

РАЗМНОЖЕНИЕ АТОМНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ НА УЗЛАХ СТОЯЧЕЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ

*С. В. Пранц**

*Тихоокеанский океанологический институт Дальневосточного отделения Российской академии наук
690041, Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 25 мая 2009 г.

Проведен квантовый анализ движения и внутреннего состояния двухуровневого атома в сильном поле стоячей световой волны. Характер когерентной динамики атомного волнового пакета, поведение дипольного момента и инверсии населенности существенным образом зависят от соотношения между расстройкой атомно-полевого резонанса и характерной частотой движения атома. В базисе «одетых» состояний перемещение атома интерпретируется как движение волнового пакета в поле двух эффективных оптических потенциалов. При точном резонансе возникает эффект когерентного пленения населенности, если атом с нулевым начальным импульсом помещен в узел стоячей волны. Если величины расстройки и характерной частоты движения атома близки, то при пересечении узла стоячей волны вероятности перехода атома из одного потенциала в другой и отсутствия такового равны по порядку величины. В таком диапазоне расстройек происходит размножение атомных волновых пакетов на узлах стоячей волны, что интерпретируется как квантовое проявление классического хаотического транспорта атома, обнаруженного ранее. В определенном диапазоне расстройек существует диапазон значений начального импульса атома, в котором квантовое движение таково, что атом одновременно осциллирует в яме оптического потенциала и совершает баллистический полет. Такое поведение волнового пакета соответствует хаотическому блужданию классического атома, когда он вроде бы случайным образом попадает в ямы оптического потенциала, покидает их и совершает полеты в разных направлениях, находясь при этом в периодическом поле стоячей световой волны. При больших расстройках вероятность переходов из потенциала в потенциал мала и наблюдается адиабатическая эволюция волновых пакетов, что соответствует регулярному движению классического атома.

PACS: 37.10.Vz, 05.45.Mt, 05.45.-a

1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие атома с лазерным полем вблизи резонанса сопровождается не только изменением внутреннего состояния атома, но и изменением его импульса в результате испускания и поглощения фотонов. Если атом достаточно холодный и длительность взаимодействия велика, то можно существенно изменить величину начального импульса и управлять механическим движением атома с помощью света [1, 2]. Бурный прогресс техники охлаждения и пленения атомов, новые возможности конструирования оптических потенциалов желаемой формы и размерности, контроль уровня диссипации и шума позволяют проводить эксперименты с отдельными холодными атомами и ионами в оптических ре-

шетках [3–5]. Эти объекты активно используются в последнее время в качестве перспективных кандидатов на роль кубитов в квантовом компьютере и для проверки основных принципов квантовой механики, квантового хаоса, декогерентности и квантово-классического соответствия.

Трансляционное движение холодного атома следует описывать квантовомеханически, представляя его волновым пакетом, движущимся в оптическом потенциале. Впечатляющим следствием взаимодействия внутренних и внешних степеней свободы атома является оптический эффект Штерна – Герлаха, теоретически предсказанный Казанцевым [6]. В экспериментах [7] было обнаружено расщепление резонансного атомного пучка в лазерном поле на две компоненты аналогично тому, как это происходит в обычном эффекте Штерна – Герлаха.

*E-mail: prants@poi.dvo.ru

В полуклассическом приближении, где атом представляется точечной частицей, его динамика в поле стоячей световой волны исследовалась достаточно подробно. В этом приближении уравнения движения в отсутствие потерь являются нелинейной системой связанных дифференциальных уравнений Гамильтона для трансляционной степени свободы атома и Шредингера для внутренней степени свободы, допускающей хаотические решения. Некоторые решения полностью детерминированной динамической системы оказываются экспоненциально чувствительны к малым изменениям начальных условий или управляющих параметров, и предсказание поведения системы далее некоторого характерного промежутка времени становится практически невозможным. В ряде работ были теоретически обнаружены и исследованы нетривиальные режимы трансляционного движения точечного атома и его внутренней динамики: хаотические осцилляции Раби, атомные динамические фракталы, полеты Леви, хаотическое блуждание атома и др. [8–11]. Средний импульс атома в этих работах предполагался достаточно большим по сравнению с импульсом фотона, чтобы оправдать полуклассическое приближение. Тем не менее остается открытым вопрос, как перечисленные эффекты проявят себя при квантовании движения атома. Такая постановка вопроса является частью фундаментальной проблемы квантово-классического соответствия, существующей со времени основания квантовой механики. У этой проблемы есть множество аспектов. В настоящей работе мы затронем один из них — проявление полуклассических хаотических эффектов в движении атомных волновых пакетов в одномерной стоячей световой волне.

Целью настоящей работы является детальное изучение когерентного движения атомных волновых пакетов в поле стоячей световой волны и проявлений полуклассического хаоса в поведении волновых пакетов. Движение атома и его внутренняя динамика существенно различны в разных диапазонах значений атомно-полевой расстройки. В базисе «одетых» состояний поступательное движение двухуровневого атома естественным образом интерпретируется как движение одновременно в двух эффективных потенциалах. В разд. 2 статьи показано, что при точном резонансе атомный волновой пакет с нулевым средним импульсом и центром в узле стоячей волны расщепляется на две компоненты, эволюционирующие независимо в ямах двух резонансных потенциалов таким образом, что возникает эффект когерентного пленения инверсии населенности атома. В

разд. 3 показано, что в отсутствие резонанса баллистический атом движется, вообще говоря, одновременно в двух нерезонансных потенциалах и при пересечении узлов, где потенциалы максимально сближаются, может переходить из одного в другой. Вероятность этого перехода зависит от соотношения между некоторой характерной частотой движения атома и расстройкой резонанса. Если расстройка сравнительно велика, то вероятность перехода мала и наблюдается простая адиабатическая эволюция баллистического волнового пакета. При малых расстройках вероятности перейти или не перейти из потенциала в потенциал примерно одинаковы, что приводит к эффекту размножения баллистических волновых пакетов на узлах стоячей волны. Средний начальный импульс атомного волнового пакета можно подобрать таким образом, что одна его компонента окажется захваченной в яме одного потенциала, а другая будет перемещаться вдоль оси стоячей волны, размножаясь на ее узлах. Все численные эксперименты проводятся в импульсном представлении, что позволяет дать наглядную интерпретацию этих эффектов в виде тоновых карт, на которых показана зависимость вероятности данного значения импульса от времени. В разд. 4 статьи обсуждаются некоторые проблемы квантово-классического соответствия в связи с результатами работ [9–11], в которых в той же гамильтоновой модели, но при классической трактовке движения атома, были обнаружены и исследованы эффекты хаотического транспорта, хаотического блуждания и фрактальные свойства атомного транспорта в оптической решетке. Адиабатическая эволюция волновых пакетов при больших расстройках есть проявление регулярного движения классического атома, размножение волновых пакетов на узлах — проявление хаотического транспорта, а эффект одновременного колебания в потенциальной яме и баллистического полета — проявление хаотического блуждания классического атома.

2. КОРРЕЛЯЦИЯ ВНУТРЕННЕЙ И ВНЕШНЕЙ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ АТОМНОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА, ПЛЕНЕННОГО В ЯМЕ ОПТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Гамильтониан двухуровневого атома в классическом поле одномерной стоячей световой волны запишем в системе отсчета, вращающейся с частотой поля w_f ,

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m_a} + \frac{\hbar}{2}(\omega_a - \omega_f)\hat{\sigma}_z - \hbar\Omega(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+) \cos k_f \hat{X}. \quad (1)$$

Внутренние степени свободы атома описываются операторами Паули $\hat{\sigma}_{\pm,z}$, а внешние — операторами положения \hat{X} и импульса атома \hat{P} . Величина Ω является амплитудным значением частоты Раби, а ω_a — частотой рабочего атомного перехода. Запишем вектор состояния атома в координатном представлении в энергетическом базисе свободного атома:

$$|\Psi(t)\rangle = \int [a(X,t)|2\rangle + b(X,t)|1\rangle] dX, \quad (2)$$

где $a(X,t)$ и $b(X,t)$ — амплитуды вероятности найти в момент времени t атом в положении X соответственно в возбужденном $|2\rangle$ и основном $|1\rangle$ состояниях. Уравнение Шредингера для этих амплитуд запишем в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} i\dot{a}(x) &= -\frac{\omega_r}{2}a''(x) - \frac{\Delta}{2}a(x) - b(x)\cos x, \\ i\dot{b}(x) &= -\frac{\omega_r}{2}b''(x) + \frac{\Delta}{2}b(x) - a(x)\cos x, \end{aligned} \quad (3)$$

где точка и штрих означают дифференцирование по безразмерному времени $\tau \equiv \Omega t$ и координате $x \equiv k_f X$. Управляющими безразмерными параметрами являются отстройка резонанса $\Delta \equiv (\omega_f - \omega_a)/\Omega$ и частота $\omega_r \equiv \hbar k_f^2/m_a \Omega$, характеризующая изменение кинетической энергии атома в результате излучения или поглощения фотона световой волны.

