

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА КАЛИБРОВОЧНОЙ «СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ» МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ТРЕХМЕРНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ РЕШЕТКЕ

*С. Н. Вергелес**

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

*Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 16 июня 2009 г.

Вычислена статистическая сумма калибровочной системы на регулярной трехмерной решетке с калибровочной группой Z_2 , взаимодействующей с майорановскими фермионами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно автором был предложен новый подход для вычисления статистической суммы двумерной модели Изинга на регулярной решетке [1]. Идея этого подхода заключается в следующем. Каждой вершине решетки приписывается независимый элемент алгебры Клиффорда в матричном представлении. Таким образом, число образующих \mathfrak{N} алгебры Клиффорда не может быть меньше числа узлов решетки или числа степеней свободы статистической системы. Определяется некий полином от образующих этой алгебры, зависящий от параметра «температура». Этот полином является матрицей ортогонального поворота в евклидовом пространстве размерности \mathfrak{N} в спинорном представлении. След этого полинома пропорционален статистической сумме двумерной модели Изинга. Этот факт вытекает из того, что рассматриваемый след представляется как сумма по всем замкнутым контурам с самопересечениями на правильной планарной решетке, причем каждому ребру контура приписывается некий положительный вес, зависящий от температуры.

В этой работе описанный подход распространяется на трехмерную статистическую систему на правильной кубической решетке. Вычисляется сумма по самопересекающимся поверхностям. При этом учитываются как замкнутые поверхности, так и поверхности с краем. Каждой грани поверхности со-

поставляется некий положительный множитель μ^2 , зависящий от температуры. Каждому отрезку края поверхности также сопоставляется множитель, пропорциональный μ . Таким образом, каждой замкнутой поверхности соответствует общий положительный вес. Оказывается, однако, что общий знак веса поверхности с краем зависит от конфигурации края, но не зависит от формы поверхности, опирающейся на этот край.

Важной особенностью рассматриваемой статистической суммы является тот факт, что невозможно сохранить лишь замкнутые поверхности и выбросить незамкнутые. Это означает, что рассматриваемая здесь система не включает в себя модель Изинга на трехмерной регулярной решетке. Действительно, как известно, трехмерная модель Изинга на регулярной решетке дуальна трехмерной калибровочной модели с калибровочной группой Z_2 [2]. Статистическая сумма последней представляется как сумма по замкнутым поверхностям с самопересечениями, причем каждой грани сопоставляется положительный вес, зависящий от температуры. Край поверхности следует интерпретировать как рождение, распространение и аннигиляцию пары фермионов, взаимодействующих с калибровочным полем. В разд. 2.5 будет показано, что эти фермионы являются решеточным аналогом майорановских фермионов.

Таким образом, вычисленная статистическая сумма может интерпретироваться как статистичес-

*E-mail: vergeles@itp.ac.ru

кая сумма калибровочной системы на регулярной трехмерной решетке с калибровочной группой Z_2 , взаимодействующей с майорановскими фермионами¹⁾.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Алгебра Дирака – Клиффорда в матричном представлении

Образующие алгебры Клиффорда $\{\xi_x\}$ удовлетворяют соотношениям

$$\xi_x \xi_y + \xi_y \xi_x = 2\delta_{x,y}, \quad (2.1)$$

$$x, y, \dots = 1, \dots, I = 2K,$$

и предполагаются эрмитовыми матрицами размерности $2^{I/2}$. Такая размерность является минимальной при данном числе образующих. Теория таких матриц в удобном для физиков виде содержится в работе [3]. Эти матрицы легко могут быть представлены в явном виде. Однако здесь это не сделано ввиду того, что их явный вид не используется. Из алгебры (2.1) немедленно следует, что след от любого произведения нечетного числа ξ -матриц равен нулю и

$$\text{tr } \xi_x \xi_y = 2^{I/2} \delta_{x,y}, \quad (2.2)$$

$$\text{tr } \xi_x \xi_y \xi_z \xi_v = 2^{I/2} (\delta_{x,y} \delta_{z,v} - \delta_{x,z} \delta_{y,v} + \delta_{x,v} \delta_{y,z})$$

и т. д. Очевидно, что любое произведение ξ -матриц путем их перестановок и использования равенств $\xi_x^2 = 1$ приводится либо к числу ± 1 (в зависимости от числа перестановок), либо к произведению попарно различных ξ -матриц. В последнем случае согласно формуле (2.2) след произведения ξ -матриц равен нулю, а в первом — $\pm 2^{I/2}$.

2.2. Описание степеней свободы системы

Пронумеруем оси простой трехмерной кубической решетки числами 1, 2, 3. Каждая вершина \mathbf{v}_x имеет номер, состоящий из трех натуральных чисел $\mathbf{x} \equiv (m, n, l)$, причем

$$m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N, \quad l = 1, \dots, L. \quad (2.3)$$

¹⁾ Возможно, было бы правильнее называть вычисленную сумму квантовой амплитудой перехода из вакуума в вакуум. Однако мы оставляем здесь для этой величины термин «статистическая сумма» по той причине, что используемая метрика — евклидова.

Для простоты считаем числа M, N, L четными. Предполагается, что числа m, n, l равномерно возрастают при движении соответственно вдоль первой, второй и третьей оси. Определим базисные векторы решетки: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Таким образом, вектор \mathbf{e}_i направлен в положительном направлении i -й оси.

Далее считаем, что $I = 3MNL$.

Разобьем совокупность образующих алгебры Клиффорда на три группы, в каждой из которых имеется MNL матриц. Образующие первой группы обозначим $\{\alpha_x\}$, второй — $\{\beta_x\}$, третьей — $\{\gamma_x\}$. Обозначим также через $l_{x,i} = l_{m,n,l;i}$ ребро, соединяющее соседние вершины \mathbf{v}_x и $\mathbf{v}_{x+\mathbf{e}_i}$, через $f_{x,i}$ — грань с вершинами $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{e}_j, \mathbf{x} + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k, \mathbf{x} + \mathbf{e}_k)$, $i = 1, 2, 3$. Здесь \mathbf{e}_j и \mathbf{e}_k — базисные векторы, дополнительные или ортогональные к \mathbf{e}_i .

По определению каждому ребру $l_{x,1}$ сопоставляется матрица α_x , ребру $l_{x,2}$ — матрица β_x , ребру $l_{x,3}$ — матрица γ_x . Далее используется запись

$$\xi_x = \xi_x^{(i)} = (\alpha_x, \beta_x, \gamma_x), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

2.3. Определение статистической суммы

Сопоставим каждой грани унитарную матрицу поворота в спинорном представлении:

грани $f_{x,1}$ — матрицу

$$U_{(m,n,l)}^{(1)} \equiv (\lambda + \mu \beta_x \gamma_{x+\mathbf{e}_2}) (\lambda + \mu \beta_{x+\mathbf{e}_3} \gamma_x), \quad (2.5)$$

грани $f_{x,2}$ — матрицу

$$U_{(m,n,l)}^{(2)} \equiv (\lambda + \mu \alpha_x \gamma_{x+\mathbf{e}_1}) (\lambda + \mu \alpha_{x+\mathbf{e}_3} \gamma_x), \quad (2.6)$$

грани $f_{x,3}$ — матрицу

$$U_{(m,n,l)}^{(3)} \equiv (\lambda + \mu \alpha_x \beta_{x+\mathbf{e}_1}) (\lambda + \mu \alpha_{x+\mathbf{e}_2} \beta_x). \quad (2.7)$$

Здесь

$$\mathbf{x} = (m, n, l), \quad \lambda = \cos \frac{\psi}{2}, \quad \mu = \sin \frac{\psi}{2}. \quad (2.8)$$

На рис. 1 изображен фрагмент решетки, содержащий вершину \mathbf{x} и три смежных грани $f_{x,1}$, $f_{x,2}$, $f_{x,3}$, а также обозначены ξ -матрицы, приписанные соответствующим ребрам. Изогнутые под прямым углом стрелки, лежащие в гранях и указывающие на переход от одного ребра к другому, изображают матрицу поворота, соответствующую одной из круглых скобок в правых частях (2.5), (2.6) и (2.7). При этом

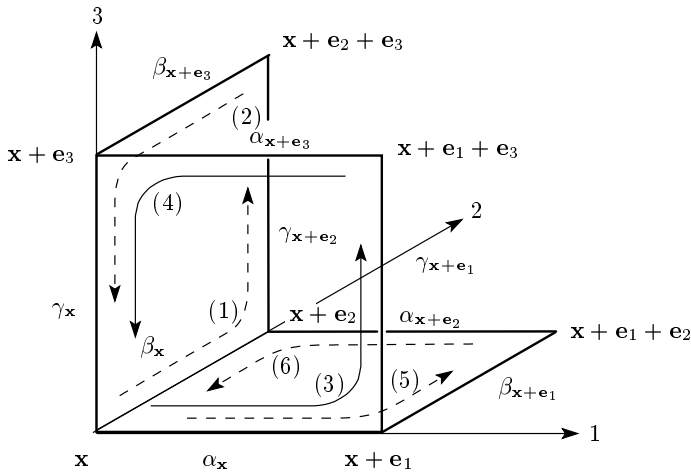


Рис. 1

направление стрелки указывает на порядок произведения ξ -матриц. Например, стрелка (1) соответствует первой круглой скобке, а стрелка (2) — второй круглой скобке в (2.5) и т. д. Сомножители в правых частях в (2.5), (2.6) и (2.7) не коммутируют между собой, поэтому важен их порядок. Нам понадобится представление величин (2.5)–(2.7) в виде следующих сумм:

$$U_{(m,n,l)}^{(1)} = (\lambda^2 + \mu^2 \beta_x \gamma_{x+e_2} \beta_{x+e_3} \gamma_x) + t \lambda \mu (\beta_x \gamma_{x+e_2} + \beta_{x+e_3} \gamma_x), \quad (2.9)$$

$$U_{(m,n,l)}^{(2)} = (\lambda^2 + \mu^2 \alpha_x \gamma_{x+e_1} \alpha_{x+e_3} \gamma_x) + t \lambda \mu (\alpha_x \gamma_{x+e_1} + \alpha_{x+e_3} \gamma_x), \quad (2.10)$$

$$U_{(m,n,l)}^{(3)} = (\lambda^2 + \mu^2 \alpha_x \beta_{x+e_1} \alpha_{x+e_2} \beta_x) + t \lambda \mu (\alpha_x \beta_{x+e_1} + \alpha_{x+e_2} \beta_x). \quad (2.11)$$

В рассматриваемой модели

$$t = 1. \quad (2.12)$$

В случае $t \neq 1$ матрицы (2.9)–(2.11) не являются матрицами поворота и поэтому применяемый здесь метод вычисления статистической суммы оказывается непригодным.

Статистическая сумма системы пропорциональна следу от упорядоченного произведения матриц поворота в спинорном представлении:

$$Z = C \operatorname{tr} U, \quad (2.13)$$

$$U = \left(\hat{P} \prod_l \right) U_{(l)}, \quad (2.14)$$

$$U_{(l)} = \left(\hat{P} \prod_n \right) U_{(n,l)}, \quad (2.15)$$

$$U_{(n,l)} = \left(\hat{P} \prod_m \right) U_{(m,n,l)} = \dots U_{(m-1,n,l)} U_{(m,n,l)} U_{(m+1,n,l)} \dots, \quad (2.16)$$

$$U_{(m,n,l)} \equiv U_{(m,n,l)}^{(1)} U_{(m,n,l)}^{(2)} U_{(m,n,l)}^{(3)}. \quad (2.17)$$

Здесь C — некая числовая константа, которая здесь не представляет интереса, символ $(\hat{P} \prod_m)$ в формуле (2.16) обозначает упорядоченное произведение матриц (2.17) по всем значениям m при фиксированных значениях чисел (n, l) , так что в этом произведении матрица $U_{(m,n,l)}$ располагается левее матрицы $U_{(m',n,l)}$, если $m < m'$. Аналогично определяются упорядоченные произведения в (2.15) (при фиксированном l) и в (2.14).

