

АКУСТИЧЕСКАЯ САМОИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ ДЛЯ СДВИГОВЫХ ВОЛН В СИСТЕМЕ РЕЗОНАНСНЫХ И КВАЗИРЕЗОНАНСНЫХ ПЕРЕХОДОВ

С. В. Сазонов*

Российский научный центр Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 февраля 2009 г.

Теоретически исследовано явление акустической самоиндуцированной прозрачности для поперечных упругих волн в системе парамагнитных примесей, обладающих эффективным спином $3/2$ в присутствии внешнего магнитного поля. При распространении акустического импульса перпендикулярно магнитному полю его взаимодействие с парамагнитными ионами описывается системой уравнений типа Максвелла–Блоха с эффективным неоднородным уширением квантовых переходов, обусловленным неэквидистантностью их спектра из-за квадрупольного штарковского расщепления. Если несущая частота импульса настроена в резонанс с одним из задействованных переходов, а с другим находится в квазирезонансе, то в одномерном случае динамика импульса описывается полностью интегрируемым уравнением Конно–Камеямы–Сануки. Проведен физический анализ его солитонного решения и соответствующего ему поведения среды. При учете конечности поперечного размера импульса выявлены условия реализации его самофокусировки и самоканалирования. Последний режим характеризуется вытягиванием импульса в направлении распространения и приобретением им формы типа полого «снаряда» при его неизменном поперечном размере.

PACS: 43.25.+y, 43.25.Rq, 43.25.Ts

1. ВВЕДЕНИЕ

Акустическая самоиндуцированная прозрачность (АСИП), экспериментально обнаруженная и теоретически исследованная в первой половине 70-х годов прошлого столетия на резонансных парамагнитных примесях [1–3], явилась прямым аналогом соответствующего оптического эффекта самоиндуцированной прозрачности (СИП) [4, 5]. В работах [1, 3] проведены экспериментальные исследования явления АСИП для продольных акустических импульсов, распространявшихся соответственно в кристаллах MgO и LiNbO₃, которые в качестве примесей содержали парамагнитные центры с эффективными спинами $J = 1$. К этой группе относятся ионы Fe²⁺ и Ni²⁺. В работе [2] проведен аналогичный теоретический анализ для поперечных упругих волн, резонансно взаимодействующих с

эффективными спинами $J = 1/2$, представителями которых могут являться ионы Co²⁺ [6].

В работах [1–3] отмечается уменьшение скорости распространения акустического импульса в сравнении с линейной скоростью звука. При этом подчеркивается, что, в отличие от оптической СИП, где данное уменьшение достигает двух–трех порядков, при АСИП оно незначительно и составляет всего несколько процентов.

Наиболее сильное взаимодействие с колебаниями кристаллической решетки испытывают парамагнитные ионы с эффективным спином $J = 1$ [6]. С другой стороны, наиболее изученными парамагнитными центрами в смысле их взаимодействия с гиперзвуком являются ионы Cr³⁺, обладающие эффективным спином $J = 3/2$ [6]. Кроме того, в первом экспериментальном варианте фононного лазера были использованы именно эти ионы, внедренные в кристалл Al₂O₃ [7]. Попутно отметим, что идея фононного лазера была также высказана и обсуждалась в работах [8, 9].

*E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

Хорошо известно, что помимо парамагнитных ионов с акустическими импульсами вступают во взаимодействие спины атомных ядер [10, 11]. Многие ядра, эффективно взаимодействующие с колебаниями кристаллической решетки, обладают спином $3/2$. В качестве примеров могут быть приведены ядра Na^{23} , Cl^{35} , Br^{79} , Br^{81} [10]. Поэтому имеет смысл рассмотрение возможности реализации АСИП на системе ядерных спинов.

Исследование режимов АСИП в системе парамагнитных примесей с $J = 3/2$ представляет и глубоко теоретический интерес, так как может привести к обобщению соответствующих результатов, полученных для случаев $J = 1/2$ и $J = 1$. Эффективный спин $J = 3/2$ содержит больше квантовых переходов, чем спины $J = 1/2$ и $J = 1$. Из-за квадрупольного эффекта Штарка (за счет градиентов внутрикристаллического электрического поля), сопровождающего зеемановское расщепление при наложении внешнего магнитного поля \mathbf{B} , спектр энергетических уровней частиц со спином $J = 3/2$ неэквидистантен. Поэтому акустический импульс может взаимодействовать с рассматриваемыми квантовыми переходами как в резонансном, так и в квазирезонансном режимах. Подобная ситуация имеет место, например, при оптической СИП в смеси изотопов какого-либо химического элемента [12]. Следует отметить также, что квазирезонансное взаимодействие достаточно детально исследовано в оптике [13, 14], чего пока нельзя сказать об акустике.

Здесь же следует выделить такой немаловажный вопрос, как влияние поперечных возмущений на распространение импульсов. Из оптической СИП известно, что при точном резонансе в процессе распространения импульсов возможно формирование «оптических пульс», локализованных во всех направлениях [15]. Данная ситуация соответствует компенсации фокусирующего действия резонансных переходов явлением дифракции. В то же время импульсы испытывают самофокусировку, если их несущая частота превышает частоту резонансных переходов. В противном случае наблюдается дефокусировка [16, 17].

Влияние поперечных возмущений на режимы АСИП до сих пор не рассматривалось, поэтому соответствующие исследования приобретают актуальность. В этой связи эффективный спин $J = 3/2$ интересен тем, что могут возникнуть эффекты конкуренции между самофокусировкой и дефокусировкой в зависимости от знака отстройки частоты квазирезонансного перехода от несущей частоты импульса.

С примесными центрами, обладающими эффек-

тивными спинами $J = 3/2$ (в частности, с ионами трехвалентного хрома, внедренными в кристалл Al_2O_3 или MgO), наиболее эффективно взаимодействуют поперечные (сдвиговые) волны деформации [6]. Поэтому целью настоящей работы является анализ распространения поперечных акустических импульсов в системе резонансных и квазирезонансных переходов между квантовыми подуровнями эффективных спинов $J = 3/2$, включая учет влияния поперечных возмущений.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 на основе полуклассического подхода выводится самосогласованная система уравнений для поля сдвиговой деформации и элементов матрицы плотности эффективного спина парамагнитных ионов. Применение к этой системе метода медленно меняющихся амплитуд и фаз (ММАФ) сводит материальные и волновые уравнения к двухкомпонентной системе, формально совпадающей с оптической системой Максвелла–Блоха. При этом волновое уравнение расщепляется на систему уравнений для амплитуды и фазы акустического импульса. В разд. 3 выполняются процедуры исключения материальных переменных и задача, таким образом, сводится к решению нелинейной системы для амплитуды и фазы импульса. Здесь же проанализирован одномерный режим АСИП на основе точного солитонного решения данной системы. Раздел 4 посвящен анализу влияния поперечных возмущений, учитывающих конечный размер апертуры импульса. Выявлены режимы самофокусировки импульса и его самоканализования. В Заключении подведены основные итоги работы и намечены перспективные исследования в данном направлении.

