

РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ БЫСТРОЙ ВОЛНЫ И МЕДЛЕННОЙ ВОЛНЫ С ПОСТОЯННОЙ АСИМПТОТИКОЙ

А. А. Заболотский*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 25 марта 2009 г.

Интегрируемая система уравнений Яджима–Оикавы (Yajima–Oikawa) решается для случая конечной плотности, отвечающей конечной на бесконечности амплитуде медленно изменяющейся (длинной) волны и для локализованной быстроосциллирующей (короткой) волны. Обсуждается применение результатов для описания спинорного конденсата Бозе–Эйнштейна и в ряде других физических случаев.

PACS: 02.30.Ik, 42.65.Tg, 42.50.Md

1. ВВЕДЕНИЕ

Применение оптической техники для захвата ультрахолодных атомов открыло новые направления в исследовании бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК), позволяя удерживать атомы вне зависимости от их спинового состояния (см., например, [1]). Одним из важных достижений, полученных в этом направлении, было экспериментальное создание спинорного БЭК [1, 2], в котором важную роль играют спиновые состояния, замороженные в магнитной ловушке. Это дает возможность наблюдения различных явлений, не представленных в однокомпонентном БЭК, таких как образование спиновых доменов [3] и спиновых структур [4]. Спинорный БЭК, сформированный из атомов со спином S , описывается $(2S + 1)$ -компонентной волновой функцией. В ряде теоретических работ найдены трехкомпонентные светлые солитоны [5, 6], темные солитоны [7–9] и солитоны, возникающие в оптически периодических средах [10]. Однако, насколько нам известно, экспериментальное подтверждение существования таких векторных солитонов отсутствует. В то же время векторные солитоны смешанного типа, т.е. имеющие в качестве компонент темные и светлые солитоны, представляют особый интерес, поскольку темные солитоны могут форми-

ровать эффективный волновод для светлых солитонов. Подобные волноводы, хорошо изученные в нелинейной оптике, могут быть использованы в качестве квантовых переключателей в разветвителях [11].

Смешанные солитоны, включающие темные и светлые компоненты, были изучены для случая двухкомпонентного БЭК в рамках системы двух связанных уравнений Гросса–Питаевского (ГП) [12]. В работе [13] для описания квазиодномерного спинорного конденсата со спином $S = 1$ использовалась система трех связанных уравнений ГП. Эта модель применяется для атомов ^{87}Rb и ^{23}Na со спином $S = 1$, которые, как известно, формируют спинорные БЭК ферромагнитного и полярного типов, соответственно. Система включает малый физический параметр δ , описывающий отношение величин коэффициентов связи межатомных взаимодействий, зависящих от величины спинов и не зависящих от них [14, 15]. При $\delta = 0$ и без внешнего потенциала соответствующая система уравнений ГП приводится к системе уравнений Манаква [16], которая с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [17, 18] была проинтегрирована в работе [19]. Для малого параметра δ авторы работы [13], используя традиционный метод многомасштабного разложения, асимптотически свели исходную систему уравнений ГП к системе уравнений Яджима–Оикавы (ЯО) [20, 21], интегрируемой с помощью МОЗР. Уравнения ЯО нашли применение

*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

ние в различных областях нелинейной физики, в частности в рамках этих уравнений изучали ленгмюровские волны в плазме и распространение возмущений в белковых молекулах (модель Давыдова), в нелинейной оптике (резонанс Бенни), оптоакустике [22]. Частные солитонные решения уравнений ЯО, описывающие темные солитоны и смешанные темно-светлые солитоны, были использованы в [13] в качестве анзаца для нахождения решения более общей модели. Численный анализ, выполненный в работе [13], продемонстрировал устойчивость этих решений и квазиэластичность их столкновений. В этой же работе проведен численный анализ устойчивости солитонов, который показал, что время жизни таких решений уравнений ГП достаточно велико для их возможного экспериментального наблюдения. Эти факты указывают на целесообразность дальнейшего исследования системы уравнений ЯО с целью применения результатов как в теории БЭК, так и в других областях физики. В частности, несомненный интерес представляет изучение случая конечной асимптотики полей.

Целью настоящей работы является решение уравнений ЯО для конечной плотности низкочастотной волны в рамках МОЗР. Работа организована следующим образом. В разд. 2 в качестве иллюстрации применения уравнений ЯО в теории спирного БЭК дан вывод модели из уравнений ГП. В разд. 3.1 и 3.2 приводятся линейные системы уравнений, используемые в аппарате МОЗР, и функции Йоста. В разд. 3.3 описываются свойства симметрии этих функций и коэффициентов рассеяния. В разд. 3.4 анализируются их аналитические свойства и приводятся дополнительные функции. Решение обратной задачи дается в разд. 4. В разд. 4.1 выводятся сингулярные интегральные уравнения, а в разд. 4.2 приводится солитонное решение. В последнем разделе обсуждается приложение полученных результатов.

2. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЯО ДЛЯ ОПИСАНИЯ СПИНОРНОГО БЭК

При достаточно низких температурах [23, 24] и в рамках модели среднего поля спиновый БЭК со спином $S = 1$ описывается вектором параметра порядка

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = [U_{-1}(\mathbf{r}, t), U_0(\mathbf{r}, t), U_1(\mathbf{r}, t)]^T$$

с компонентами, соответствующими трем значениям вертикальной проекции спина $m_S = -1, 0, +1$.

Если предположить, что конденсат захвачен в сильноанизотропной ловушке с частотами $\omega_x \ll \omega_\perp$, то допустима приближенная сепарабельность волновых функций, $U_{0,\pm 1} \approx u_{0,\pm 1}(x)u_\perp(y, z)$, где волновая функция поперечной волны $u_\perp(y, z)$ является основным состоянием соответствующего гармонического осциллятора. Затем, усредняя систему трехмерных уравнений ГП в поперечной плоскости yz , получаем следующую систему одномерных уравнений для продольной компоненты волновой функции (см. подробнее в работах [5, 6, 8, 25]):

$$i\hbar\partial_t u_{\pm 1} = \hat{H}_{si}u_{\pm 1} + c_2^{(1D)}(|u_{\pm 1}|^2 + |u_0|^2 - |u_{\mp 1}|^2) \times \\ \times u_{\pm 1} + c_2^{(1D)}u_0^2 u_{\mp 1}^*, \quad (1)$$

$$i\hbar\partial_t u_0 = \hat{H}_{si}u_0 + c_2^{(1D)}(|u_{-1}|^2 + |u_{+1}|^2)u_0 + \\ + 2c_2^{(1D)}u_{-1}u_0^*u_{+1}, \quad (2)$$

где

$$\hat{H}_{si} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + c_0^{(1D)}n_{tot}$$

— спин-независимые части гамильтониана с общей плотностью

$$n_{tot} = |u_{-1}|^2 + |u_0|^2 + |u_{+1}|^2$$

(m — атомная масса). Коэффициенты перед нелинейными членами

$$c_0^{(1D)} = \frac{c_0}{2\pi a_\perp^2}, \quad c_2^{(1D)} = \frac{c_2}{2\pi a_\perp^2}$$

отвечают одномерной среде, где $a_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$ — константа, которая определяет поперечный размер основного состояния БЭК. Константы c_0 и c_2 , отвечающие, соответственно, спин-независимым и спин-зависимым столкновениям между идентичными бозонами со спином $S = 1$, в приближении среднего поля имеют вид

$$c_0 = \frac{4\pi\hbar^2(a_0 + 2a_2)}{3m}, \quad c_2 = \frac{4\pi\hbar^2(a_2 - a_0)}{3m}, \quad (3)$$

где a_0 и a_2 — длины рассеяния s -волн в симметричных каналах с общим спином сталкивающихся атомов $S = 0$ и $S = 2$, соответственно. БЭК с $S = 1$ может быть или ферромагнитным (например, ^{87}Rb), в этом случае $c_2 < 0$, или полярным (например, ^{23}Na), в этом случае $c_2 > 0$ [26, 27]. Нормируя время, объем и плотность на $\hbar/c_0^{(1D)}n_0$, $\hbar/\sqrt{mc_0^{(1D)}n_0}$ и n_0 , соответственно (n_0 — максимум плотности), перепишем уравнения (1) и (2) в безразмерном виде:

$$i\partial_t u_{\pm 1} = H_{si} u_{\pm 1} + \delta(|u_{\pm 1}|^2 + |u_0|^2 - |u_{\mp 1}|^2) u_{\pm 1} + \delta u_0^2 u_{\mp 1}^*, \quad (4)$$

$$i\partial_t u_0 = H_{si} u_0 + \delta(|u_{-1}|^2 + |u_{+1}|^2) u_0 + 2\delta u_{-1} u_0^* u_{+1}, \quad (5)$$

где

$$H_{si} \equiv -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}\Omega_{tr}^2 x^2 + n_{tot}.$$

Нормированная частота гармонической ловушки Ω дается выражением

$$\Omega_{tr} = \frac{\omega_x}{\omega_{\perp}} \frac{3}{2(a_0 + 2a_2)n_0}, \quad (6)$$

где

$$\delta \equiv \frac{c_2^{(1D)}}{c_0^{(1D)}} = \frac{a_2 - a_0}{a_0 + 2a_2}. \quad (7)$$

Знаки δ отвечают ферромагнитному ($\delta < 0$) и полярному ($\delta > 0$) спиновому БЭК. В случае атомов ^{87}Rb и ^{23}Na с $S = 1$ имеем $\delta = -4.66 \cdot 10^{-3}$ [14] и $\delta = 3.14 \cdot 10^{-2}$ [15], соответственно. При этом δ является малым параметром в системе уравнений (4), (5). Уравнения (4), (5) дают решения для смешанных спиновых состояний. В то же время существуют их устойчивые решения, отвечающие несмешанным спиновым состояниям или поляризованным состояниям [26].