2.4. Замкнутые поверхности с самопересечениями

Рассмотрим вклад в матрицу (2.14) нулевой степени относительно параметра t . Согласно формулам (2.9)–(2.11) в этом случае каждая грань дает два вклада в U : первый пропорционален числу λ^2 , а второй — матрице $\{\mu^2 \times$ (упорядоченное произведение четырех ξ -матриц, соответствующих ребрам грани) $\}$. Очевидно, что под знаком следа в (2.13) не все слагаемые матрицы U существенны. Например, согласно (2.2)

$$\operatorname{tr} C \left\{ (\lambda^2)^{(3MNL-1)} \mu^2 \beta_x \gamma_{x+e_2} \beta_{x+e_3} \gamma_x \right\} = 0. \quad (2.18)$$

Для того чтобы слагаемое матрицы U давало ненулевой вклад в статистическую сумму, необходимо, чтобы каждая ξ -матрица в этом слагаемом была в четной степени. Отсюда следует, что слагаемые из U , пропорциональные μ^2 и дающие ненулевой вклад в статистическую сумму, представляются на решетке в виде замкнутых поверхностей с самопересечениями. Очевидно, что каждое ребро, принадлежащее такой поверхности, может принадлежать двум или четырем граням этой поверхности. В последнем случае на ребре имеет место самопересечение поверхности. Каждой грани $f_{x,i}$ такой поверхности ставится

в соответствие слагаемое из выражения для $U_{(m,n,l)}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, пропорциональное μ^2 и четвертой степени матриц ξ (см. (2.9)–(2.11)). Порядок записи ξ -матриц в произведении в выражении для \mathcal{U} , соответствующем замкнутой поверхности (не обязательно связной), определяется формулами (2.13)–(2.17). Из сказанного выше следует, что в слагаемом в выражении для \mathcal{U} , соответствующем некоей замкнутой поверхности, каждая ξ -матрица может быть либо в степени 0 (соответствующее ребро не принадлежит поверхности), либо в степени 2 (соответствующее ребро принадлежит только двум граням поверхности), либо в степени 4 (соответствующее ребро принадлежит четырём граням поверхности).

Пусть S — число граней замкнутой поверхности. Из сказанного выше легко находим вклад в статистическую сумму от этой поверхности (при макроскопических размерах решетки можно считать, что общее число граней решетки равно $3MNL$):

$$\Delta Z = C \left[2^{3MNL/2} (\lambda^2)^{3MNL} \right] (\mu/\lambda)^{2S}. \quad (2.19)$$

С точностью до знака равенство (2.19) является очевидным. Остается лишь доказать, что каждая замкнутая поверхность дает положительный вклад в статистическую сумму.

Рассмотрим вклад в \mathcal{U} от простейшей замкнутой поверхности без самопересечений: элементарного кубика с гранями $f_{\mathbf{x},1}, f_{\mathbf{x},2}, f_{\mathbf{x},3}, f_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1,1}, f_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2,2}, f_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3,3}$. Здесь порядок перечисления граней соответствует порядку построения из элементарных «кирпичиков» соответствующего слагаемого в выражении для \mathcal{U} . Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{U} = & (\beta_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \gamma_{\mathbf{x}}) \times \\ & \times (\alpha_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1} \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \gamma_{\mathbf{x}}) (\alpha_{\mathbf{x}} \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1} \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \beta_{\mathbf{x}}) \times \\ & \times (\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}) \times \\ & \times (\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}) \times \\ & \times (\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3}) = 1. \quad (2.20) \end{aligned}$$

В этом произведении каждая ξ -матрица содержится дважды.

Для общего доказательства положительности знака в равенстве (2.19) рассечем замкнутую поверхность плоскостью, параллельной плоскости (12) и проходящей через середины ребер $l_{m,n,l;3}$, $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$. Обозначим эту плоскость \mathfrak{F}_l . В каждой плоскости \mathfrak{F}_l имеется естественная структура правильной плоской решетки, вершины которой принадлежат серединам ребер $l_{m,n,l;3}$ и обозначаются $\mathbf{v}_{m,n}$. Ребра этой решетки

обозначаются $l_{m,n;1}$ и $l_{m,n;2}$. Ребро $l_{m,n;1}$ соединяет вершины $\mathbf{v}_{m,n}$ и $\mathbf{v}_{m+1,n}$, а ребро $l_{m,n;2}$ — вершины $\mathbf{v}_{m,n}$ и $\mathbf{v}_{m,n+1}$. Таким образом, ребро $l_{m,n;1}$ принадлежит грани $f_{\mathbf{x},2}$, а ребро $l_{m,n;2}$ — грани $f_{\mathbf{x},1}$. Описанную решетку также обозначим \mathfrak{F}_l . Удобно считать, что матрицы $\gamma_{m,n,l}$ сопоставлены соответствующим вершинам $\mathbf{v}_{m,n}$ решетки \mathfrak{F}_l .

Зафиксируем l и изобразим жирными те ребра решетки \mathfrak{F}_l , которые принадлежат граням рассматриваемой замкнутой поверхности. Очевидно, что совокупность жирных ребер на решетке \mathfrak{F}_l образует замкнутый контур с самопересечениями на простой плоской решетке, причем в одной вершине $\mathbf{v}_{m,n}$ могут сойтись два или четыре жирных ребра²⁾. Преобразуем матричные множители, соответствующие граням $f_{\mathbf{x},1}$ и $f_{\mathbf{x},2}$ замкнутой поверхности, следующим образом:

$$(\beta_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \gamma_{\mathbf{x}}) = (\gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}) (\beta_{\mathbf{x}} \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3}), \quad (2.21)$$

$$(\alpha_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1} \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \gamma_{\mathbf{x}}) = (\gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}) (\alpha_{\mathbf{x}} \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3}). \quad (2.22)$$

Заметим, что матрицы $(\gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_i})$, $i = 1, 2$, коммутируют со всеми матрицами $\alpha_{\mathbf{x}'}$, $\beta_{\mathbf{x}'}$ без ограничений, а также с матрицами $(\gamma_{\mathbf{x}'} \gamma_{\mathbf{x}'+\mathbf{e}_j})$, $j = 1, 2$, при $l \neq l'$. Однако матрицы $(\gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_i})$, $i = 1, 2$ и $(\gamma_{\mathbf{x}'} \gamma_{\mathbf{x}'+\mathbf{e}_j})$, $j = 1, 2$, при $l = l'$, вообще говоря, не коммутируют, поскольку в наборе четырех матриц $(\gamma_{\mathbf{x}}, \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_i}, \gamma_{\mathbf{x}'}, \gamma_{\mathbf{x}'+\mathbf{e}_j})$ могут оказаться совпадающие матрицы. Отсюда и из формул (2.21) и (2.22) видно, что в слагаемом в выражении для \mathcal{U} , соответствующем замкнутой поверхности, можно вынести налево все матричные множители $(\gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2})$ и $(\gamma_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1})$, но без относительного изменения порядка самих этих множителей. При этом общий знак этого слагаемого в \mathcal{U} не изменится. Более того, произведение всех вынесенных налево γ -матриц сворачивается в единицу. Действительно, порядок записи вынесенных налево γ -матриц (при фиксированном l) соответствует порядку записи γ -матриц, определенному для нахождения статистических весов замкнутых контуров с самопересечениями на правильной плоской решетке при вычислении статистической суммы двумерной модели Изинга [1]. В работе [1] доказано, что такие упорядоченные произведения γ -матриц сворачиваются в единицу.

Аналогичным образом можно сократить γ -матрицы при всех прочих l .

²⁾ Как известно, сумма по таким замкнутым контурам с определенным весом дает с точностью до множителя статистическую сумму двумерной модели Изинга (см., например, [1, 4]).

Таким образом, мы можем в любом слагаемом в выражении для \mathcal{U} , соответствующем замкнутой поверхности, вычеркнуть все γ -матрицы без изменения знака.

Далее действуем аналогично. Плоскость, рассекающую замкнутую поверхность через середины ребер $\{m, n, l; 2, m = 1, \dots, M, l = 1, \dots, L\}$, обозначим \mathfrak{P}_n . На плоскости \mathfrak{P}_n имеется естественная структура правильной плоской решетки, вершины которой (при фиксированном n) обозначаются $\mathbf{v}_{m,l}$. Матрицы $\beta_{m,n,l}$ сопоставляются вершинам $\mathbf{v}_{m,l}$. С учетом (2.21) и

$$(\alpha_{\mathbf{x}}\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}\beta_{\mathbf{x}}) = (\beta_{\mathbf{x}}\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1})(\alpha_{\mathbf{x}}\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}) \quad (2.23)$$

мы можем при фиксированном n вынести все множители $(\beta_{\mathbf{x}}\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3})$ и $(\beta_{\mathbf{x}}\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1})$, не изменяя их взаимного расположения, налево из остатка произведения ξ -матриц, соответствующего замкнутой поверхности. При этом общий знак этого произведения не изменяется, и произведение β -матриц при каждом значении n сворачивается в единицу. Далее остается произведение одних α -матриц, которое сворачивается при каждом фиксированном m в единицу.

Таким образом установлено, что произведение ξ -матриц в каждом слагаемом в выражении для \mathcal{U} , соответствующем любой замкнутой поверхности, сворачивается в единицу. Тем самым доказана формула (2.19).

2.5. Поверхности с краем

Рассмотрим вклады в статистическую сумму (2.13), ненулевые относительно параметра t в (2.9)–(2.11).

Простейшим таким примером является поверхность с краем, изображенная на рис. 2. Совокупность изогнутых под прямым углом жирных стрелок³⁾ образует край поверхности. Сама же поверхность на рис. 2 есть заштрихованная грань с вершинами $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6$.

Вклад в статистическую сумму поверхности с краем, изображенной на рис. 2, пропорционален t^4 . Согласно правилу, вклад от этой поверхности в \mathcal{U} пропорционален выражению

$$\Delta_1 \mathcal{U} \sim (\beta_1 \gamma_1)(\alpha_1 \beta_1)(\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2 \gamma_1)(\beta_2 \gamma_2)(\alpha_2 \beta_2) = -1, \quad (2.24)$$

причем здесь и в следующем примере коэффициенты пропорциональности положительны. В (2.24)

³⁾ Это те же стрелки, что на рис. 1.

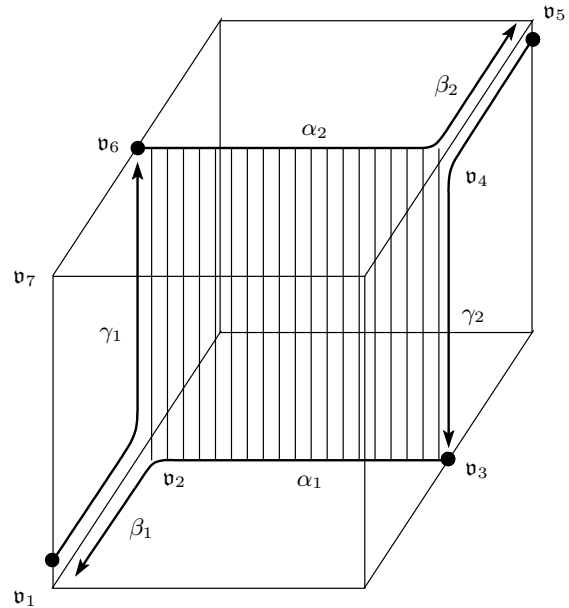


Рис. 2

сомножители вида $(\beta_1 \gamma_1)$, заключенные в круглые скобки, являются вкладом от стрелки в грани с вершинами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7$. Совокупность сомножителей, заключенных в круглые скобки, является фактором в $\Delta \mathcal{U}$ от стрелки в какой-либо грани, либо вкладом от целой грани (т.е. вкладом от пары стрелок из одной грани). Каждая грань дает не более одного фактора, который может быть либо нулевой степени относительно ξ -матриц и пропорционален λ^2 , либо второй степени (изображаемый одинарной изогнутой стрелкой и пропорционален t), либо четвертой степени относительно ξ -матриц. Например, заштрихованная грань с вершинами $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6$ дает вклад четвертой степени относительно ξ -матриц: $(\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2 \gamma_1)$.