2. ВОЛНОВЫЕ И МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть наносекундный акустический импульс распространяется в тетрагональном парамагнитном кристалле вдоль одной из его главных осей x перпендикулярно к внешнему магнитному полю (геометрия Фохта), направленному параллельно другой главной оси z . При такой геометрии распространения и приложения магнитного поля с парамагнитными ионами взаимодействуют все три упругие компоненты. Как показано в работе [18], если на входе в парамагнитный кристалл отсутствует компонента, поляризованная вдоль \mathbf{B} , то ее не будет и в толще кристалла, несмотря на нелинейность, обусловленную спин-фононным взаимодействием.

Продольная составляющая может породиться в кристалле за счет спин-фононной связи при условии близости скоростей продольного и поперечного звуков [18–26]. Однако чаще всего эти скорости значительно различаются. Поэтому в дальнейшем импульс будем считать сугубо поперечным и поляризованным вдоль акустической оси y , нормальной к осям x и z .

В этих условиях гамильтониан упругого поля имеет вид

$$H_a = \frac{1}{2} \int \left[\frac{p_y^2}{\rho_m} + \rho_m a_x^2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \rho_m a_y^2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \rho_m a_z^2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right] d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где a_x, a_z — линейные скорости поперечного звука вдоль акустических осей соответственно x и z , a_y — линейная скорость продольного звука вдоль акустической оси y , ρ_m — средняя плотность кристалла, u_y — компонента вектора смещения узлов кристаллической решетки вдоль оси y , p_y — соответствующая данному смещению компонента плотности импульса, интегрирование осуществляется по всему объему кристалла.

Распространяясь в кристалле, упругий импульс взаимодействует с примесными эффективными спинами за счет механизма Ван Флека [6, 27, 28]. Согласно данному механизму, акустическая волна, распространяясь в кристалле, вызывает в нем локальные деформации, которые модулируют градиенты внутрикристаллического электрического поля. Последние, в свою очередь, вызывают квадрупольные переходы между квантовыми зеемановскими подуровнями парамагнитных примесей. Заметим, что в тетрагональном кристалле имеются регулярные статические градиенты электрического поля, которые вызывают штарковские расщепления спектральных линий. Данное обстоятельство приводит к неэквидистантности спектра эффективного спина, помещенного в магнитное поле, что является принципиальным при нашем дальнейшем рассмотрении.

Гамильтониан эффективного спина в кристалле, взаимодействующего с полем упругого импульса за счет механизма Ван Флека, запишем в виде

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{J}_z - \frac{1}{2} \hbar \Lambda \hat{J}_z^2 + G_{\perp} \left(\hat{J}_x \hat{J}_y + \hat{J}_y \hat{J}_x \right) \varepsilon_{yx}, \quad (2)$$

где $\omega_0 = 2g\mu_B B/\hbar$ — частота зеемановского расщепления, μ_B — магнетон Бора, g — фактор Ланде, G_{\perp} — постоянная спин-фононного взаимодействия, связывающая сдвиговую составляющую упругого

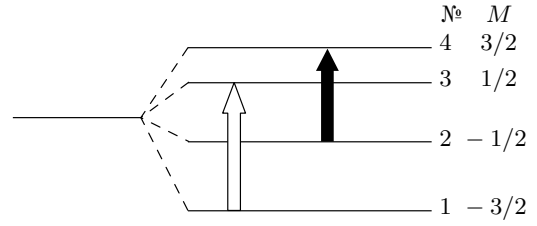


Рис. 1. Квантовые уровни эффективного спина $J = 3/2$ в присутствии зеемановского и квадрупольного штарковского расщеплений. Справа указаны порядковые номера уровней, начиная от основного, и проекции эффективного спина на направление магнитного поля. Стрелки соответствуют разрешенным переходам, возбуждаемым сдвиговой компонентой ε_{yx} при геометрии Фохта. Из-за штарковского расщепления частоты переходов $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ различны

поля с эффективными спинами, Λ — постоянная, учитывающая статическое квадрупольное расщепление в кристаллическом электрическом поле, $\varepsilon_{yx} = 0.5 \partial u_y / \partial x$ — динамическая деформация, создаваемая поперечным акустическим импульсом, $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ — спиновые матрицы, элементы которых определяются соотношениями [29]

$$\langle J, M | \hat{J}_x | J, M, \mp 1 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{(J \pm M)(J \mp M + 1)},$$

$$\langle J, M | \hat{J}_y | J, M, \mp 1 \rangle = \mp \frac{i}{2} \sqrt{(J \pm M)(J \mp M + 1)},$$

$$\langle J, M | \hat{J}_z | J, M' \rangle = M \delta_{MM'}.$$

Здесь M — проекция спина на ось z .

Для нашего случая, $J = 3/2$, в соответствии с нумерацией квантовых уровней, принятой на рис. 1, имеем

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\hat{J}_y = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Используя выражения (2), (3) и уравнение фон Неймана для матрицы плотности $\hat{\rho}$ [29] и предполагая, что до импульсного воздействия все недиагональные элементы $\hat{\rho}$ равны нулю, приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} &= \omega_{1,2} V_{1,2}, & \frac{\partial V_{1,2}}{\partial t} &= -\omega_{1,2} U_{1,2} + \Omega W_{1,2}, \\ \frac{\partial W_{1,2}}{\partial t} &= -\Omega V_{1,2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{i}{2}(\rho_{31} - \rho_{13}), & V_1 &= \frac{\rho_{31} + \rho_{13}}{2}, \\ W_1 &= \frac{\rho_{33} - \rho_{11}}{2}, & U_2 &= \frac{i}{2}(\rho_{42} - \rho_{24}), \\ V_2 &= \frac{\rho_{42} + \rho_{24}}{2}, & W_2 &= \frac{\rho_{44} - \rho_{22}}{2}, \\ \omega_{1,2} &= \omega_0 \pm \Lambda, & \Omega &= 2\sqrt{3} \frac{G_{\perp} \varepsilon_{yx}}{\hbar}. \end{aligned}$$

Установим физический смысл введенных динамических переменных. Очевидно, W_1 и W_2 — инверсии населенностей квантовых уровней на переходах соответственно $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \frac{1}{2} \langle \hat{J}_z \rangle + \frac{N_1 + N_3 - N_2 - N_4}{4}, \\ U_1 + U_2 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \langle \hat{J}_x \hat{J}_y + \hat{J}_y \hat{J}_x \rangle \sim Q_{xy}, \\ V_1 + V_2 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\langle \hat{J}_x^2 \rangle - \langle \hat{J}_y^2 \rangle \right) \sim Q_{xx} - Q_{yy}, \end{aligned} \quad (5)$$

где N_j — населенность j -го квантового уровня до импульсного воздействия на среду, Q_{xy} , Q_{xx} , Q_{yy} — компоненты квадрупольного момента эффективного спина. Здесь и ниже скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают квантовое среднее оператора: $\langle \hat{O} \rangle \equiv \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{O})$.

Таким образом, суммы инверсий населенностей связаны с магнитным дипольным моментом эффективного спина, а переменные $U_1 + U_2$ и $V_1 + V_2$ — с его электрическим квадрупольным моментом. Заметим, что речь идет именно о суммах обсуждаемых переменных, а не о каждой из них в отдельности.