Поведение атома в стоячей волне удобно интерпретировать в базисе «одетых» состояний [1]

$$\begin{aligned} |+\rangle_{\Delta} &= \sin \Theta |2\rangle + \cos \Theta |1\rangle, \\ |-\rangle_{\Delta} &= \cos \Theta |2\rangle - \sin \Theta |1\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

которые являются собственными внутренними состояниями атома в поле с собственными значениями квазиэнергии

$$\begin{aligned} E_{\Delta}^{(\pm)} &= \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \cos^2 x}, \\ \text{tg } \Theta &\equiv \frac{\Delta}{2 \cos x} - \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2 \cos x}\right)^2 + 1}. \end{aligned} \quad (5)$$

На рис. 1 изображены резонансный $E_0^{(\pm)}$ ($\Delta = 0$, штриховые кривые) и нерезонансный $E_{\Delta}^{(\pm)}$ ($\Delta \neq 0$, сплошные кривые) потенциалы атома в поле стоячей волны.

При точном резонансе, $\Delta = 0$, уравнения (3) легко «расщепляются» с помощью подстановки $\varphi_{\pm}(x) = [a(x) \pm b(x)]/\sqrt{2}$ [6]:

$$\dot{\varphi}_{\pm}(x) = i\frac{\omega_r}{2}\varphi_{\pm}''(x) \pm i\varphi_{\pm}(x)\cos x. \quad (6)$$

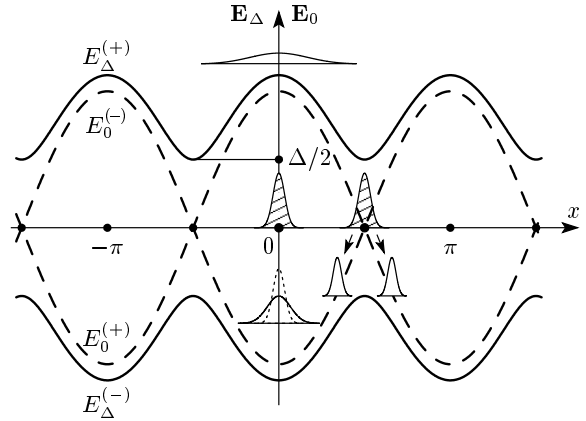


Рис. 1. Резонансный $E_0^{(\pm)}$ и нерезонансный $E_{\Delta}^{(\pm)}$ потенциалы атома в стоячей световой волне. Показан оптический эффект Штерна–Герлаха в резонансном потенциале: расщепление атомного волнового пакета с центром в узле стоячей волны ($x_0 = \pi/2, p_0 = 0$). Волновой пакет с центром в пучности ($x_0 = 0, p_0 = 0$) находится одновременно на вершине потенциала $E_0^{(+)}$ и на дне потенциала $E_0^{(-)}$: его $|+\rangle$ -компонента со временем «стекает» вниз по обе стороны вершины $E_0^{(+)}$, а $|-\rangle$ -компонента осциллирует на дне потенциала $E_0^{(-)}$

Отсюда немедленно следует, что волновые функции φ_+ и φ_- эволюционируют независимо друг от друга. Каждая из них удовлетворяет уравнению Шредингера со своим потенциалом, $+\cos x$ или $-\cos x$. Это означает, что атомный волновой пакет, приготовленный изначально в основном состоянии $|1\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$, расщепится. Если центр пакета с нулевым средним импульсом находится в узле стоячей волны при $x_0 = \pi/2$, то одна его компонента под действием градиентной силы $F_0^{(-)} = -dE_0^{(-)}/dx = -\sin x$ направится налево вниз по склону потенциала $E_0^{(-)} = -\cos x$, а другая — вправо вниз по склону потенциала $E_0^{(+)} = \cos x$. Это известный оптический эффект Штерна–Герлаха, теоретически обоснованный в работах [6, 12] и обнаруженный экспериментально в работе [7]. Если кинетическая энергия атома не превышает потенциальную (см. далее уравнение (19)), то атом окажется в плену у оптического потенциала. В этом случае две компоненты атомного волнового пакета разойдутся на максимальное расстояние между двумя точками поворота $x = -\pi/2, 3\pi/2$, затем повернут назад и воссоединятся через интервал времени T , сформировав единый пакет с центром в узле $x = \pi/2$. В отсутствие каких-либо потерь этот процесс расщепления и воссоединения будет периодически повторяться

ся. Период T можно оценить с помощью интеграла

$$\frac{\lambda_f}{4} = \int_0^{T/4} \frac{P}{m_a} dt. \quad (7)$$

Используя принятую нормировку и линейное приближение для потенциала, получим

$$T \approx 4 \sqrt{\frac{\pi}{\omega_r}}. \quad (8)$$

Поскольку внутренние и внешние степени свободы атома связаны, они оказывают друг на друга влияние. Формально это обусловлено некоммутативностью операторов кинетической энергии и электродипольного взаимодействия в гамильтониане (1). Что происходит с внутренним состоянием атома в режиме Штерна–Герлаха? Для характеристики внутреннего состояния введем следующие вещественные комбинации амплитуд вероятности:

$$\begin{aligned} u(\tau) &\equiv 2 \operatorname{Re} \int dx [a(x, \tau)b^*(x, \tau)], \\ v(\tau) &\equiv -2 \operatorname{Im} \int dx [a(x, \tau)b^*(x, \tau)], \\ z(\tau) &\equiv \int dx [|a(x, \tau)|^2 - |b(x, \tau)|^2], \end{aligned} \quad (9)$$

которые являются компонентами дипольного момента атома (u и v) и инверсией населенности z . Легко проверить, что $u^2(\tau) + v^2(\tau) + z^2(\tau) = 1$. При точном резонансе синфазная компонента вектора Блоха, u , является константой. Две другие компоненты, вообще говоря, осциллируют. Вдали от узлов поля каждая компонента расщепившегося волнового пакета эволюционирует независимо в своем резонансном потенциале, а ее инверсия населенности равна нулю:

$$z_{\pm}(\tau) = \frac{1}{2} \int (|\varphi_{\pm}(x, \tau)|^2 - |\varphi_{\pm}(x, \tau)|^2) dx = 0. \quad (10)$$

В узлах стоячей волны резонансные потенциалы пересекаются (см. рис. 1) и при приближении к ним центров волновых пакетов состояния $|+\rangle$ и $|-\rangle$ перемешиваются таким образом, что результирующая суперпозиция близка к основному состоянию «голово» атома $|1\rangle$ с инверсией населенности $z_{node} \approx -1$.

