$ с положительной функцией $F(k, m)$, имеющей два приблизительно гауссовых максимума при $\mathbf{k}_0 \pm \Delta\mathbf{k}/2$, и с квазислучайными начальными фазами γ_{km} , различными для А-серии и для В-серии. В каждом индивидуальном эксперименте выбором коэффициента c задавалось свое значение полной энергии $E_{A1}, E_{A2}, E_{A3}, E_{A4}$ и E_{B1}, E_{B2}, E_{B3} . В серии А брались $\mathbf{k}_0 = (40.0, -2.5)$ и $\Delta\mathbf{k} = (7.0, 2.0)$, так что моделировался случай $\theta < \theta_*$, тогда как в серии В моделировались слабо-скрещенные состояния с $\mathbf{k}_0 \pm \Delta\mathbf{k}/2 = (39.5, \pm 3.5)$.

Для серии А некоторые результаты представлены на рис. 3, 4. Модуляционная неустойчивость в этом случае действует с самого начала, и требуется небольшое время 5...8 минут, чтобы сформировались большие волны в тех волновых группах, которые были изначально наиболее высокими. Две соседних больших волны на рис. 4 выглядят как фрагмент косого солитона (ср. с рис. 1а). Вычисления А4 и А3 были остановлены в те моменты, когда началось обрушение больших волн, тогда как в экспериментах А2 и А1 волны оставались гладкими, так что на более поздних временах наблюдались почти стационарные, длинные косые солитоны (не показано).

Результаты численных экспериментов В1–В3 (см. рис. 5–7) оказались более интригующими,

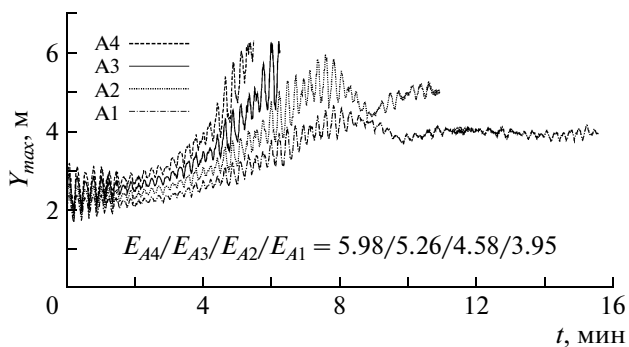


Рис. 3. Максимум подъема свободной поверхности в зависимости от времени в численных экспериментах А1–А4

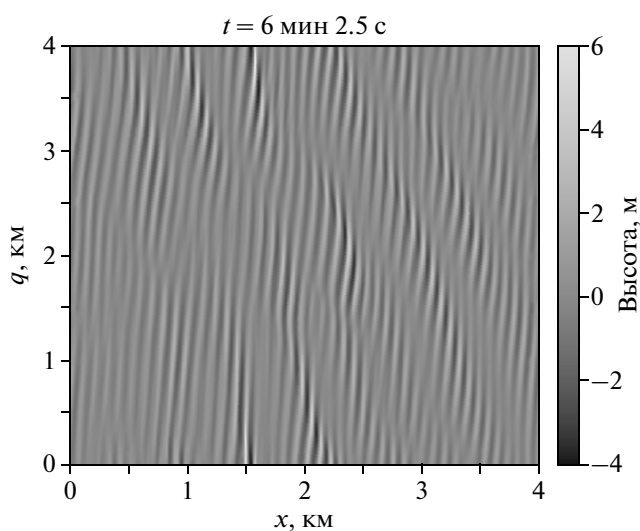


Рис. 4. Эксперимент А3: две большие волны наблюдаются при $x \approx 1.6$ км, $q \approx 3.7 \dots 3.9$ км и при $x \approx 1.5$ км, $q \approx 0.1 \dots 0.3$ км