В работе [13] были найдены решения для пространственно однородной системы ($\Omega_{tr} = 0$), причем в качестве асимптотического, фонового решения системы уравнений (4), (5) рассматривались следующие решения:

$$u_{-1} = u_{+1} = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \exp(-i\mu t), \quad u_0 = 0, \quad (8)$$

$$u_{-1} = u_{+1} = 0, \quad u_0 = \sqrt{\mu} \exp(-i\mu t). \quad (9)$$

Авторами работы [13] показано, что слабо нелинейные возмущения вокруг этих состояний системы принимают форму трехкомпонентных светлo-темных солитонов. В частности, возмущения вблизи решений (8) и (9) приводят к солитонам вида темный-темный-светлый и светлый-светлый-темный, соответственно, для компонент $u_{\pm 1}$ и u_0 .

При $u_{+1} = u_{-1} \equiv u_1$ уравнения (4) сводятся к уравнению для одной волны u_1 . Тогда преобразования

$$u_1 \equiv \frac{u_D + u_B}{2\sqrt{1 + \delta^2}}, \quad u_0 \equiv \frac{u_D - u_B}{\sqrt{1 + \delta^2}}$$

дают систему двух уравнений (4) и (5) в виде двух связанных уравнений ГП с коэффициентами кросс-модуляции

$$g_D = g_B = \frac{1 - \delta}{1 + \delta}$$

(см. [12]). Устойчивость решений для случая трех связанных уравнений ГП, т.е. при $u_{+1} \neq u_{-1}$, была исследована в работе [13].

Для определения решений уравнений (4), (5) в окрестности CW-решений (8) представим решения в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{-1}(x, t) &= u_{+1}(x, t) = \\ &= \sqrt{n_0(x, t)} \exp[-i\mu t + i\phi_0(x, t)], \quad (10) \\ u_0(x, t) &= V_0(x, t) \exp(-i\mu t), \end{aligned}$$

где $n_0(x, t)$ и $\phi_0(x, t)$ — действительные плотность и фаза полей $u_{\pm 1}$, а $V_0(x, t)$ — комплекснозначная амплитуда. Подстановка решений (10) в систему (4), (5) дает

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2} [\partial_t n_0 + \partial_x (n_0 \partial_x \phi_0)] - \\ &- n_0 [\partial_t \phi_0 + 2n_0 - \mu + (1 + \delta)|V_0|^2] - \\ &- n_0 \left[\frac{1}{2} (\partial_x \phi_0)^2 - \frac{1}{2\sqrt{n_0}} \partial_x^2 \sqrt{n_0} + \delta V_0^2 e^{-2i\phi_0} \right] = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\partial_t V_0 + \frac{1}{2} \partial_x^2 V_0 - (2\tilde{n}_0 + |V_0|^2) V_0 - \\ - 2\delta n (V_0 + V_0^* e^{-2i\phi_0}) = 0. \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{n}_0 = n_0 - \mu/2$. Решение (8) удовлетворяет системе уравнений (11) и (12) при $\tilde{n}_0 = 0$, $\phi_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Следуя работе [13], покажем возможность применения уравнений ЯО для описания локализованных возбуждений, распространяющихся на фоне линейного состояния системы (8). Линеаризуем уравнения вблизи этого состояния, представив решения в виде

$$\tilde{n}_0 = \epsilon \tilde{n}, \quad \phi_0 = \epsilon \tilde{\phi}, \quad V_0 = \epsilon \tilde{V},$$

где ϵ — малый параметр. Для членов порядка $O(\epsilon)$ получаем следующую систему уравнений:

$$i \left(\partial_t \tilde{n} + \frac{\mu}{2} \partial_x^2 \tilde{\phi} \right) - \mu \left(\partial_t \tilde{\phi} + 2\tilde{n} - \frac{\mu}{4} \partial_x^2 \tilde{n} \right) = 0, \quad (13)$$

$$i\partial_t \tilde{V} + \frac{1}{2} \partial_x^2 \tilde{V} - \delta \mu \left(\tilde{V} + \tilde{V}^* \right) = 0. \quad (14)$$

Исключая из уравнения (13) мнимую часть, находим

$$\partial_t^2 \tilde{n} - \mu \partial_x^2 \tilde{n} + (\mu^2/8) \partial_x^4 \tilde{n} = 0. \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15) дают следующие дисперсионные соотношения:

$$\omega^2 = k^2 (\delta\mu + k^2/4), \quad (16)$$

$$\omega^2 = \mu k^2 (1 + \mu k^2/8). \quad (17)$$

Из равенства (17) следует, что в пределе $k \rightarrow 0$ малоамплитудная волна распространяется на фоне СВ-решения (8) со скоростью, близкой к скорости звука,

$$c = \sqrt{\mu}. \quad (18)$$

При $\delta > 0$ уравнение (16) не имеет комплексных корней для ω , поэтому решение уравнения (12) $V_0 = 0$ модуляционно устойчиво. При $\delta < 0$ возникает модуляционная неустойчивость решения $V_0 = 0$ для волновых векторов возмущения, лежащих в полосе $k \leq 2\sqrt{|\delta|\mu}$ [13, 23]. Приведенные ниже результаты отвечают случаю полярного БЭК, т. е. $\delta > 0$, для которого возможно распространение локализованных решений, например, солитонов, на фоне основного решения (8).

Введем следующие масштабированные переменные для системы (4), (5):

$$\tilde{x} \equiv \delta^{1/2}(x - \sqrt{\mu}t), \quad \tilde{t} \equiv \delta t. \quad (19)$$

Ищем решение уравнений (11) и (12) в виде

$$\tilde{n}_0 = \delta n/2, \quad \phi_0 = \delta^{1/2}\alpha, \quad V_0 = \delta^{3/4}\mu^{-1/4}F, \quad (20)$$

$$F \equiv \mu^{1/4} [q_1 \cos(K\tilde{x} - \Omega\tilde{t}) + iq_2 \sin(K\tilde{x} - \Omega\tilde{t})], \quad (21)$$

где $n = n(\tilde{x}, \tilde{t})$, $\alpha = \alpha(\tilde{x}, \tilde{t})$, $q_{1,2} = q_{1,2}(\tilde{x}, \tilde{t})$, K и Ω — неизвестные волновой вектор и частота. Подставив (20) в уравнение (11), в первом порядке по δ находим

$$\sqrt{\mu}\partial_{\tilde{x}}\alpha = n. \quad (22)$$

Условие совместности уравнений (25) и (22) дает

$$\partial_{\tilde{t}}n = -\partial_{\tilde{x}}|F|^2. \quad (23)$$

В следующем порядке $O(\delta^{3/2})$ получаем уравнение

$$-\frac{i\mu}{4}(\partial_{\tilde{x}}n - \sqrt{\mu}\partial_{\tilde{x}}^2\alpha) + \partial_{\tilde{t}}\alpha + \sqrt{\mu}|F|^2 = 0. \quad (24)$$

Мнимая составляющая левой части уравнения (24) исчезает вследствие (22). Действительная часть дает

$$\sqrt{\mu}\partial_{\tilde{t}}\alpha = -|F|^2. \quad (25)$$

Применение к уравнению (12) разложения по степеням δ в высшем порядке по δ , т. е. для $O(\delta^{3/4})$, дает

$$\begin{aligned} \Omega q_1 - (K^2/2)q_2 &= 0, \\ -[(K^2/2) + 2\mu]q_1 + \Omega q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Условие совместности уравнений (26) приводит к дисперсионному соотношению для Ω и K :

$$\Omega^2 = K^2 (\mu + K^2/4). \quad (27)$$

В порядке $O(\delta^{5/4})$ из уравнения (12) находим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu}\partial_{\tilde{x}}q_1 &= K\partial_{\tilde{x}}q_2, \\ K\partial_{\tilde{x}}q_1 &= \sqrt{\mu}\partial_{\tilde{x}}q_1, \end{aligned} \quad (28)$$

которая совместна при $K^2 = \mu$. С учетом (27) и (28) находим $\Omega = 5\mu^2/4$. Равенство нулю коэффициента перед $\delta^{7/4}$ в разложении уравнения (12) по степеням δ приводит к уравнению

$$i\partial_{\tilde{t}}F + \frac{1}{2}\partial_{\tilde{x}}^2F - \epsilon_0 nF = 0. \quad (29)$$

Здесь для рассмотренного выше примера полярного БЭК $\epsilon_0 = 1$. Имея в виду также и другие приложения уравнений ЯО, считаем, что $\epsilon_0 = \pm 1$.