Проверим эти соображения с помощью численного эксперимента. Пусть при $\tau = 0$ атомный пакет является гауссианом

$$\begin{aligned} a_0(x) &= 0, \\ b_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\Delta x}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2(\Delta x)^2} - i(x-x_0)p_0\right) \end{aligned} \quad (11)$$

со средними начальными значениями $x_0 = \pi/2$ и $p_0 = 0$, где Δx — пространственная ширина пакета при $\tau = 0$, которая предполагается много меньшей оптической длины волны λ_f . Результаты вычисления инверсии населенности $z(\tau)$ для $\omega_r = 10^{-3}$ представлены на рис. 2а. В соответствии с (10) между узлами поля обнаруживается эффект когерентного пленения населенности для атома, находящегося при $\tau = 0$ в узле (рис. 2а): в течение длительных промежутков времени населенности энергетических уровней равны, несмотря на непрекращающееся взаимодействие атома с полем. С помощью формулы (8) вычислим, когда в режиме Штерна–Герлаха центры волновых пакетов достигнут каждый своего узла при $x_0 = -\pi/2, 3\pi/2$: $\tau_{node} = T/2 \approx 112$. На рис. 2а мы видим, что населенность резко изменяется вблизи узлов, когда $\tau \approx n\tau_{node}$ ($n = 1, 2, \dots$). Поскольку волновой пакет в нелинейном потенциале с течением времени испытывает дисперсионное уширение, при последовательном пересечении узлов глубина скачков z уменьшается и восстановление стационарного значения $z = 0$ после прохождения узлов происходит все позже и позже.

Эффект когерентного пленения населенности полностью отсутствует, если при прочих равных условиях центр атомного волнового пакета изначально находится не в узле, а в пучности стоячей волны, например, при $x_0 = 0$ (см. рис. 2б). Для объяснения этого факта обратимся к рис. 1. Атом, приготовленный в основном состоянии $|1\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$, находится одновременно в двух резонансных потенциалах $E_0^{(\pm)}$. Но в отличие от узлового атома $|+\rangle$ -компонента атома пучности при $\tau = 0$ находится на вершине потенциала $E_0^{(+)}$, а его $|-\rangle$ -компонента — на дне потенциала $E_0^{(-)}$. Сила $F_0^{(+)}$ заставляет $|+\rangle$ -компоненту пакета «стекать» вниз по обе стороны вершины потенциала $E_0^{(+)}$, а сила $F_0^{(-)}$ заставляет $|-\rangle$ -компоненту осциллировать в окрестности пучности, периодически сжимаясь и уширяясь. В результате гауссов волновой пакет диспергирует, «расползаясь» по обе стороны пучности, $x = 0$, и со временем образует структуру с несколькими горбами. Отсутствие периодических осциллирующих компонент атомного волнового пакета предотвращает когерентное пленение населенности.

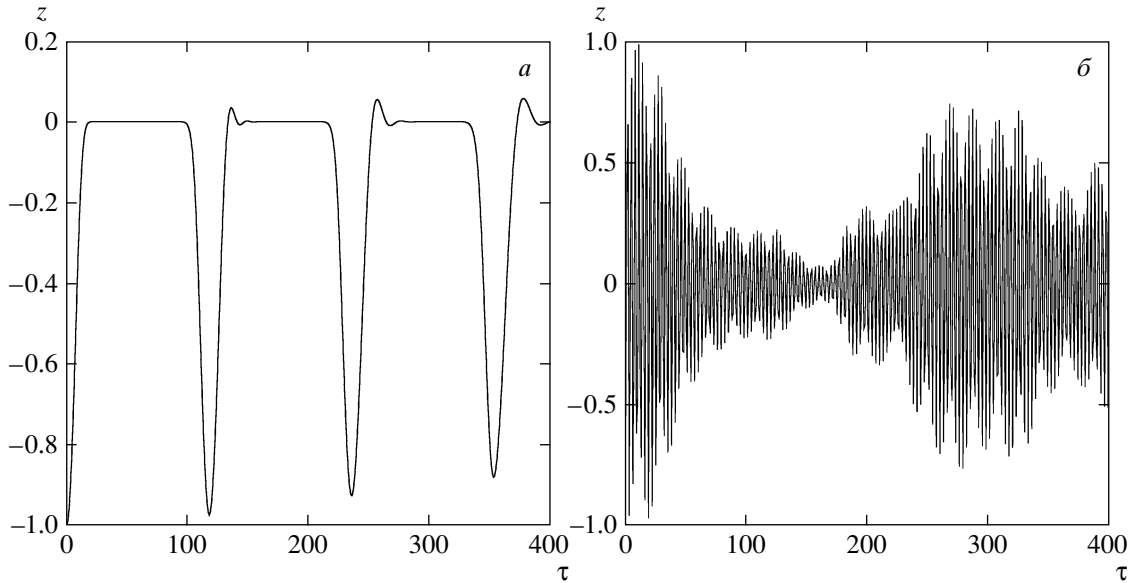


Рис. 2. а) Когерентное плениение населенности резонансного атома, помещенного в узел стоячей волны, $x_0 = \pi/2$, в основном состоянии $|1\rangle$. б) Осцилляции Раби атома, помещенного в пучность, $x_0 = 0$, при тех же условиях: $\Delta = 0$, $\omega_r = 10^{-3}$, $p_0 = 0$

На рис. 2б показаны осцилляции Раби атома в пучности.

к единице. Из этого условия находится характерная частота движения атома

$$\Delta_0 = \sqrt{\omega_r p_{node}}. \tag{12}$$

3. ЭВОЛЮЦИЯ АТОМНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Уравнения движения и оценка вероятности неадиабатических переходов

Вне резонанса, $\Delta \neq 0$, атомный волновой пакет движется в потенциалах $E_{\Delta}^{(\pm)}$, определяемых выражением (5). Расстояние между потенциальными кривыми минимально в узлах поля $x = \pi/2 + \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) и равно Δ , а пространственный период $E_{\Delta}^{(\pm)}$ в два раза меньше, чем у резонансных потенциалов (см. рис. 1). Глубина модуляции резонансного потенциала более чем в два раза превышает глубину модуляции нерезонансного потенциала. Потенциал можно линеаризовать в малой окрестности узла. Тогда время пролета атомом малого расстояния δx вблизи узла примерно равно $\delta x / \omega_r p_{node}$, где p_{node} — среднее значение импульса атома вблизи узла. Расстояние между уровнями квазиэнергии в малой окрестности узла равно примерно Δ . Если эта величина одного порядка со временем пролета, то вероятность неадиабатического перехода близка

к единице. Из этого условия находится характерная частота движения атома

1. Если $|\Delta| \gg \Delta_0$, то вероятность перехода между адиабатическими состояниями $|\pm\rangle_{\Delta}$ (4) экспоненциально мала и атом движется в адиабатических условиях.

2. Если $|\Delta| \ll \Delta_0$, то вероятность перехода между адиабатическими состояниями при прохождении узла близка к единице. При этом адиабатические состояния $|\pm\rangle$ не перемешиваются и атом движется в резонансном потенциале $E_0(+)$ или $E_0(-)$.

3. Если $|\Delta| \approx \Delta_0$, то вероятности при пересечении атомом узла перейти в другое адиабатическое состояние или остаться в прежнем есть величины одного порядка.

Разложим вектор состояния атома в импульсном представлении по базису состояний свободного атома:

$$|\Psi(t)\rangle = \int [a(P, t)|2\rangle + b(P, t)|1\rangle] |P\rangle dP. \tag{13}$$

Используя свойство оператора сдвига

$$\begin{aligned} \cos(k_f \hat{X})|P\rangle &\equiv \frac{1}{2} \left(e^{ik_f \hat{X}} + e^{-ik_f \hat{X}} \right) |P\rangle = \\ &= \frac{1}{2} (|P + \hbar k_f\rangle + |P - \hbar k_f\rangle) \end{aligned} \quad (14)$$

и ту же нормировку, что и в координатном представлении (3), выведем уравнения Шредингера для амплитуд $a(p)$ и $b(p)$:

$$\begin{aligned} i\dot{a}(p) &= \frac{1}{2}(\omega_r p^2 - \Delta)a(p) - \frac{1}{2}[b(p+1) + b(p-1)], \\ i\dot{b}(p) &= \frac{1}{2}(\omega_r p^2 + \Delta)b(p) - \frac{1}{2}[a(p+1) + a(p-1)], \end{aligned} \quad (15)$$

где импульс атома p измеряется в единицах импульса фотона $\hbar k_f$. Вообще говоря, уравнения (15) представляют собой бесконечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка со «сцепленными» амплитудами $a(p \pm n)$ и $b(p \pm m)$. В случае точного резонанса, $\Delta = 0$, их удастся расцепить, переходя, как и в координатном представлении, к базису «одетых» состояний. Если далее принять приближение Рамана – Ната, т. е. пренебречь изменениями кинетической энергии атома за время взаимодействия с полем, то можно получить аналитическое решение в терминах функций Бесселя [13]. В нерезонансном случае приходится довольствоваться численным интегрированием бесконечномерной системы (15).