Теперь рассмотрим вклад в \mathcal{U} от поверхности с краем, изображенной на рис. 3. Как и в предыдущем случае, изогнутые жирные стрелки образуют край поверхности, а сама поверхность состоит из трех заштрихованных граней. Вклад в статистическую сумму поверхности с краем, изображенной на рис. 3, пропорционален t^6 . Вклад от этой поверхности в \mathcal{U} пропорционален выражению

$$\Delta_2 \mathcal{U} \sim (\beta_1 \gamma_1)(\alpha_1 \beta_1)(\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2 \gamma_1)(\beta_3 \gamma_2)(\beta_2 \gamma_3) \times (\alpha_2 \beta_3 \alpha_3 \beta_2)(\alpha_3 \gamma_4 \alpha_4 \gamma_3)(\beta_4 \gamma_4)(\alpha_4 \beta_4) = 1. \quad (2.25)$$

Из сравнения правых частей формул (2.24) и (2.25) видно, что фактор от поверхности с краем в соответствующем слагаемом в статистической сумме может быть любого знака. Более детальное изу-

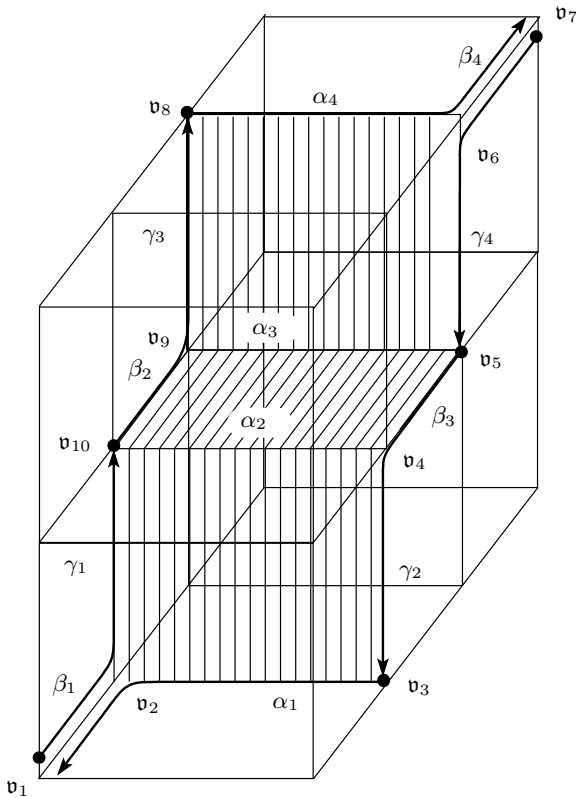


Рис. 3

чение этого вопроса показывает, что знаки факторов поверхностей с краем зависят от формы края, но не зависят от формы поверхности с заданным краем.

Описанная ситуация напоминает ситуацию в случае майорановских фермионов на трехмерной решетке, взаимодействующих с абелевым калибровочным полем. В Приложении В показано, что в последнем случае вклад в статистическую сумму от майорановских фермионов также представляется как сумма по поверхностям с краем, причем край поверхности интерпретируется как рождение, распространение и аннигиляция пары фермионов. Так же, как и в изучаемой здесь модели, каждая такая поверхность дает некий фактор в одно из слагаемых всего интеграла, причем знак этого фактора может быть любым и определяется формой границы поверхности, но не самой поверхностью. Модуль же этого фактора пропорционален ϵ^s , где ϵ — некое положительное число, а s — число граней соответствующей поверхности.

Таким образом, изложенное дает основание принять гипотезу, что изучаемая здесь статистическая сумма является статистической суммой абелевой калибровочной системы с симметрией Z_2 (что очевид-

но), взаимодействующей с майорановскими фермионами. Именно вследствие этой гипотезы введено слово «суперсимметричный» в заголовок статьи.

В связи с этой гипотезой необходимо сделать следующий комментарий.

Как известно [5], на периодических решетках невозможно построить удовлетворительный вариант локального действия дираковских фермионов, в континуальном пределе переходящего в обычное дираковское действие. Проблема, в частности, заключается в том, что на периодических решетках невозможно построить фермионное действие, описывающее одно единственное киральное (вейлевское) фермионное поле и в континуальном пределе переходящее в обычное действие кирального поля. Эта проблема называется «проблемой удвоения фермионных состояний». Известно также [6], что ценой увеличения размерности решетки можно построить одно вейлевское поле на решеточной гиперповерхности коразмерности один. Например, на $4 + 1$ -мерной решетке можно построить действие одного вейлевского поля на 4-мерной подрешетке. Однако эта конструкция не представляется изящной и потому перспективной. К этому же заключению подводит тот факт, что проблема взаимодействия таких вейлевских полей с калибровочным полем не решена в общем случае вне рамок теории возмущений.

Отсюда можно сделать следующий вывод: подход к изучению калибровочных систем на решетке, включающих фермионные степени свободы, и основанный на использовании решеточного действия, вообще говоря, не является корректным. Но для решения этой проблемы возможны и другие подходы. Дело в том, что экспонента от действия под знаком суммы (интеграла) по степеням свободы системы необходима лишь для нахождения квантовых амплитуд перехода. Хотя в континуальной теории метод нахождения амплитуд перехода при помощи функционального интеграла от действия в экспоненте весьма эффективен, в решеточных теориях на таком пути, как мы видим, могут возникнуть серьезные препятствия вследствие отсутствия самого действия. Принципиально это препятствие может быть преодолено путем непосредственного определения амплитуд перехода, минуя этап построения действия⁴⁾. Этот подход представляется более перспективным при изуче-

⁴⁾ Например, задание правил диаграммной техники определяет элементарные амплитуды перехода и правила их суперпозиции и построения любых амплитуд из элементарных. Таким образом, знание правил диаграммной техники освобождает от необходимости знания действия и изучения функционального интеграла, приводящего к этим правилам.

нии фундаментальных явлений, особенно в случае дискретного пространства-времени: нельзя исключить, что именно квантовые амплитуды перехода являются наиболее элементарными математическими объектами. Именно такой подход фактически реализован в этой работе.

Сказанное выше означает также, что вопрос о представлении статистической суммы (амплитуды перехода вакуум–вакуум) (2.13) в виде экспоненты от некоего решеточного действия под знаком суммы (интеграла) по степеням свободы системы не является полностью корректным. Действительно, сумма по замкнутым поверхностям есть не что иное как статистическая сумма калибровочной модели Изинга, т. е. просуммированная по степеням свободы системы экспонента от решеточного действия калибровочного поля без материи с калибровочной группой Z_2 . Однако сумма по незамкнутым поверхностям едва ли может быть представлена аналогично в виде интеграла по фермионам от соответствующей экспоненты, хотя ее и следует интерпретировать как вклад от майорановских фермионов. Последнее утверждение следует из сравнения определяющих свойств весов незамкнутых поверхностей (знакопеременность весов, зависящая от формы границы поверхности) в рассматриваемой модели и в случае майорановских фермионов на решетке (см. Приложение В). Однако полного совпадения этих весов едва ли можно добиться путем поиска подходящей решеточной фермионной модели, поскольку в последних всегда имеется эффект удвоения состояний. Корректная постановка задачи представляется следующим образом: предположим, что в модели, представленной квантовыми амплитудами перехода (но не действием) имеется фазовый переход второго рода, т. е. длинноволновый или макроскопический предел. Тогда следует изучить свойства амплитуд в длинноволновом пределе и сравнить их со свойствами амплитуд континуальных теорий. В результате может быть установлено соответствующее отождествление в точке фазового перехода.

Нужно заметить, что свободная энергия изучаемой модели имеет особенность по параметру ψ (см. ниже). Это означает, что в модели имеется фазовый переход. Однако природа этого фазового перехода в настоящей работе не изучена.

3. ПЕРВЫЙ ЭТАП ДИАГОНАЛИЗАЦИИ МАТРИЦЫ $\mathcal{O}_{x,y}$

В Приложении А приведены формулы, выражающие статистическую сумму (2.13) через собствен-

ные значения матрицы ортогонального вращения $\mathcal{O}_{x,y}$ (см. (A.1)–(A.4)). Поэтому в этом и следующем разделах решается задача нахождения собственных значений матрицы $\mathcal{O}_{x,y}$, окончательный вид которых приводится в формуле (4.17). Читатель, желающий пропустить эти громоздкие вычисления, может продолжить чтение статьи, отталкиваясь от формулы (4.17).

В статистическом пределе, когда $M, N, L \rightarrow \infty$, задача отыскания собственных значений матрицы $\mathcal{O}_{x,y}$ кардинально упрощается, поскольку на относительно небольшом отдалении от границ матрицы \mathcal{O} и ω становятся трансляционно инвариантными. Поэтому диагонализация этих матриц осуществляется при помощи преобразования Фурье, т. е. перехода в квазиимпульсное представление. При этом используется следующий полный ортонормированный набор функций на решетке:

$$\begin{aligned}
 |p\rangle &\equiv \Psi_p(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{ipm}, \\
 |q\rangle &\equiv \Psi_q(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{iqn}, \\
 |r\rangle &\equiv \Psi_r(l) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{irl}, \\
 p &= -\frac{\pi(M-2)}{M}, -\frac{\pi(M-4)}{M}, \dots, 0, \\
 &\quad \frac{2\pi}{M}, \dots, \pi, \\
 q &= -\frac{\pi(N-2)}{N}, \\
 &\quad -\frac{\pi(N-4)}{N}, \dots, 0, \frac{2\pi}{N}, \dots, \pi, \\
 r &= -\frac{\pi(L-2)}{L}, -\frac{\pi(L-4)}{L}, \dots, 0, \frac{2\pi}{L}, \dots, \pi, \\
 |\mathbf{k}\rangle &\equiv \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \Psi_p(m)\Psi_q(n)\Psi_r(l), \\
 \mathbf{k} &= (p, q, l), \\
 \sum_{\mathbf{x}} \bar{\Psi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}) &= \\
 &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \leftrightarrow \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\bar{\Psi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}') = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Разобьем задачу диагонализации матрицы $\mathcal{O}_{x,y}$ на последовательную серию более простых задач.

Из формул (2.14)–(2.16) и (A.2) следует, что

$$U_{(n,l)}^\dagger \xi_x U_{(n,l)} = \mathcal{O}_{x,y}^{(n,l)} \xi_y,
 \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 U_{(l)}^\dagger \xi_x U_{(l)} &= \mathcal{O}_{x,y}^{(l)} \xi_y, \\
 \mathcal{O}^{(l)} &= \dots \mathcal{O}^{(n-1,l)} \mathcal{O}^{(n,l)} \mathcal{O}^{(n+1,l)} \dots,
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

$$\mathcal{O} = \dots \mathcal{O}^{(l-1)} \mathcal{O}^{(l)} \mathcal{O}^{(l+1)} \dots
 \tag{3.4}$$

3.1. Первый шаг

Для нахождения матриц $\mathcal{O}_{x,y}^{(n,l)}$ следует воспользоваться элементарными равенствами, вытекающими из формул (2.1) и (2.8):

$$(\lambda + \mu \xi_x \xi_y)^\dagger \xi_x (\lambda + \mu \xi_x \xi_y) = (\cos \psi) \xi_x + (\sin \psi) \xi_y, \quad (3.5)$$

$$(\lambda + \mu \xi_x \xi_y)^\dagger \xi_y (\lambda + \mu \xi_x \xi_y) = (\cos \psi) \xi_y - (\sin \psi) \xi_x, \quad (3.6)$$

$$(\lambda + \mu \xi_x \xi_y)^\dagger \xi_z (\lambda + \mu \xi_x \xi_y) = \xi_z, \quad z \neq x, y. \quad (3.7)$$

В соотношениях (3.5)–(3.7) $x \neq y$.