Система уравнений ЯО (23) и (29), описывающая взаимодействие низкочастотных и высокочастотных волн, первоначально была выведена в физике плазмы для описания ленгмюровских высокочастотных волн, образующих волновые пакеты с групповыми скоростями, близкими к скорости звука, и поэтому сильно взаимодействующими с низкочастотными ионно-акустическими волнами [22]. Как показано в работах [20, 21], система уравнений ЯО является интегрируемой с помощью метода обратной задачи рассеяния и имеет многосолитонные решения. В работе [21] был развит аппарат МОЗР, основанный на построении и решении уравнений типа уравнений Марченко для затухающих на бесконечностях полей.

Перейдем к новым координатам

$$F = F(x', t'), \quad n = n(x', t'), \quad (30)$$

$$t' = \tilde{t}, \quad x' = \tilde{x} + \tilde{t}$$

и перепишем систему (23), (29) в виде

$$i \frac{\partial F}{\partial t'} + i \frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = \epsilon_0 n F, \quad (31)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t'} + \frac{\partial n}{\partial x'} = - \frac{\partial |F|^2}{\partial x'}. \quad (32)$$

В дальнейшем опускаем штрихи у переменных, т.е. заменим $x' \rightarrow x$ и $t' \rightarrow t$. Ниже везде, кроме разд. 5, полагаем $\epsilon_0 = 1$.

дующий вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = (i\mathbf{J} + \mathbf{Q}) \Theta, \quad (33)$$

где $\Theta(x, t; \lambda)$ — 3×3 -матричнозначная функция переменных x, t и спектрального параметра λ ,

$$\mathbf{J} = \lambda \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

3. АППАРАТ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

3.1. Диагональный вид асимптотики представления нулевой кривизны

Представление нулевой кривизны для системы (31), (32), найденное в работах [20, 21], имеет сле- и

$$\mathbf{Q} = \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} n & 2i\lambda\bar{F} & n \\ iF & 0 & iF \\ -n & -2i\lambda\bar{F} & -n \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \mathbf{V} \Theta := \begin{pmatrix} i \left(\frac{2\lambda^2}{3} + 2\lambda \right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4i\lambda^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & i \left(\frac{2\lambda^2}{3} - 2\lambda \right) \end{pmatrix} \Theta - \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} n + \frac{|F|^2}{2} & 2i\lambda \left(\frac{i}{2} \partial_x \bar{F} + \bar{F} + \lambda \bar{F} \right) & n + \frac{|F|^2}{2} \\ iF + \frac{1}{2} \partial_x F + i\lambda F & 0 & iF + \frac{1}{2} \partial_x F - i\lambda F \\ -n - \frac{|F|^2}{2} & -2i\lambda \left(\frac{i}{2} \partial_x \bar{F} + \bar{F} - \lambda \bar{F} \right) & -n - \frac{|F|^2}{2} \end{pmatrix} \Theta. \quad (36)$$

Черта сверху означает комплексное сопряжение.

Асимптотические условия следующие:

$$F(x, t) = 0, \quad n(x, t) = 2q, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (37)$$

В работе рассматривается случай положительной константы q . Случай $q < 0$ решается аналогичным образом.

Перепишем систему уравнений (33)–(35) в виде

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = (i\mathbf{J} + \mathbf{Q}_0) \Theta + (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0) \Theta, \quad (38)$$

где для $x \rightarrow \pm\infty$

$$\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}_0 = \frac{i}{\lambda} \begin{pmatrix} q & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ -q & 0 & -q \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Введем новый спектральный параметр ζ , такой что

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{q}{\zeta} \right), \quad \Lambda = \left(\zeta - \frac{q}{\zeta} \right). \tag{40}$$

Перейдем от функций Йоста Θ к функциям Φ следующим образом:

$$\Phi = \mathbf{D}\Theta := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{q}{\zeta^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{q}{\zeta^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Theta. \tag{41}$$

Теперь линейная система (33)–(36) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = i\Omega(\zeta)\Phi + \mathbf{R}(\zeta)\Phi, \tag{42}$$

где

$$\Omega(\zeta) = \begin{pmatrix} -2\zeta & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\zeta + \frac{q}{\zeta}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -2\frac{q}{\zeta} \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$\mathbf{R}(\zeta) = \begin{pmatrix} \frac{i\zeta(n-2q)}{\zeta^2-q} & -\frac{\zeta^2\bar{F}}{\zeta^2-q} & \frac{i\zeta(n-2q)}{\zeta^2-q} \\ -\frac{F}{\zeta} & 0 & -\frac{F}{\zeta} \\ -\frac{i\zeta(n-2q)}{\zeta^2-q} & \frac{\zeta^2\bar{F}}{\zeta^2-q} & -\frac{i\zeta(n-2q)}{\zeta^2-q} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Для действительных $\zeta \neq 0, \pm\sqrt{q}$ определим вектор-функции $\phi^{(i)}(x; \zeta)$ и $\psi^{(i)}(x; \zeta), i = 1, 2, 3$, — компоненты функций Йоста $\Phi(x; \zeta)$ и $\Psi(x; \zeta)$, соответственно, как решения системы уравнений (42) с асимптотиками

$$\Phi(x; \zeta) \rightarrow \begin{pmatrix} \exp(-2i\zeta x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i(\zeta + q/\zeta)x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-2iqx/\zeta) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow -\infty, \tag{45}$$

$$\Psi(x; \zeta) \rightarrow \begin{pmatrix} \exp(-2i\zeta x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i(\zeta + q/\zeta)x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-2iqx/\zeta) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \tag{46}$$

Функции Йоста связаны соотношением

$$\Phi(x; \zeta) = \Psi(x; \zeta)\mathbf{A}^T. \tag{47}$$

находим

$$\det(a_{jk}(\lambda)) = 1. \tag{48}$$

Соотношение, обратное (47), имеет вид

$$\Psi(x; \zeta) = \Phi(x; \zeta)\mathbf{B}^T, \tag{49}$$

Здесь \mathbf{A}^T — транспонированная матрица, $\mathbf{A} := \{a_{jk}\}$. Из соотношения (47) и асимптотик

где $\mathbf{B} := \{b_{jk}\}$ и

$$\sum_{k=1}^3 b_{jk}(\zeta) a_{kl}(\zeta) = \delta_{jl}. \quad (50)$$

3.2. Сопряженная система уравнений

В отличие от ряда классических интегрируемых уравнений, таких как нелинейное уравнение Шредингера и др., решаемых с помощью 2×2 -спектральных проблем [17], рассматриваемой здесь систе-

мы уравнений (42) недостаточно для решения задачи. Совместное рассмотрение спектральной задачи и сопряженных уравнений было применено Каупом [28–30] при решении интегрируемой модели взаимодействия трех волновых пакетов [31]. Следуя Каупу, в дополнение к системе уравнений (42) рассмотрим сопряженную ей систему уравнений

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} = - [i\Omega(\zeta) + \Omega(\zeta)\mathbf{R}^T(\zeta)\Omega^{-1}(\zeta)] \tilde{\Phi}. \quad (51)$$

Из (51) для матриц (43) и (44) получаем

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2i\zeta & 0 & 0 \\ 0 & i\left(\zeta + \frac{q}{\zeta}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2i\frac{q}{\zeta} \end{pmatrix} \tilde{\Phi} + \begin{pmatrix} -\frac{i\zeta(n-2q)}{\zeta^2-q} & \frac{2\zeta F}{\zeta^2+q} & \frac{i\zeta^3(n-2q)}{q(\zeta^2-q)} \\ \frac{(\zeta^2+q)\bar{F}}{2(\zeta^2-q)} & 0 & -\frac{\zeta^2(\zeta^2+q)\bar{F}}{2q(\zeta^2-q)} \\ -\frac{iq(n-2q)}{\zeta(\zeta^2-q)} & \frac{2qF}{\zeta(\zeta^2+q)} & \frac{i\zeta(n-2q)}{\zeta^2-q} \end{pmatrix} \tilde{\Phi}. \quad (52)$$

