

ДИНАМИКА ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ В МЕТРИКЕ РЕЙССНЕРА – НОРДСТРЕМА

В. И. Докучаев^{a,}, С. В. Чернов^{a,b,**}*

*^a Институт ядерных исследований Российской академии наук
117312, Москва, Россия*

*^b Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 июня 2009 г.

Рассматривается динамика тонкой сферически-симметричной гравитирующей оболочки вокруг электрически заряженной черной дыры Рейсснера–Нордстрема. Тензор энергии-импульса электрически нейтральной оболочки моделируется идеальной жидкостью с политропным уравнением состояния. Динамику оболочки с пылевым уравнением состояния удается проследить полностью аналитически. Построены диаграммы Картера–Пенроуза, описывающие глобальную геометрию и все возможные типы движений гравитирующей оболочки в случае вечной черной дыры. Найдены условия, при которых реализуются устойчивые колебательные движения оболочки, переводящие ее последовательно из одной вселенной в следующую по бесконечному ряду идентичных вселенных. Показано, что подобные устойчивые колебательные движения оболочки возможны при произвольном политропном уравнении состояния оболочки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди точно решаемых задач в общей теории относительности важное место занимает модель тонких гравитирующих оболочек, впервые предложенная Израэлем [1]. Формализм модели тонких оболочек был затем разработан в деталях и применялся для широкого класса космологических и астрофизических задач [2–6]. В частности, при анализе фазовых переходов в ранней вселенной [7, 8] модель тонких оболочек является очень удобным формализмом, позволяющим достаточно подробно проследить динамику как самих фазовых переходов, так и возникновение и эволюцию дочерних вселенных [9–25]. Фазовые переходы в ранней вселенной начинаются с образования затравочных пузырьков нового вакуума [26–30]. Этот процесс является квантовым, но из-за быстрого расширения пузырьки нового вакуума переходят в классическую стадию эволюции. Классическая стадия динамической эволюции вакуумных пузырьков рассматривалась с помощью формализма тонких оболочек во многих работах [5, 6, 31–40]. В астрофизике формализм тон-

ких оболочек помогает анализировать релятивистские свойства компактных звездных систем [41]. В теории поля модели, аналогичные модели тонкой оболочки, строились при изучении динамики распада метастабильного вакуума [7, 8, 26–30, 42–45]. Модель тонких оболочек также удобна для квазиклассического описания квантовых черных дыр [46–52]. Частный случай падающей на черную дыру тонкой оболочки с фантомным уравнением состояния рассматривался в работе [53]. В работе [54] изучалась динамика тонкой вращающейся пылевой оболочки.

В недавней работе [55] обсуждалась возможность устойчивого (осциллирующего) движения оболочки в метрике электрически заряженной черной дыры Рейсснера–Нордстрема. Однако соответствующее решение не было найдено. Как известно, сферически-симметричная оболочка в метриках Минковского [32], Шварцшильда [2, 6], Шварцшильда–де Ситтера [5, 40] и во вселенной Фридмана–Шварцшильда [39] динамически неустойчива. Оболочка в конечном итоге либо коллапсирует (падает на центральную сингулярность), либо бесконечно расширяется. В этой работе мы подробно исследуем динамику сферически-симметричной оболочки для случая геометрии Рейсснера–Нордстрема и на-

*E-mail: dokuchaev@ms2.inr.ac.ru

**E-mail: chernov@lpi.ru

ходим условия, при которых может реализоваться режим устойчивых колебаний оболочки. В частности, в случае пылевой оболочки эту задачу удается исследовать полностью аналитически.

Одним из первых авторов, кто рассматривал задачу о динамической эволюции оболочки в метрике Рейсснера–Нордстрема, был Кухарж [3], который, в частности, показал, что электрический заряд черной дыры может препятствовать коллапсу оболочки, т. е. может существовать точка отскока. Еще раньше возможность остановки коллапса заряженного шара и его последующее расширение в другую вселенную была продемонстрирована Новиковым [56]. Наличие точки отскока для сжимающейся оболочки может обеспечить ее осциллирующее движение в случае вечной черной дыры, глобальная геометрия которой содержит бесконечное количество идентичных вселенных. Эта возможность качественно обсуждалась в работе [55]. Ниже мы найдем необходимые условия для реализации такого осциллирующего движения оболочки, а также соответствующее точное аналитическое решение. Можно предположить, что такое же осциллирующее движение оболочки возможно в случае метрики Керра из-за наличия центробежного барьера у вращающейся черной дыры. В случае черной дыры Шварцшильда такая возможность отсутствует и коллапсирующая оболочка с неизбежностью падает на центральную сингулярность.

Всюду ниже принято, что греческие индексы α, β, \dots соответствуют четырем координатам t, r, θ и φ в четырехмерном пространстве-времени, а латинские индексы i, k, \dots соответствуют трем координатам t, θ и φ на оболочке.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОБОЛОЧКИ

Пусть в четырехмерном пространстве-времени задана сферически-симметричная гиперповерхность Σ , которая разделяет пространство-время на две области. Внутреннюю часть будем обозначать индексом «in», внешнюю — «out». Каждую область внутри и вне этой гиперповерхности будем описывать метрикой электрически заряженной черной дыры Рейсснера–Нордстрема, которая имеет хорошо известный вид:

$$ds_{in,out}^2 = \left(1 - \frac{2m_{in,out}}{r} + \frac{Q_{in,out}^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m_{in,out}}{r} + \frac{Q_{in,out}^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega,$$

где $m_{in,out}$ — массы черной дыры, а $Q_{in,out}$ — электрические заряды внутри и вне гиперповерхности Σ . Мы будем рассматривать электрически нейтральную сферическую оболочку, поэтому $Q_{in} = Q_{out} = Q$. Метрика на оболочке в силу сферической симметрии имеет простой вид [6]:

$$ds_{\Sigma}^2 = d\tau^2 - \rho^2(\tau) d\Omega, \quad (1)$$

где τ — собственное время наблюдателя, находящегося на оболочке, а ρ — радиус оболочки, измеряемый наблюдателем на оболочке. Уравнения движения тонкой оболочки были выведены во многих работах (см., например, [6]) и могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} [K_0^0] + [K_2^2] &= 8\pi S_2^2, \\ \{K_0^0\}S_0^0 + 2\{K_2^2\}S_2^2 + [T_0^n] &= 0, \\ [K_2^2] &= 4\pi S_0^0, \\ \frac{dS_0^0}{d\tau} + \frac{2\dot{\rho}}{\rho}(S_0^0 - S_2^2) + [T_0^n] &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где K_i^j — внешняя кривизна, T_{α}^{β} — тензор энергии-импульса материи вне и внутри оболочки, S_i^j — тензор энергии-импульса самой оболочки и введены обозначения: $[T] = T_{out} - T_{in}$, $\{T\} = T_{out} + T_{in}$. Выражения для внешней кривизны в метрике Рейсснера–Нордстрема имеют вид [3, 6]