При помощи (2.16), (2.17) и последних трех формул путем прямого вычисления находим (напомним, что $\mathbf{x} = (m, n, l)$)

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(n,l)}^\dagger \alpha_{\mathbf{x}} \mathcal{U}_{(n,l)} &= \left[(\cos^2 \psi) \alpha_{\mathbf{x}} + (\cos^3 \psi \sin \psi) \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1} + \right. \\ &\quad \left. + (\cos^2 \psi \sin \psi) \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1} + \right. \\ &\quad \left. + (-\cos \psi \sin^2 \psi) \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} + (-\sin^2 \psi) \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} \right] + \\ &\quad + \left[(-\cos^2 \psi \sin^2 \psi) \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + \right. \\ &\quad \left. + (\cos \psi \sin^2 \psi) \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} \right], \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(n,l)}^\dagger \beta_{\mathbf{x}} \mathcal{U}_{(n,l)} &= \left[(-\sin \psi) \alpha_{\mathbf{x}-\mathbf{e}_1} + (\cos^3 \psi) \beta_{\mathbf{x}} \right] + \\ &\quad + \left[(-\cos^2 \psi \sin \psi) \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} + \right. \\ &\quad \left. + (\cos \psi \sin \psi) \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \right], \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(n,l)}^\dagger \gamma_{\mathbf{x}} \mathcal{U}_{(n,l)} &= \left[(-\cos \psi \sin \psi) \alpha_{\mathbf{x}-\mathbf{e}_1} + \right. \\ &\quad \left. + (-\cos^2 \psi \sin^2 \psi) \beta_{\mathbf{x}} + \right. \\ &\quad \left. + (\cos^3 \psi) \gamma_{\mathbf{x}} + (-\cos^2 \psi \sin \psi) \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} + \right. \\ &\quad \left. + (-\cos \psi \sin \psi) \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \right] + \\ &\quad + \left[(\cos \psi \sin^3 \psi) \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} + \right. \\ &\quad \left. + (-\sin^3 \psi) \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \right], \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(n,l)}^\dagger \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \mathcal{U}_{(n,l)} &= \\ &= \left[(\sin \psi) \gamma_{\mathbf{x}} + (\cos \psi) \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \right], \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(n,l)}^\dagger \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \mathcal{U}_{(n,l)} &= \left[(\cos \psi \sin \psi) \gamma_{\mathbf{x}} + \right. \\ &\quad \left. + (-\sin^2 \psi) \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} + (\cos \psi) \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \right], \quad (3.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(n,l)}^\dagger \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \mathcal{U}_{(n,l)} &= \left[(\sin \psi) \beta_{\mathbf{x}} \right] + \\ &\quad + \left[(\cos \psi) \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \right], \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(n,l)}^\dagger \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \mathcal{U}_{(n,l)} &= \left[(-\cos \psi \sin \psi) \beta_{\mathbf{x}} \right] + \\ &\quad + \left[(\sin^2 \psi) \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} + (\cos \psi) \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \right]. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Все остальные ξ -матрицы, помещенные в квадратные скобки $\left[\mathcal{U}_{(n,l)}^\dagger \dots \mathcal{U}_{(n,l)} \right]$, остаются неизменными, поэтому правые части равенств (3.8)–(3.14) полностью задают матрицы $\mathcal{O}_{x,y}^{(n,l)}$. Очевидно, что если вектор \mathbf{x} не слишком близок к границе решетки, то формулы (3.8)–(3.14) инвариантны относительно синхронного изменения числа m в векторе \mathbf{x} во всех частях этих формул. В случае стремления размеров решетки к бесконечности это означает трансляционную инвариантность этих формул по отношению к сдвигам вдоль первой оси. Трансляционная инвариантность используется для частичной диагонализации матрицы $\mathcal{O}_{x,y}^{(n,l)}$ при помощи преобразования Фурье вдоль первой оси:

$$\begin{aligned} \xi_{n,l}(p) &= \sum_m \bar{\Psi}_p(m) \xi_{m,n,l} = \xi_{n,l}^\dagger(-p), \\ \left[\xi_{n,l}^{(i)}(p), \xi_{n',l'}^{(j)\dagger}(p') \right]_+ &= 2\delta_{i,j} \delta_{(n,l),(n',l')} \delta_{p,p'}, \quad (3.15) \\ i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(n,l)}^\dagger \xi_{n',l'}^{(i)}(p) \mathcal{U}_{(n,l)} &= \\ &= \sum_{j,n'',l''} \left[\sum_{m'} \mathcal{O}_{m,n',l',i;m+m',n'',l'',j}^{(n,l)} e^{ipm'} \right] \times \\ &\quad \times \xi_{n'',l''}^{(j)}(p). \quad (3.16) \end{aligned}$$

Матрица в квадратных скобках в правой части равенства (3.16) обозначается $[\mathcal{O}^{(n,l)}(p)]_{n',l',i;n'',l'',j}$ и вычисляется при помощи формул (3.8)–(3.14). Существенная часть этой матрицы далее выписывается. Под существенной частью здесь понимается ее часть с матричными элементами, у которых $l', l'' = l, (l+1)$ независимо: на величины $\xi_{n,l'}(p)$ со значениями индекса $l' \neq l, (l+1)$ линейный оператор $[\mathcal{O}^{(n,l)}(p)]_{n',l',i;n'',l'',j}$ действует тривиально. Поэтому удобно упорядочить величины $\xi_{n,l'}(p)$ следующим образом:

$$\dots, v_{n-1}(p), v_n(p), v_{n+1}(p), \dots, \quad (3.17) \quad \text{растет направо и индекс } n' \text{ — вниз:}$$

где $v_n(p)$ — шестимерные векторы вида

$$v_n(p) = \begin{pmatrix} \alpha_{n,l}(p) \\ \beta_{n,l}(p) \\ \gamma_{n,l}(p) \\ \alpha_{n,l+1}(p) \\ \beta_{n,l+1}(p) \\ \gamma_{n,l+1}(p) \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

$$[O^{(n,l)}(p)]_{n',n''} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & A(p) & B(p) & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & D & C & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{matrix} n'=n \\ n'=n+1 \end{matrix}. \quad (3.19)$$

В таких обозначениях матрица $[O^{(n,l)}(p)]_{n',n''}$ принимает вид блочнодиагональной матрицы, причем каждый блок является матрицей 6×6 , индекс n''

Здесь $A(p), B(p), D, C$ — матрицы 6×6 , причем матрицы $A(p)$ и $C(p)$ расположены на главной диагонали соответственно на местах n и $(n+1)$. В соответствии с формулами (3.8)–(3.14) и (3.16)

$$A(p) = \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & e^{ip} \cos^3 \psi \sin \psi & e^{ip} \cos^2 \psi \sin \psi & -e^{ip} \cos \psi \sin^2 \psi & -e^{ip} \sin^2 \psi & 0 \\ -e^{-ip} \sin \psi & \cos^3 \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e^{-ip} \cos \psi \sin \psi & -\cos^2 \psi \sin^2 \psi & \cos^3 \psi & -\cos^2 \psi \sin \psi & -\cos \psi \sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi \sin \psi & -\sin^2 \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$B(p) = \begin{pmatrix} -e^{ip} \cos^2 \psi \sin^2 \psi & 0 & e^{ip} \cos \psi \sin^2 \psi & 0 & 0 & 0 \\ -\cos^2 \psi \sin \psi & 0 & \cos \psi \sin \psi & 0 & 0 & 0 \\ \cos \psi \sin^3 \psi & 0 & -\sin^3 \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ip} \cos \psi \sin^2 \psi \\ \cos \psi \sin \psi \\ -\sin^3 \psi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \psi & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2 \psi & 0 & \cos \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \sin \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \psi \sin \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Матрица (3.19) является унитарной. Это означает, что

$$\begin{aligned} A(p) [A(p)]^\dagger + B(p) [B(p)]^\dagger &= 1, \\ C C^\dagger + D D^\dagger &= 1, \\ A(p) D^\dagger + B(p) C^\dagger &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Прямая проверка показывает, что матрицы (3.20)–(3.23) действительно удовлетворяют соотношениям (3.24).

Таким образом, первый этап вычисления матрицы $\mathcal{O}^{(n,l)}(p)$ полностью завершен.

3.2. Второй шаг

Для реализации второго шага при получении матрицы $\mathcal{O}^{(l)}(p)$ мы должны перемножить матрицы $\mathcal{O}^{(n,l)}(p)$ при фиксированных значениях параметров l и p в соответствии с правой частью второй формулы (3.3). Таким образом,

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}^{(l)}(p)]_{n',n''} &= \left\{ \dots \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & A(p) & B(p) & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & D & C & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & A(p) & B(p) & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & D & C & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \times \right. \\ &\quad \times \left. \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & A(p) & B(p) & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & D & C & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \dots \right\} \begin{matrix} n'=n \\ n'=n+1 \end{matrix} \quad (3.25) \end{aligned}$$

Отсюда путем прямого и несложного вычисления находим

$$[\mathcal{O}^{(l)}(p)]_{n,n+n'} = \begin{cases} 0 & \text{при } n' < -1, \\ D & \text{при } n' = -1, \\ CA(p) & \text{при } n' = 0, \\ C [B(p)]^{n'} A(p) & \text{при } n' > 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Из соотношения (3.26) видно, что матрица $[\mathcal{O}^{(l)}(p)]_{n',n''}$ зависит лишь от разности $n'' - n'$, т. е.

является трансляционно инвариантной (на некотором отдалении от границ) при сдвигах вдоль второй оси⁵⁾. Этот факт дает возможность проведения дальнейшей частичной диагонализации матрицы $[\mathcal{O}^{(l)}(p)]_{n',n''}$ путем преобразования Фурье вдоль второй оси:

$$\begin{aligned} \xi_l(p, q) &= \sum_n \bar{\Psi}_q(n) \xi_{n,l}(p) = \xi_l^\dagger(-p, -q), \\ [\xi_l^{(i)}(p, q), \xi_{l'}^{(j)\dagger}(p', q')]_+ &= 2\delta_{i,j} \delta_{l,l'} \delta_{p,p'} \delta_{q,q'}, \quad (3.27) \\ & i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

⁵⁾ Эта трансляционная инвариантность вытекает уже из вида формулы (3.3).

Теперь равенство (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(l)}^\dagger \xi_{l'}^{(i)}(p, q) \mathcal{U}_{(l)} = & \\ = \sum_{j, l''} \left[\sum_{n'} [\mathcal{O}^{(l)}(p)]_{n, l', i; n+n', l'', j} e^{iqn'} \right] \times & \\ \times \xi_{l''}^{(j)}(p, q). \end{aligned} \quad (3.28)$$

В формуле (3.28) мы вернулись к учету всех значе- ний индексов l . Введем также обозначение

$$\begin{aligned} \sum_{n'} [\mathcal{O}^{(l)}(p)]_{n, l', i; n+n', l'', j} e^{iqn'} \equiv & \\ \equiv [\mathcal{O}^{(l)}(p, q)]_{l', i; l'', j}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Напомним, что матрица (3.29) действует тривиаль-

но на элементы $\xi_{l''}^{(j)}(p, q)$ с $l'' \neq l, l+1$. Согласно формуле (3.21),

$$\begin{aligned} [B(p)]^n = (-\varkappa)^{n-1} B(p), \\ \varkappa = \sin^2 \psi [e^{ip} \cos^2 \psi + \sin \psi]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

С учетом формул (3.26) и (3.30) матрица (3.29) при- нимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{(l)}(p, q) = \left\{ e^{-iq} D + C \left(1 + \frac{e^{iq}}{1+e^{iq}\varkappa} B(p) \right) A(p) \right\} = \\ = \begin{pmatrix} E(p, q) & F(p, q) \\ H & G \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Здесь $E(p, q), F(p, q), H, G$ — матрицы 3×3 , которые вычисляются при помощи формул (3.20)–(3.23):

$$E(p, q) = \frac{1}{1+e^{iq}\varkappa} \begin{pmatrix} \cos^3 \psi & \sin \psi [e^{ip} \cos^2 \psi + e^{-iq} + \sin^3 \psi] & e^{ip} \cos^3 \psi \times \sin \psi [e^{iq} \sin \psi + 1] \\ -\sin \psi [e^{iq} \cos^2 \psi + e^{i(-p+q)} \sin \psi + e^{-ip}] & \cos^3 \psi & -e^{iq} \cos^4 \psi \times \sin \psi [e^{ip} \sin \psi - 1] \\ e^{-ip} \cos^2 \psi \times \sin \psi [e^{ip} \sin \psi - 1] & -\cos \psi \times \sin \psi [e^{-iq} + \sin \psi] & \cos^2 \psi [\cos^2 \psi + e^{ip} \times \sin^2 \psi \{e^{iq} + \sin \psi\}] \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} F(p, q) = \frac{1}{1+e^{iq}\varkappa} \times \\ \times \begin{pmatrix} -e^{ip} \cos \psi \sin^2 \psi [e^{iq} \sin \psi + 1] \\ e^{iq} \cos^2 \psi \sin^2 \psi [e^{ip} \sin \psi - 1] \\ -\sin \psi [\cos^2 \psi + e^{ip} \sin^2 \psi \{e^{iq} + \sin \psi\}] \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos \psi & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$G = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & 0 \\ -\sin^2 \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \psi \\ 0 & 0 & \cos \psi \sin \psi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Условие унитарности матрицы (3.31) заключено в равенствах

$$\begin{aligned} E(p, q) [E(p, q)]^\dagger + F(p, q) [F(p, q)]^\dagger = 1, \\ G G^\dagger + H H^\dagger = 1, \\ E(p, q) H^\dagger + F(p, q) G^\dagger = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Последние равенства проверяются непосредственно при помощи формул (3.32)–(3.35).