Для действительных $\zeta \neq 0, \pm\sqrt{q}$ определим вектор-функции $\tilde{\phi}^{(i)}(x; \zeta)$ и $\tilde{\psi}^{(i)}(x; \zeta), i = 1, 2, 3$, — компоненты сопряженных функций Йоста $\tilde{\Phi}(x, t; \zeta)$ и $\tilde{\Psi}(x, t; \zeta)$, соответственно, как решения системы уравнений (52) с асимптотиками

$$\tilde{\Phi}(x; \zeta) \rightarrow \begin{pmatrix} \omega_1 \exp(2i\zeta x) & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 \exp(i(\zeta + q/\zeta)x) & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \exp(2iqx/\zeta) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (53)$$

$$\tilde{\Psi}(x; \zeta) \rightarrow \begin{pmatrix} \omega_1 \exp(2i\zeta x) & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 \exp(i(\zeta + q/\zeta)x) & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \exp(2iqx/\zeta) \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (54)$$

где

$$\omega_1 = 2\zeta, \quad \omega_2 = \zeta + \frac{q}{\zeta}, \quad \omega_3 = \frac{2q}{\zeta}. \quad (55)$$

Столбцы этих функций

$$\tilde{\phi}^{(1)}(x; \zeta) \exp(-2i\zeta x), \quad \tilde{\psi}^{(3)}(x; \zeta) \exp(-2iqx/\zeta)$$

аналитичны в области $\text{Im } \zeta < 0$, а столбцы

$$\tilde{\psi}^{(1)}(x; \zeta) \exp(-2i\zeta x), \quad \tilde{\phi}^{(3)}(x; \zeta) \exp(-2iqx/\zeta)$$

аналитичны в области $\text{Im } \zeta > 0$.

Прямой подстановкой убеждаемся, что справед-

ливы следующие представления для векторных компонент сопряженных функций Йоста

$$\tilde{\phi}_i^{(n)}(x; \zeta) = \frac{\omega_n \exp(-3i\omega_2 x)}{2} \times \sum_{j,k=1}^3 \sum_{m,p=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{nmp} \phi_m^{(j)} \phi_p^{(k)}, \quad (56)$$

$$\tilde{\psi}_i^{(n)}(x; \zeta) = \frac{\omega_n \exp(-3i\omega_2 x)}{2} \times \sum_{j,k=1}^3 \sum_{m,p=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{nmp} \psi_m^{(j)} \psi_p^{(k)}. \quad (57)$$

Здесь ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор.

Используя уравнения (47), (56) и (57), находим соотношения полноты:

$$\tilde{\phi}_j(x; \zeta) = \sum_{k=1}^3 b_{jk}(\zeta) \tilde{\psi}_k(x; \zeta). \quad (58)$$

Преобразуя уравнения (42) и сравнивая их с уравнениями (52), находим следующую связь между матричными функциями — решениями этих уравнений:

$$\tilde{\Phi}(\zeta) = \mathbf{D}_A(\zeta) \overline{\Phi(\bar{\zeta})} \mathbf{D}_A^{-1}(\zeta), \quad (59)$$

где

$$\mathbf{D}_A(\zeta) = \begin{pmatrix} -2\zeta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\zeta^2(\zeta^2 + q)}{\zeta^2 - q} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2q}{\zeta} \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Подставив асимптотики (45), (46), (53) и (54) в условия полноты (47) и (58), находим

$$b_{nm}(\zeta) = \frac{\omega_m d_n}{\omega_n d_m} \overline{a_{mn}(\bar{\zeta})}. \quad (61)$$

где $d_n = (\mathbf{D}_A)_{nn}$ — диагональный элемент матрицы (60), $\mathbf{D}_A = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$.

3.3. Свойства симметрии

Существует набор автоморфизмов $\hat{G}_k(\zeta)$, переводящих функции Йоста $\Phi(x, \zeta)$ — решения системы (42), (36) в себя:

$$\begin{aligned} \hat{G}_k(\zeta) \Phi(x, \zeta) &:= \\ &= \mathbf{D}_k \Phi(x, g_k(\zeta)) \mathbf{D}_k^{-1} \in \{\Phi(x, \zeta)\}. \end{aligned} \quad (62)$$

Здесь $g_k(\zeta)$ — дробно-линейное преобразование параметра ζ , а $\mathbf{D}_k(\zeta)$ — невырожденная матрица, которые определяются свойствами симметрии системы уравнений (42) и преобразованной системы (36).

Преобразование спектрального параметра

$$g_1(\zeta) = -\frac{q}{\zeta} \quad (63)$$

отвечает следующему автоморфному преобразованию функции Йоста:

$$\begin{aligned} \Phi\left(x; -\frac{q}{\zeta}\right) &= \mathbf{D}_1(\zeta) \Phi(x; \zeta) \mathbf{D}_1^{-1}(\zeta) \times \\ &\times \exp\left(2ix\left(\zeta + \frac{q}{\zeta}\right)\right), \end{aligned} \quad (64)$$

где

$$\mathbf{D}_1(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\zeta^2}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Соответствующее преобразование матрицы \mathbf{A} находим из (47):

$$\mathbf{A}(g_1(\zeta)) = \mathbf{D}_1^{-1}(\zeta) \mathbf{A}(\zeta) \mathbf{D}_1(\zeta). \quad (66)$$

Преобразование четности

$$g_2(\zeta) = -\zeta \quad (67)$$

соответствует автоморфизму

$$\begin{aligned} \Phi(x; -\zeta) &= \mathbf{D}_2 \Phi(x; \zeta) \mathbf{D}_2^{-1} \times \\ &\times \exp\left(2ix\left(\zeta + \frac{q}{\zeta}\right)\right), \end{aligned} \quad (68)$$

где

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (69)$$

и преобразованию матрицы \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(-\zeta) = \mathbf{D}_2^{-1}(\zeta) \mathbf{A}(\zeta) \mathbf{D}_2(\zeta). \quad (70)$$

Аutomорфизмы сопряженных функций $\tilde{\Phi}(\zeta)$ могут быть найдены с использованием приведенных выше автоморфизмов функции $\Phi(\bar{\zeta})$ и связи (61) и наоборот.

Аналогичным образом определяются свойства симметрии коэффициентов матрицы \mathbf{B} . Используя соотношения (61) и свойства симметрии, находим

$$b_{23}(-\bar{\zeta}) = -\frac{\bar{\zeta}^3}{\bar{\zeta}^2 - q} \overline{a_{32}(-\zeta)} = \frac{\bar{\zeta}^3}{\bar{\zeta}^2 - q} \overline{a_{12}(\zeta)}, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} b_{21}(-q/\bar{\zeta}) &= \frac{q^2}{\bar{\zeta}(q - \bar{\zeta}^2)} \overline{a_{12}(-q/\zeta)} = \\ &= \frac{q\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2 - q} \overline{a_{12}(\zeta)}, \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} b_{23}(q/\bar{\zeta}) &= \frac{q^2}{\bar{\zeta}(q - \bar{\zeta}^2)} \overline{a_{32}(q/\zeta)} = \\ &= -\frac{q\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2 - q} \overline{a_{12}(\zeta)}. \end{aligned} \quad (73)$$

3.4. Дополнительные функции и аналитические свойства

Из асимптотик (45), (46) и соотношений (47), (49) находим

$$a_{11}(\zeta) = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_1^{(1)}(x; \zeta) \exp(2i\zeta x), \tag{74}$$

$$a_{33}(\zeta) = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_3^{(3)}(x; \zeta) \exp(2iqx/\zeta),$$

$$b_{11}(\zeta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_1^{(1)}(x; \zeta) \exp(2i\zeta x), \tag{75}$$

$$b_{33}(\zeta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_3^{(3)}(x; \zeta) \exp(2iqx/\zeta).$$

Применяя стандартные методы (см., например, [18]), можно показать, что $\phi_1(x; \zeta) \exp(2i\zeta x)$, $\psi_3(x; \zeta) \exp(2iqx/\zeta)$, $a_{11}(\zeta)$, $b_{33}(\zeta)$ — аналитические функции ζ для $\text{Im } \zeta > 0$, а $\psi_1(x; \zeta) \exp(2i\zeta x)$, $\phi_3(x; \zeta) \exp(2iqx/\zeta)$, $a_{33}(\zeta)$, $b_{11}(\zeta)$ — аналитические функции ζ для $\text{Im } \zeta < 0$.