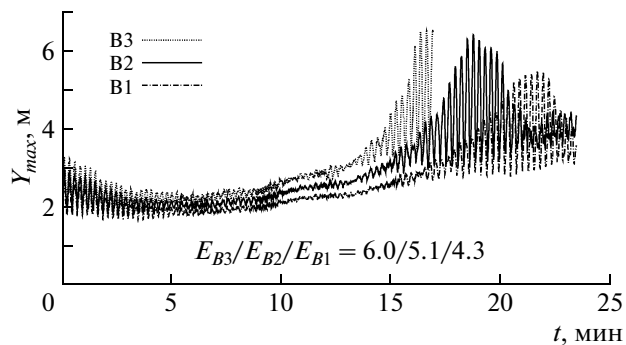


Рис. 5. Максимум подъема свободной поверхности в численных экспериментах В1–В3

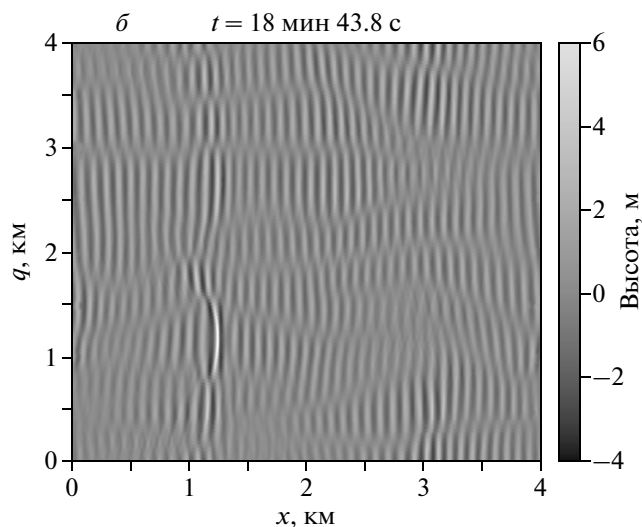
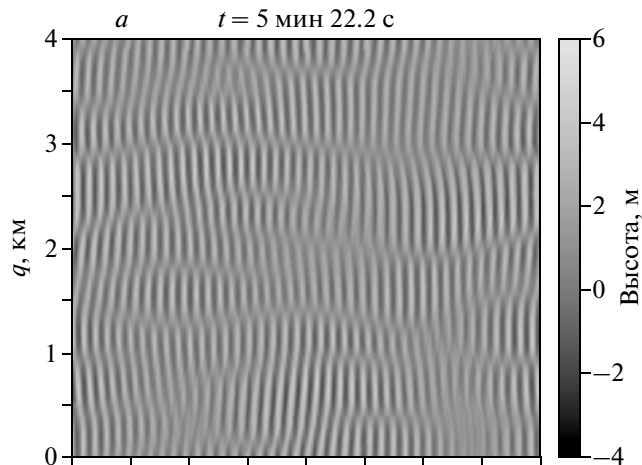


Рис. 6. Эксперимент В2: а) сформировались темные солитоны, б) образовалась гигантская волна при $x \approx 1.2$ км, $q \approx 1.0 \dots 1.3$ км

поскольку волны-убийцы начали образовываться в них не сразу, а только после двух предварительных стадий эволюции волнового поля. На первой стадии, в течение 4...7 минут после начала, происходило формирование темных солитонов вдоль интерференционных минимумов, причем этот процесс сопровождался существенным уменьшением амплитуды вдоль интерференционных максимумов. В целом профили волновой огибающей поперек интерференционных полос становились заметно более плоскими и низкими в районе максимумов модуля амплитуды и более похожими на гиперболический тангенс (6) вблизи минимумов модуля амплитуды. Именно так проявляется действие дефокусирующей нелинейности. В конце этой стадии свободная

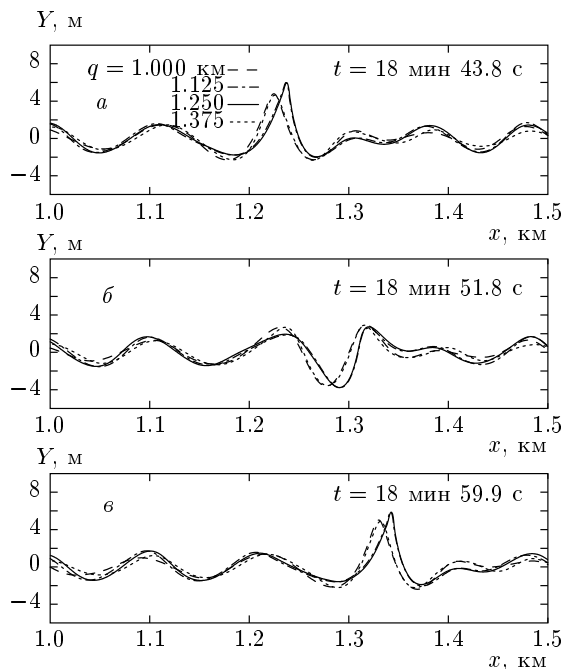


Рис. 7. а) Профили волн-убийцы с рис. 6б. б) На 8 с позднее: «яма в море». в) На 16 с позднее: большая волна поднялась снова

поверхность оказалась разделенной темными солитонами на большое число областей, в каждой из которых динамика приблизительно одномерна (см. рис. 6а). Во второй стадии соседние области сложным образом взаимодействуют друг с другом, так что в одной из них (причем заранее неизвестно, в какой именно области и в какой момент времени) амплитуда волн сильно возрастает, что влечет за собой быстрое развитие модуляционной неустойчивости в продольном направлении. В результате вырастает отдельная волна-убийца, которая оказывается «зажатой» в поперечном направлении между двумя темными солитонами, как показано на рис. 6б. Эта anomальная волна не является стационарной, она «дышит» с периодом $2T_0$, чередуя состояние с наиболее высоким гребнем и состояние с наиболее глубокой впадиной (см. рис. 7 и ср. с результатами работ [8–10]), где были получены похожие профили волн-убийц). После дюжины таких осцилляций большая волна расплзается в поперечном направлении и постепенно исчезает (не показано).