Итак, в принятой геометрии система материальных уравнений распалась на две независимые подсистемы уравнений типа Блоха (4), описывающие соответственно переходы $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$ (рис. 1). Важно заметить, что частоты данных переходов отличаются друг от друга благодаря тому, что помимо зеемановского присутствует еще и штарковское квадрупольное расщепление.

В кубическом кристалле квадрупольное расщепление отсутствует. Однако его можно привнести искусственным путем, подвергнув кристалл одноосному статическому сжатию вдоль магнитного поля [23, 24, 26, 30].

В системе (4) мы не учли процессы релаксации, так как длительность τ_p импульса значительно короче соответствующих времен. В противном случае за счет энергетической (продольной) релаксации все четыре квантовых уровня оказались бы связанными между собой. Кроме того, в (4) мы пренебрегли неоднородным уширением квантовых переходов, так как спектральная ширина наносекундного импульса $\delta\omega \sim 1/\tau_p \sim 10^9 \text{ с}^{-1} \gg \delta\omega_0$, где $\delta\omega_0$ — характерная неоднородная ширина переходов.

Дополним материальную систему (4) волновыми уравнениями. Согласно полуклассическому подходу [19], имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} &= \frac{\delta}{\delta p_y} \left(H_a + \langle \hat{V} \rangle \right), \\ \frac{\partial p_y}{\partial t} &= -\frac{\delta}{\delta u_y} \left(H_a + \langle \hat{V} \rangle \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда, а также из формул (1)–(3) получим

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} - a_x^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{3nG_{\perp}^2}{\hbar\rho_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (U_1 + U_2) + a_y^2 \Delta_{\perp} \Omega, \quad (7)$$

где

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}, \quad z' = \frac{a_y}{a_z} z,$$

n — концентрация эффективных спинов.

Последним слагаемым в правой части (7) учитывается влияние поперечных эффектов на распространение импульса.

В (7) мы пренебрегли собственным затуханием гиперзвука, вызванным ангармонизмом колебаний узлов кристалла, рассеянием на дефектах и т. д. Данное затухание оказывается исчезающе малым в условиях температур жидкого гелия, при которых проводятся эксперименты по АСИП [1, 3, 27, 28].

Для дальнейшего анализа нелинейной системы (4), (6) упростим ее, используя приближение ММАФ. Представим поле импульса Ω и блоховские переменные U, V в виде

$$\Omega = 2F \cos(\omega t - kx - \varphi(\mathbf{r})), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} U_{1,2} &= u_{1,2} \cos(\omega t - kx - \varphi(\mathbf{r})) + \\ &\quad + v_{1,2} \sin(\omega t - kx - \varphi(\mathbf{r})), \\ V_{1,2} &= -u_{1,2} \sin(\omega t - kx - \varphi(\mathbf{r})) + \\ &\quad + v_{1,2} \cos(\omega t - kx - \varphi(\mathbf{r})), \end{aligned} \quad (9)$$

где ω, k — соответственно входные несущая частота и волновое число упругого импульса, $F, u_{1,2}, v_{1,2}$ — медленно меняющиеся амплитуды, являющиеся функциями координат и времени, φ — медленно

меняющаяся добавка к фазе (эйконал), зависящая от координат. Независимость φ от времени соответствует неизменности несущей частоты импульса при его распространении в кристалле. По крайней мере, это изменение можно считать относительно слабым [1].

Подставляя (8) и (9) в (7), учитывая неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(F, u, v) &\ll \omega(F, u, v), \\ \frac{\partial}{\partial x}(F, u, v, \varphi) &\ll k(F, u, v, \varphi) \end{aligned}$$

и полагая $k = \omega/a_x$, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{a_x} \frac{\partial F}{\partial t} &= b \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta) v(\Delta, t, \mathbf{r}) d\Delta - \\ &- \frac{a_y}{2\omega} [F(\Delta_{\perp}\varphi) + 2(\nabla_{\perp}F)(\nabla_{\perp}\varphi)], \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -b \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta) u(\Delta, t, \mathbf{r}) d\Delta + \\ &= \frac{a_y}{2\omega} [F(\nabla_{\perp}\varphi)^2 - \Delta_{\perp}F], \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$b = \frac{3nG_{\perp}^2\omega}{2\hbar\rho_m a^3},$$

$$g(\Delta) = \frac{1}{2} [\delta(\Delta - \Delta_1) + \delta(\Delta - \Delta_2)]$$

— эффективный контур неоднородного уширения, учитывающий различие в частотах переходов $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$, ∇_{\perp} — оператор градиента в плоскости yz' , Δ — отстройка несущей частоты импульса от резонансных частот переходов $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$, $\Delta_{1,2} = \omega_{1,2} - \omega$ — соответствующие отстройки от резонанса, $\delta(\zeta)$ — дельта-функция Дирака; при этом $u_{1,2} \equiv u(\Delta_{1,2}, t, \mathbf{r})$, $v_{1,2} \equiv v(\Delta_{1,2}, t, \mathbf{r})$, $W_{1,2} \equiv W(\Delta_{1,2}, t, \mathbf{r})$.

Подстановка (8), (9) в (4) и пренебрежение осциллирующими на частоте 2ω слагаемыми (что соответствует приближению вращающейся волны [31]) приводит к системе

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\Delta u + FW, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -Fv. \quad (12)$$

В формуле (12) опущены нижние индексы, соответствующие номерам квантовых переходов.

Таким образом, задача свелась к системе (10)–(12) типа Максвелла–Блоха для акустического импульса, взаимодействующего с эффективной

двухуровневой средой, обладающей неоднородным уширением квантового перехода из-за неэквидистантности энергетического спектра эффективного спина, вызванной квадрупольным эффектом Штарка.

Дальнейшее исследование основано на анализе нелинейной системы (10)–(12).

3. ИСКЛЮЧЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ОДНОМЕРНЫЕ СОЛИТОНЫ АСИП

В одномерном случае система (10)–(12) является интегрируемой [32]. Поэтому одномерный режим АСИП можно анализировать на основе солитонных решений данной системы. Нам, однако, будет интересно ситуация, когда импульс находится в точном резонансе с одним из переходов. Другой переход в такой ситуации назовем квазирезонансным. Это позволит ниже еще более упростить систему (10)–(12), исключив из нее материальные переменные. Снабдим переменные, отвечающие резонансному и квазирезонансному переходам, соответственно индексами r и q (в дальнейшем отдельно рассмотрим ситуации $r = 1, q = 2$ и $r = 2, q = 1$). Тогда $\Delta_r = 0$ и решение системы (12) для резонансного перехода имеет вид

$$u_r = 0, \quad W_r = W_{r\infty} \cos \theta, \quad v_r = W_{r\infty} \sin \theta, \quad (13)$$

где

$$\theta = \int_{-\infty}^t F dt',$$

$W_{r\infty}$ — начальная разность населенностей уровней резонансного перехода.

Типичные значения зеемановских расщеплений уровней парамагнитных ионов в резонансных акустических экспериментах составляют $\omega_0 \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ [1, 27, 28]. Взяв для квадрупольного расщепления $\Lambda \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$ и длительности импульса $\tau_p \sim 10^{-9} \text{ с}$, будем иметь для квазирезонансного перехода

$$(\Delta_q \tau_p)^2 \gg 1. \quad (14)$$

Данное неравенство называют условием квазирезонанса [13, 14].