Далее во всех расчетах предполагается, что атом в начальный момент времени приготовлен в виде гауссова волнового пакета в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned} a_0(p) &= 0, \\ b_0(p) &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\Delta p}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2(\Delta p)^2} - i(p-p_0)x_0\right), \end{aligned} \quad (16)$$

с начальным средним импульсом p_0 и шириной в импульсном пространстве $\Delta p = 10$, что соответствует пространственной ширине $\Delta x = 1/20$ или $\lambda_f/40\pi$ в размерных единицах. Центр тяжести атома при $\tau = 0$ находится в пучности, $x_0 = 0$. Вероятность обнаружения атома со значением импульса вблизи p в момент времени τ имеет вид

$$W(p, \tau) = |a(p, \tau)|^2 + |b(p, \tau)|^2. \quad (17)$$

Наглядное представление об эволюции атомных пакетов в импульсном пространстве дает карта вероятности (17), на которой оттенками цвета модулируется значение $W(p, \tau)$ в точке (p, τ) (см. рис. 3). Подчеркнем, что в этом разделе выбрано значение нормированной частоты отдачи $\omega_r = 10^{-5}$.

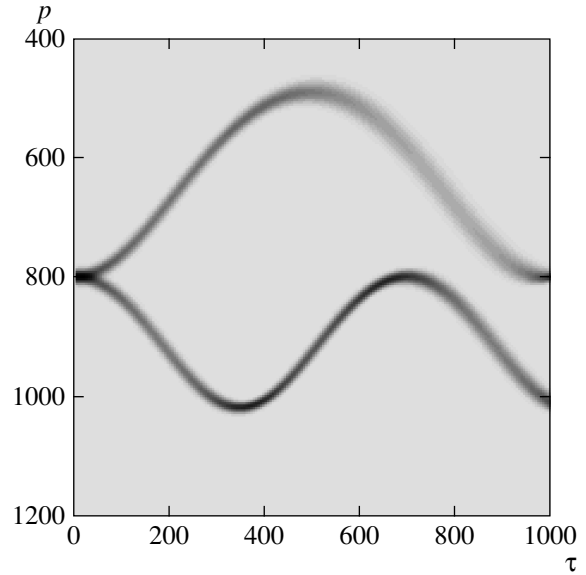


Рис. 3. Зависимость функции распределения резонансного баллистического атома по импульсам (17) от времени. Цвет модулирует значение вероятности $W(p, \tau)$ обнаружить атом с импульсом p в момент времени τ . Атом приготовлен в основном состоянии $|1\rangle$ при $\Delta = 0$, $\omega_r = 10^{-5}$, $x_0 = 0$, $p_0 = 800$

3.2. Эволюция волнового пакета баллистического атома при точном резонансе

Как следует из уравнения (6), при точном резонансе, $\Delta = 0$, волновые функции «одетых» состояний эволюционируют независимо, каждая в своем резонансном потенциале $E_0^{(+)}$ и $E_0^{(-)}$. Если в качестве начального выбрать основное состояние $|1\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$, то начальный волновой пакет одновременно окажется на вершине потенциала $E_0^{(+)}$ и на дне потенциала $E_0^{(-)}$ (см. рис. 1). Дальнейшая его эволюция в импульсном пространстве для $p_0 = 800$ показана на рис. 3, на котором оттенками серого цвета модулируется значение вероятности $W(p, \tau)$. Обратим внимание, что значения импульса атома на вертикальной оси увеличиваются сверху вниз. Пакет расщепился на две части. Поскольку $|+\rangle$ -компонента перемещается вниз по склону потенциала $E_0^{(+)}$, сначала ее скорость увеличивается (нижняя траектория на рис. 3) вплоть до достижения следующей пучности стоячей волны при $x = \pi$, а затем уменьшается вплоть до достижения пучности при $x = 2\pi$. Этот процесс повторяется с периодом,

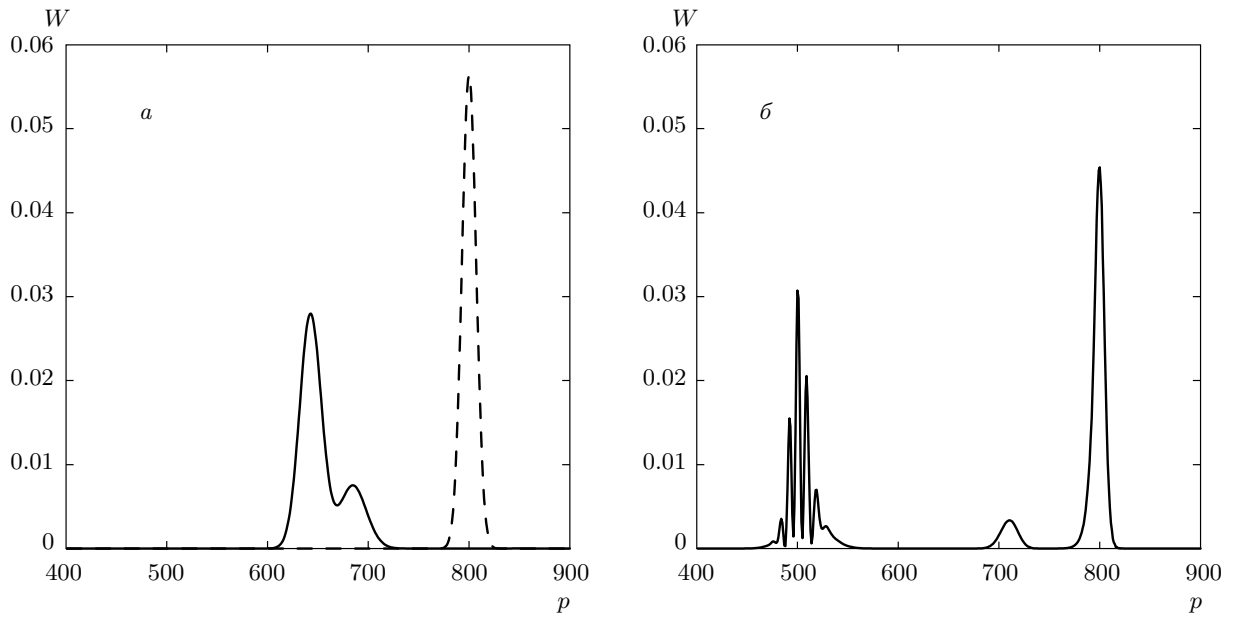


Рис. 4. Функция распределения W по импульсам p (в относительных единицах) для атома, приготовленного в диабатическом состоянии $|+\rangle$ с малой отстройкой от резонанса $\Delta = 0.05$ и $\Delta_0 \approx 0.08$ ($\omega_r = 10^{-5}$, $x_0 = 0$, $p_0 = 800$) в моменты времени $\tau = 0$ (а, штриховая линия), 230 (а, сплошная линия), 1000 (б)

который легко оценить по простой формуле

$$\tau_0^{(+)} \approx 2\pi / \omega_r \bar{p}_{0,2\pi}^{(+)} \approx 690,$$

где $\bar{p}_{0,2\pi}^{(+)}$ — средний импульс $|+\rangle$ -компоненты в интервале движения от 0 до 2π .

$|-\rangle$ -компонента перемещается вверх по склону потенциала $E_0^{(-)}$ и поэтому теряет скорость вплоть до достижения его вершины при $x = \pi$. Далее ее скорость увеличивается вплоть до достижения пучности при $x = 2\pi$, и этот процесс периодически повторяется. Поскольку средний полетный импульс $|-\rangle$ -компоненты меньше, чем у $|+\rangle$ -компоненты, то ее период больше, $\tau_0^{(-)} \approx 980$ (см. верхнюю траекторию на рис. 3).