При сравнении результатов серий А и В становится ясно, что необычные свойства экстремальных волн в слабо-скрещенных состояниях морской поверхности сильнее всего выражены в тех случаях,

когда интерференционные полосы примерно перпендикулярны по отношению к волновым фронтам. Сюда относятся как непредсказуемость места и времени появления волн-убийцы, так и заметно большее отношение Y_{max}/A_0 в В-серии.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Приведенные выше численные результаты свидетельствуют в пользу той точки зрения, что в подавляющем большинстве случаев anomальные морские волны связаны с присутствием некоторых когерентных волновых структур. Типичными когерентными структурами для волн на глубокой воде являются спонтанно образующиеся косые солитоны огибающей. Кроме того, возможны также темные солитоны огибающей, важная роль которых на предварительных стадиях эволюции волновых групп перед образованием волн-убийц распознана в данной работе, по-видимому, впервые. В то же время следует сказать, что в двух горизонтальных измерениях характерное время жизни когерентных структур оказывается на порядки меньше, чем в строго одномерном случае (соответственно десятки волновых периодов против возможных тысяч).

Что касается точности используемой здесь приближенной теории, то в ряде случаев численные эксперименты проводились на границе области ее применимости, т. е. при $\epsilon \sim 0.1 \dots 0.2$. Разумеется, при этом не приходится ожидать детального количественного совпадения между приближенной и «точной» эйлеровской моделями, однако качественное соответствие в динамике должно иметься по крайней мере до тех пор, пока не вступят в силу всевозможные существенно двумерные механизмы взаимодействия волн, которые сильно нарушают исходное требование квазиодномерности волнового поля. Подробное сравнение наших результатов с результатами «точной» эйлеровской динамики весьма желательно, но, к сожалению, пока что едва ли осуществимо из-за практической недоступности моделирования «точных» уравнений в достаточно больших областях (требуется примерно $40\lambda_0 \times 40\lambda_0$). Именно по этой причине намного более «быстрые» приближенные модели вроде той, что использована в данной работе, остаются весьма востребованными. Особенно актуальной в этой связи выглядит задача разработки и применения некоторой полностью изотропной в горизонтальной плоскости, сильно нелинейной и в то же время достаточно простой и эффективной модели поверхностных волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 09-01-00631, 07-01-92165), при поддержке программы «Ведущие научные школы России» НШ-4887.2008.2 и программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики».

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Kharif and E. Pelinovsky, *Europ. J. Mech. B/Fluids* **22**, 603 (2003).
2. K. Dysthe, H. E. Krogstad, and P. Muller, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **40**, 287 (2008).
3. Special Issue: *Europ. J. Mech. B/Fluids* **25**, 535 (2006).
4. P. A. E. M. Janssen, *J. Phys. Oceanogr.* **33**, 863 (2003).
5. F. Fedele and M. A. Tayfun, *J. Fluid Mech.* **620**, 221 (2009).
6. C. Fochesato, S. Grilli, and F. Dias, *Wave Motion* **44**, 395 (2007).
7. H. Socquet-Juglard, K. Dysthe, and K. Trulsen et al., *J. Fluid Mech.* **542**, 195 (2005).
8. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **74**, 036305 (2006).
9. V. P. Ruban, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 044502 (2007).
10. A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov, *Письма в ЖЭТФ* **88**, 356 (2008).
11. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Europ. J. Mech. B/Fluids* **21**, 283 (2002).
12. A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov, *Письма в ЖЭТФ* **81**, 318 (2005).
13. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Prokofiev, *Europ. J. Mech. B/Fluids* **25**, 677 (2006).
14. O. Gramstad and K. Trulsen, *J. Fluid Mech.* **582**, 463 (2007).
15. M. Onorato, T. Waseda, A. Toffoli et al., *Phys. Rev. Lett.* **102**, 114502 (2009).
16. M. Onorato, A. R. Osborne, and M. Serio, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 014503 (2006).
17. P. K. Shukla, I. Kourakis, B. Eliasson et al., *Phys. Rev. Lett.* **97**, 094501 (2006).
18. В. Е. Захаров, *ЖЭТФ* **51**, 688 (1966).
19. V. E. Zakharov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190 (1968).
20. T. B. Benjamin and J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
21. M. A. Tayfun, *J. Geophys. Res.* **85**, 1548 (1980).
22. D. H. Peregrine, *Adv. Appl. Mech.* **16**, 9 (1976).
23. I. V. Lavrenov and A. V. Porubov, *Europ. J. Mech. B/Fluids* **25**, 574 (2006).
24. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **71**, 055303(R) (2005).
25. V. P. Ruban and J. Dreher, *Phys. Rev. E* **72**, 066303 (2005).
26. K. B. Dysthe, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **369**, 105 (1979).
27. K. Trulsen and K. B. Dysthe, *Wave Motion* **24**, 281 (1996).
28. K. Trulsen, I. Kliakhandler, K. B. Dysthe et al., *Phys. Fluids* **12**, 2432 (2000).
29. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **79**, 065304(R) (2009).