Асимптотические разложения функций Йоста для больших $|\zeta|$ находим из спектральной проблемы (42):

$$\phi_1(x; \zeta) \exp(2i\zeta x), \psi_1(x; \zeta) \exp(2i\zeta x) = \delta_{1k} + O(|\zeta|^{-1}), \quad \text{Im } \zeta < 0, \tag{76}$$

$$\phi_3(x; \zeta) \exp(2iqx/\zeta), \psi_3(x; \zeta) \exp(2iqx/\zeta) = \delta_{3k} + O(|\zeta|^{-1}), \quad \text{Im } \zeta < 0. \tag{77}$$

Из уравнений (74), (75) и (76), (77) находим

$$a_{11}(\zeta) = 1 + O(|\zeta|^{-1}), \quad b_{33}(\zeta) = 1 + O(|\zeta|^{-1}), \tag{78}$$

$\text{Im } \zeta > 0,$

$$a_{33}(\zeta) = 1 + O(|\zeta|^{-1}), \quad b_{11}(\zeta) = 1 + O(|\zeta|^{-1}), \tag{79}$$

$\text{Im } \zeta < 0.$

Из системы (42) следует, что аналитические свойства вектор-функций $\phi^{(2)}(x; \zeta) \exp(i\omega_2(\zeta)x)$ и $\psi^{(2)}(x; \zeta) \exp(i\omega_2(\zeta)x)$ не определены. В работе для построения искомого сингулярных интегральных уравнений применяется восстановление функции по ее частям, аналитичным в областях $\text{Im } \zeta > 0$ и $\text{Im } \zeta < 0$, и с заданным значением на границе $\text{Im } \zeta = 0$ с помощью формулы Коши. Следуя работам [28–30], введем дополнительные вектор-функции χ и θ , обладающие требуемыми аналитическими свойствами, со следующими компонентами:

$$\chi_n(x; \zeta) = \exp(-2i\omega_2 x) \sum_{m,p=1}^3 \varepsilon_{nmp} \frac{\tilde{\phi}_m^{(1)} \tilde{\psi}_p^{(3)}}{\omega_m \omega_p}, \tag{80}$$

$$\theta_n(x; \zeta) = \exp(-2i\omega_2 x) \sum_{m,p=1}^3 \varepsilon_{nmp} \frac{\tilde{\phi}_m^{(3)} \tilde{\psi}_p^{(1)}}{\omega_m \omega_p}. \tag{81}$$

Используя приведенные выше аналитические свойства функций в правых частях (80) и (81), можно показать, что функции Йоста $\chi(x; \zeta)$ и $\theta(x; \zeta)$ аналитичны, соответственно, в полуплоскостях $\text{Im } \zeta < 0$ и $\text{Im } \zeta > 0$ комплексной плоскости ζ и являются решениями системы (42).

Из уравнений (56), (57), (80) и (81) следует, что

$$\chi(x; \zeta) = \exp(i\omega_2 x) \times \left[b_{21}(\zeta) \psi^{(1)}(x; \zeta) - b_{11}(\zeta) \psi^{(2)}(x; \zeta) \right], \tag{82}$$

$$\theta(x; \zeta) = \exp(i\omega_2 x) \times \left[b_{33}(\zeta) \psi^{(2)}(x; \zeta) - b_{23}(\zeta) \psi^{(3)}(x; \zeta) \right]. \tag{83}$$

Асимптотики вектор-функций $\chi(x; \lambda)$ и $\theta(x; \lambda)$ находим из (82), (83), используя асимптотики вектор-функций (53), (54) и коэффициентов (78), (79) для $|\zeta| \rightarrow \infty$:

$$\chi(x; \zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + O(|\zeta|^{-1}), \quad \text{Im } \zeta < 0, \tag{84}$$

$$\theta(x; \zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O(|\zeta|^{-1}), \quad \text{Im } \zeta > 0. \tag{85}$$

Здесь учтено, что в пределе $|\zeta| \rightarrow \infty$ недиагональные коэффициенты $b_{mn} \rightarrow 0$, $m \neq n$.

4. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЙЯНИЯ

4.1. Вывод интегральных уравнений

Аналитические свойства функций Йоста, представленные выше, позволяют, используя интеграл Коши, восстановить их по частям, аналитичным в областях $\text{Im } \zeta > 0$ и $\text{Re } \zeta > 0$. Считаем, что функции аналитичны в соответствующих областях комплексной плоскости ζ , за исключением простых нулей и $\zeta = 0, \pm\sqrt{q}$. Обозначим C^+ — контур интегрирования, состоящий из контуров вокруг доменов, проходящих по оси $-\infty + i0, \infty + i0$, огибающих точки $\zeta = 0, \pm\sqrt{q}$ сверху, и проходящий по часовой стрелке выше всех нулей, лежащих в верхней полуплоскости

ζ . Аналогично, контур \mathcal{C}^- , состоит из проходящих вдоль оси $-\infty - i0, \infty - i0$ контуров, огибающих точки $\zeta = 0, \pm\sqrt{q}$ снизу, и проходящий против часовой стрелки ниже всех нулей, лежащих в нижней полу-плоскости ζ :

$$\mathcal{C}^\pm = \Gamma^\pm \cup \overline{\Gamma^\pm}, \quad (86)$$

где

$$\Gamma^\pm = \Gamma_1^\pm \cup \Gamma_3^\pm, \quad (87)$$

$$\overline{\Gamma^\pm} = \Gamma_2^\pm \cup \Gamma_4^\pm. \quad (88)$$

Контур Γ_k^+ обегает домен D_k^+ по часовой стрелке и контур Γ_k^- обегает домен D_k^- — в противоположном направлении. Домены D_k^\pm , показанные на рис. 1, определены следующим образом:

$$D_1^+ = \{\text{Im } \xi > 0 \cap \text{Re } \xi > 0 \cap |\xi|^2 > q\}, \quad (89)$$

$$D_2^+ = \{\text{Im } \xi > 0 \cap \text{Re } \xi > 0 \cap |\xi|^2 < q\}, \quad (90)$$

$$D_3^+ = \{\text{Im } \xi > 0 \cap \text{Re } \xi < 0 \cap |\xi|^2 < q\}, \quad (91)$$

$$D_4^+ = \{\text{Im } \xi > 0 \cap \text{Re } \xi < 0 \cap |\xi|^2 > q\}, \quad (92)$$

$$D_1^- = \{\text{Im } \xi < 0 \cap \text{Re } \xi > 0 \cap |\xi|^2 > q\}, \quad (93)$$

$$D_2^- = \{\text{Im } \xi < 0 \cap \text{Re } \xi > 0 \cap |\xi|^2 < q\}, \quad (94)$$

$$D_3^- = \{\text{Im } \xi < 0 \cap \text{Re } \xi < 0 \cap |\xi|^2 < q\}, \quad (95)$$

$$D_4^- = \{\text{Im } \xi < 0 \cap \text{Re } \xi < 0 \cap |\xi|^2 > q\}. \quad (96)$$

Для построения интегральных сингулярных уравнений обратной задачи рассеяния применим интеграл Коши [18] (см. подробнее в работе [30]).

Используя асимптотики (76), (78), находим

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_+} \frac{\phi_k^{(1)}(x; \xi) \exp(2i\xi x) d\xi}{a_{11}(\xi)(\xi - \lambda)} = \delta_{k1}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (97)$$

Из асимптотики (97) и из правой части соотношения (47) находим

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(x; \zeta) \exp(2i\zeta x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_+} \frac{a_{12}(\xi) \psi^{(2)}(x; \xi) \exp(2i\xi x) d\xi}{a_{11}(\xi)(\xi - \zeta)} - \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_+} \frac{a_{13}(\xi) \psi^{(3)}(x; \xi) \exp(2i\xi x) d\xi}{a_{11}(\xi)(\xi - \zeta)}. \quad (98) \end{aligned}$$

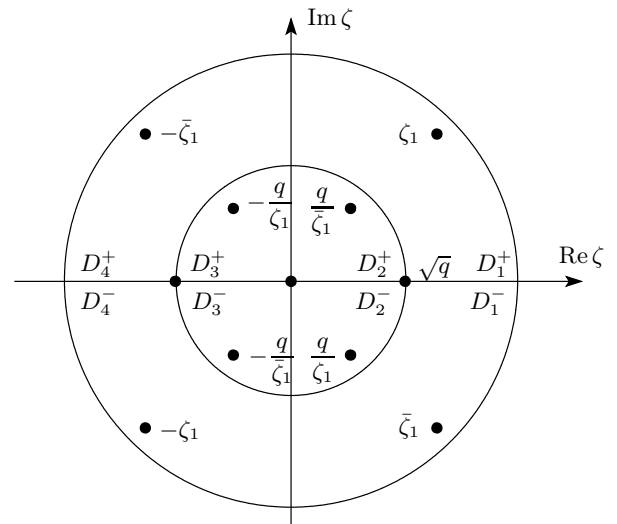


Рис. 1. Комплексная плоскость ζ . Радиус внутреннего круга равен \sqrt{q} , а радиус внешнего стремится к бесконечности. Контур интегрирования Γ_k^- (Γ_k^+) обегает границу домена D_k^- (D_k^+) против (по) часовой стрелки