$$\begin{aligned} K_2^2 &= -\frac{\sigma}{\rho} \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{Q^2}{\rho^2}}, \\ K_0^0 &= -\sigma \frac{\dot{\rho} + m/\rho^2 - Q^2/\rho^3}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + 1 - 2m/\rho + Q^2/\rho^2}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma = \pm 1$. Можно показать [57], что знаки σ совпадают со знаками областей пространства-времени типа R_+ и R_- . Заряженная черная дыра создает электрическое поле вне черной дыры, тензор электромагнитного поля которого имеет простой вид [58]:

$$F_{tr} = \frac{Q}{r^2} = -F^{tr}. \quad (4)$$

Соответствующий тензор энергии-импульса электромагнитного поля есть

$$\begin{aligned} 4\pi T_{\beta}^{\alpha} &= -F^{\alpha\gamma} F_{\beta\gamma} + \frac{1}{4} \delta_{\beta}^{\alpha} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}, \\ T_t^t = T_r^r &= -T_{\theta}^{\theta} = -T_{\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для вычисления тензора энергии-импульса на тонкой оболочке нужно воспользоваться соответствующими формулами предельного перехода [6]. В результате получим

$$T_0^n = n_{,t} \frac{\partial t}{\partial \tau} T_t^t + n_{,r} \frac{\partial r}{\partial \tau} T_r^r = 0, \quad T_n^n = T_t^t. \quad (6)$$

Будем рассматривать модель оболочки с тензором энергии-импульса идеальной жидкости

$$S_{ij} = (p + \mu) u_i u_j - p g_{ij}, \quad (7)$$

где p — давление в жидкости, μ — плотность ее суммарной энергии. В системе отсчета наблюдателя, находящегося на рассматриваемой трехмерной оболочке, компоненты скорости жидкости равны $u_i = (1, 0, 0)$. В случае идеальной жидкости выполняются также соотношения $S_0^0 = \mu$ и $S_2^2 = S_3^3 = -p$.

Рассмотрим политропное уравнение состояния вида $p = kn^\gamma$, где n — концентрация, γ — политропный индекс. Суммарная плотность энергии для политропного уравнения состояния равна $\mu = n + p/(\gamma - 1)$, где первое слагаемое соответствует массе покоя частиц жидкости, а второе — плотности внутренней энергии [59]. В частности, для пыли $p = 0$ и $\mu = n$; для теплового излучения масса покоя частиц жидкости равна нулю, $\gamma = 4/3$ и $\mu = 3p$; для частного случая $\gamma = 2$ получим $\mu = n + p$. Последнее уравнение состояния при $p \gg n$ воспроизводит ультражесткое уравнение состояния жидкости, в которой скорость звука равна скорости света [60]: $\mu = p$. Для рассматриваемого политропного уравнения состояния с помощью последнего уравнения (2) находим зависимость концентрации n от радиуса оболочки ρ , измеряемого наблюдателем на оболочке:

$$n = \frac{A}{\rho^2}. \quad (8)$$

Здесь A — постоянная интегрирования. Соответственно, зависимость суммарной плотности энергии S_0^0 от радиуса оболочки ρ имеет вид

$$S_0^0 = \mu(\rho) = \frac{A}{\rho^2} + \frac{k}{\gamma - 1} \frac{A^\gamma}{\rho^{2\gamma}}. \quad (9)$$

В результате первое уравнение (2), описывающее динамику оболочки, запишется в окончательном виде как

$$\sigma_{in} \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1 - \frac{2m_{in}}{\rho} + \frac{Q^2}{\rho^2}} - \sigma_{out} \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1 - \frac{2m_{out}}{\rho} + \frac{Q^2}{\rho^2}} = 4\pi\rho\mu(\rho), \quad (10)$$

где $\sigma_{in,out} = \pm 1$. Это уравнение мы и будем исследовать, полагая $\mu(\rho) > 0$.

Для последующего анализа уравнение (10) удобно переписать в виде «закона сохранения энергии», выделив кинетическую и потенциальную части. После квадрирования выражения (10) получим уравнение

$$m_{out} = m_{in} + 4\pi\rho^2\mu\sigma_{in} \times \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1 - \frac{2m_{in}}{\rho} + \frac{Q^2}{\rho^2}} - 8\pi^2\rho^3\mu^2. \quad (11)$$

Величина m_{out} в этом уравнении трактуется как гамильтониан всей системы [51] (см. также [52]) и представляет собой полную энергию всей системы, которая сохраняется при динамической эволюции оболочки. Не представляет труда придать физический смысл другим слагаемым в этом уравнении [5, 6]. Первое слагаемое есть собственная масса внутренней черной дыры. Второе слагаемое имеет смысл кинетической энергии, а третье — гравитационная энергия самовзаимодействующей оболочки радиуса ρ . Поверхностную плотность этой энергии будем называть эффективным натяжением оболочки. В уравнение (11) не входит кулоновская энергия, поскольку рассматриваемая здесь оболочка электрически нейтральна. Электрический заряд черной дыры тем не менее входит в член для кинетической энергии, поскольку он дает вклад в гравитационное поле черной дыры. Квадрируя уравнение (11) еще раз, получим уравнение эволюции оболочки в форме, удобной для дальнейшего анализа:

$$\dot{\rho}^2 + U = 0, \quad (12)$$

где эффективный потенциал $U = U(\rho)$ есть

$$U = 1 + \frac{Q^2}{\rho^2} - \frac{m_{out} + m_{in}}{\rho} - 4\pi^2\rho^2\mu^2(\rho) - \frac{(m_{out} - m_{in})^2}{16\pi^2\rho^4\mu^2(\rho)}. \quad (13)$$

К этому уравнению нужно еще добавить условия на знаки σ_{out} и σ_{in} , которые можно получить с помощью уравнения (10):

$$\sigma_{out} = \text{sign} [m_{out} - m_{in} - 8\pi^2\rho^3\mu^2(\rho)], \quad (14)$$

$$\sigma_{in} = \text{sign} [m_{out} - m_{in} + 8\pi^2\rho^3\mu^2(\rho)]. \quad (15)$$

В следующем разделе мы исследуем эти уравнения детально для случая пылевой оболочки. Аналогичные анализы для других метрик были проведены

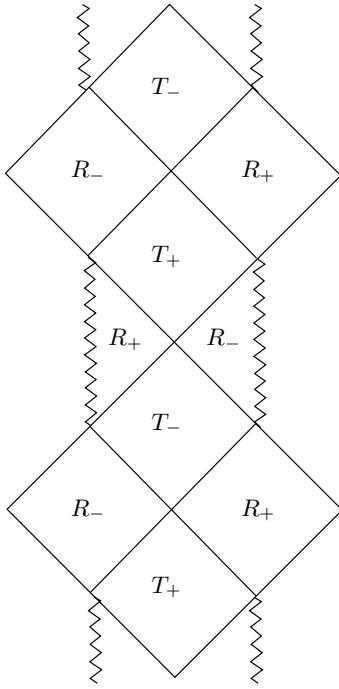


Рис. 1. Диаграмма Картера–Пенроуза для метрики вечной черной дыры Рейсснера–Нордстрема (без оболочки). Глобальная геометрия вечной электрически заряженной черной дыры представляет собой бесконечный ряд идентичных вселенных с времениподобными сингулярностями (показаны ломаными линиями). Показаны области пространства-времени типа R_{\pm} и T_{\pm}

во многих работах [5, 39, 40]. Далее с помощью диаграмм Картера–Пенроуза мы будем строить глобальные геометрии рассматриваемой конфигурации заряженной черной дыры и движущейся оболочки, предполагая, что черная дыра существует вечно. Именно на этих диаграммах можно наиболее полно проследить всю эволюционную историю оболочки. Исходная диаграмма Картера–Пенроуза для глобальной геометрии вечно существующей черной дыры Рейсснера–Нордстрема без оболочки изображена на рис. 1.