Из первых двух уравнений для квазирезонансного перехода находим

$$u_q = \frac{F}{\Delta_q} W_q - \frac{1}{\Delta_q^2} \frac{\partial^2 u_q}{\partial t^2}.$$

В силу неравенства (14) второе слагаемое в правой части оказывается малым в сравнении с первым. Тогда в нулевом приближении по этому слагаемому

будем иметь $u_q = (F/\Delta_q)W_q$. Подставив это выражение во второе слагаемое правой части последнего уравнения и учитывая, что изменение разности населенностей уровней квазирезонансного перехода незначительно, получим в первом приближении

$$u_q = \frac{F}{\Delta_q} W_q - \frac{W_{q\infty}}{\Delta_q^3} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad (15)$$

где $W_{q\infty}$ — начальная разность населенностей уровней квазирезонансного перехода.

Такой подход фактически соответствует методу разложения по малому параметру $(\Delta_q \tau_p)^{-2}$, предложенному Крипом [33].

Из формул (12) и (15) найдем

$$\frac{\partial W_q}{\partial t} = -\frac{F}{\Delta_q} \frac{\partial u_q}{\partial t} \approx -\frac{W_{q\infty}}{\Delta_q^2} F \frac{\partial F}{\partial t}.$$

После интегрирования будем иметь

$$W_q = W_{q\infty} \left(1 - \frac{F^2}{2\Delta_q^2} \right). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получим

$$u_q = W_{q\infty} \frac{F}{\Delta_q} \left(1 - \frac{F^2}{2\Delta_q^2} \right) - \frac{W_{q\infty}}{\Delta_q^3} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \quad (17)$$

Отсюда и из первого уравнения (12) найдем

$$v_q = \frac{W_{q\infty}}{\Delta_q^2} \left(\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{3}{2\Delta_q^2} F^2 \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{\Delta_q^2} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} \right). \quad (18)$$

Подставляя (13), (17), (18) в (10), (11), придем к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{a_q} \frac{\partial F}{\partial t} &= -\alpha_r \sin \theta + \frac{3}{2} \beta_q F^2 \frac{\partial F}{\partial t} + \\ &+ \beta_q \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} - \frac{a_y}{2\omega} [F(\Delta_{\perp} \varphi) + 2(\nabla_{\perp} F)(\nabla_{\perp} \varphi)], \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \Delta_q^3 \beta_q \right) &= -\Delta_q \beta_q \left(\frac{F^2}{2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right) + \\ &+ \frac{a_y}{2\omega} [F(\nabla_{\perp} \varphi)^2 - \Delta_{\perp} F], \quad (20) \end{aligned}$$

где

$$\frac{1}{a_q} = \frac{1}{a_x} \left[1 + \eta_q \left(\frac{\omega}{\Delta_q} \right)^2 \right], \quad \alpha_r = \eta_r \frac{\omega^2}{a_x},$$

$$\beta_q = \eta_q \frac{\omega^2}{a_x \Delta_q^4}, \quad \eta_r = -\frac{3nG_{\perp}^2 W_{r\infty}}{4\hbar\omega \rho_m a_x^2},$$

$$\eta_q = -\frac{3nG_{\perp}^2 W_{q\infty}}{4\hbar\omega \rho_m a_x^2}.$$

Таким образом, исключение материальных переменных привело нас к связанной системе нелинейных уравнений для амплитуды и эйконала акустического импульса. В одномерном случае эта система эффективно расщепляется, а уравнение (19) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial \tau} = -\alpha_r \sin \theta + \frac{3}{2} \beta_q \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + \beta_q \frac{\partial^4 \theta}{\partial \tau^4}, \quad (21)$$

где $\tau = t - x/a_q$.

Уравнение (21) принадлежит к классу интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, что было доказано в работе Конно, Камеямы и Сануки (ККС) [34]. Непременным условием интегрируемости является то, что отношение коэффициента нелинейности, создаваемой квазирезонансными переходами, к соответствующему дисперсионному коэффициенту должно быть равно 3/2 [34]. Как видно из (21), данное условие выполнено. Важно, что для получения такого отношения здесь на параметры среды не накладывалось связывающих ограничений, как это делалось, например, в работах [34, 35] при рассмотрении задачи о движении дислокации в кристалле, а также в работах [36, 37] при исследовании распространения предельно коротких электромагнитных импульсов в двухкомпонентных двухуровневых средах.

Односолитонное решение уравнения (21) в лабораторной системе отсчета имеет вид

$$\theta = 4 \operatorname{arctg} \exp \frac{t - x/v_g}{\tau_p}, \quad (22)$$

$$F = \frac{2}{\tau_p} \operatorname{sch} \frac{t - x/v_g}{\tau_p}, \quad (23)$$

где групповая скорость v_g солитона связана с его длительностью τ_p соотношением

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{a_q} + \alpha_r \tau_p^2 - \frac{\beta_q}{\tau_p^2}. \quad (24)$$

Подставляя (23) в (19), получим после интегрирования в одномерном случае

$$\varphi = \Delta_q^3 \beta_q \left[1 - \left(\frac{1}{\Delta_q \tau_p} \right)^2 \right] x. \quad (25)$$

Здесь постоянная интегрирования положена равной нулю, что можно сделать простым сдвигом координаты x .

Легко видеть, что «площадь» солитона

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} F dt = 2\pi,$$

поэтому он является 2π -импульсом в стандартном для СИП и АСИП смысле [1, 2, 4, 5, 31, 32].

Из формул (22), (23), (13) и (16) находим выражения для разностей населенностей:

$$W_r = W_{r\infty} \left[1 - 2 \operatorname{sch}^2 \left(\frac{t - x/v_g}{\tau_p} \right) \right], \quad (26)$$

$$W_q = W_{q\infty} \left[1 - \frac{2}{(\Delta_q \tau_p)^2} \operatorname{sch}^2 \left(\frac{t - x/v_g}{\tau_p} \right) \right]. \quad (27)$$

Отсюда видно, что по мере распространения акустического солитона населенности уровней резонансных переходов подвергаются полной инверсии с последующим возвратом к исходному состоянию. В то же время возбуждение уровней квазирезонансных переходов, как следует из (27) и (14), весьма незначительно.

Из формул (13) и (22) имеем

$$v_r = -2W_{r\infty} \operatorname{th} \frac{t - x/v_g}{\tau_p} \operatorname{sch} \frac{t - x/v_g}{\tau_p}. \quad (28)$$

После подстановки (23) в (17) и (18) найдем

$$u_q \approx \frac{2W_{q\infty}}{\Delta_q \tau_p} \operatorname{sch} \frac{t - x/v_g}{\tau_p}, \quad (29)$$

$$v_q \approx -\frac{2W_{q\infty}}{(\Delta_q \tau_p)^2} \operatorname{th} \frac{t - x/v_g}{\tau_p} \operatorname{sch} \frac{t - x/v_g}{\tau_p}. \quad (30)$$

Из вида формул (5), (26)–(30) можно составить представление, как ведут себя при прохождении акустического солитона магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты эффективного спина.