Используя уравнения (82), (83) и асимптотику (85), находим

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(x; \zeta) \exp(i\omega_2(\zeta)x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}^-} \frac{b_{21}(\xi) \psi^{(1)}(x; \xi) \exp(i\omega_2(\xi)x) d\xi}{b_{11}(\xi)(\xi - \lambda)} + \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}^+} \frac{b_{23}(\xi) \psi^{(3)}(x; \xi) \exp(i\omega_2(\xi)x) d\xi}{b_{33}(\xi)(\xi - \lambda)}. \quad (99) \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \psi^{(3)}(x; \zeta) \exp(2i\zeta x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}^-} \frac{a_{31}(\xi) \psi^{(1)}(x; \xi) \exp(2i\xi x) d\xi}{a_{33}(\xi)(\xi - \zeta)} - \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}^-} \frac{a_{32}(\xi) \psi^{(2)}(x; \xi) \exp(2i\xi x) d\xi}{a_{33}(\xi)(\xi - \zeta)}. \quad (100) \end{aligned}$$

Для решения обратной задачи необходимо найти связь между $\psi^{(k)}(x, \zeta)$ и $F(x), n(x)$, которую ищем в пределе $|\zeta| \rightarrow \infty$. Из уравнения (98) находим

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(x; \zeta) \exp(2i\zeta x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_{n=1}^N \sum_{k=2,3} \begin{pmatrix} \zeta/\zeta_n \\ 1 \\ \zeta/\zeta_n \end{pmatrix} \times \\ &\times \frac{2\lambda_n a_{1k}(\zeta_n) \exp(2ix\zeta_n) \psi_k(x; \zeta_n)}{\partial_\zeta a_{11}(\zeta)|_{\zeta=\zeta_n} \zeta^2} + \\ &+ O \begin{pmatrix} |\zeta|^{-2} \\ |\zeta|^{-3} \\ |\zeta|^{-2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (101)$$

где

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \left(\zeta_n + \frac{q}{\zeta_n} \right).$$

Используя итерации, из (42) находим

$$\psi_2^{(1)}(x; \zeta) \exp(2ix\zeta) = -\frac{i}{2\zeta^2} F(x) + O \left(\frac{1}{|\zeta|^2} \right). \quad (102)$$

Сравнение (101) и (102) дает решение для F как функции от x и ζ_n . Аналогично находится n . Однако проще найти n из уравнения (32).

Для определения временной зависимости решения обратной задачи найдем зависимость коэффициентов рассеяния от t . Для этого преобразуем линейную систему уравнений (36) к виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{D} \Phi. \quad (103)$$

В пределе $|x| \rightarrow \infty$ находим

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{D} |_{|x| \rightarrow \infty} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2i\lambda^2}{3} + i\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4i\lambda^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2i\lambda^2}{3} - i\Lambda \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (104)$$

где

$$\Lambda = \zeta + \frac{q}{\zeta}.$$

С учетом замены (40) находим следующие зависимости коэффициентов матрицы $\mathbf{A}(t; \zeta)$:

$$\begin{aligned} a_{12}(t; \zeta) &= a_{12}(0; \zeta) \exp(-it(2\lambda^2 + \Lambda)), \\ a_{13}(t; \zeta) &= a_{13}(0; \zeta) \exp(-2it\Lambda), \\ a_{21}(t; \zeta) &= a_{21}(0; \zeta) \exp(it(2\lambda^2 + \Lambda)), \\ a_{31}(t; \zeta) &= a_{31}(0; \zeta) \exp(2it\Lambda), \\ a_{23}(t; \zeta) &= a_{23}(0; \zeta) \exp(it(2\lambda^2 - \Lambda)), \\ a_{32}(t; \zeta) &= a_{32}(0; \zeta) \exp(-it(2\lambda^2 - \Lambda)). \end{aligned} \quad (105)$$

Диагональные компоненты матрицы \mathbf{A} и спектральный параметр ζ не зависят от переменной t .

4.2. Солитонное решение

Пусть $a_{11}(\zeta)$ имеет N невырожденных нулей ζ_n , $n = 1, 2, \dots, N$, лежащих в домене D_1^+ , тогда из условия

$$a_{11}(\zeta_n) = 0, \quad \zeta_n \in D_1^+, \quad (106)$$

вследствие свойств симметрии и аналитических свойств, приведенных выше, следует

$$\begin{aligned} a_{33}(-\zeta_n) &= b_{33}(-\bar{\zeta}_n) = b_{11}(\bar{\zeta}_n) = a_{33}(q/\zeta_n) = \\ &= a_{11}(-q/\zeta_n) = b_{33}(q/\bar{\zeta}_n) = b_{11}(-q/\bar{\zeta}_n) = 0. \end{aligned} \quad (107)$$

Из условия невырожденности нулей и свойств симметрии следует, что, например, $a_{11}(-\bar{\zeta}_n) \neq 0$, если выполняется (106).

Интегрируя по контуру Γ^+ , находя вычеты в соответствующих полюсах и используя свойства симметрии функций и коэффициентов матрицы \mathbf{A} , связанные с преобразованием \hat{G}_1 , приводим интегральное уравнение (98) к виду

$$\begin{aligned} \psi_1(x; \zeta) &= \exp(-2i\zeta x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} \zeta/\zeta_n \\ 1 \\ \zeta/\zeta_n \end{pmatrix} \times \\ &\times \left[\alpha_n^{(2)}(\zeta) \psi_2(x; \zeta_n) + \alpha_n^{(3)}(\zeta) \psi_3(x; \zeta_n) \right] \times \\ &\times \exp(2ix(\zeta_n - \zeta)), \end{aligned} \quad (108)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(k)}(\zeta) &= \frac{(\zeta_n^2 + q)}{(\zeta_n - \zeta)(q + \zeta\zeta_n)} \frac{a_{1k}(\zeta_n)}{\partial_\zeta a_{11}(\zeta)|_{\zeta=\zeta_n}}, \\ k &= 2, 3, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (109)$$

Применим соотношения (71)–(73) и свойства симметрии функций $\psi^{(k)}(x; \bar{\zeta})$ относительно действия операторов \hat{G}_2 и \hat{G}_3 в правой части уравнения (99) и возьмем первый интеграл по контуру Γ^- и второй — по $\bar{\Gamma}^+$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \psi_2(x; \zeta) &= \exp \left(-ix \left(\zeta + \frac{q}{\zeta} \right) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} \beta_n^{(1)}(\zeta) & 0 & \beta_n^{(3)}(\zeta) \\ 0 & \beta_n^{(2)}(\zeta) & 0 \\ \beta_n^{(3)}(\zeta) & 0 & \beta_n^{(1)}(\zeta) \end{pmatrix} \times \\ &\times \psi_1(x; \bar{\zeta}_n) \exp \left(ix \left(\bar{\zeta}_n + \frac{q}{\bar{\zeta}_n} - \zeta - \frac{q}{\zeta} \right) \right), \end{aligned} \quad (110)$$

где

$$\beta_n^{(1)}(\zeta) = \frac{(q + \bar{\zeta}_n^2)[q(\bar{\zeta}_n - \zeta) + \zeta\bar{\zeta}_n^2]}{(\bar{\zeta}_n^2 - q)(\zeta - \bar{\zeta}_n)(q + \bar{\zeta}_n\zeta)} \times \frac{a_{12}(\bar{\zeta}_n)}{\partial_\zeta a_{11}(\bar{\zeta})|_{\zeta=\bar{\zeta}_n}}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (111)$$

$$\beta_n^{(2)}(\zeta) = \frac{2\zeta^2\bar{\zeta}_1^2(q + \bar{\zeta}_n^2)}{(\bar{\zeta}_n^2 - \zeta^2)(\bar{\zeta}_n\zeta^2 - q^2)} \times \frac{a_{12}(\bar{\zeta}_n)}{\partial_\zeta a_{11}(\bar{\zeta})|_{\zeta=\bar{\zeta}_n}}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (112)$$

$$\beta_n^{(3)}(\zeta) = -\frac{q\bar{\zeta}_n(q - \bar{\zeta}_n^2) + \zeta(q^2 + \bar{\zeta}_n^4)}{(\bar{\zeta}_n^2 - q)(\zeta + \bar{\zeta}_n)(q - \bar{\zeta}_n\zeta)} \times \frac{a_{12}(\bar{\zeta}_n)}{\partial_\zeta a_{11}(\bar{\zeta})|_{\zeta=\bar{\zeta}_n}}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (113)$$

Аналогично (108), интегрируя в правой части

уравнения (100) по контуру $\bar{\Gamma}^-$, находим

$$\psi_3(x; \zeta) = \exp\left(-2ix\frac{q}{\zeta}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta/\zeta_n \\ 0 & 1 & 0 \\ \zeta/\zeta_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \left[\gamma_n^{(2)}(\zeta)\psi_2(x; \zeta_n) + \gamma_n^{(3)}(\zeta)\psi_3(x; \zeta_n) \right] \times \exp\left(2ix\left(\zeta_n - \frac{q}{\zeta}\right)\right), \quad (114)$$