3. ПЫЛЕВАЯ ОБОЛОЧКА

Начнем рассмотрение динамики оболочки с наиболее простого случая, когда оболочка является пылевой, т. е. давление в ней равно нулю, а плотность энергии $\mu(\rho) = A/\rho^2$ согласно (8) и (9). В случае пылевой оболочки эффективный потенциал U в уравнении движения оболочки (12) существенно упрощается и примет вид

$$U = 1 + \frac{Q^2}{\rho^2} - \frac{m_{out} + m_{in}}{\rho} - \left(\frac{m_{out} - m_{in}}{4\pi A} \right)^2 - 4\pi^2 \frac{A^2}{\rho^2}. \quad (16)$$

Соответствующие условия (14) и (15) для знаков σ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{out} &= \text{sign} \left[m_{out} - m_{in} - 8\pi^2 \frac{A^2}{\rho} \right], \\ \sigma_{in} &= \text{sign} \left[m_{out} - m_{in} + 8\pi^2 \frac{A^2}{\rho} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Смена знаков σ_{out} и σ_{in} в этих уравнениях происходит, когда оболочка достигает соответственно радиусов ρ_{out} и ρ_{in} . Эти радиусы равны

$$\rho_{out} = \frac{8\pi^2 A^2}{m_{out} - m_{in}}, \quad \rho_{in} = \frac{8\pi^2 A^2}{m_{in} - m_{out}}. \quad (18)$$

Отсюда легко увидеть, что при $m_{out} > m_{in}$ существует только один из радиусов, а именно, ρ_{out} , тогда как в обратном случае, т. е. при $m_{in} > m_{out}$, существует только второй из радиусов ρ_{in} . Для рассматриваемого пылевого уравнения состояния можно найти аналитически все допустимые решения уравнения движения оболочки (12) и провести классификацию всех возможных типов движения оболочки, что мы и сделаем ниже.

Классификацию возможных типов движения пылевой оболочки начнем с изучения характерных особенностей формы потенциала (16). Для нахождения экстремумов вычислим первую и вторую производные этого потенциала:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho^2} \left[-\frac{2Q^2}{\rho} + m_{in} + m_{out} + \frac{8\pi^2 A^2}{\rho} \right], \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = \frac{2}{\rho^3} \left[\frac{3Q^2}{\rho} - (m_{out} + m_{in}) - \frac{12\pi^2 A^2}{\rho} \right]. \quad (20)$$

Из этих уравнений видно, что существование или отсутствие экстремума потенциала зависит от четырех характерных величин данной задачи: m_{in} , m_{out} , Q и A . Значение потенциала (16) на пространственной бесконечности $\rho = \infty$ есть

$$U(\infty) = 1 - \frac{(m_{out} - m_{in})^2}{16\pi^2 A^2}. \quad (21)$$

Видно, что в зависимости от m_{out} , m_{in} и A значение потенциала может быть как положительным, так и отрицательным. Соответственно, от этих же параметров будет зависеть существование или отсутствие точек отскока вне горизонта событий черной

дыры. Введем компактные обозначения для характерных внешних и внутренних радиусов горизонтов:

$$\begin{aligned}\rho_{in}^{\pm} &= m_{in} \pm \sqrt{m_{in}^2 - Q^2}, \\ \rho_{out}^{\pm} &= m_{out} \pm \sqrt{m_{out}^2 - Q^2}.\end{aligned}\quad (22)$$

Для соответствующих значений потенциала при этих радиусах оболочки получим

$$U(\rho_{in}^{\pm}) = - \left(\frac{2\pi A}{\rho_{in}^{\pm}} + \frac{m_{out} - m_{in}}{4\pi A} \right)^2, \quad (23)$$

$$U(\rho_{out}^{\pm}) = - \left(\frac{2\pi A}{\rho_{out}^{\pm}} - \frac{m_{out} - m_{in}}{4\pi A} \right)^2. \quad (24)$$

Также можно видеть, что значение потенциала на горизонтах событий всегда отрицательное или нулевое. Значения потенциала на характерных радиусах ρ_{out} и ρ_{in} равны соответственно

$$\begin{aligned}U(\rho_{out}) &= 1 - \frac{2m_{out}}{\rho_{out}} + \frac{Q^2}{\rho_{out}^2} - \\ &\quad - \left(\frac{2\pi A}{\rho_{out}} - \frac{m_{out} - m_{in}}{4\pi A} \right)^2, \\ U(\rho_{in}) &= 1 - \frac{2m_{in}}{\rho_{in}} + \frac{Q^2}{\rho_{in}^2} - \\ &\quad - \left(\frac{2\pi A}{\rho_{in}} + \frac{m_{out} - m_{in}}{4\pi A} \right)^2.\end{aligned}\quad (25)$$

Из этих выражений следует, что радиусы ρ_{out} и ρ_{in} совпадают с соответствующими горизонтами событий, если потенциал на горизонтах событий и на характерных радиусах ρ_{out} и ρ_{in} равен нулю. Потенциал имеет нулевое значение, $U = 0$, при радиусе оболочки $\rho = \rho_0^{\pm}$, где

$$\begin{aligned}\rho_0^{\pm} &= \frac{m_{out} + m_{in}}{2 \left[1 - \frac{(m_{out} - m_{in})^2}{16\pi^2 A^2} \right]} \times \\ &\times \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{4(Q^2 - 4\pi^2 A^2)}{(m_{out} + m_{in})^2} \left(1 - \frac{(m_{out} - m_{in})^2}{16\pi^2 A^2} \right) \right]^{1/2} \right\}.\end{aligned}$$

С помощью уравнения для первой производной потенциала легко найти радиус его экстремума

$$\rho_{min} = \frac{2(Q^2 - 4\pi^2 A^2)}{m_{out} + m_{in}}. \quad (26)$$

Этот экстремум, как оказывается, является минимумом. Из уравнения для нуля второй производной потенциала найдем точку перегиба (inflection point):

$$\rho_{inf} = \frac{3(Q^2 - 4\pi^2 A^2)}{m_{out} + m_{in}} = \frac{3}{2} \rho_{min}. \quad (27)$$

В точке экстремума потенциал равен

$$U(\rho_{min}) = 1 - \frac{(m_{out} - m_{in})^2}{16\pi^2 A^2} - \frac{(m_{out} + m_{in})^2}{4(Q^2 - 4\pi^2 A^2)} < 0.$$

Можно показать, что значение потенциала в точке экстремума всегда отрицательно.