Если движение атома описывать классическими уравнениями (24) (см. далее), то при выбранных начальных условиях ($z_0 = -1$, $u_0 = 0$) из выражения для сохраняющейся полной энергии атома (19) (см. далее) следует, что импульс атома не изменяется. В квантовом случае это, конечно, не так, но среднее значение импульса,

$$\bar{p} = (\bar{p}^{(+)} + \bar{p}^{(-)})/2 \approx 800,$$

совпадает с классическим.

3.3. Размножение волновых пакетов на узлах стоячей волны при $|\Delta| \approx \Delta_0$

Выберем сравнительно малую расстройку $\Delta = 0.05$. Пусть атом приготовлен в диабатическом состоянии $|+\rangle$, являющимся суперпозицией энергетических состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$ с равными весами. Нетрудно показать, что в адиабатическом базисе $|\pm\rangle_\Delta$ (4) это состояние выглядит как

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos \Theta + \sin \Theta)|+\rangle_\Delta + (\cos \Theta - \sin \Theta)|-\rangle_\Delta]. \quad (18)$$

На рис. 4 показано импульсное распределение вероятности в разные моменты времени. На рис. 4а штриховой линией показано начальное гауссово распределение (16).

Внутреннее состояние атома характеризуется значениями синфазной компоненты дипольного момента u и инверсии населенности z , которые вычисляются согласно формуле (9), но в импульсном представлении. Результаты вычислений показаны на рис. 5. Отметим специфическое поведение величины u , которая резко меняет значение в некоторых малых промежутках времени и остается почти постоянной между ними. Далее будет показано, что в эти интервалы времени компоненты

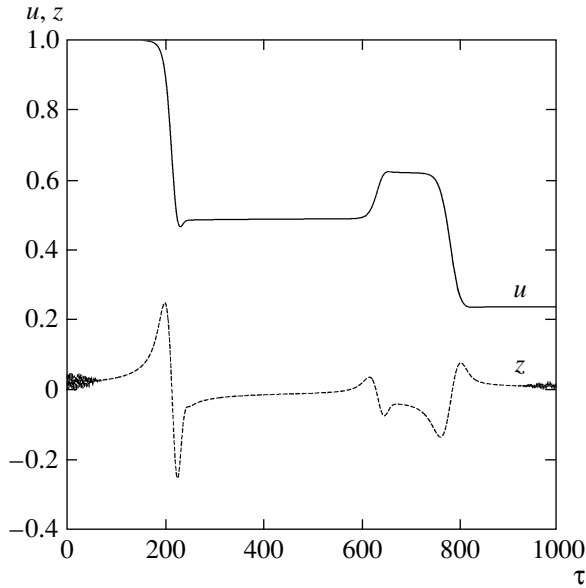


Рис. 5. Эволюция компоненты дипольного момента u (сплошная линия) и населенности z (штриховая) атома с теми же начальными условиями и параметрами, что и на рис. 4

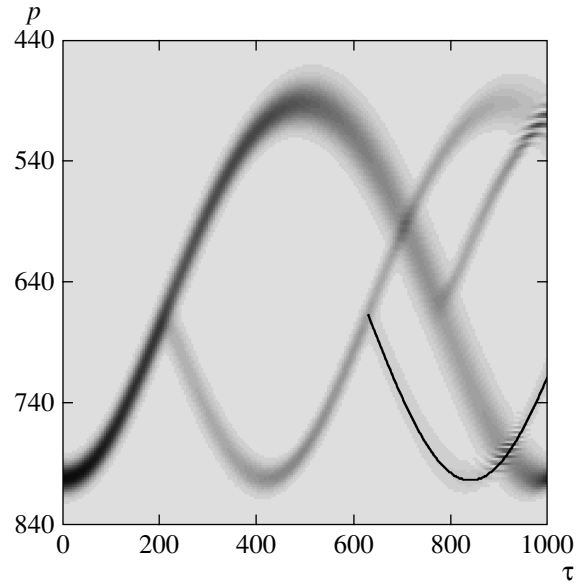


Рис. 6. Размножение атомных волновых пакетов в импульсном пространстве при пересечении узлов стоячей волны при тех же условиях, что и на рис. 4. Жирная кривая обозначает траекторию центра волнового пакета, расщепившегося на втором узле при $\tau \approx 640$

расщепившегося волнового пакета пересекают узлы стоячей волны. Инверсия населенности z также резко изменяется вблизи узлов.

На рис. 6 представлена карта вероятности (17) для выбранных в этом разделе начальных условий и параметров. Среднее значение гамильтониана (1) в терминах нормированных переменных и параметров,

$$H = \frac{\omega_r}{2} p^2 - u \cos x - \frac{\Delta}{2} z, \quad (19)$$

является интегралом движения. Для выбранных начальных условий, $u_0 = 1$, $z_0 = 0$, $x_0 = 0$, $p_0 = 800$ и $\omega_r = 10^{-5}$, получим $H = H_0 \approx 2.2$. При малых расстройках, $|\Delta| \ll 1$, атом пересекает узлы стоячей волны примерно с одним и тем же средним значением импульса

$$p_{node} \approx \sqrt{2H_0/\omega_r} \approx 665. \quad (20)$$

С помощью соотношения (19) можно оценить минимальное и максимальные ожидаемые значения кинетической энергии атома и соответствующие импульсы:

$$\begin{aligned} p_{min} &\approx \sqrt{2(H_0 - 1)/\omega_r} \approx 490, \\ p_{max} &\approx \sqrt{2(H_0 + 1)/\omega_r} \approx 800. \end{aligned} \quad (21)$$

Полученные оценки (20) и (21) соответствуют численным данным на рис. 6. С помощью формулы (20) оценим характерную частоту (12): $\Delta_0 \approx 0.08$, величина которой оказывается одного порядка с выбранной расстройкой $\Delta = 0.05$.

Обратимся к картине движения атома в оптическом бипотенциале $E_{\Delta}^{(\pm)}$ (рис. 1) и дадим с ее помощью интерпретацию карты, представленной на рис. 6. Оценив угол смешивания Θ (5) для $\Delta = 0.05$ с помощью формулы (18) найдем, что выбранное начальное состояние $|+\rangle$ почти совпадает с адиабатическим состоянием $|-\rangle_{\Delta}$ нерезонансного потенциала $E_{\Delta}^{(-)}$. Вначале центр пакета находится в пучности, $x_0 = 0$, он начинает движение со дна потенциала $E_{\Delta}^{(-)}$ вверх по его склону, уменьшая свой средний импульс (см. рис. 4a и рис. 6). Центр волнового пакета пересечет первый узел $x = \pi/2$ в момент времени $\tau_1^{(-)} \approx 215$. На узле волновой пакет расщепится на два, резко изменится внутреннее состояние атома (произойдет перемешивание состояний $|+\rangle_{\Delta}$ и $|-\rangle_{\Delta}$) и атом продолжит движение одновременно в двух потенциалах $E_{\Delta}^{(+)}$ и $E_{\Delta}^{(-)}$. Этот момент зафиксирован на рис. 4a, на котором показано расщепление в момент времени $\tau = 230$. При этом одна часть волнового пакета продолжит движение в потенциал $E_{\Delta}^{(-)}$

вниз по его склону, увеличивая свою кинетическую энергию (см. нижнюю траекторию после первого расщепления на рис. 6), а другая перейдет в потенциал $E_{\Delta}^{(+)}$, перемещаясь вверх по его склону с уменьшением импульса (см. верхнюю траекторию). Более темная верхняя траектория в импульсном пространстве означает, что большая часть пакета перейдет в потенциал $E_{\Delta}^{(+)}$. Двигаясь между первым ($x = \pi/2$) и вторым ($x = 3\pi/2$) узлами, $|-\rangle$ -компонента пакета увеличивает свою среднюю скорость вплоть до достижения пучности при $x = \pi$, а затем замедляется вплоть до достижения второго узла, где происходит ее расщепление на две при $\tau_2^{(-)} \approx 640$. Одна часть расщепившегося пакета останется в потенциале $E_{\Delta}^{(-)}$ и двинется вниз по его склону, увеличивая свою среднюю скорость вплоть до достижения следующей пучности при $x = 2\pi$. Вероятность движения по этой траектории составляет всего несколько процентов и, чтобы ее было видно на карте, мы провели жирную кривую вдоль движения центра этого пакета. Другая часть пакета перейдет в потенциал $E_{\Delta}^{(+)}$, уменьшая скорость вплоть до достижения той же пучности.