где

$$\gamma_n^{(k)}(\zeta) = \frac{\zeta_n^2 + q}{(\zeta_n + \zeta)(q - \zeta_n\zeta)} \times \frac{a_{1k}(\zeta_n)}{\partial_\zeta a_{11}(\bar{\zeta})|_{\zeta=\zeta_n}}, \quad k = 2, 3, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (115)$$

Решая алгебраическую систему уравнений (108)–(115) и используя (101), (102) для одного собственного значения $\zeta_1 \in D_1^+$, находим решение

$$F(x, t; \zeta_1) = \frac{4i\lambda_1 a_{12}(t; \zeta_1) [\partial_\zeta a_{11}(t; \zeta)|_{\zeta=\zeta_1}]^{-1}}{e^{-i\Lambda_1 x} + \gamma_1^{(3)}(t; \zeta_1)e^{i\Lambda_1 x} + \beta_1^{(2)}(t; \zeta_1)\alpha_1^{(2)}(t; \bar{\zeta}_1)e^{-i\Lambda_1 x}}, \quad (116)$$

где

$$\Lambda_1 = \zeta_1 - \frac{q}{\zeta_1}.$$

Учитывая временную зависимость коэффициентов и обозначив

$$C_k = \frac{a_{1k}(0; \zeta_1)}{\partial_\zeta a_{11}(0; \bar{\zeta})|_{\zeta=\zeta_1}}, \quad \alpha_0 = \alpha_1^{(2)}(0; \bar{\zeta}_1), \quad (117)$$

$$\gamma_0 = \gamma_1^{(3)}(0; \zeta_1), \quad \beta_0 = \beta_1^{(2)}(0; \zeta_1),$$

находим

$$F(x, t; \zeta_1) = \frac{4i\sqrt{q} [\text{ch}(\eta_1) \cos(\xi_1) + i \text{sh}(\eta_1) \sin(\xi_1)] C_2 \exp(i\kappa_1 t - ik_1(x - t))}{\exp(-(\kappa_2 + k_2)t + k_2 x) [1 + \gamma_0 \exp(2(ik_1 - k_2)(x - t))] + \beta_0 \alpha_0 \exp((\kappa_2 + k_2)t - k_2 x)}, \quad (118)$$

где

$$\zeta_1 = \sqrt{q} \exp(\eta_1 + i\xi_1), \quad (119)$$

$$\kappa_1 = q [1 + \text{ch}(2\eta_1) \cos(2\xi_1)], \quad (120)$$

$$\kappa_2 = q [\text{sh}(2\eta_1) \sin(2\xi_1)],$$

$$k_1 = 2\sqrt{q} \text{sh}(\eta_1) \cos(\xi_1), \quad (121)$$

$$k_2 = 2\sqrt{q} \text{ch}(\eta_1) \sin(\xi_1),$$

$$\gamma_0 = \frac{q + \zeta_1^2}{2\zeta_1(q - \zeta_1^2)} C_3, \quad (122)$$

$$\beta_0 \alpha_0 = \frac{2\zeta_1^2 \bar{\zeta}_1^2 (q + \bar{\zeta}_1^2)(q + \zeta_1^2)}{(\bar{\zeta}_1^2 - \zeta_1^2)(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)(q^2 - |\zeta_1|^4)(q + |\zeta_1|^2)} \times |C_2|^2. \quad (123)$$

Пусть $C_3(\zeta_1) = 0$, т.е. $\gamma_0 = 0$. Тогда быстрая компонента поля F принимает sch-форму солитона и

для медленной компоненты поля солитонное решение имеет вид

$$n(x, t; \zeta_1) = 2q + \frac{16\sqrt{q} \operatorname{ch}(\eta_1) [\operatorname{ch}^2(\eta_1) - \sin^2(\xi_1)] |C_2|^2}{\operatorname{sh}(2\eta_1) \cos(\xi_1) |\exp(-(\kappa_2 + k_2)t + k_2x) + \beta_0\alpha_0 \exp((\kappa_2 + k_2)t - k_2x)|^2}, \quad (124)$$

При $C_3 = 0$, $q \rightarrow 0$, но $\zeta_1 \rightarrow \text{const}$ решения (118) и (124) переходят в соответствующие солитонные решения, найденные в работе [21].

В физических переменных \tilde{x}, \tilde{t} (19), используемых в уравнениях (23) и (29), условия существования солитона (118) следующие:

$$k_2 > 0, \quad \tilde{x} \rightarrow \infty, \quad k_2 < 0, \quad \tilde{x} \rightarrow -\infty. \quad (127)$$

5. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обсудим некоторые физические следствия, вытекающие из полученных результатов и решений (118), (124). Эти солитоны демонстрируют сильную зависимость от q , которая может быть использована для управления солитонами в БЭК. Групповая скорость солитона определяется отношением x/t , если x и t — физические пространственная и временная переменные. Для солитона (118) групповая скорость $v_g^+ = (\omega_2 + k_2)/k_2$. Поскольку представление нулевой кривизны (33)–(36) справедливо для любого λ , сделаем в нем замену $\lambda \rightarrow -\lambda$. В итоге эта замена приводит к решению (118), в котором $\zeta_1 \rightarrow -\zeta_1$. Также при этом и F меняет знак. Соответствующая групповая скорость

Все приведенные выше результаты относились к случаю $\epsilon_0 = 1$. Переход к случаю $\epsilon_0 = -1$ осуществляется простой заменой

$$x \rightarrow -x, \quad n \rightarrow -n, \quad q \rightarrow -q. \quad (128)$$

Последняя замена в (128) приводит к несущественному изменению приведенного выше аппарата.

$$v_g^- = \frac{|k_2| - |\kappa_2|}{|k_2|} < 1, \quad \text{если} \quad |\kappa_2| < |k_2|.$$

Пусть $C_3 \neq 0$. Рассмотрим условие распространения солитона в среде при $x > 0$ с групповой скоростью v_g^+ . Для траектории максимума солитона $F(x, t)$ находим

Решения (118) и (124) также демонстрируют зависимость их формы от величины асимптотики $2q$ поля $n(x, t)$. Для БЭК это решение указывает на существование темных солитонов для компонент с проекцией спина ± 1 и светлого солитона для быстрой компоненты со спином 0. В таком конденсате, по-видимому, возможно наблюдение светлых солитонов без использования сложного для практической реализации резонанса Фешбаха (Feshbach), применяемого для замены эффективной отталкивающей нелинейности на притягивающую [32].

$$t = \frac{xk_2}{\kappa_2 + k_2}. \quad (125)$$

При $k_2\kappa_2(k_2 + \kappa_2) > 0$ солитонное решение затухает при $x \rightarrow -\infty$ и распространяется без потерь при $x \rightarrow \infty$. Для этого решения групповая скорость отвечает сверхзвуковому солитону $v_g^+ > 1$. Для $k_2 < 0$ групповая скорость v_g^- , а условие существования солитона при $x \rightarrow \infty$ имеет вид

Темные солитоны в (не спинорном) БЭК разреженного атомного газа генерировались с использованием скачка фазы [33, 34]. При использовании этого метода с помощью лазерного света создается скачок фазы между различными частями БЭК. Применение фазового скачка — признанный эффективный, но недостаточно изученный инструмент генерации и управления волнами в БЭК и в других средах. Предложенный выше аппарат позволяет описать генерацию темных (длинные волны) и светлых (короткие волны) солитонов с помощью скачка фазы длинной волны в рамках модели ЯО.

$$1 > 2\sqrt{q} \operatorname{sh}(\eta_1) \cos(\xi_1). \quad (126)$$

Из (126) следует, что при ненулевой плотности $q > 0$ возникают ограничения на параметры дозвукового солитона.

Рассмотрим простой пример фазового скачка длинной волны в точке $x = 0$:

$$\begin{aligned} F(x, 0) = 0, \quad n(x, 0) = 2q, \quad x < 0, \\ F(x, 0) = 0, \quad n(x, 0) = -2q, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (129)$$

Решая спектральную задачу (36) для начальных условий (129), получим

$$a_{31}(\zeta_0) = \frac{2q\zeta_0^2}{\zeta_0^4 - q^2}, \quad (130)$$

при этом полюс ζ_0 , отвечающий солитонному решению, определяется уравнением

$$a_{11}(\zeta_0) = \frac{\zeta_0^4 + q^2}{\zeta_0^4 - q^2} = 0. \quad (131)$$

Из уравнения (131) видно, что скачок фазы поля $n(x)$ на π приводит к появлению одного полюса

$$\zeta_0 = \sqrt{q} \exp(i\pi/4).$$

Этому значению ζ_0 отвечает незатухающий со временем солитон с траекторией $x - t = \tilde{x} = 0$, см. уравнения БЭК (23), (29). Важно отметить, что для возникновения солитона поля $F(x, t)$ необходим затравочный импульс этого поля $F_0(x, t) \neq 0$, который дает ненулевое значение коэффициента $a_{12}(\zeta)$. Можно показать, что для малых значений $|F_0(x, t)|$ коэффициент $a_{12}(\zeta)$ выражается через фурье-образ от $F_0(x, t)$ и что $\ln |a_{12}(\zeta)|$ определяет начальное положение максимума солитона.