Далее необходимо вернуться к учету всех значе- ний индекса l' и при этом, естественно, упорядо- чивать величины $\xi_l(p, q)$ следующим образом (ср. с (3.17) и (3.18)):

$$\dots, w_{l-1}(p, q), w_l(p, q), w_{l+1}(p, q), \dots, \quad (3.37)$$

где $w_l(p, q)$ — трехмерные векторы вида

$$w_l(p, q) = \begin{pmatrix} \alpha_l(p, q) \\ \beta_l(p, q) \\ \gamma_l(p, q) \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

В этих обозначениях матрица $[\mathcal{O}^{(l)}(p, q)]_{l', l''}$ при- нимает вид блочнодиагональной матрицы с блоками 3×3 , индекс l'' растет направо и индекс l' — вниз, причем матрицы $E(p, q)$ и G расположены на глав- ной диагонали соответственно на местах l и $l+1$ (ср. с (3.19)):

$$[\mathcal{O}^{(l)}(p, q)]_{l', l''} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & E(p, q) & F(p, q) & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & H & G & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{matrix} l'=l \\ \\ \\ l'=l+1 \\ \\ \end{matrix} \quad (3.39)$$

На этом завершается второй этап вычисления матриц $\mathcal{O}^{(l)}(p, q)$.

3.3. Третий шаг

На третьем, последнем шаге строится матрица \mathcal{O} путем упорядоченного произведения матриц $\mathcal{O}^{(l)}$ в соответствии с формулой (3.4). В результате мы получаем матрицу, трансляционно инвариантную при сдвигах вдоль третьей оси. Вычисления воспроизводятся в точности аналогичные вычисления на втором шаге с той лишь разницей, что делаются следующие замены:

$$\begin{aligned} A(p) &\rightarrow E(p, q), & B(p) &\rightarrow F(p, q), \\ C &\rightarrow G, & D &\rightarrow H, \end{aligned} \quad (3.40)$$

так что вместо (3.26) теперь имеем

$$[\mathcal{O}(p, q)]_{l, l+l'} = \begin{cases} 0 & \text{при } l' < -1, \\ H & \text{при } l' = -1, \\ GE(p, q) & \text{при } l' = 0, \\ G[F(p, q)]^{l'} E(p, q) & \text{при } l' > 0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Пользуясь трансляционной инвариантностью матрицы (3.41), переходим к полным фурье-компонентам ξ -матриц:

$$\begin{aligned} \xi(p, q, r) &= \\ &= \sum_l \bar{\Psi}_r(l) \xi_l(p, q) = \xi^\dagger(-p, -q, -r), \\ & \left[\xi^{(i)}(p, q, r), \xi^{(j)\dagger}(p', q', r') \right]_+ = \\ &= 2\delta_{i,j} \delta_{p,p'} \delta_{q,q'} \delta_{r,r'}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\dagger \xi(p, q, r) \mathcal{U} &= \\ &= \left[\sum_{l'} [\mathcal{O}(p, q)]_{l, l+l'} e^{ir l'} \right] \xi(p, q, r), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l'} [\mathcal{O}(p, q)]_{l, l+l'} e^{ir l'} &\equiv \mathcal{O}(p, q, r) = \\ &= e^{-ir} H + G \left(1 + \frac{e^{ir}}{1 + e^{ir\sigma}} F(p, q) \right) E(p, q), \\ \sigma &= \frac{(e^{ip} + e^{iq}) \cos^2 \psi \sin^2 \psi}{1 + e^{iq\sigma}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Здесь учтено то, что согласно (3.33)

$$[F(p, q)]^l = (-\sigma)^{l-1} F(p, q). \quad (3.45)$$

3×3 -матрица $\mathcal{O}(p, q, r)$ в формуле (3.44) является унитарной матрицей:

$$\mathcal{O}(p, q, r) [\mathcal{O}(p, q, r)]^\dagger = 1. \quad (3.46)$$

Последнее равенство легко проверяется при помощи определения (3.44) и равенств (3.36), (3.45).

Таким образом, задача нахождения свободной энергии системы сведена к обозримой задаче нахождения собственных значений трехмерной унитарной матрицы $\mathcal{O}(p, q, r)$ (3.44).

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ $\mathcal{O}(p, q, r)$

Приведем произведения матриц из формулы (3.44) в явном виде:

$$GE(p, q) = \frac{1}{1 + e^{iq}\varkappa} \times \begin{pmatrix} \cos^4 \psi & \cos \psi \sin \psi [e^{ip} \cos^2 \psi + e^{-iq} + \sin^3 \psi] & e^{ip} \cos^4 \psi \times \sin \psi [e^{iq} \sin \psi + 1] \\ -\cos \psi \sin \psi [\cos^2 \psi \sin \psi + e^{iq} \cos^2 \psi + e^{i(-p+q)} \sin \psi + e^{-ip}] & \cos^4 \psi - \sin^3 \psi [e^{ip} \cos^2 \psi + e^{-iq} + \sin^3 \psi] & -\cos^3 \psi \sin \psi [e^{i(p+q)} \sin \psi + e^{ip} \sin^2 \psi - e^{iq} \cos^2 \psi] \\ e^{-ip} \cos^2 \psi \times \sin \psi [e^{ip} \sin \psi - 1] & -\cos \psi \sin \psi [e^{-iq} + \sin \psi] & \cos^2 \psi [\cos^2 \psi + e^{ip} \sin^2 \psi (e^{iq} + \sin \psi)] \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$GF(p, q)E(p, q) = \frac{1}{(1 + e^{iq}\varkappa)^2} \times \begin{pmatrix} -e^{ip} \cos^2 \psi \sin^2 \psi [e^{iq} \sin \psi + 1] \\ \cos \psi \sin^2 \psi [e^{i(p+q)} \sin \psi + e^{ip} \sin^2 \psi - e^{iq} \cos^2 \psi] \\ -\sin \psi [\cos^2 \psi + e^{ip} \sin^2 \psi \{e^{iq} + \sin \psi\}] \end{pmatrix} \times (u_1, u_2, u_3), \quad (4.2)$$

$$(u_1, u_2, u_3) \equiv \left(\cos^4 \psi - \sin \psi [e^{iq} \cos^2 \psi + e^{i(-p+q)} \sin \psi + e^{-ip}], \right. \\ \left. \cos \psi [\cos^4 \psi + \sin \psi \{e^{ip} \cos^2 \psi + e^{-iq} + \sin \psi\}], [e^{ip} + e^{iq}] \cos^4 \psi \sin \psi \right).$$

Заметим, что все столбцы матрицы (4.2) пропорциональны третьему столбцу матрицы (4.1).

Для полноты приведем также формулы

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(p, q, r) &= e^{-ir} H + \\ &+ G \left(1 + \frac{e^{ir}}{1 + e^{ir}\sigma} F(p, q) \right) E(p, q), \\ \sigma &= \frac{(e^{ip} + e^{iq}) \cos^2 \psi \sin^2 \psi}{1 + e^{iq}\varkappa}, \\ \varkappa &= \sin^2 \psi [e^{ip} \cos^2 \psi + \sin \psi], \\ \chi &\equiv (1 + e^{iq}\varkappa) (1 + e^{ir}\sigma) = 1 + e^{iq} \sin^3 \psi + \\ &+ [e^{i(p+q)} + e^{i(p+r)} + e^{i(q+r)}] \cos^2 \psi \sin^2 \psi, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \psi \\ 0 & 0 & \cos \psi \sin \psi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Мы должны решить кубическое уравнение

$$\det \|\mathcal{O} - \rho E\| = 0 \quad (4.5)$$

относительно переменной ρ , оно переписывается как

$$\rho^3 - (\text{tr } \mathcal{O}) \rho^2 + (m_{11} + m_{22} + m_{33}) \rho - \det \mathcal{O} = 0. \quad (4.6)$$

Здесь m_{ij} — минор элемента \mathcal{O}_{ij} матрицы \mathcal{O} .

При помощи формул (4.1)–(4.4) находим

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathcal{O} &= 1 - \frac{\eta}{\chi}, \\ \eta &\equiv (1 - 3 \cos^4 \psi + \sin^6 \psi) + \\ &+ \sin^3 \psi (e^{iq} + e^{-iq}) = \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Коэффициенты в выражении (4.6) являются инвариантами, не зависящими от представления матрицы \mathcal{O} , поэтому имеем

$$\begin{aligned} m_{11} + m_{22} + m_{33} &= \rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3 = \\ &= (\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1} + \rho_3^{-1}) \rho_1 \rho_2 \rho_3 = (\text{tr } \mathcal{O}^\dagger) \det \mathcal{O} = \\ &= \overline{(\text{tr } \mathcal{O})} \det \mathcal{O}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь было учтено, что $\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} = 1$. Таким образом, остается вычислить величину $\det \mathcal{O}$.

Пусть $v_i, i = 1, 2, 3$ — вектор-столбцы, так что

$$GE = \frac{1}{1 + e^{iq}\varkappa} (v_1, v_2, v_3). \quad (4.9)$$

Тогда матрица \mathcal{O} представляется как

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \left(\frac{v_1}{1 + e^{iq}\varkappa}, \frac{v_2}{1 + e^{iq}\varkappa}, v_3 \right) - \\ &- \frac{e^{ir} \sin \psi}{\cos^2 \psi (1 + e^{iq}\varkappa) \chi} v_3 \times (u_1, u_2, 0), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$w_{.3} = \frac{1}{\chi} v_{.3} + \tau, \quad \tau \equiv e^{-ir} \sin \psi \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix},$$

причем (u_1, u_2, u_3) является матрицей-строкой в (4.2).