$|+\rangle$ -компонента пакета, расщепившегося после прохождения первого узла, движущаяся в потенциале $E_{\Delta}^{(+)}$, имеет меньшую среднюю скорость и поэтому достигает второго узла позже, при $\tau_2^{(+)} \approx 800$, где расщепится на две части. Верхняя продолжит движение в потенциале $E_{\Delta}^{(+)}$, а нижняя — в потенциале $E_{\Delta}^{(-)}$. Такое размножение атомных волновых пакетов продолжится при пересечении следующих узлов стоячей волны.

Пересечение центром волнового пакета первого узла происходит в момент времени $\tau_1^{(-)} = \pi/2\omega_r \bar{p}_{0,1}^{(-)}$, где $\bar{p}_{0,1}^{(-)}$ — средний импульс $|-\rangle$ -компоненты при движении до первого узла, равный $(p_0 + p_{node})/2 \approx 732.5$. Следовательно, момент прохождения первого узла равен $\tau_1^{(-)} \approx 214$. Моменты времени $\tau_n^{(\pm)}$ пересечения n -го узла центрами $|\pm\rangle$ -компонент можно оценить по следующей простой формуле:

$$\omega_r \bar{p}_{n-1,n}^{(\pm)} \tau_n^{(\pm)} = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (22)$$

где $\bar{p}_{n-1,n}^{(\pm)}$ — средний импульс $|\pm\rangle$ -компоненты при движении между $(n - 1)$ -м и n -м узлами. Пересечение второго узла ($x = 3\pi/2$) при движении по нижней траектории происходит при $\tau_2^{(-)} \approx 642$. Для верхней траектории при движении между первым и вторым узлами имеем $\bar{p}_{1,2}^{(+)} = (p_{node} + p_{min})/2 \approx 577.5$ и, следовательно, $\tau_2^{(+)} \approx 815$. Полученные оценки со-

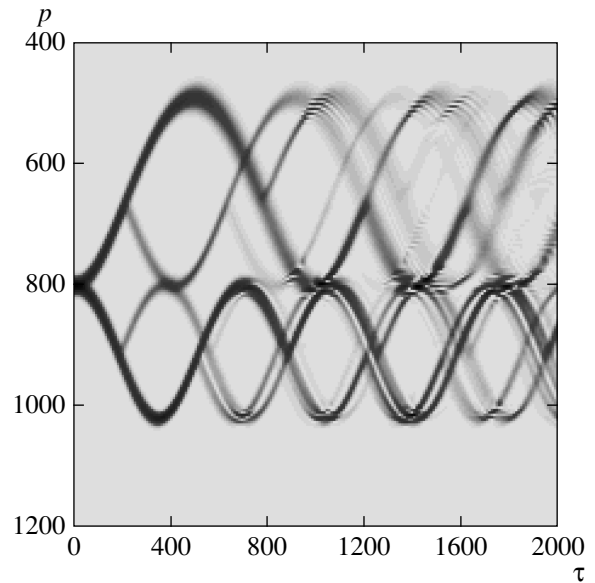


Рис. 7. Размножение волновых пакетов в импульсном пространстве для атома, приготовленного в основном состоянии $|1\rangle$. Прочие условия те же, что и на рис. 4

ответствуют данным карты вероятности, представленной на рис. 6. Выражения (21) дают оценки минимального и максимального ожидаемых значений импульса, совпадающие с теми, что приведены на рис. 6. Интерференционные полосы на верхней траектории при $\tau \approx 1000$ и $p \approx 500$, а также на нижней траектории при $\tau \approx 900$ и $p \approx 800$ отражают тонкую структуру соответствующих составляющих волнового пакета, т. е. расщепление каждой из них на некоторое число компонент (см. расщепленный пакет в окрестности $p \approx 500$ на рис. 4б).

Карта на рис. 7 иллюстрирует процесс размножения волновых пакетов атома, приготовленного в начале в основном энергетическом состоянии $|1\rangle$. Записав его в базисе адиабатических состояний $|\pm\rangle_{\Delta}$:

$$|1\rangle = \cos \Theta |+\rangle_{\Delta} - \sin \Theta |-\rangle_{\Delta}, \quad (23)$$

с помощью формулы (5) найдем, что оно является суперпозицией состояний $|+\rangle_{\Delta}$ и $|-\rangle_{\Delta}$ с почти равными весами. Все остальные условия те же, что и раньше в этом разделе. Поскольку выбранное внутреннее состояние является суперпозицией адиабатических состояний $|\pm\rangle_{\Delta}$, атом сразу же оказывается в двух нерезонансных потенциалах и его волновой пакет расщепляется. При этом $|+\rangle$ -компонента пакета движется вниз по склону потенциала $E_{\Delta}^{(+)}$, набирая скорость (нижняя траектория на рис. 7), а

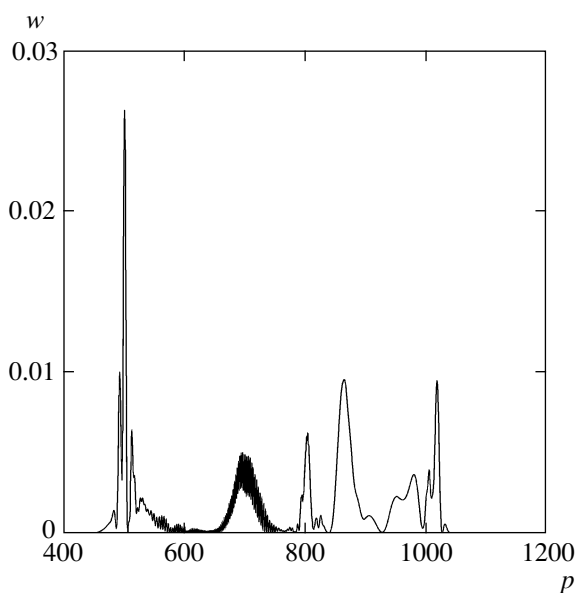


Рис. 8. Функции распределения по импульсам W того же атома, что на рис. 7, в момент времени $\tau = 2000$

$|-\rangle$ -компонента — вверх по склону потенциала $E_{\Delta}^{(-)}$, теряя скорость (верхняя траектория на рис. 7). Каждая из компонент расщепляется на первом узле при $x = \pi/2$ с небольшим сдвигом во времени друг относительно друга. Дальнейшее расщепление на узлах происходит независимо друг от друга по сценарию, описанному выше. Функция распределения по импульсам показана на рис. 8 в момент времени $\tau = 2000$. В отличие от атома, приготовленного в состоянии $|+\rangle$ (см. рис. 4б), атом с начальным состоянием $|1\rangle$ приобрел при движении составляющие импульса, большие, чем начальное среднее значение $p_0 = 800$.