Перейдем к рассмотрению генерации темных солитонов медленного поля с помощью ступенчатого одновременного изменения амплитуды и фазы $n(x, 0)$. Пусть $n(x, 0) = 2q_0$ при $x < -L/2$, $n(x, 0) = 0$ при $-L/2 < x < L/2$ и $n(x, 0) = 2q_0 \exp(i\phi_j)$ при $x > L/2$. Здесь $\phi_j = 0, \pi$ — скачок фазы. Пусть также $F(x, 0) = 0$ для всех x . Решая спектральную задачу (33) для этих условий, находим уравнение, определяющее собственные значения λ_n :

$$\left(\frac{q_0}{\lambda_n} - 2\lambda_n\right) \operatorname{tg} \left[\left(\frac{q_0}{\lambda_n} - 2\lambda_n\right) L - \phi_j \right] = 2\sqrt{q_0 - \lambda_n^2}. \quad (132)$$

Рассмотрим случай темных солитонов с амплитудой, близкой к максимальной $\lambda_n = \sqrt{q_0} - \mu_n$, где $\mu_n \ll \sqrt{q_0}$. В этом случае уравнение (132) имеет решение

$$\mu_n \approx \frac{\operatorname{tg}^2(\phi_j - \sqrt{q_0}L)}{8\sqrt{q_0}} \ll 1. \quad (133)$$

Генерируя последовательность таких скачков с помощью фазы лазерного света [33], можно создавать конфигурации солитонов в разных частях БЭК.

Особенности зависимости комплекса темный-светлый солитон (118), (124) от величины амплитуды фонового значения поля $n = 2q$ могут

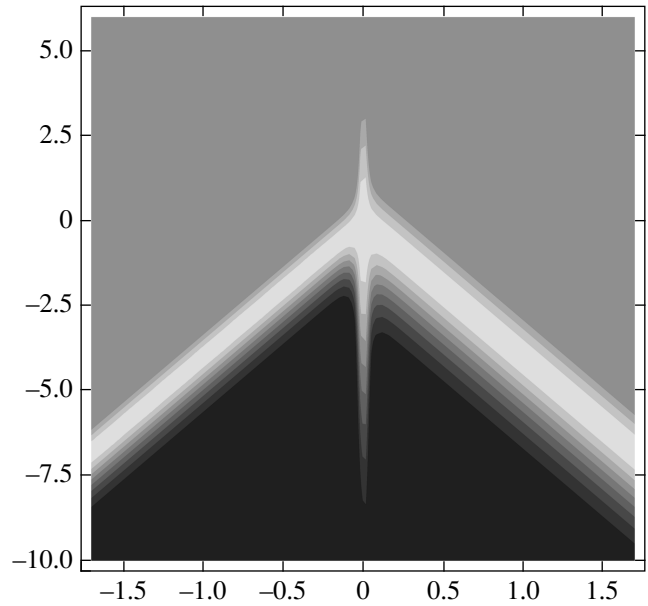


Рис. 2. Контурный график интенсивности солитона $|F(x, t)|^2$. Более светлая область отвечает большей амплитуде, $\zeta_1 = 1 + i$, $\gamma_0 = 0$, $q(x) = -\operatorname{th}(16x)$. По горизонтали отложена координата x , по вертикали — переменная t

быть использованы для управления движением солитона и локализации солитонов. Рассмотрим в качестве примера рассеяние солитона поля $F(x, t)$ на границе $x = 0$, на которой функция $q(x)$ скачкообразно изменяет знак. Считаем, что солитон $F(x, t)$ имеет sch-форму при $x \rightarrow -\infty$. На рис. 2 показано рассеяние солитона на границе, которое сопровождается изменением амплитуды и направления движения солитона.

Полученные результаты могут быть применены и в других физических приложениях модели ЯО. Так в модели эволюции Давыдова, описывающей эволюцию возбуждений и деформаций в молекуле белка, условие $q \neq 0$ отвечает следующей зависимости положения x_m молекулы (пептидной группы) в цепочке:

$$x_m = mh + q(m - m_0)^2 h + u_m, \quad (134)$$

$$m = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Здесь h, q и m_0 — расстояние между молекулами в отсутствие деформации, коэффициент и положение квадратичной деформации, соответственно; u_m — дополнительное смещение молекул на фоне основного состояния. В континуальном пределе возникает следующая связь смещения молекул с полем $n(x, t)$ модели ЯО:

$$\partial_x(x_m - x_{m-1}) \rightarrow n(x), \quad h \rightarrow 0, \quad mh \rightarrow x,$$

т. е. имеют место граничные условия (37). Солитонные и другие решения модели ЯО с ненулевыми граничными условиями могут быть использованы для анализа генерации и динамики солитонов в такой деформированной молекулярной цепочке. Солитонное решение (118) демонстрирует зависимость параметров импульса возбуждения, распространяющегося вдоль молекулы, от величины деформации растяжения молекулы. Родственные эффекты следует ожидать и в других длинных молекулярных цепочках, например, в J -агрегатах красителей [35]. В качестве еще одного применения результатов отметим резонансное взаимодействие длинной и короткой оптических (резонанс Бенни) или оптической и акустической волн [22]. В этом случае условие $q = \text{const} \neq 0$ отвечает эволюции полей на фоне «выпрямленной» оптической или акустической волны с постоянной амплитудой.

Работа выполнена при частичной поддержке программы междисциплинарных интеграционных проектов СО РАН (проект № 17 (2009)).

ЛИТЕРАТУРА

1. D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2027 (1998).
2. M.-S. Chang, C. D. Hamley, M. D. Barrett, J. A. Sauer, K. M. Fortier, W. Zhang, L. You, and M. S. Chapman, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 140403 (2004).
3. J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, *Nature (London)* **396**, 345 (1998).
4. A. E. Leanhardt, Y. Shin, D. Kielpinski, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 140403 (2003).
5. J. Ieda, T. Miyakawa, and M. Wadati, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 194102 (2004); *J. Phys. Soc. Jpn.* **73**, 2996 (2004).
6. W. Zhang, Ö. E. Müstecaplioglu, and L. You, *Phys. Rev. A* **75**, 043601 (2007).
7. J. Ieda, M. Uchiyama, and M. Wadati, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 194102 (2004).
8. M. Uchiyama, J. Ieda, and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**, 064002 (2006).
9. J. Ieda, M. Uchiyama, and M. Wadati, *J. Math. Phys.* **48**, 013507 (2007).
10. B. J. Dabrowska-Wüster, E. A. Ostrovskaya, T. J. Alexander, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. A* **75**, 023617 (2007).
11. B. Luther-Davies and X. Yang, *Opt. Lett.* **17**, 496 (1992).
12. Th. Busch and J. R. Anglin, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 010401 (2001).
13. H. E. Nistazakis, D. J. Frantzeskakis, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, and R. R. Carretero-González, *Phys. Rev. A* **77**, 033612 (2008).
14. E. G. M. van Kempen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 093201 (2002).
15. N. N. Klausen, J. L. Bohn, and C. H. Greene, *Phys. Rev. A* **64**, 053602 (2001).
16. С. В. Манаков, *ЖЭТФ* **65**, 505 (1973) [*Sov. Phys. JETP* **38**, 248 (1974)].
17. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
18. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
19. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, *ЖЭТФ* **71**, 203 (1976) [*Sov. Phys. JETP* **42**, 842 (1976)]; V. E. Zakharov and E. I. Schulman, *Physica D* **4**, 270 (1982).
20. N. Yajima and M. Oikawa, *Progr. Theor. Phys.* **54**, 1576 (1975).
21. N. Yajima and M. Oikawa, *Progr. Theor. Phys.* **56**, 1719 (1976).
22. R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press Inc., New York (1984).
23. N. P. Robins, W. Zhang, E. A. Ostrovskaya, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. A* **64**, 021601(R) (2001).
24. M. Moreno-Cardoner, J. Mur-Petit, M. Guilleumas, A. Polls, A. Sanpera, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 020404 (2007).

-
25. V. M. Pérez-García, H. Michinel, and H. Herrero, *Phys. Rev. A* **57**, 3837 (1998).
26. T.-L. Ho, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 742 (1998).
27. T. Ohmi and K. Machida, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 1822 (1998).
28. D. J. Kaup, *Stud. in Appl. Math.* **54**, 165 (1975).
29. D. J. Kaup, *Prog. Theor. Phys.* **54**, 396 (1975).
30. D. J. Kaup, *Stud. in Appl. Math.* **55**, 9 (1976).
31. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, *ЖЭТФ* **69**, 1654 (1975).
32. K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, *New J. Phys.* **5**, 73 (2003).
33. S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999).
34. J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder et al., *Science* **287**, 97 (2000).
35. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **129**, 435 (2006).