Используя (8), (23) и (25), запишем выражение для солитона АСИП в виде

$$\Omega = \Omega_m \operatorname{sch} \frac{t - x/v_g}{\tau_p} \cos [\omega(t - x/v_{ph})], \quad (31)$$

где $\Omega_m = 4/\tau_p$ — амплитуда импульса, имеющая смысл пикового значения частоты Раби, а фазовая скорость v_{ph} определяется соотношением

$$\frac{1}{v_{ph}} = \frac{1}{a_x} \left\{ 1 + \eta_q \frac{\omega}{\Delta_q} \left[1 - \left(\frac{1}{\Delta_q \tau_p} \right)^2 \right] \right\}. \quad (32)$$

Слабая зависимость фазовой скорости от длительности импульса, как будет видно из следующего раздела, существенным образом влияет на его поперечную динамику.

Проведем некоторые численные оценки. Вначале оценим влияние на скорость импульса квазирезонансных и резонансных переходов.

Будем считать, что до импульсного воздействия кристалл находился в термодинамически равновесном состоянии. Пренебрегая квадрупольным расщеплением (здесь оно не столь существенно) и используя принципы Больцмановской статистики, получим

$$W_{1\infty} = -\frac{1}{2} e^\chi \frac{\operatorname{sh} \chi}{\operatorname{ch}(2\chi)}, \quad W_{2\infty} = -\frac{1}{2} e^{-\chi} \frac{\operatorname{sh} \chi}{\operatorname{ch}(2\chi)}, \quad (33)$$

где $\chi = \hbar\omega_0/4k_B T$, T — абсолютная температура, k_B — постоянная Больцмана.

Температура образца не должна быть слишком низкой, чтобы равновесные населенности первого и второго квантовых уровней эффективного спина были отличны от нуля (рис. 1). Именно в этом случае с импульсом взаимодействуют как резонансный, так и квазирезонансный переходы. В то же время температура не должна быть слишком высокой, чтобы разности населенностей были достаточно заметны для осуществления эффективного взаимодействия с акустическим импульсом (см. (33)). Взяв $T = 4$ К, $\omega_0 = 2 \cdot 10^{11}$ с $^{-1}$, будем иметь $W_{1\infty} = -5.14 \cdot 10^{-2}$, $W_{2\infty} = -4.25 \cdot 10^{-2}$. Полагая, кроме того, $r = 1$, $q = 2$, $n \sim 10^{19}$ см $^{-3}$, $G_\perp \sim 10^{-14}$ эрг [6, 27, 28], $a_x \approx 3 \cdot 10^5$ см/с, $\rho_m \approx 3$ г/см 3 , $\omega = 2 \cdot 10^{11}$ с $^{-1}$, $\Delta_q = 2\Lambda \sim 10^{10}$ с $^{-1}$, найдем, что $\eta_q \sim 10^{-4}$, $\eta_q(\omega/\Delta_q)^2 \sim 10^{-2}$. Таким образом, квазирезонансные переходы перенормируют линейную скорость звука, уменьшая ее на единицы процентов. Роль же последнего, нелинейного, слагаемого в соотношении (24) еще на два порядка ниже. Теперь оценим вклад резонансных переходов, определяемый вторым слагаемым в правой части (24). При приведенных выше параметрах и длительности импульса $\tau_p \sim 10^{-9}$ с имеем $a_q \alpha_r \tau_p^2 \sim 0.1$. Как видно, резонансные переходы способны замедлить скорость распространения акустического импульса на десятки процентов. Из формулы (31) и определения Ω следует, что выражение для амплитудного значения $\varepsilon_{yx}^{(m)}$ относительной деформации, создаваемой акустическим 2π -импульсом, имеет вид

$$\varepsilon_{yx}^{(m)} = \frac{4\hbar}{2\sqrt{3}G_\perp \tau_p} \sim \frac{\hbar}{G_\perp \tau_p}.$$

При приведенных выше параметрах находим $\varepsilon_{yx}^{(m)} \sim 10^{-4}$, что соответствует пиковой интенсивности импульса

$$I_m \approx \frac{1}{2} \rho_m a_x^3 \varepsilon_{yx}^{(m)2} \sim 10^2 \text{ Вт/см}^2.$$

По причине того, что ядерный магнетон Бора на три–четыре порядка меньше электронного, зема-

новские расщепления у ядер на столько же порядков ниже. Поэтому равновесные разности населенностей у атомных ядер при температурах жидкого гелия очень малы, что является причиной очень малого коэффициента поглощения при ядерном акустическом резонансе: порядка 10^{-7} см $^{-1}$ [10]. Для столь же эффективного взаимодействия ядерных спинов с акустическим полем, как и электронных, образец должен быть охлажден до сверхнизких температур, исчисляемых милликельвинами. С другой стороны, увеличить разности населенностей W_1 и W_2 можно, не прибегая к столь глубоким охлаждениям кристалла. Очень эффективным здесь может быть лазерно-оптический метод [38]. С помощью интенсивного лазерного излучения можно значительно уменьшить населенности уровней 3 и 4 (рис. 1), за счет резонансного увеличения населенностей лежащих выше уровней. Тогда становится принципиально возможной реализация режима ядерной АСИП. Полагая для атомных ядер $\omega_{1,2} \sim 10^8$ с $^{-1}$ [10, 11], найдем значение характерной резонансной длины волны $\lambda = 2\pi a_x / \omega_{1,2} \sim 10^{-2}$ см. Отсюда заключаем, что характерный продольный размер квазимонохроматического импульса в направлении его распространения будет составлять несколько миллиметров.

4. УЧЕТ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В экспериментальных условиях акустические импульсы имеют конечные поперечные размеры. Поэтому особую значимость приобретает исследование влияния данного фактора на распространение импульсов в режиме АСИП.

Вначале вернемся к соотношению (32). Выражение в фигурных скобках имеет смысл акустического показателя преломления. Из этого выражения и из (31) видно, что данный показатель зависит от пиковой интенсивности импульса $I_m \sim \Omega_m^2 \sim 1/\tau_p^2$ и от знака квазирезонансной отстройки Δ_q . Согласно принципу Ферма, волновые нормали устремляются в сторону увеличения показателя преломления. Пусть до импульсного воздействия парамагнитные ионы находились в состоянии термодинамического равновесия (см. (33)). Тогда $\eta_r, \eta_q > 0$. При положительной отстройке (несущая частота импульса ниже частоты квазирезонансного перехода) в центре поперечного сечения импульса, где его интенсивность максимальна, показатель преломления меньше, чем на периферийных областях. Следовательно, в этом случае волновые нормали устремляются к периферии, что приводит к дефокусировке импульса. Если

же при прочих равных условиях несущая частота импульса выше частоты квазирезонансного перехода, должна наблюдаться самофокусировка. Аналогичные выводы справедливы для импульсов оптической СИП [17] в присутствии только квазирезонансных переходов. Известно, что резонансные переходы способствуют самофокусировке 2π -импульса СИП [16]. Поэтому при $\Delta_q > 0$ возможны эффекты конкуренции между фокусирующим действием резонансных переходов и дефокусирующим — квазирезонансных.