3.4. Адиабатическая эволюция атомного волнового пакета при большой расстройке резонанса

Для сравнения на рис. 9 приведена карта эволюции импульсного распределения для сравнительно большой расстройки $\Delta = 2$ для атома, приготовленного при $\tau = 0$ в основном состоянии $|1\rangle$, при тех же прочих условиях, что и для $\Delta = 0.05$. Для этого значения расстройки состояние $|1\rangle$ представляет собой суперпозицию адиабатических состояний $|\pm\rangle_{\Delta}$ с 70 % весом состояния $|+\rangle_{\Delta}$ и 30 % веса состояния $|-\rangle_{\Delta}$. Как и следовало ожидать, большая часть пакета начинает движение из пучности $x_0 = 0$ в по-

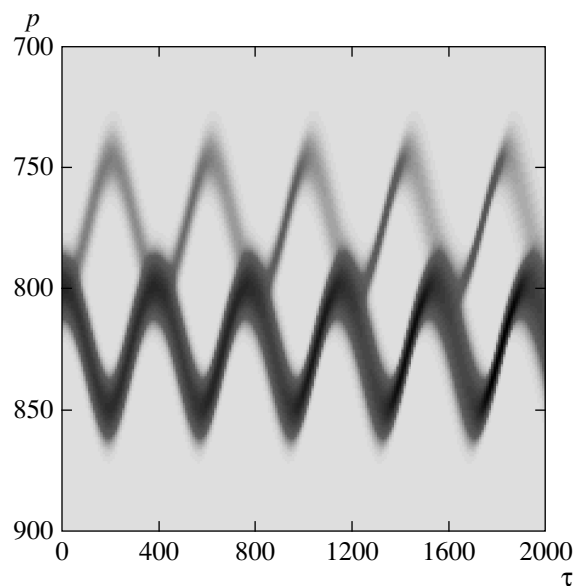


Рис. 9. Движение атомного волнового пакета в импульсном пространстве при большой расстройке резонанса $\Delta = 2$ и $\Delta_0 \approx 0.09$. Начальное внутреннее состояние $|1\rangle$. Прочие условия те же, что и на рис. 4

тенциале $E_{\Delta}^{(+)}$, увеличивая скорость до достижения узла $x = \pi/2$, а меньшая часть пакета движется в потенциале $E_{\Delta}^{(-)}$, уменьшая скорость вплоть до достижения того же узла. При пересечении узла вероятность перехода в другой потенциал мала, так как $\Delta = 2 \gg \Delta_0 \approx 0.09$, и компоненты пакета продолжают движение в адиабатических условиях, каждая в своем потенциале. Далее процесс повторяется при пересечении каждого узла и мы видим периодическое изменение средней скорости каждой из компонент. Отметим постепенное сжатие распределений обеих компонент пакета по импульсам при их движении вверх по склонам обоих потенциалов.

Поведение внутренних переменных u и z , показанное на рис. 10, также кардинально отличается от их поведения в случае $\Delta = 0.05$ (см. рис. 5). Вместо скачков величины u при пересечении узлов при $\Delta = 0.05$ наблюдается ее плавное изменение при их прохождении для $\Delta = 2$. Быстрые осцилляции u и z происходят при прохождении первых пучностей потенциалов $E_{\Delta}^{(+)}$ и $E_{\Delta}^{(-)}$, когда средние скорости компонент $|+\rangle$ и $|-\rangle$ волнового пакета сравниваются. Исчезновение этих осцилляций с течением времени связано, по-видимому, со все возрастающим временным сдвигом при достижении последующих пучностей компонентами пакета.

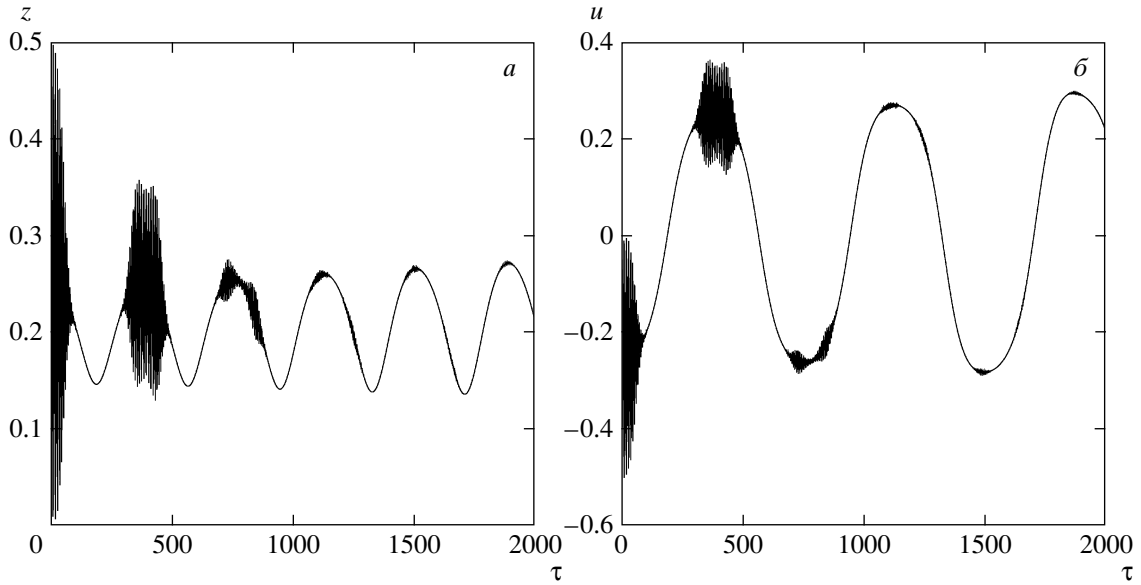


Рис. 10. Эволюция $z(a)$ и $u(b)$ того же атома, что на рис. 9

Итак, при $|\Delta| \gg \Delta_0$, благодаря малой вероятности переходов из одного потенциала в другой, не происходит размножения волновых пакетов. Вместо этого наблюдается их адиабатическая эволюция. Аналогичная картина наблюдается, если в качестве начального состояния выбирать адиабатическое состояние $|+\rangle$, которое при $\Delta = 2$ является суперпозицией 30 % состояния $|+\rangle_\Delta$ и 70 % состояния $|-\rangle_\Delta$. Различие состоит только в том, что большая часть пакета находится теперь в потенциале $E_\Delta^{(-)}$.

3.5. Одновременное пленение и полет атома

Любопытный эффект одновременного пленения атома в яме оптического потенциала и его баллистического полета наблюдается при малых расстройках резонанса. Приготовим атом в основном энергетическом состоянии $|1\rangle$ и подберем такое начальное значение его импульса p_0 , чтобы $|-\rangle$ -компонента волнового пакета не смогла преодолеть барьер потенциала $E_\Delta^{(-)}$, а $|+\rangle$ -компонента имела бы достаточную кинетическую энергию, чтобы преодолеть барьер своего потенциала $E_\Delta^{(+)}$. Тогда следует ожидать осцилляций $|-\rangle$ -компоненты атомного волнового пакета в первой яме потенциала $E_\Delta^{(-)}$ с периодическим изменением знака среднего импульса и одновременного размножения волновых пакетов $|+\rangle$ -компоненты на узлах стоячей волны при движении в потенциале $E_\Delta^{(+)}$.

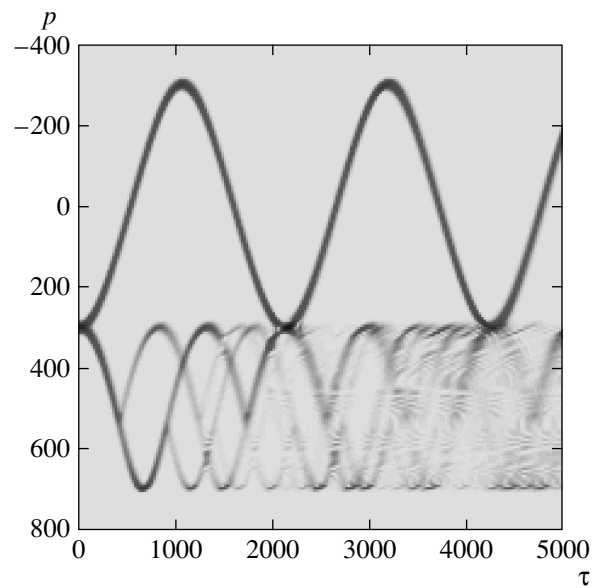


Рис. 11. Эффект одновременного пленения атома в потенциальной яме и полета вдоль стоячей волны. Начальное состояние $|1\rangle$, $\Delta = -0.05$, $p_0 = 300$. Прочие условия те же, что на рис. 4

Именно это наблюдается в численном эксперименте с $p_0 = 300$, $\Delta = -0.05$ и прочими теми же условиями, что и ранее. Карта вероятности на рис. 11 иллюстрирует эволюцию такого суперпозиционного состояния в импульсном пространстве, в котором од-

на часть атомного волнового пакета осциллирует в потенциальной яме в интервале $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ с изменением импульса приблизительно от 300 до -300 , а другая его часть движется в положительном направлении оси x , расщепляясь на каждом узле стоячей волны. Оценки периода осцилляций по формуле (8) $T \approx 2240$ и времени достижения $|+$ -компонентой первого узла $\tau_1^{(+)} \approx 380$ хорошо согласуются с данными численного расчета. Для выбранных начальных условий оценим классическую энергию (19): $H = H_0 \approx 0.45$. Характерная частота Δ_0 атомного движения (12) оказывается величиной, примерно равной по абсолютному значению выбранной расстройке: $\Delta_0 \approx 0.055$.