Для более детального описания рассмотрим ситуацию, когда $m_{out} > m_{in}$. Обратная ситуация рассматривается совершенно аналогично. Можно показать, что при $m_{out} > m_{in}$ будет выполняться неравенство $\rho_{out}^+ > \rho_{in}^+ > \rho_{in}^- > \rho_{out}^-$. Это неравенство означает, что внутренний (внешний) горизонт событий рассматриваемой метрики под оболочкой всегда больше (меньше) соответствующего внутреннего (внешнего) горизонта событий метрики вне оболочки. В результате, параметр $\sigma_{in} = 1$ и движение оболочки в этом случае происходит в пространстве-времени типа R_+ внутренней части метрики. Теперь рассмотрим эту ситуацию, т.е. когда $m_{out} > m_{in}$, для нескольких отдельных случаев.

Пусть сначала реализуется случай (I), когда выполнены неравенства

$$Q^2 > 4\pi^2 A^2, \quad (m_{out} - m_{in})^2 > 16\pi^2 A^2.$$

Первое неравенство означает, что при радиальном сжатии оболочки ветви потенциала U растут и, следовательно, оболочка не сможет преодолеть потенциальный барьер. Иными словами, в этом случае существует точка отскока $\rho_0^- > 0$. Оболочка не может упасть на центральную сингулярность, поскольку гравитационное поле электрического заряда черной дыры создает настолько высокий потенциальный барьер, что кинетической энергии падающей оболочки оказывается недостаточно для его преодоления. Второе неравенство означает, что энергия натяжения оболочки оказывается недостаточной, чтобы воспрепятствовать остановке сжатия и последующему расширению оболочки в бесконечность.

У потенциала (16) существует минимум, в котором, как было сказано выше, потенциал всегда имеет отрицательное значение. Поскольку потенциал на бесконечности также отрицательный, оболочка в конечном итоге расширяется до бесконечного радиуса. Можно показать, что в этом случае всегда будет выполняться неравенство

$$\rho_{in}^+ > \rho_{out}. \quad (28)$$

Это означает также, что в этом случае могут меняться местами только характерные радиусы ρ_{out}^- , ρ_{in}^- и ρ_{out} . Для более детального описания разделим этот

случай еще на два подслучая (Ia и Ib) в зависимости от соотношения $\rho_{out}^- \geq \rho_{out}$.

В первом подслучае (Ia), соответствующем условию

$$\rho_{out}^- > \rho_{out} \quad (29)$$

или, что эквивалентно, условию

$$8\pi^2 A^2 < (m_{out} - m_{in}) \left(m_{out} - \sqrt{m_{out}^2 - Q^2} \right), \quad (30)$$

характерные радиусы будут расположены в следующем порядке: $\rho_{out} < \rho_{out}^- < \rho_{in}^- < \rho_{in}^+ < \rho_{out}^+$, как показано на рис. 2а вместе с графиком потенциала $U(\rho)$. Соответствующая этому случаю диаграмма Картера–Пенроуза изображена на рис. 3а. На этой диаграмме видно, что оболочка, начав свое сжатие из бесконечности в области R_+ , коллапсирует (т. е. пересекает внешний горизонт черной дыры) и оказывается в области T_- . Затем оболочка, продолжая сжиматься, попадает во внутреннюю область R_+ , где отражается от потенциала в точке отскока, и начинает расширяться до бесконечности в новую внешнюю область R_+ , проходя по пути через область T_+ .

Второй подслучай (Ib) соответствует изменению взаимного расположения радиуса ρ_{out} и горизонта событий ρ_{out}^- . Это происходит при выполнении условия

$$(m_{out} - m_{in}) \left(m_{out} - \sqrt{m_{out}^2 - Q^2} \right) = 8\pi^2 A^2.$$

Таким образом, для второго подслучая, соответствующего выполнению условия

$$\rho_{in}^- > \rho_{out} > \rho_{out}^-, \quad (31)$$

характерные радиусы будут расположены в следующем порядке: $\rho_{out}^- < \rho_{out} < \rho_{in}^- < \rho_{in}^+ < \rho_{out}^+$, как показано на рис. 2б. Соответствующая диаграмма Картера–Пенроуза представлена на рис. 3б. Оболочка в этом случае либо бесконечно расширяется, либо сначала сжимается, уходя под горизонт событий, затем расширяется до бесконечности, но уже в другой вселенной.

Остается еще один подслучай (Ic), когда

$$\rho_{out} > \rho_{in}^- \quad (32)$$

или, что эквивалентно,

$$(m_{out} - m_{in}) \left(m_{in} - \sqrt{m_{in}^2 - Q^2} \right) < 8\pi^2 A^2. \quad (33)$$

Характерные радиусы будут расположены теперь в следующем порядке: $\rho_{out}^- < \rho_{in}^- < \rho_{out} < \rho_{in}^+ < \rho_{out}^+$,

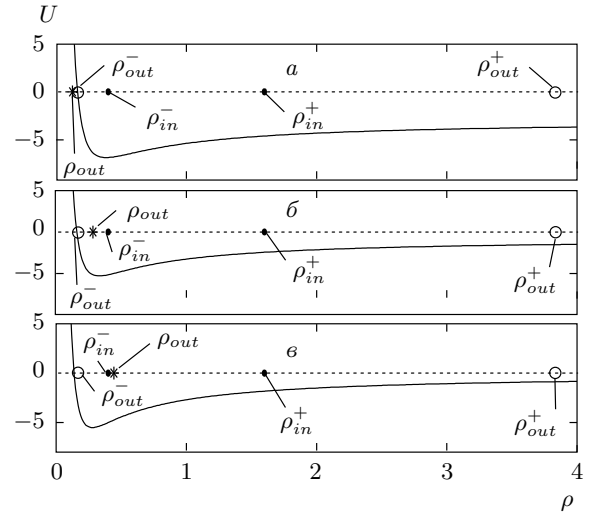


Рис. 2. Графики потенциалов и расположение характерных радиусов при $m_{out} = 2$, $m_{in} = 1$, $Q = 0.8$ для случаев: $\rho_{out}^- > \rho_{out}$ при $A = 0.04$ (а), $\rho_{in}^- > \rho_{out} > \rho_{out}^-$ при $A = 0.06$ (б), $\rho_{out} > \rho_{in}^-$ при $A = 0.075$ (в)