Для количественного учета влияния поперечных возмущений на распространение солитона АСИП будем считать, что его эйконал φ и длительность $\tau_p = 1/\rho$ теперь являются функциями всех трех координат. Вначале заметим, что аргумент одномерного солитона (23) при учете (24) и (25) можно представить в виде

$$\frac{t - x/v_q}{\tau_p} = \rho [\tau - D(\rho)\varphi], \quad (34)$$

где

$$D(\rho) = \frac{\alpha_r - \beta_q \rho^4}{\Delta_q \beta_q \rho^2 (\Delta_q^2 - \rho^2)}, \quad (35)$$

а «локальное» время τ определено так же, как в уравнении (21).

Следуя адиабатическому подходу к учету поперечных возмущений [39, 40], будем считать далее, что функциональные связи, выражаемые формулами (34) и (35), остаются справедливыми и для неодномерных солитонов. Такое предположение верно, если поперечный размер солитона значительно больше его продольного размера. В соответствии с этим предположением решение системы (19), (20) для F будем искать в виде (23) с учетом замены (34), где теперь $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$. Поскольку в одномерном случае $\rho = \text{const}$, а $\varphi \sim x$, при учете поперечных возмущений переменная ρ считается «медленной» функцией координат, а φ — «быстрой» [40]. В соответствии с этим $\nabla_{\perp}(D(\rho)\varphi) \approx D(\rho)\nabla_{\perp}\varphi$. Зависимость от τ можно исключить в среднем, проведя домножение (19), (20) на F с последующим интегрированием по τ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. В результате придем к следующей системе «гидродинамического» типа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \nabla_{\perp}(\rho \nabla_{\perp} \Phi) = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left[1 + \frac{1}{3} \rho^2 R^2(\rho) \right] \frac{(\nabla_{\perp} \Phi)^2}{2} - \frac{a_y}{\omega} \Delta_q \beta_q (\Delta_q^2 - \rho^2) = \\ = \left(\frac{a_y}{2\omega} \right)^2 \left[\frac{\Delta_{\perp} \rho}{\rho} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi^2}{6} + 2 \right) \frac{(\nabla_{\perp} \rho)^2}{\rho^2} \right], \quad (37) \end{aligned}$$

где $\Phi = a_y \varphi / \omega$.

В левой части (37) поперечные возмущения учтены в приближении геометрической акустики, что соответствует нелинейной рефракции, правой же частью учитываются эффекты дифракции [41].

Прежде чем приступить к общему анализу системы (36), (37), заметим, что в одномерном случае ($\nabla_{\perp} = \Delta_{\perp} = 0$) из нее следуют решения

$$\rho = 1/\tau_p = \text{const},$$

$$\varphi = \frac{\omega}{a_y} \Phi = \Delta_q^3 \beta_q \left[1 - \left(\frac{1}{\Delta_q \tau_p} \right)^2 \right] x,$$

в точности совпадающие с таковыми для одномерного солитона. Данное обстоятельство является важным аргументом в пользу предложенного подхода.

Следуя работе [42], будем искать решение системы (36), (37) для ρ в автономной локализованной форме

$$\rho = \frac{1}{\tau_p} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \exp \left(-\frac{r^2}{R^2} \right), \quad (38)$$

где τ_p и $2R_0$ — соответственно входные длительность импульса в центре поперечного сечения и его апертура, $2R = 2R(x)$ — апертура импульса в среде, r — радиальная компонента цилиндрической системы координат в плоскости yz' .

Выражение для Φ представим в следующем виде [42]:

$$\Phi = f_1(x) + \frac{1}{2} f_2(x) r^2, \quad (39)$$

где f_1 и f_2 — искомые функции координаты x .

Первое слагаемое в (39) соответствует одномерному приближению, а второе учитывает поперечную структуру волновых фронтов (их искривление).

Подставляя (38) и (39) в (36), получим

$$f_2 = \frac{R'}{R}. \quad (40)$$

Здесь и ниже штрих обозначает производную по x .

После подстановки (38) и (39) в (37), проведения разложения по степеням $\kappa = (r/R)^2$ (приосевое приближение [42–44]) и приравнивания в правой и левой частях выражений коэффициенты при нулевой и первой степенях κ , получим с использованием (40)

$$f_1' = \frac{a_y}{\omega} \Delta_q \beta_q \left(\Delta_q^2 - \frac{R_0^4}{\tau_p^2 R^4} \right) - \left(\frac{a_y}{\omega} \right)^2 \frac{1}{R^2}, \quad (41)$$

$$R'' = -\frac{a}{R^3} + \frac{q}{R^5} - \gamma R'^2 R^3, \quad (42)$$

где

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \left(\frac{a_y}{\omega} \right)^2, \quad q = \frac{\Delta_q \beta_q a_y R_0^4}{\omega \tau_p^2},$$

$$\gamma = \frac{\alpha_r \tau_p^2}{3 \Delta_q^6 \beta_q^2 R_0^4}.$$

При получении выражения (42) мы положили, учитывая (14), что

$$D(\rho) \approx \frac{\alpha_r}{\Delta_q^3 \beta_q \rho^2}.$$

Это обстоятельство не сказывается принципиально на дальнейших выводах.

Первое слагаемое в правой части (42) соответствует эффектам дифракции, второе и третье — нелинейной рефракции, создаваемой соответственно квазирезонансными и резонансными переходами.

В отсутствие квазирезонансных переходов ($q = 0$) из (42) следует известный из теории оптической СИП вывод [16] о самофокусировке резонансного импульса на стадии применимости законов нелинейной «геометрической оптики» (в нашем случае — на стадии нелинейной «геометрической акустики»). Такой же вывод справедлив и в присутствии равновесных квазирезонансных переходов при условии, что несущая частота импульса превышает частоту квазирезонансных переходов ($q < 0$). Это обстоятельство подчеркивалось выше при анализе зависимости акустического показателя преломления от интенсивности импульса.

Прежде чем изучать конкретные ситуации, связанные с распространением акустического импульса в рассматриваемой нами системе эффективных спинов $J = 3/2$, заметим, что уравнение (42) обладает первым интегралом вида

$$\frac{R'^2}{2} + U(R) = 0, \quad (43)$$

где

$$U(R) = -\frac{R_0'^2}{2} \exp \left[-\frac{\gamma}{2} (R^4 - R_0^4) \right] + \int_{R_0}^R \exp \left[-\frac{\gamma}{2} (R^4 - \xi^4) \right] \left(\frac{a}{\xi^3} - \frac{q}{\xi^5} \right) d\xi. \quad (44)$$

Уравнение (43) формально совпадает с интегралом энергии для частицы единичной массы, движущейся в поле с потенциальной энергией $U(R)$. Тогда условия устойчивой взаимной компенсации само- и дефокусировки примут вид

$$(\partial U / \partial R)_{R=R_c} = 0, \quad (\partial^2 U / \partial R^2)_{R=R_c} > 0,$$

где R_c — поперечный радиус импульса, соответствующий режиму самоканализирования. Принимая во

внимание соотношение (44), запишем данные условия соответственно в виде

$$2\gamma \int_{R_0}^{R_c} \exp\left(\frac{\gamma}{2}\xi^4\right) \left(\frac{a}{\xi^3} - \frac{q}{\xi^5}\right) d\xi = \\ = \gamma R_0'^2 \exp\left(\frac{\gamma}{2}R_0^4\right) + \exp\left(\frac{\gamma}{2}R_c^4\right) \left(\frac{a}{R_c^6} - \frac{q}{R_c^8}\right), \quad (45)$$

$$R_c^2 < \frac{4q}{3a}. \quad (46)$$

Поскольку $q \sim R_0^4$, величина R_c зависит от входной апертуры импульса.