Прибавим к первым двум столбцам матрицы \mathcal{O} такие столбцы, пропорциональные w_3 , которые сокращают второе слагаемое в (4.10). Таким образом получается матрица \mathcal{O}' с тем же детерминантом:

$$\Delta \mathcal{O} = \frac{e^{ir} \sin \psi}{\cos^2 \psi (1 + e^{iq} \varkappa)} w_{.3} \times (u_1, u_2, 0),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}' \equiv \mathcal{O} + \Delta \mathcal{O} &= \left(\frac{v_{.1}}{1 + e^{iq} \varkappa}, \frac{v_{.2}}{1 + e^{iq} \varkappa}, w_{.3} \right) + \\ &+ \frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi (1 + e^{iq} \varkappa)} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \times (u_1, u_2, 0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Теперь вычтем первую строку матрицы \mathcal{O}' , умноженную на $\cos \psi$, из второй строки этой матрицы. В результате получим матрицу \mathcal{O}'' , детерминант которой совпадает с детерминантом матрицы \mathcal{O} :

$$\mathcal{O}'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \psi (1 + e^{iq} \varkappa)} \times \{ \cos^4 \psi - e^{iq} \cos^2 \psi \sin^3 \psi - e^{i(-p+q)} \sin^4 \psi - e^{-ip} \sin^3 \psi \} & \frac{\sin \psi (\sin \psi + e^{ip} \cos^2 \psi + e^{-iq})}{\cos \psi (1 + e^{iq} \varkappa)} & \frac{1}{\chi} \{ \cos^4 \psi \sin \psi \times (e^{i(p+q)} \sin \psi + e^{ip}) + e^{-ir} \chi \sin \psi \} \\ -\frac{1}{1 + e^{iq} \varkappa} \{ \cos \psi (\cos^2 \psi + e^{iq} \cos^2 \psi \sin \psi + e^{i(-p+q)} \sin^2 \psi + e^{-ip} \sin \psi) \} & \frac{1}{1 + e^{iq} \varkappa} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi - e^{ip} \cos^2 \psi \sin \psi - e^{-iq} \sin \psi) & -\frac{1}{\chi} \{ \cos^3 \psi \sin \psi (e^{i(p+q)} \times \sin \psi (1 + \cos^2 \psi) + e^{ip} - e^{iq} \cos^2 \psi) \} \\ \frac{\cos^2 \psi \sin \psi (\sin \psi - e^{-ip})}{1 + e^{iq} \varkappa} & -\frac{\cos \psi \sin \psi (\sin \psi + e^{-iq})}{1 + e^{iq} \varkappa} & \frac{1}{\chi} \{ \cos^2 \psi (\cos^2 \psi + e^{i(p+q)} \sin^2 \psi + e^{ip} \sin^3 \psi) \} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\det \mathcal{O}'' = \det \mathcal{O}.$$

Пусть m''_{ij} — минор элемента \mathcal{O}''_{ij} матрицы \mathcal{O}'' . Нам понадобятся следующие из этих миноров:

$$\begin{aligned} m''_{13} &= \frac{\cos^2 \psi \sin \psi (e^{-ip} + e^{-iq})}{1 + e^{iq} \varkappa}, \\ m''_{23} &= \frac{e^{-ip} \sin^3 \psi - e^{-iq} \cos^2 \psi \sin \psi + e^{-i(p+q)} \sin^2 \psi}{\cos \psi (1 + e^{iq} \varkappa)}, \\ m''_{33} &= \frac{\cos^2 \psi + e^{-ip} \sin^3 \psi + e^{-i(p+q)} \sin^2 \psi}{\cos^2 \psi (1 + e^{iq} \varkappa)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Для вычисления детерминанта разложим $\det \mathcal{O}''$ по последнему столбцу матрицы \mathcal{O}'' . Таким образом находим

$$\det \mathcal{O} = \frac{\bar{\chi}}{\chi}. \quad (4.14)$$

При помощи формул (4.7) и (4.8) получаем

$$m_{11} + m_{22} + m_{33} = \frac{\bar{\chi} - \eta}{\chi}. \quad (4.15)$$

В результате уравнение (4.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \rho^3 - \left(1 - \frac{\eta}{\chi}\right) \rho^2 + \left(\frac{\bar{\chi}}{\chi} - \frac{\eta}{\chi}\right) \rho - \frac{\bar{\chi}}{\chi} &= \\ = (\rho - 1) \left(\rho^2 + \frac{\eta}{\chi} \rho + \frac{\bar{\chi}}{\chi}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Теперь без труда находим все собственные значения матрицы \mathcal{O} :

$$\rho_{1,2}(p, q, r) = \frac{-\eta \pm i\sqrt{4\chi\bar{\chi} - \eta^2}}{2\chi}, \quad \rho_3 = 1. \quad (4.17)$$

Заметим, что выражение $4\chi\bar{\chi} - \eta^2$, находящееся под знаком квадратного корня в (4.17), является неотрицательным числом. Лишь при этом условии имеем

$$|\rho_{1,2,3}(p, q, r)| = 1,$$

что следует также из условия унитарности матрицы $\mathcal{O}(p, q, r)$. В противном случае мы имели бы неравенства

$$|\rho_{1,2}(p, q, r)| \neq 1,$$

что означало бы нарушение унитарности матрицы $\mathcal{O}(p, q, r)$.

5. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ

Согласно формулам (А.4) и (4.17)

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathcal{U} &= 2^{MNL/2} \prod_{p,q,r} (\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\bar{\rho}_1}) (\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\bar{\rho}_2}) = \\ &= 2^{MNL/2} \prod_{p,q,r} \frac{\chi + \bar{\chi} - \eta}{\sqrt{\chi\bar{\chi}}} = 2^{MNL/2} \times \\ &\times \prod_{p,q,r} \frac{1}{\sqrt{\chi\bar{\chi}}} \{ (1 + 3 \cos^4 \psi - \sin^6 \psi) + \\ &+ 2\nu(p, q, r) \cos^2 \psi \sin^2 \psi \}, \\ \nu(p, q, r) &\equiv \cos(p + q) + \cos(p + r) + \cos(q + r). \quad (5.1) \end{aligned}$$

Интерес представляет свободная энергия, которая с точностью до несущественного слагаемого имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -T \ln Z = T \frac{MNL}{16\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} dr (\ln \chi + \ln \bar{\chi}) - T \frac{MNL}{8\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_{-\pi}^{\pi} dr \times \\ &\times \ln \left\{ (1 + 3 \cos^4 \psi - \sin^6 \psi) + 2\nu \cos^2 \psi \sin^2 \psi \right\}. \quad (5.2) \end{aligned}$$

Здесь было учтено, что при $M, N, L \rightarrow \infty$ справедлива замена

$$\sum_{p,q,r} \rightarrow \frac{MNL}{8\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_{-\pi}^{\pi} dr.$$

Первое слагаемое в правой части равенства (5.2) обращается в нуль. Этот факт является следствием неравенств

$$|\sigma| \leq 1, \quad |\varkappa| \leq 1, \quad (5.3)$$

причем равенства в (5.3) имеют место лишь на подмножестве меры нуль в пространстве переменных $\{p, q, r\}$. Действительно, в соответствии с (4.3) и (5.3) имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_{-\pi}^{\pi} dr \ln \chi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_{-\pi}^{\pi} dr \left\{ \ln(1 + e^{iq}\varkappa) + \ln(1 + e^{ir}\sigma) \right\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_{-\pi}^{\pi} dr \times \\ &\times \left\{ e^{inq} [\varkappa(\psi, p)]^n + e^{inr} [\sigma(\psi, p, q)]^n \right\} = 0. \quad (5.4) \end{aligned}$$

Докажем неравенства (5.3).

Согласно формуле (3.45) $F^2 = -\sigma F$. Возьмем модуль от матричного элемента (1, 1) этого равенства:

$$\begin{aligned} |\sigma| |F_{11}| &= \left| \sum_i F_{1i} F_{i1} \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\left(\sum_i F_{1i} \bar{F}_{1i} \right) \left(\sum_j \bar{F}_{j1} F_{j1} \right)} = \\ &= \sqrt{(F F^\dagger)_{11} (F^\dagger F)_{11}}. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Имеем также из условия унитарности (ср. с (3.36)) и явного вида матрицы G (3.34)

$$(F^\dagger F)_{11} = 1 - (G^\dagger G)_{11} = \cos^2 \psi \sin^2 \psi. \quad (5.6)$$

Путем прямого вычисления без труда находим также, что

$$(F F^\dagger)_{11} = \frac{1 + \cos^2 \psi}{\cos^2 \psi} |F_{11}|^2. \quad (5.7)$$

Теперь соберем вместе формулы (5.5)–(5.7) и запишем

$$|\sigma| \leq \sqrt{\sin^2 \psi (1 + \cos^2 \psi)} \leq 1.$$

При помощи явного выражения (4.3) для \varkappa находим

$$|\varkappa| \leq \cos^2 \psi \sin^2 \psi + \sin^3 \psi \leq 1, \quad 0 \leq \psi \leq \pi.$$

Таким образом, оба неравенства (5.3) установлены и

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -T \frac{MNL}{8\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_{-\pi}^{\pi} dr \times \\ &\times \ln \left\{ (1 - \sin^2 \psi) [\sin^4 \psi + 2(\nu - 1) \sin^2 \psi + 4] \right\}. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Из выражения для свободной энергии (5.8) видно, что выделенность оси 2 в предыдущих формулах для промежуточных величин, включая собственные значения матрицы $\mathcal{O}(p, q, r)$, являлась артефактом: свободная энергия системы, представляющая физический интерес, полностью симметрична относительно взаимных замен всех трех осей.

Из определения параметра ψ (см. разд. 1) очевидно, что он играет роль температуры T . При $T \rightarrow \infty$ угол $\psi \rightarrow 0$. Это следует из того, что при $T \rightarrow \infty$ вклад поверхностей в статистическую сумму (2.13) также стремится к нулю, что соответствует высокотемпературному пределу в калибровочных теориях на решетке. Из сравнения статистической суммы (2.13) с величиной, полученной в рамках калибровочной теории на решетке (с калибровочной группой Z_2), также видно, что убывание температуры от бесконечности до нуля означает равномерное возрастание углового параметра ψ от нуля до $\pi/2$:

$$\frac{d\psi(T)}{dT} < 0, \quad \psi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \psi(\infty) = 0. \quad (5.9)$$

Требуется ответ на важнейший вопрос: имеются ли фазовые переходы при уменьшении температуры от бесконечности до нуля и какого они рода?

Поскольку точка фазового перехода совпадает с особенностью свободной энергии по температуре, следует искать те значения ψ , при которых выражение (5.8) может иметь особенность. Так же, как и в случае двумерной модели Изинга, единственная возможность для возникновения особенности свободной энергии заключается в обращении в нуль аргумента логарифма, находящегося под знаком интеграла по квазиимпульсам, при некоторых значениях температуры и квазиимпульсов. Тогда интеграл по квазиимпульсам вблизи особенности дает нерегулярный вклад в свободную энергию и прочие термодинамические величины. В случае двумерной модели Изинга имеется единственная точка в трехмерном многообразии совокупности переменных «два квазиимпульса+температура», в которой аргумент логарифма обращается в нуль: $p = q = 0$ и $T = T_c$.

В рассматриваемой трехмерной модели ситуация качественно отличается от указанной двумерной: при $\psi = 0$ ($T = \infty$) аргумент логарифма в правой части (5.8) всегда положителен; при $p = q = r = 0$ он обращается в нуль лишь при $\psi = \pi/2$ ($T = 0$). Однако имеется возможность обращения в нуль аргумента логарифма в (5.8) при конечных температурах $0 < \psi < \pi/2$ и ненулевых квазиимпульсах. При изменении квазиимпульсов параметр ν изменяется в следующих пределах:

$$-3 \leq \nu \leq 3. \quad (5.10)$$

Чтобы аргумент логарифма в правой части (5.8) обратился в нуль, необходимо выполнение уравнения

$$x_c^2 + 2(\nu - 1)x_c + 4 = 0, \quad x \equiv \sin^2 \psi. \quad (5.11)$$

Интерес представляют лишь вещественные решения в отрезке $0 \leq x_c \leq 1$. Это возможно лишь при условии

$$-3 \leq \nu \leq -\frac{3}{2}. \quad (5.12)$$

Единственное решение имеет вид

$$x_c(\nu) = (1 - \nu) - \sqrt{(1 - \nu)^2 - 4}, \quad (5.13)$$

причем $\sqrt{x_c(\nu)}$ является монотонно растущей функцией на отрезке (5.12), так что значение

$$\sqrt{x_c(-3)} = \sin \psi_c = \sqrt{4 - \sqrt{12}} < 1 \quad (5.14)$$

является ее минимальным значением, а

$$\sqrt{x_c(-3/2)} = \sin \psi_c = 1 \quad (5.15)$$

— максимально возможным значением.