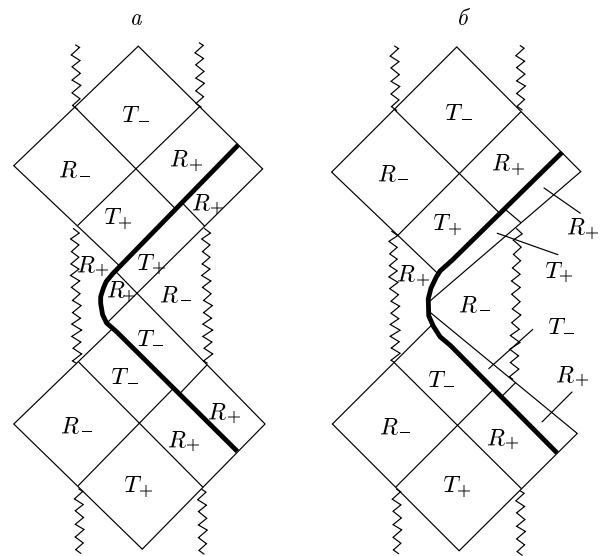


Рис. 3. Диаграммы Картера–Пенроуза для случаев: $\rho_{out}^- > \rho_{out}$ (а), $\rho_{out} > \rho_{out}^-$ (б)

как на рис. 2в. Диаграмма Картера–Пенроуза при этом не изменится по сравнению с предыдущим подслучаем. Как видно из графиков потенциала, в этом случае устойчивых, т. е. осциллирующих решений, для оболочки нет. Оболочка всегда расширяется до бесконечности при любых начальных параметрах задачи. Соответствующее рассматриваемому подслучаю общее решение для эволюции оболочки с на-

чальным условием $\tau = 0$ при $\rho = \rho_0^-$ запишется в виде

$$\tau \sqrt{\frac{(m_{out} - m_{in})^2}{16\pi^2 A^2} - 1} - \sqrt{(\rho - \rho_0^-)(\rho - \rho_0^+)} = \frac{\rho_0^+ + \rho_0^-}{2} \ln \left\{ \frac{1}{\rho_0^- - \rho_0^+} \left[2 \left[\rho + \sqrt{(\rho - \rho_0^-)(\rho - \rho_0^+)} \right] - \rho_0^- - \rho_0^+ \right] \right\}.$$

Очередной случай (II) реализуется, когда выполняются условия

$$4\pi^2 A^2 < Q^2, \quad (m_{out} - m_{in})^2 < 16\pi^2 A^2.$$

При выполнении этих условий, как будет показано ниже, реализуются устойчивые регулярные движения оболочки. Оболочка будет совершать осциллирующие движения. Это связано с тем, что благодаря второму неравенству энергия натяжения оболочки оказывается достаточной для изменения движения оболочки на обратное в точках отскока. Мы также рассмотрим все возможные подслучаи.

В первом подслучае (IIa) выполняется условие

$$\rho_{out} < \rho_{out}^-. \tag{34}$$

Характерные радиусы расположены в следующем порядке: $\rho_{out} < \rho_{out}^- < \rho_{in}^- < \rho_{in}^+ < \rho_{out}^+$, как показано на рис. 4a вместе с графиком потенциала. Диаграмма Картера–Пенроуза для этого подслучая изображена на рис. 5a.

Следующий возможный подслучай (IIb) соответствует условиям

$$\rho_{out}^- < \rho_{out} < \rho_{in}^-. \tag{35}$$

Характерные радиусы при этом расположены в следующем порядке: $\rho_{out}^- < \rho_{out} < \rho_{in}^- < \rho_{in}^+ < \rho_{out}^+$, как показано на рис. 4б. Диаграмма Картера–Пенроуза показана на рис. 5б.

Следующие два подслучая (IIc и IID) связаны с изменением взаимного расположения характерных радиусов ρ_{out} с ρ_{in}^- и ρ_{in}^+ . В случае (IIc), когда

$$\rho_{in}^- < \rho_{out} < \rho_{in}^+, \tag{36}$$

характерные радиусы будут расположены в следующем порядке: $\rho_{out}^- < \rho_{in}^- < \rho_{out} < \rho_{in}^+ < \rho_{out}^+$. Соответственно в противоположном случае, когда

$$\rho_{in}^+ < \rho_{out} < \rho_{out}^+, \tag{37}$$

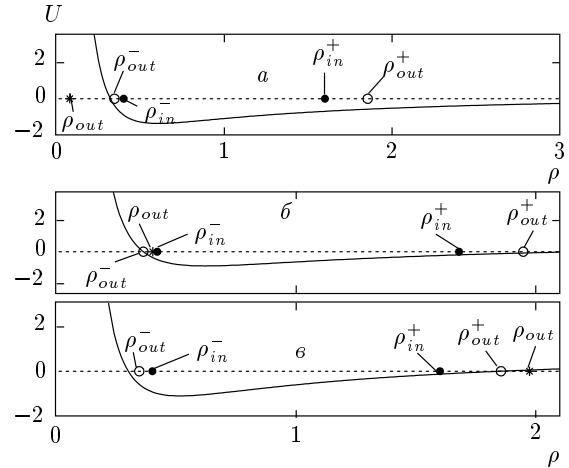


Рис. 4. Зависимости эффективного потенциала $U(\rho)$ и взаимное расположение характерных радиусов при $m_{out} = 1.1$, $m_{in} = 1$, $Q = 0.8$ для возможных случаев: $\rho_{out} < \rho_{out}^-$ при $A = 0.01$ (a), $\rho_{out}^- < \rho_{out} < \rho_{out}^+$ при $A = 0.022$ (б), $\rho_{out}^+ < \rho_{out}$ при $A = 0.05$ (в)

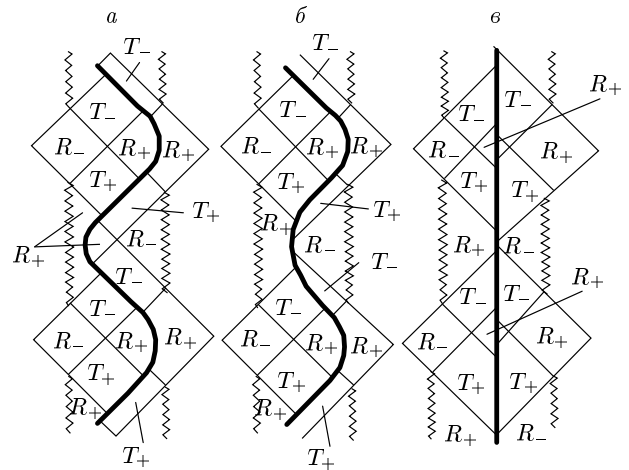


Рис. 5. Диаграммы Картера–Пенроуза для случаев: $\rho_{out} < \rho_{out}^-$ (a), $\rho_{out}^- < \rho_{out} < \rho_{out}^+$ (б), $\rho_{out}^+ < \rho_{out}$ (в)

характерные радиусы будут расположены в последовательности $\rho_{out}^- < \rho_{in}^- < \rho_{in}^+ < \rho_{out} < \rho_{out}^+$. Диаграмма Картера–Пенроуза останется такой же, как и в предыдущем случае.