4. КВАНТОВО-КЛАССИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ И ПРОЯВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА В КВАНТОВОМ ДВИЖЕНИИ АТОМА

В этом разделе обсуждается соответствие между квантовым расчетом движения атома в поле стоячей световой волны и результатами классических вычислений в работах [9–11], где изучалась та же модель с гамильтонианом (1), но трансляционное движение атома трактовалось классически. Соответствующие уравнения Гамильтона–Шредингера с теми же нормировками, что и в этой статье, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_r p, & \dot{p} &= -u \sin x, & \dot{u} &= \Delta v, \\ \dot{v} &= -\Delta u + 2z \cos x, & \dot{z} &= -2v \cos x, \end{aligned} \quad (24)$$

где x и p — положение и импульс атомного центра масс, а компоненты вектора Блоха u , v и z являются полуклассическими аналогами соответствующих квантовых величин (9). Полная энергия атома имеет вид (19) и вместе с длиной вектора Блоха, $u^2 + v^2 + z^2 = 1$, является интегралом движения в отсутствие каких-либо потерь.

Уравнения (24) составляют нелинейную динамическую систему, которая имеет положительные значения максимального показателя Ляпунова в широком диапазоне значений управляющих параметров ω_r и Δ и начальных условий [11]. Другими словами, в этом диапазоне значений атомная траектория в пятимерном фазовом пространстве экспоненциально чувствительна к малым изменениям параметров и/или начальных условий. Это локальная неустойчивость является причиной хаотических осцилляций Раби и хаотичности траекторий атомного центра масс. В результате в периодическом оптическом

потенциале в отсутствие каких-либо случайных процессов атом может хаотически блуждать по оптической решетке [10, 11], меняя направления движения. Было установлено, что хаотическое поведение при малых расстройках обусловлено скачками синхронной с полем компоненты дипольного момента атома u на узлах стоячей волны и ее малыми изменениями между узлами (см. рис. 3 в работе [11]). Как следует из уравнений (24), эта величина управляет изменениями импульса атома p . В работе [11] сконструировано стохастическое отображение для величины u , которое позволяет получить аналитические выражения для функций плотности вероятности пленения атома в ямах оптического потенциала и его баллистических полетов, которые хорошо согласуются с численными расчетами.

Как показано в этой работе, скачки u на узлах стоячей волны наблюдаются для сравнительно малых расстройек при выполнении условия $|\Delta| \approx \Delta_0$ и при квантовании движения (см. рис. 5). Из проведенного в предыдущих разделах анализа движения волновых пакетов следует, что для таких расстройек переход между уровнями квазиэнергии при пересечении узла имеет вероятностный характер и сопровождается не только скачком величины u , но и расщеплением волнового пакета. Размножение волновых пакетов на узлах можно интерпретировать как квантовое проявление классического хаотического транспорта атома в оптической решетке, обнаруженного и исследованного в работах [9–11]. В частности, эффект одновременного пленения и полета атома, представленный в предыдущем разделе (см. рис. 11), является квантовым аналогом хаотического блуждания атома (см. рис. 2 из работы [11]), проявляющегося при тех же значениях параметров, что и в этой статье.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе теоретически и численно изучалась когерентная гамильтонова динамика двухуровневого атома в поле сильной стоячей световой волны. Особое внимание уделялось взаимосвязи квантовых внутренних и трансляционных степеней свободы атома. Численно обнаружен ряд эффектов и дана их интерпретация на основе картины движения атомного волнового пакета в поле двух оптических потенциалов. Эффект когерентного пленения населенности в режиме Штерна–Герлаха продемонстрирован с холдным резонансным атомом, помещенным в узел стоячей волны.

Отмечена важная роль расстройки атомно-полевого резонанса Δ и узлов стоячей волны, где максимально сближаются нерезонансные потенциалы $E_{\Delta}^{(\pm)}$ и происходят наиболее существенные изменения волновых пакетов. Если Δ является величиной одного порядка с характерной частотой $\Delta_0 = \sqrt{\omega_r p_{node}}$, то вероятности перейти или не перейти из одного потенциала в другой при пересечении волновым пакетом любого узла являются величинами одного порядка. В результате наблюдается эффект размножения атомных волновых пакетов на узлах стоячей волны. Это квантовое проявление классического хаотического транспорта атомов в оптической решетке, исследованного в работах [9–11]. Подчеркнем, что подобного рода квантово-классическое соответствие редко наблюдается для классически хаотических систем. Если $|\Delta| \gg \Delta_0$, то наблюдается адиабатическая эволюция волновых пакетов, что соответствует регулярному движению классического центра масс.

В этой работе мы не учитывали спонтанное излучение атома. Для больших расстроек вероятность спонтанного излучения невелика. Для малых расстроек это не так. Каждый акт спонтанного излучения прерывает когерентную эволюцию и сопровождается изменением импульса атома и его переходом скачком в основное состояние, которое является суперпозицией «одетых» состояний. После этого когерентная эволюция возобновляется. Отчасти это похоже на то, что происходит с атомом при пересечении узла с той разницей, что акт спонтанного излучения с достоверностью переводит атом в основное состояние, а при пересечении узла переход носит вероятностный характер. Таким образом, можно ожидать, что когерентная эволюция атома будет в случайные моменты времени прерываться коллапсами волновой функции и расщеплением волнового пакета, т. е. помимо размножения пакетов на узлах стоячей волны при малых расстройках можно ожидать дополнительно расщепления пакетов в случайные моменты времени. Проверка этих рассуждений требует отдельного рассмотрения.

Для экспериментальной проверки некоторых результатов этой работы можно использовать оптический переход $3^1S_0-3^3P_1$ атома Mg с длительным временем спонтанного распада $T_{sp} \approx 10^{-3}$ с, которое для частоты Раби $\Omega/2\pi \approx 10^7$ Гц соответствует

примерно 10^4 безразмерных единиц времени при введенной нами нормировке.

Автор благодарен Л. Е. Конькову и М. Ю. Улейскому за помощь в подготовке рисунков. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00358а) и программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики».

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, В. П. Яковлев, *Механическое действие света на атомы*, Наука, Москва (1991) [A. P. Kazantsev, G. I. Surdutovich, and V. P. Yakovlev, *Mechanical Action of Light on Atoms*, Singapore, World Sci. (1990)].
2. V. Letokhov, *Laser Control of Atoms and Molecules*, Oxford Univ. Press, New York (2007).
3. F. Bardou, J. P. Bouchaud, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Lévy Statistics and Laser Cooling*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).
4. F. Bardou, J. P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 203 (1994).
5. O. Morsch and M. Oberthaler, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
6. А. П. Казанцев, *ЖЭТФ* **40**, 825 (1975).
7. P. E. Moskowitz, P. L. Gould, S. R. Atlas, and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 370 (1983); P. L. Gould, G. A. Ruff, and D. E. Pritchard, *ibid* **56**, 827 (1986); T. Sleator, T. Pfau, V. Balykin, O. Carnal, and J. Mlynek, *ibid* **68**, 1996 (1992).
8. С. В. Пранц, *Письма ЖЭТФ* **75**, 777 (2002).
9. С. В. Пранц, В. Ю. Аргонов, *ЖЭТФ* **123**, 946 (2003).
10. V. Yu. Argonov and S. V. Prants, *J. Russ. Laser Res.* **27**, 360 (2006).
11. V. Yu. Argonov and S. V. Prants, *Phys. Rev. A* **75**, 063428 (2007).
12. А. П. Казанцев, *УФН* **124**, 113 (1978).
13. R. J. Cook, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1788 (1978).