Точка $\nu = -3$ является выделенной точкой в пространстве квазиимпульсов, поскольку она достигается лишь при двух значениях квазиимпульсов p, q, r . Действительно, необходимо придать квазиимпульсам такие значения, при которых имеет место хотя бы одно из следующих восьми равенств (все знаки плюс и минус в правых частях уравнений (5.16) независимы друг от друга):

$$p + q = \pm\pi, \quad p + r = \pm\pi, \quad q + r = \pm\pi. \quad (5.16)$$

В этом случае $\nu = -3$. Система линейных уравнений (5.16) является невырожденной, поэтому при каждом значении правой части в (5.16) имеется лишь одно решение для квазиимпульсов p, q, r . С учетом того, что квазиимпульсы определены по модулю 2π , все восемь решений уравнений (5.16) сводятся к двум:

$$\begin{aligned} p_c^{(1)} &= q_c^{(1)} = r_c^{(1)} = \frac{\pi}{2}, \\ p_c^{(2)} &= q_c^{(2)} = r_c^{(2)} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Напротив, для всех значений ν на полуинтервале

$$-3 < \nu(p, q, r) \leq -\frac{3}{2} \quad (5.18)$$

имеется целый континуум значений квазиимпульсов, для каждого из которых аргумент логарифма в правой части (5.8) обращается в нуль.

Дальнейшее изучение свойств свободной энергии, а также проблема фазового перехода в представленной модели требуют отдельного рассмотрения.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен метод вычисления статистической суммы калибровочной системы с калибровочной группой Z_2 , взаимодействующей с майорановским полем, на трехмерной правильной кубической решетке. Фактически вычисляется сумма по замкнутым и незамкнутым поверхностям с самопересечениями. При этом статистические веса замкнутых поверхностей всегда положительны и пропорциональны факторам μ^{2S} , где S число граней поверхности. Общий знак веса поверхности с краем существенно зависит от конфигурации края, но не зависит от формы поверхности, опирающейся на этот край. Эта сумма вычисляется до конца, она представляется как трехкратный интеграл по квазиимпульсам и является функцией одного параметра (константы взаимодействия или температуры).

Следует отметить, что известно мало примеров вычисляемых точно статистических сумм «разумных» (т.е. поддающихся физической интерпретации) динамических систем в трехмерном пространстве, содержащих фазовый переход по константе взаимодействия. В этой связи я хочу обратить внимание на работу А. Замолодчикова [7], в которой уравнение треугольников Янга – Бакстера в двумерном пространстве было обобщено на трехмерный случай, где оно называется уравнением тетраэдров.

Я выражаю благодарность С. С. Вергелесу за существенную помощь в проведении некоторых вычислений.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы НШ-3472.2008.2.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Как известно [3], матрица поворота в спинорном представлении (2.14) может быть представлена в виде

$$U = \exp\left(\frac{1}{4}\omega_{x,y}\xi_x\xi_y\right), \quad \omega_{x,y} = -\omega_{y,x}, \quad (A.1)$$

причем

$$U^\dagger \xi_x U = \mathcal{O}_{x,y} \xi_y, \\ \mathcal{O}_{x,y} \equiv (e^\omega)_{x,y} = \delta_{x,y} + \omega_{x,y} + \frac{1}{2!}\omega_{x,z}\omega_{z,y} + \dots \quad (A.2)$$

След от матрицы U просто выражается через собственные значения вещественной ортогональной матрицы $\mathcal{O}_{x,y}$. Пусть набор чисел

$$\left(\rho_1, \bar{\rho}_1, \rho_2, \bar{\rho}_2, \dots, \rho_{3MNL/2}, \bar{\rho}_{3MNL/2}\right) = \{\rho_k, \bar{\rho}_k\}, \quad k = 1, \dots, 3MNL/2, \quad (A.3)$$

образует полный набор собственных значений матрицы $\mathcal{O}_{x,y}$. Тогда

$$\text{tr } U = \prod_{k=1}^{3MNL/2} \left(2 \text{ch} \frac{\ln \rho_k}{2}\right) = \prod_{k=1}^{3MNL/2} \left(2 \cos \frac{\phi_k}{2}\right) = \prod_{k=1}^{3MNL/2} \left(\sqrt{\rho_k} + \sqrt{\bar{\rho}_k}\right), \quad \rho_k = e^{i\phi_k}. \quad (A.4)$$

Докажем формулу (A.4).

Пусть $\{v_x^{(k)}, \overline{v_x^{(k)}}\}$, $k = 1, \dots, 3MNL/2$, — полный ортонормированный набор собственных векторов матрицы $\mathcal{O}_{x,y}$, причем собственному значению ρ_k ($\bar{\rho}_k$) соответствует вектор $v_x^{(k)}$ ($\overline{v_x^{(k)}}$). Далее используется также обозначение

$$\{v_x^{(k)}, \overline{v_x^{(k)}}\} \equiv \{v_x^a\}, \quad a = 1, \dots, 3MNL.$$

Будем считать введенные векторы векторами-столбцами, верхние индексы « T » и « \dagger » обозначают транспонирование и эрмитово сопряжение векторов и матриц. По определению

$$v^{(k)T} v^{(k')} \equiv \sum_x v_x^{(k)} v_x^{(k')}, \\ v^{(k)\dagger} v^{(k')} \equiv \sum_x \overline{v_x^{(k)}} v_x^{(k')}. \quad (A.5)$$

Данные определения означают справедливость следующих формул:

$$v^{(k)T} v^{(k')} = 0, \quad v^{(k)\dagger} v^{(k')} = \delta_{kk'}, \quad (A.6)$$

$$S_{x a} \equiv v_x^a \text{ or } S \equiv \left(v^{(1)}, \overline{v^{(1)}}, v^{(2)}, \overline{v^{(2)}}, \dots\right), \\ (S^\dagger S)_{ab} = \delta_{ab}, \quad (A.7)$$

$$(S^\dagger \mathcal{O} S)_{ab} = \text{diag}(\rho_1, \bar{\rho}_1, \rho_2, \bar{\rho}_2, \dots) \equiv D_{ab}. \quad (A.8)$$

В работе [3] показано, что

$$(S^\dagger \omega S)_{ab} = \text{diag}(\ln \rho_1, -\ln \rho_1, \ln \rho_2, -\ln \rho_2, \dots) \equiv \Delta_{ab}. \quad (A.9)$$

При помощи формул (A.7) и (A.9) получаем

$$\sum_{x,y} \frac{1}{4} \xi_x \omega_{x,y} \xi_y = \sum_{x,y} \sum_{a,b} \frac{1}{4} (\xi_x S_{xa}) \Delta_{ab} (S_{by}^\dagger \xi_y). \quad (A.10)$$

$2^{3MNL/2} \times 2^{3MNL/2}$ -матрицы

$$c_k^\dagger \equiv \sum_x \xi_x v_x^{(k)}, \quad c_k \equiv \sum_x \xi_x \overline{v_x^{(k)}} \quad (A.11)$$

обладают всеми свойствами фермионных операторов рождения и уничтожения. Действительно, вследствие (2.1) и (A.10)

$$[c_k, c_{k'}^\dagger]_+ = \delta_{kk'}, \quad [c_k, c_{k'}]_+ = [c_k^\dagger, c_{k'}^\dagger]_+ = 0. \quad (A.12)$$

Согласно определениям (A.7) и (A.11) имеем

$$\sum_x \xi_x S_{xa} = (c_1^\dagger, c_1, \dots, c_{3MNL/2}^\dagger, c_{3MNL/2}). \quad (A.13)$$

При помощи (A.9), (A.12) и (A.13) величина (A.10) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \sum_{x,y} \frac{1}{4} \xi_x \omega_{x,y} \xi_y &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3MNL/2} \left[\ln \rho_k (c_k^\dagger c_k - c_k c_k^\dagger) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{3MNL/2} \left[(\ln \rho_k) c_k^\dagger c_k - \frac{1}{2} \ln \rho_k \right]. \quad (A.14) \end{aligned}$$

Поскольку вычисление следа в терминах γ -матриц эквивалентно вычислению следа в терминах соответствующих фермиевских операторов (A.11), равенство (A.4) немедленно вытекает из представления (A.14).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Рассмотрим майорановские фермионы на трехмерной кубической решетке и их вклад в статистическую сумму.

В простейшем варианте действие дираковских фермионов на простой кубической решетке имеет вид

$$\begin{aligned} S_D &= \\ &= \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^3 \overline{\psi_{\mathbf{x}}} \gamma^i (U_{\mathbf{x},\mathbf{e}_i} \psi_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_i} - U_{\mathbf{x}-\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i}^\dagger \psi_{\mathbf{x}-\mathbf{e}_i}), \\ &\quad \gamma^1 = \sigma_x, \quad \gamma^2 = \sigma_y, \quad \gamma^3 = \sigma_z, \\ &\quad U_{\mathbf{x},\mathbf{e}_i}^\dagger U_{\mathbf{x},\mathbf{e}_i} = 1. \quad (B.1) \end{aligned}$$

Здесь σ_i — матрицы Паули, $U_{\mathbf{x},\mathbf{e}_i}$ — калибровочное поле. Фермионные поля $\psi_{\mathbf{x}}$ и $\overline{\psi}_{\mathbf{x}}$ являются элементами грассмановой алгебры и все их компоненты считаются взаимно независимыми переменными. Фермионный вклад в статистическую сумму определяется как интеграл

$$Z_D\{U\} = \prod_{\mathbf{x}} \int d\overline{\psi}_{\mathbf{x}} d\psi_{\mathbf{x}} \exp S_D, \quad (B.2)$$

где $d\overline{\psi}_{\mathbf{x}}$ и $d\psi_{\mathbf{x}}$ обозначают произведения дифференциалов обеих компонент соответствующих спиноров.

Майорановские спиноры определяются при помощи следующей системы отождествлений:

$$\overline{\psi}_{\mathbf{x}} = -\psi_{\mathbf{x}}^T \gamma^2. \quad (B.3)$$

«Электрический ток» майорановских спиноров тождественно равен нулю:

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{x}}^i &= \overline{\psi}_{\mathbf{x}} \gamma^i \psi_{\mathbf{x}} = (\psi_{\mathbf{x}1}, \psi_{\mathbf{x}2}) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{x}1} \\ \psi_{\mathbf{x}2} \end{pmatrix} = \{i(\psi_{\mathbf{x}1}^2 - \psi_{\mathbf{x}2}^2), -(\psi_{\mathbf{x}1}^2 + \psi_{\mathbf{x}2}^2), \\ &-i(\psi_{\mathbf{x}1} \psi_{\mathbf{x}2} + \psi_{\mathbf{x}2} \psi_{\mathbf{x}1})\} \equiv \{0, 0, 0\}. \quad (B.4) \end{aligned}$$

Последнее тождество в формуле (B.4) вытекает из того, что все компоненты поля ψ являются нечетными элементами грассмановой алгебры. Действие майорановских спиноров получается из дираковского действия (B.1) путем замен $\overline{\psi}_{\mathbf{x}} \rightarrow -\psi_{\mathbf{x}}^T \gamma^2$ и делением на два:

$$\begin{aligned} S_M &= -\frac{i}{4} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^3 \psi_{\mathbf{x}}^T \gamma^2 \times \\ &\times \gamma^i (U_{\mathbf{x},\mathbf{e}_i} \psi_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_i} - U_{\mathbf{x}-\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i}^\dagger \psi_{\mathbf{x}-\mathbf{e}_i}), \quad (B.5) \end{aligned}$$

вклад майорановских спиноров в статистическую сумму определяется грассмановым интегралом

$$Z_M\{U\} = \prod_{\mathbf{x}} \int d\psi_{\mathbf{x}2} d\psi_{\mathbf{x}1} \exp S_M. \quad (B.6)$$

Так как

$$\int d\psi_{\mathbf{x}2} d\psi_{\mathbf{x}1} (\psi_{\mathbf{x}1} \psi_{\mathbf{x}2})^n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1, \end{cases}$$

то

$$\int d\psi_{\mathbf{x}} = 0, \quad -i \int d\psi_{\mathbf{x}} \cdot (\psi_{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{x}}^T) =$$

$$= -i \int d\psi_{\mathbf{x}2} d\psi_{\mathbf{x}1} \begin{pmatrix} 0 & \psi_{\mathbf{x}1} \psi_{\mathbf{x}2} \\ \psi_{\mathbf{x}2} \psi_{\mathbf{x}1} & 0 \end{pmatrix} = \gamma^2,$$

$$\int d\psi_{\mathbf{x}} \cdot (\psi_{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{x}}^T) \otimes (\psi_{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{x}}^T) = 0 \quad (\text{B.7})$$

и так далее.