В общем случае анализ системы (45), (46) весьма сложен. К тому же, если на входе апертура импульса отлична от $2R_c$, но удовлетворяет условию (46), то по мере распространения в среде величина его апертуры будет колебаться вокруг значения $2R_c$. Вместе с ней будут колебаться значения длительности импульса, его амплитуды и скорости. Чтобы рассмотреть режим самоканалирования без данных колебаний, мы ограничимся случаем, когда уже на входе $R_c = R_0$. При этом формула (45) переписется в виде

$$R_0^2 = \frac{q}{a + \gamma R_0^6 R_0'^2} \leq \frac{q}{a}. \quad (47)$$

Отсюда и из (46) видно, что при $q > 0$ (несущая частота импульса ниже частоты квазирезонансного перехода) возможна взаимная компенсация фокусирующего действия резонансных переходов и дефокусирующего — квазирезонансных. При этом ненулевая кривизна волновых фронтов импульса на входе, т. е. $R_0' \neq 0$ (см. (39) и (40)), только усиливает согласие между (46) и (47).

Теоретическое рассмотрение значительно упрощается, если волновые фронты на входе в парамагнитный кристалл являются плоскими. Тогда $R_0' = 0$ и из (47) находим в явном виде выражение для значения R_0 , при котором распространение будет происходить в режиме самоканалирования:

$$R_0 = 0.57 \left(\frac{\Delta q}{\omega}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{a_x a_y}{\eta_q}} \tau_p. \quad (48)$$

Взяв принятые выше значения параметров и полагая $a_y \sim a_x$, найдем $R_0 \sim 10l$, где $l \approx a_x \tau_p$ — продольный размер импульса. При $\tau_p \sim 10^{-9}$ с имеем $R_0 \sim 10^{-2}$ см.

Из формул (34), (35), (39) и (41) получим выражения для групповой и фазовой скоростей импульса при учете его конечного поперечного размера:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{a_q} + \frac{\alpha_r/\rho^2 - \beta_q \rho^2}{1 - \rho^2/\Delta_q^2} \left[1 - \left(\frac{1}{\Delta \tau_p}\right)^2 - \delta_g\right], \quad (49)$$

$$\frac{1}{v_{ph}} = \frac{1}{a_x} \left\{1 + \eta_q \frac{\omega}{\Delta_q} \left[1 - \left(\frac{1}{\Delta_p \tau_p}\right)^2\right]\right\} - \frac{a_y}{\omega^2 R_0^2}, \quad (50)$$

где параметр

$$\delta_g = \frac{\Delta_q a_x a_y}{\eta_q \omega^3 R_0^2}$$

определяет поправку к групповой скорости, обусловленную конечной апертурой импульса. Оценка показывает, что при приведенных выше параметрах относительный вклад данной поправки может достигать нескольких процентов. Для фазовой скорости аналогичная поправка определяется последним слагаемым в правой части (50). Ее относительный вклад невелик и составляет порядка 10^{-6} . При $R_0 \rightarrow \infty$ (49) и (50), как и следовало ожидать, переходят соответственно в выражения (24) и (32) для одномерного солитона.

Из формулы (50) видно, что фазовая скорость импульса не зависит от поперечных координат. Следовательно, поверхности постоянной фазы 2π -импульса при его самоканалировании в среде остаются плоскими. Что касается групповой скорости, то она уменьшается от центра поперечного сечения импульса к его периферии вместе с уменьшением ρ . Последний параметр в данном случае определяется выражением (38) при замене в нем $R \rightarrow R_0$, т. е. в режиме самоканалирования он зависит только от поперечных координат и не зависит от x : $\rho = \tau_p^{-1} \exp(-r^2/R_0^2)$. Как следствие, по мере распространения импульса центральные части его поперечного сечения выгибаются вперед, обгоняя периферийные участки (рис. 2). При этом апертура импульса остается постоянной, а форма изменяется, приобретая вид все более вытянутого полого «снаряда». Оценим дистанцию x пройденного импульсом пути, на котором такая деформация его поперечного профиля станет заметной. Очевидно, для этого центральная часть импульса должна опередить его периферийные участки на расстояние порядка R_0 . Следовательно, x найдется из условия

$$(v_g(0) - v_g(R_0)) t \approx \frac{(v_g(0) - v_g(R_0)) x}{v_g(0)} \sim R_0.$$

Здесь $v_g(0)$ и $v_g(R_0)$ — соответственно групповые скорости центральной части импульса ($r = 0$) и его периферии при $r = R_0$. Учитывая соотношение (49) и приведенные выше оценки, запишем

$$v_g \approx \frac{a_q}{1 + a_q \alpha_r \rho^{-2}} \approx a_q (1 - a_q \alpha_r \rho^{-2}).$$

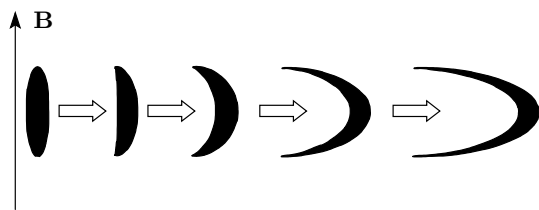


Рис. 2. Схематическое изображение процесса самоканалирования, сопровождаемого формированием полого «акустического снаряда». Светлыми стрелками указано направление распространения импульса, а тонкой черной — направление магнитного поля. Края черных фигур соответствуют изолинии определенной фиксированной интенсивности импульса в его центральном сечении плоскостью xz на разных дистанциях распространения

Тогда будем иметь

$$x \sim a_q \alpha_r \tau_p^2 (I_0/I - 1) R_0,$$

где $I_0 \sim \tau_p^{-2}$ и $I \sim \rho^2$ — пиковые интенсивности импульса соответственно в его центре и на периферии. Взяв $I_0/I \sim 10$ и $a_q \alpha_r \tau_p^2 \sim 0.1$ (см. выше), найдем $x \sim R_0 \sim 10l$. Искривление поперечного профиля акустического импульса происходит достаточно быстро, поэтому самоканалирование полого «акустического снаряда» может быть зарегистрировано в экспериментальных условиях.

Следует отличать рассмотренное здесь самоканалирование от хорошо известного в оптической СИП явления «обдиранья» импульса («pulse stripping») [5, 45]. В последнем случае временная «площадь» периферийных участков импульса меньше, чем π . Поэтому, согласно «теореме площадей» [31, 32], они постепенно отстают от центральных участков импульса и поглощаются в среде. В нашем же случае «площадь» как центральных, так и периферийных участков равна 2π . Это обусловлено тем, что, хотя периферийные участки меньше по амплитуде, но зато больше по длительности. Поэтому периферийные участки также возбуждают среду, переводя уровни резонансных переходов в инвертированное состояние и затем возвращая в основное. Как результат, периферийные участки, хотя и отстают от центральных, не поглощаются средой.