И наконец, в последнем возможном подслучае (IID)

$$\rho_{out}^+ < \rho_{out}. \tag{38}$$

Расположение характерных радиусов при этом следующее: $\rho_{out}^- < \rho_{in}^- < \rho_{in}^+ < \rho_{out}^+ < \rho_{out}$. График по-

тенциала для этого варианта изображен на рис. 4в, а диаграмма Картера–Пенроуза — на рис. 5в. В этом случае, как было сказано выше, существуют две точки отскока оболочки, соответствующие радиусам $\rho_0^- > 0$ и $\rho_0^+ > 0$. Из приведенных диаграмм отчетливо видно, что оболочка будет совершать бесконечные осциллирующие движения, переходя последовательно из одной области R_+ в другую область R_+ . Соответствующее общее решение для эволюции осциллирующей оболочки с начальными условиями $\tau = 0$ при $\rho = \rho_0^-$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \tau \sqrt{1 - \frac{(m_{out} - m_{in})^2}{16\pi^2 A^2}} + \sqrt{(\rho_0^+ - \rho)(\rho - \rho_0^-)} &= \\ = \frac{\rho_0^+ + \rho_0^-}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\rho_0^+ + \rho_0^- - 2\rho}{2\sqrt{(\rho_0^+ - \rho)(\rho - \rho_0^-)}} \right\}. \end{aligned}$$

Следующий по порядку случай (III) возникает при выполнении условий $4\pi^2 A^2 > Q^2$ и $(m_{out} - m_{in})^2 < 16\pi^2 A^2$. Теперь точки экстремума отсутствуют. Ветвь потенциала гладко растет и пересекает ось $U = 0$ в точке ρ_0^+ . Вторая точка отскока отсутствует и соответственно отсутствует осциллирующее решение. Оболочка в конечном итоге будет коллапсировать. Даже если изначально оболочка расширялась, то расширение неизбежно сменится сжатием, что наглядно видно на диаграмме Картера–Пенроуза. Можно показать, что в данном случае выполняется неравенство

$$\rho_{in}^- < \rho_{out}. \quad (39)$$

Возможны три дополнительных подслучая.

В первом подслучае (IIIa)

$$\rho_{out}^+ < \rho_{out}. \quad (40)$$

Характерные радиусы расположены в следующем порядке: $\rho_{out}^- < \rho_{in}^- < \rho_{in}^+ < \rho_{out}^+ < \rho_{out}$. Потенциал для этого случая изображен на рис. 6а, а диаграмма Картера–Пенроуза — на рис. 7а.

Второй подслучай (IIIb) реализуется при

$$\rho_{in}^+ < \rho_{out} < \rho_{out}^+. \quad (41)$$

Этот случай отличается от предыдущего лишь тем, что меняются местами радиусы ρ_{out} и ρ_{out}^+ , и, следовательно, взаимное расположение характерных радиусов теперь следующее: $\rho_{out}^- < \rho_{in}^- < \rho_{in}^+ < \rho_{out} < \rho_{out}^+$. График потенциала вместе с положениями характерных радиусов изображен на рис. 6б, а диаграмма Картера–Пенроуза — на рис. 7б.

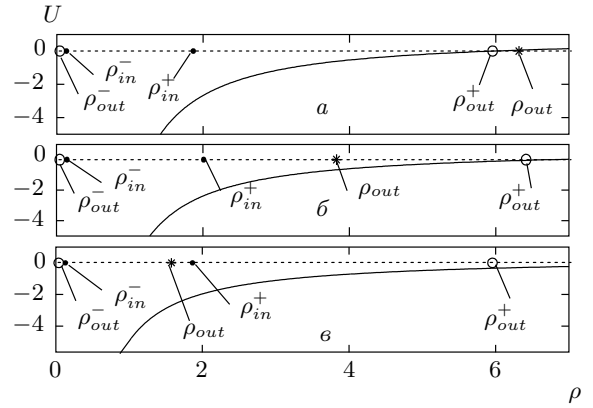


Рис. 6. Зависимости $U(\rho)$ и взаимное расположение характерных радиусов при $m_{out} = 3$, $m_{in} = 1$, $Q = 0.5$ для случаев: $\rho_{out} > \rho_{out}^+$ при $A = 0.4$ (а), $\rho_{out}^+ > \rho_{out} > \rho_{in}^+$ при $A = 0.3$ (б), $\rho_{in}^+ > \rho_{out}$ при $A = 0.2$ (в)

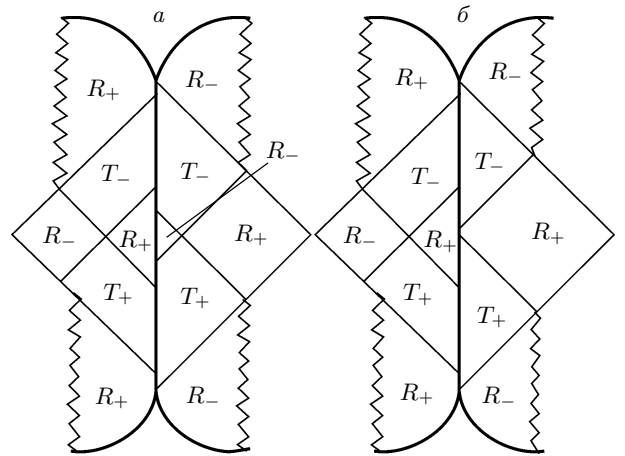


Рис. 7. Диаграммы Картера–Пенроуза для случаев: $\rho_{out} > \rho_{out}^+$ (а), $\rho_{out}^+ > \rho_{out}$ (б)

Наконец, третий подслучай (IIIc) соответствует условию

$$\rho_{in}^+ > \rho_{out}. \quad (42)$$

Диаграмма Картера–Пенроуза не изменится по сравнению с предыдущим вариантом. Общее решение с граничными условиями $\tau = 0$ при $\rho = \rho_0^+$ в этом случае запишется в виде

$$\begin{aligned} \tau \sqrt{1 - \frac{(m_{out} - m_{in})^2}{16\pi^2 A^2}} + \sqrt{(\rho_0^+ - \rho)(\rho - \rho_0^-)} &= \\ = -\frac{\rho_0^+ + \rho_0^-}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\rho_0^+ + \rho_0^- - 2\rho}{2\sqrt{(\rho_0^+ - \rho)(\rho - \rho_0^-)}} \right\}. \end{aligned}$$

Возможен еще вариант (IV), когда выполняются условия

$$4\pi^2 A^2 > Q^2, \quad (m_{out} - m_{in})^2 > 16\pi^2 A^2.$$

В этом случае точки отскока отсутствуют и, следовательно, характер движения оболочки не может измениться. В зависимости от начальных условий оболочка либо бесконечно расширяется, либо сжимается из бесконечности и падает на сингулярность.