Вычертим на решетке систему замкнутых ломаных контуров без пересечений и самопересечений. Элементарное звено каждого контура состоит из некоего ребра $l_{\mathbf{x},i}$ (см. разд. 2.2). Необходимо, чтобы каждая вершина принадлежала одному и только одному контуру. Каждый контур ориентирован, т. е. всем ребрам контура приписаны взаимно согласованные направления (стрелки), так что при движении вдоль стрелок обходится весь замкнутый контур. Будем называть ребро положительно (отрицательно) ориентированным, если его стрелка направлена в положительном (отрицательном) направлении одной из трех осей решетки. Ниже описывается частный случай элементарного замкнутого контура, базирующегося лишь на одном ребре, которому приписаны сразу обе ориентации.

Ненулевой вклад в интеграл (B.6) дают лишь те слагаемые в разложении экспоненты по величинам

$$-\frac{i}{4} \psi_{\mathbf{x}}^T \gamma^2 \gamma^i U_{\mathbf{x},e_i} \psi_{\mathbf{x}+e_i} \quad (\text{B.8})$$

и

$$\frac{i}{4} \psi_{\mathbf{x}}^T \gamma^2 \gamma^i U_{\mathbf{x}-e_i,e_i}^\dagger \psi_{\mathbf{x}-e_i}, \quad (\text{B.9})$$

в которых эти величины учитываются лишь в первой степени. Каждому положительно ориентированному ребру соответствует множитель (B.8), а каждому отрицательно ориентированному ребру — множитель (B.9)⁶⁾. Элементарному замкнутому контуру ребра $l_{\mathbf{x},i}$ соответствуют сразу оба множителя (B.8) и (B.9). Тем самым в каждой вершине \mathbf{x} имеется под интегралом элемент грассмановой алгебры $(\psi_{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{x}}^T)$ в первой степени, дающий согласно (B.7) ненулевой фактор. Заметим, что привязка этого правила к ориентации контуров в рассматриваемом майорановском случае связана со взаимодействием фермионов с калибровочным полем. Действительно, вычисление интеграла по калибровочному полю (в случае более высокой, чем Z_2 , калибровочной симметрии)

⁶⁾ Это утверждение справедливо лишь в случае калибровочной группы Z_2 .

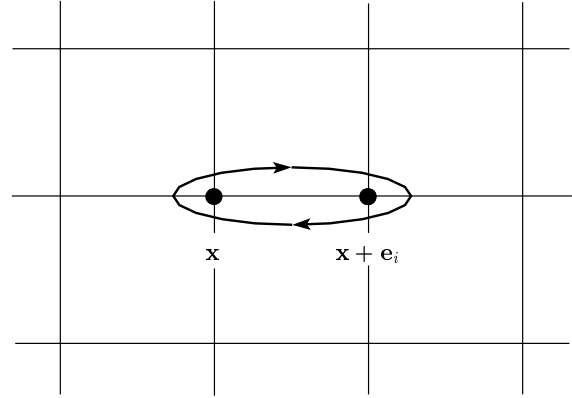


Рис. 4

в рамках высокотемпературного разложения приводит к обращению в нуль вкладов от неориентированных замкнутых контуров, которые не обращаются в нуль в результате интегрирования в выражении (B.6).

Поскольку нас интересует специальный вопрос, далее положим $U_{\mathbf{x},e_i} = 1$.

Из сказанного выше и с учетом формул (B.5), (B.7)–(B.9) вытекают следующие правила вычисления интеграла (B.6).

1) Вычертим на решетке систему замкнутых ломаных ориентированных контуров, описанных выше, и, обходя каждый контур последовательно вдоль стрелок, сопоставим в этой же последовательности каждому ребру $l_{\mathbf{x},i}$ фактор $(1/4) \gamma^i$ в случае положительной ориентации ребра и $(-1/4) \gamma^i$ в случае отрицательной ориентации ребра.

2) После завершения обхода каждого контура вычислим след от упорядоченного произведения γ -матриц, соответствующего контуру согласно правилу 1), и добавим общий для всего контура фактор (-1) . Полученное число назовем фактором контура.

3) Перемножим факторы всех контуров. Полученное число назовем фактором системы контуров.

4) Для нахождения интеграла (B.6) просуммируем факторы всех возможных систем контуров.

Теперь продемонстрируем изменение знака системы контуров на простейших примерах. Поскольку нас интересует лишь знак, прочие положительные множители игнорируются.

Рассмотрим фактор элементарного замкнутого контура ребра $l_{\mathbf{x},i}$. На рис. 4 изображен этот контур.

Согласно приведенным правилам фактор этого контура равен

$$\Phi_{\mathbf{x},i} = (-1) \text{tr} \gamma^i (-\gamma^i) = 1. \quad (\text{B.10})$$

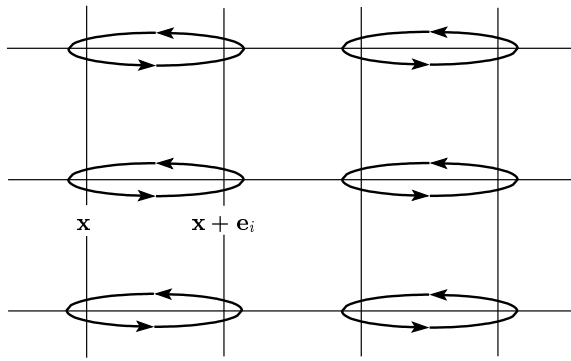


Рис. 5

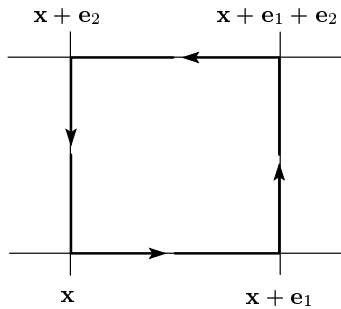


Рис. 6

Одна из возможных и вместе с тем простейших систем контуров изображена на рис. 5, на котором представлена одна из взаимно параллельных плоскостей решетки, содержащих вектор e_i . Таким образом, все эти плоскости содержат одинаковые конфигурации элементарных замкнутых контуров и каждая вершина решетки принадлежит одному и только одному контуру. Очевидно, что фактор, соответствующий этой системе контуров, равен согласно (В.10) произведению единиц и поэтому сам равен единице.

Предполагается, что в последующих примерах систем замкнутых контуров почти все замкнутые контуры являются элементарными, изменение числа которых не влияет на общий знак фактора системы контуров. Поэтому будут обсуждаться и изображаться на рисунках лишь те замкнутые контуры, которые могут влиять на общий знак фактора системы контуров.

Рассмотрим фактор, соответствующий замкнутому контуру в плоскости (1,2), изображенному на рис. 6. Он легко вычисляется:

$$\Phi_{x, e_1, e_2} = (-1) \text{tr} \gamma^1 \gamma^2 (-\gamma^1) (-\gamma^2) = 1. \quad (\text{В.11})$$

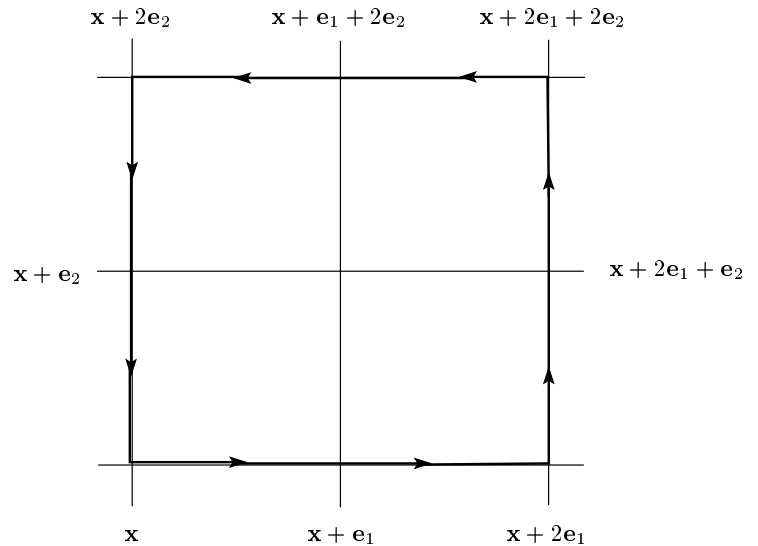


Рис. 7

Тем самым и общий знак фактора системы контуров, соответствующих рис. 6, также равен единице.

Теперь рассмотрим фактор, соответствующий замкнутому контуру в плоскости (1,2), изображенному на рис. 7. Он равен

$$\Phi_{x, 2e_1, 2e_2} = (-1) \text{tr} \gamma^1 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^2 (-\gamma^1) (-\gamma^1) \times (-\gamma^2) (-\gamma^2) = -1. \quad (\text{В.12})$$

Отсюда видно, что общий знак фактора системы контуров, соответствующих рис. 7, отрицателен.

Таким образом мы видим, что фактор системы контуров, сумма которых определяет интеграл (В.6), может иметь как положительный, так и отрицательный знак. При этом изменение конфигурации контуров приводит, вообще говоря, к изменению знака фактора.

Напоследок заметим, что фермионный дираковский вклад в статистическую сумму (В.2) также представляется как сумма факторов систем контуров. Однако в дираковском случае знак фактора не зависит от конфигурации контуров. Увидеть это легче всего в длинноволновом пределе в малом и медленно изменяющемся калибровочном поле. В этом пределе решеточное действие (В.1) переходит в обычное дираковское действие

$$S_D = \int d^3x \bar{\psi} (i\gamma^i \partial_i - e\gamma^i A_i) \psi. \quad (\text{В.13})$$

Соответствующий вклад в статистическую сумму может быть записан в виде

$$\begin{aligned}
& \det (i\gamma^i \partial_i - e\gamma^i A_i) = \\
& = \text{const} \cdot \exp \left\{ \text{tr} \ln [1 - e(i\gamma^i \partial_i)^{-1} \gamma^j A_j] \right\} = \\
& = \text{const} \cdot \exp \left\{ -e^2 \int d^3x d^3y \text{tr} (i\gamma^k \partial_k)_{x,y}^{-1} \times \right. \\
& \quad \left. \times \gamma^i A_i(y) (i\gamma^k \partial_k)_{y,x}^{-1} \gamma^j A_j(x) - \dots \right\}. \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

В последнем разложении в подынтегральном выражении присутствует достаточно гладкая функция $(i\gamma^k \partial_k)_{x,y}^{-1}$. Поскольку пространственные интегрирования означают варьирования контуров, отсюда видно, что варьирование контуров не сопряжено с варьированием знака соответствующего фактора. Варьирование знаков факторов контуров майорановских фермионов на решетке означает, что в континуальном длинноволновом пределе вклады в статистическую сумму от этих контуров взаимно сокращаются. Отсюда видна невозможность взаимодействия майорановских фермионов с абелевым калибровочным полем в континуальной теории. Это

положение непосредственно следует также из формулы (B.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **135**, 820 (2009); arXiv:0805.0225.
2. R. Savit, Rev. Mod. Phys. **52**, 453 (1980).
3. P. A. M. Dirac, *Spinors in Hilbert Space*, Plenum Press, New York, London (1974).
4. Н. В. Вдовиченко, ЖЭТФ **7**, 715 (1964); Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. V, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976), § 151.
5. Н. В. Nielsen and M. Ninomiya, Phys. Lett. B **105**, 219 (1981); Nucl. Phys. B **185**, 20 (1981); Nucl. Phys. B **195**, 541 (1982); Nucl. Phys. B **193**, 173 (1981).
6. M. Luscher, arXiv:hep-th/0102028.
7. А. Б. Замолодчиков, ЖЭТФ **79**, 641 (1980).