4. ПОЛИТРОПНАЯ ОБОЛОЧКА

В этом разделе мы рассмотрим динамику оболочки с политропным уравнением состояния, которая описывается уравнением движения (12) с потенциалом общего вида U согласно (13). Для анализа возможных типов движения оболочки уравнение движения нужно дополнить условиями для знаков σ согласно уравнениям (14) и (15). Хотя этот потенциал имеет довольно громоздкий вид, он обладает свойствами аналогичными свойствам потенциала в случае пылевой оболочки. Действительно, для потенциала в общем случае имеем следующие соотношения:

$$U(\rho_{in}^{\pm}) = - \left[2\pi\rho\mu(\rho_{in}^{\pm}) + \frac{m_{out} - m_{in}}{4\pi\rho_{in}^{\pm 2}\mu(\rho_{in}^{\pm})} \right]^2, \quad (43)$$

$$U(\rho_{out}^{\pm}) = - \left[2\pi\rho\mu(\rho_{out}^{\pm}) - \frac{m_{out} - m_{in}}{4\pi\rho_{out}^{\pm 2}\mu(\rho_{out}^{\pm})} \right]^2. \quad (44)$$

Значения этого потенциала на внешних и внутренних горизонтах событий отрицательны или равны нулю, как и в пылевом случае. Потенциал в точках изменения знака σ равен

$$U(\rho_{out}) = 1 - \frac{2m_{out}}{\rho_{out}} + \frac{Q^2}{\rho_{out}^2} - \left[2\pi\rho\mu(\rho_{out}) - \frac{m_{out} - m_{in}}{4\pi\rho_{out}^2\mu(\rho_{out})} \right]^2,$$

$$U(\rho_{in}) = 1 - \frac{2m_{in}}{\rho_{in}} + \frac{Q^2}{\rho_{in}^2} - \left[2\pi\rho\mu(\rho_{in}) + \frac{m_{out} - m_{in}}{4\pi\rho_{in}^2\mu(\rho_{in})} \right]^2.$$

Как и в случае пылевой оболочки, из условия равенства нулю потенциала на горизонте событий и на характерных радиусах ρ_{out} и ρ_{in} следует, что ρ_{out} и ρ_{in} совпадают с соответствующими радиусами горизонтов черной дыры. Все приведенные выше свойства

потенциала справедливы при произвольном уравнении состояния идеальной жидкости. Задание уравнения состояния в явном (политропном) виде нам потребуется только при вычислении первой и второй производных от потенциала:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \rho} &= -\frac{2Q^2}{\rho^3} + \frac{m_{out} + m_{in}}{\rho^2} - \\ &- \frac{B(m_{out} - m_{in})^2}{4\pi^2\rho^{2\gamma+5}\mu^3(\rho)} + 8\pi^2\rho\mu(\rho) \left[\mu(\rho) + \frac{2B}{\rho^{2\gamma}} \right], \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} &= -\frac{2(m_{out} + m_{in})}{\rho^3} + \frac{6Q^2}{\rho^4} + \\ &+ 8\pi^2 \left[\mu(\rho) + \frac{2B}{\rho^{2\gamma}} \right]^2 - \\ &- 16\pi^2\rho\mu(\rho) \left[\mu(\rho) + \frac{(2\gamma + 1)B}{\rho^{2\gamma}} \right] - \\ &- \frac{(m_{out} - m_{in})^2(2\gamma - 1)}{4\pi^2\rho^{2\gamma+6}\mu^3(\rho)} - \frac{3(m_{out} - m_{in})^2B^2}{2\pi^2\rho^{4\gamma+6}\mu^4(\rho)}, \end{aligned} \quad (45)$$

где $B = kA^\gamma$. В результате получаем, что потенциал (13) для уравнения движения (12) оболочки в общем виде имеет те же характерные особенности, что и потенциал в рассмотренном нами частном случае пылевой оболочки. Следовательно, и для общего случая существуют значения параметров задачи, при которых реализуется режим бесконечного осциллирующего движения оболочки. Например, случай $A = 0$ и $\gamma = 5/4$ также может быть исследован аналитически, но из-за чрезмерной громоздкости конечных результатов мы их не приводим. Для этого случая устойчивые колебательные движения оболочки будут происходить, в частности, при следующих частных значениях параметров задачи: $m_{in} = 1$, $m_{out} = 1.01$, $B = 0.001$ и $Q = 0.5$. Соответственно, для другого варианта, когда $A = 0$ и $\gamma = 2$, осциллирующее движение оболочки будет происходить, например, при следующих значениях параметров задачи: $m_{in} = 1$, $m_{out} = 1.001$, $B = 0.005$, $Q = 0.9$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проанализировали все возможные типы динамической эволюции тонкой оболочки в геометрии вечно существующей электрически заряженной черной дыры на примере пылевой оболочки. В отличие от геометрии Шварцшильда, в случае электрически заряженной черной дыры помимо решений с коллапсом или бесконечным расширением оболочки существует еще и специфическое осциллирующее решение, соответствующее последовательному переходу оболочки из одной вселенной в следующую по бес-

конечному ряду вселенных внутри горизонта событий заряженной черной дыры. Как видно из соответствующих диаграмм Картера–Пенроуза, пылевая оболочка может совершать бесконечное путешествие по внутренним вселенным заряженной черной дыры. При этом периодически чередующиеся остановки сжатия и расширения оболочки происходят последовательно в разных вселенных. Осциллирующие решения существуют и при произвольном уравнении состояния оболочки.

Глобальные геометрии вращающейся черной дыры Керра и электрически заряженной черной дыры Рейсснера–Нордстрема похожи между собой, поэтому осциллирующее движение оболочки в принципе возможно и в случае вращающейся черной дыры. Интересные следствия осциллирующих решений могут проявиться также при моделировании множественной вселенной (multiverse), существующей либо вечно, либо возникающей в результате эволюции изначально простой вселенной за счет множественного квантового рождения дочерних вселенных и последующего расщепления на множество топологически сложно связанных между собой отдельных вселенных (миров).

Осциллирующие оболочки могут оказаться простейшими зондами, связывающими между собой отдельные миры во множественной вселенной. Действительно, наблюдатель в нашей вселенной ничего не может сказать о судьбе коллапсирующей оболочки. В случае шварцшильдовской черной дыры она должна упасть на центральную сингулярность. Но при наличии у черной дыры заряда или углового момента оболочка внутри черной дыры может, не достигая сингулярности, отскочить и расширяться уже в другую вселенную. Если наблюдатель каким-либо способом обнаружит расширяющуюся оболочку, у которой расширение затем сменится сжатием, то он может предполагать, что эта оболочка пришла из другой вселенной. Соответственно электрически заряженные и вращающиеся черные дыры с точками отскока внутри своих горизонтов событий могут оказаться воротами в другие вселенные. Неполный коллапс с отскоком в другую вселенную открывает принципиальную возможность существования в нашей вселенной объектов из других вселенных.

Существование решений с отскоком в другие вселенные имеет принципиальное значение для квантования черных дыр, квантового рождения дочерних вселенных, а также квантовой космологии в целом, поскольку на квантовом уровне возникает проблема необходимости учета переходов между состояниями в разных вселенных.

Из-за отсутствия квантовой теории гравитации квазиклассические модели являются мощным инструментом исследования квантовых эффектов в сильных гравитационных полях. Одной из важнейших современных проблем является проблема квантового туннелирования в случае множественной вселенной. В частности, возникает вопрос о вероятности туннелирования частицы из одной вселенной в другую через заряженную или вращающуюся черную дыру. Осциллирующие решения могут быть использованы при решении задачи о таком туннелировании, а также при рассмотрении в квазиклассическом приближении других свойств квантовых полей в метрике Рейсснера–Нордстрема.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Israel, *Nuovo Cimento B* **44**, 1 (1966).
2. W. Israel, *Phys. Rev.* **153**, 1388 (1967).
3. K. Kuchar, *Czech. J. Phys. B* **18**, 435 (1968).
4. V. De La Cruz and W. Israel, *Phys. Rev.* **170**, 1187 (1968).
5. S. K. Blau, E. I. Guendelman, and A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **35**, 1747 (1987).
6. V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, *Phys. Rev. D* **36**, 2919 (1987).
7. Д. А. Киржниц, *Письма в ЖЭТФ* **15**, 745 (1972).
8. D. A. Kirzhnits and A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **42**, 471 (1972).
9. K. Sato, M. Sasaki, H. Kodama, and K. Maeda, *Phys. Lett. B* **108**, 103 (1982).
10. H. Kodama, *Progr. Theor. Phys.* **63**, 1217 (1980).
11. K. Sato, M. Sasaki, H. Kodama, and K. Maeda, *Progr. Theor. Phys.* **65**, 1443 (1981).
12. H. Kodama, M. Sasaki, K. Sato, and K. Maeda, *Progr. Theor. Phys.* **66**, 2052 (1981).
13. K. Sato, *Progr. Theor. Phys.* **66**, 2287 (1981).
14. H. Kodama and M. Sasaki, *Progr. Theor. Phys.* **68**, 1398 (1982).
15. M. Sasaki, H. Kodama, and K. Sato, *Progr. Theor. Phys.* **68**, 1561 (1982).
16. H. Kodama, M. Sasaki, and K. Sato, *Progr. Theor. Phys.* **68**, 1979 (1982).

17. K. Maeda, M. Sasaki, and K. Sato, *Progr. Theor. Phys.* **69**, 89 (1983).
18. K. Maeda and H. Sato, *Progr. Theor. Phys.* **70**, 772 (1983).
19. Y. Suto, K. Sato, and H. Sato, *Progr. Theor. Phys.* **71**, 938 (1984).
20. А. Д. Долгов, А. Ф. Илларионов, Н. С. Кардашев, И. Д. Новиков, *ЖЭТФ* **94**(8), 1 (1988).
21. C. Barrabes and W. Israel, *Phys. Rev. D* **43**, 1129 (1991).
22. V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, *Phys. Lett. B* **120**, 91 (1983).
23. V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, *Phys. Lett. B* **124**, 479 (1983).
24. V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, *Phys. Lett. B* **130**, 23 (1983).
25. В. А. Березин, В. А. Кузьмин, И. И. Ткачев, *Письма в ЖЭТФ* **41**, 446 (1985).
26. Я. Б. Зельдович, И. Ю. Кобзарев, Л. Б. Окунь, *ЖЭТФ* **67**, 3 (1974).
27. И. Ю. Кобзарев, Л. Б. Окунь, М. Б. Волошин, *ЯФ* **20**, 1229 (1974).
28. S. Coleman, *Phys. Rev. D* **15**, 2929 (1977).
29. C. G. Callan and S. Coleman, *Phys. Rev. D* **16**, 1762 (1977).
30. S. Coleman and F. DeLuccia, *Phys. Rev. D* **21**, 3305 (1980).
31. K. Maeda, *Gen. Rel. Grav.* **18**, 931 (1986).
32. В. А. Березин, В. А. Кузьмин, И. И. Ткачев, *ЖЭТФ* **86**, 785 (1984).
33. A. Aurilia, G. Denardo, F. Legovivni, and E. Spallucci, *Phys. Lett. B* **147**, 258 (1984).
34. A. Aurilia, G. Denardo, F. Legovivni, and E. Spallucci, *Nucl. Phys. B* **252**, 523 (1985).
35. A. Aurilia, M. Palmer, and E. Spallucci, *Phys. Rev. D* **40**, 2511 (1989).
36. A. Aguirre and M. C. Johnson, *Phys. Rev. D* **72**, 103525 (2005).
37. J. Kijowski, G. Magli, and D. Malafarina, *Gen. Rel. Grav.* **38**, 1697 (2006).
38. В. И. Докучаев, С. В. Чернов, *Письма в ЖЭТФ* **85**, 727 (2007).
39. В. И. Докучаев, С. В. Чернов, *ЖЭТФ* **134**, 245 (2008).
40. S. V. Chernov and V. I. Dokuchaev, *Class. Quant. Grav.* **25**, 015004 (2008).
41. М. В. Барков, В. А. Белинский, Г. С. Бисноватый-Коган, *ЖЭТФ* **122**, 435 (2002).
42. L. F. Abbott and S. Coleman, *Nucl. Phys. B* **259**, 170 (1985).
43. W. Lee, B.-H. Lee, C. H. Lee, and C. Park, *Phys. Rev. D* **74**, 123520 (2006).
44. W. Lee, B.-H. Lee, C. H. Lee, S. Nam, and C. Park, *Phys. Rev. D* **77**, 063502 (2008).
45. W. Lee, B.-H. Lee, S. Nam, and C. Park, *Phys. Rev. D* **75**, 103506 (2007).
46. В. А. Березин, *ЭЧАЯ* **34**, 48 (2003).
47. V. A. Berezin, *Phys. Rev. D* **55**, 2139 (1997).
48. V. A. Berezin, A. M. Boyarsky, and A. Yu. Neronov, *Phys. Rev. D* **57**, 1118 (1998).
49. V. A. Berezin, A. M. Boyarsky, and A. Yu. Neronov, *Phys. Lett. B* **455**, 109 (1999).
50. V. A. Berezin, arXiv:gr-qc/0112022.
51. V. A. Berezin, N. G. Kozimirov, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, *Phys. Lett. B* **212**, 415 (1988).
52. V. A. Berezin, *Phys. Lett. B* **241**, 194 (1990).
53. V. Berezin, V. Dokuchaev, Yu. Eroshenko, and A. Smirnov, *Class. Quant. Grav.* **22**, 4443 (2005).
54. V. Berezin and M. Okhrimenko, *Class. Quant. Grav.* **18**, 2195 (2001).
55. I. Guendelman and I. Shilon, *Class. Quant. Grav.* **26**, 045007 (2009).
56. И. Д. Новиков, *Астрон. ж.* **43**, 731 (1966).
57. В. А. Березин, В. А. Кузьмин, И. И. Ткачев, *ЖЭТФ* **93**, 1159 (1987).
58. С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*, Мир, Москва (1986), с. 209.
59. R. F. Tooper, *Astrophys. J.* **142**, 1541 (1965).
60. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ* **41**, 1609 (1961).