Тот факт, что режим «pulse stripping» пока не наблюдался в экспериментах по АСИП, объясняется тем, что апертуры акустических импульсов были достаточно велики, составляя несколько миллиметров [1, 3].

Режим рассмотренного здесь акустического самоканалирования возможен именно в системе эффективных спинов $3/2$, а также при обязательном присутствии квадрупольного Штарковского расщепления. В противном случае (например, для спинов $1/2$ и 1) нет возможности свести задачу к взаимодействию импульса с эффективной двухуровневой средой, состоящей из независимых резонансных и квазирезонансных спин-фононных переходов. Для спина $1/2$ его проекции на направление магнитного поля $M = \pm 1/2$. Квадрупольный эффект Штарка здесь не приводит к изменению частоты перехода, так как оба уровня смещаются на одну и ту же величину. Такая же ситуация и в случае спина 1 , так как для уровней резонансного перехода $1 \leftrightarrow 3$ имеем $M \pm 1$. Переходы же $1 \leftrightarrow 2$ и $2 \leftrightarrow 3$ формируют конфигурацию типа «каскад» и не могут рассматриваться как независимые.

В качестве конкретных примеров рассмотрим поперечную динамику импульса АСИП в кристаллах, содержащих в качестве примесей ионы трехвалентных хрома и ванадия. Для ионов хрома имеем $\Lambda > 0$ или $\omega_1 > \omega_2$ [6]. Пусть акустический импульс настроен на резонанс с переходом $1 \leftrightarrow 3$. Тогда $\Delta_q = \omega_2 - \omega = \omega_2 - \omega_1 < 0$. Как следует из изложенного выше, в этом случае реализуется самофокусировка импульса. Если же частота импульса совпадает с частотой перехода $2 \leftrightarrow 4$, то реализуется описанный выше режим самоканалирования. Для ионов ванадия $\omega_1 < \omega_2$ [6]. В данном случае самоканалирование возможно при совпадении частоты импульса с частотой перехода $1 \leftrightarrow 3$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе проведен теоретический анализ режимов АСИП для волн сдвиговой деформации в системе парамагнитных примесей с эффективным спином $3/2$. То обстоятельство, что при геометрии Фохта задача сводится к возбуждению полем импульса системы резонансных и квазирезонансных квантовых переходов, позволило описать отклик среды уравнениями блоховского типа.

Исключение из нелинейной системы (10)–(12) материальных динамических переменных привело в одномерном случае к интегрируемому уравнению ККС (21). Здесь очень важно, что отношение коэффициента при втором слагаемом в правой части (21) к коэффициенту при третьем слагаемом равно $3/2$. Только в этом случае уравнение (21) обладает свойством полной интегрируемости [34]. Заметим, что в

нашем случае это отношение появляется совершенно естественным образом, без каких-либо дополнительных предположений, связывающих параметры среды. Таким образом, можно сказать, что в настоящей работе представлена естественная физическая реализация уравнения ККС, в дополнение к таковой для оптической СИП в смеси изотопов [12].

Использованный здесь подход позволил достаточно просто учесть влияние поперечных возмущений на распространение солитона АСИП и при этом детально рассмотреть особенности режима самоканалирования. Как видно из настоящей работы, при наличии отличных от нуля отстроек от резонанса эффекты конкуренции между самофокусировкой и дефокусировкой приводят к устойчивому самоканалированию все более вытягивающегося вперед импульса типа полого «акустического снаряда». Для формирования такого «снаряда» необходимо вовлечение во взаимодействие с импульсом обоих переходов — резонансного и квазирезонансного. Важно, чтобы частота квазирезонансного перехода была выше несущей частоты импульса.

В дальнейшем поперечную динамику импульса имеет смысл исследовать в более общем случае, основываясь на системе (10)–(12). Здесь особый интерес представляет ситуация, когда несущая частота импульса лежит между частотами ω_1 и ω_2 . Тогда знаки отстроек Δ_1 и Δ_2 различны. В этом случае один из переходов способствует самофокусировке импульса, другой — дефокусировке. Как следствие, возникают эффекты конкуренции. Данная ситуация заслуживает отдельного внимания при исследовании влияния поперечных эффектов на распространение солитона АСИП, основываясь на системе (10)–(12).

Следующим шагом может быть рассмотрение АСИП при отказе от приближения ММАФ. Вместо него можно использовать приближение медленно меняющегося профиля (ММП) (или квазиоднонаправленного распространения) [46], что так же, как и при ММАФ, приведет к понижению порядка волнового уравнения (7) относительно производных по x и t . В случае ММП не вводится понятия огибающей, поэтому такой подход позволит учесть влияние поперечных возмущений в режиме АСИП при условиях, когда импульс содержит произвольно малое (вплоть до одного) число упругих колебаний.

В настоящей работе рассмотрен случай взаимодействия с эффективными спинами $3/2$ только одной составляющей акустического поля. Представляет интерес рассмотрение более сложных ситуаций, когда в такое взаимодействие вовлекаются две или все три составляющие, как это

проделано, например, в работах [18–26] для спинов $1/2$ и 1 . С одной стороны, это позволит в какой-то мере обобщить результаты данных работ. С другой же стороны, эти исследования могут выявить новые специфические особенности нелинейных режимов распространения акустических импульсов в твердом теле при их взаимодействии с парамагнитными примесями электронной или ядерной природы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-02-00503а).

ЛИТЕРАТУРА

1. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
2. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2270 (1971).
3. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974).
4. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).
5. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. **183**, 457 (1969).
6. Э. Такер, в кн. *Физическая акустика*, под ред. У. Мэзона, Мир, Москва (1969), т. 4, часть А, гл. 2.
7. E. B. Tucker, Phys. Rev. Lett. **6**, 183 (1961).
8. C. Kittel, Phys. Rev. Lett. **6**, 449 (1961).
9. У. Х. Копвиллем, В. Д. Корепанов, ФТТ **3**, 2014 (1961).
10. Д. Болеф, в кн. *Физическая акустика*, под ред. У. Мэзона, Мир, Москва (1969), т. 4, часть А, гл. 3.
11. А. Р. Кессель, *Ядерный акустический резонанс*, Наука, Москва (1969).
12. С. В. Сазонов, Изв. РАН, сер. физ. **71**, 121 (2007).
13. А. И. Маймистов, КЭ **22**, 936 (1995).
14. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, Опт. и спектр. **88**, 428 (2000).
15. M. Blaauboer, B. A. Malomed, and G. Kurizki, Phys. Rev. Lett. **84**, 1906 (2000).
16. F. R. Mattar and M. C. Newstein, IEEE QE-13, 507 (1977).
17. R. E. Slusher and H. H. Gibbs, Phys. Rev. Lett. **24**, 638 (1970).
18. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, Phys. Rev. E **73**, 056614 (2006).

19. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001).
20. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **123**, 1239 (2003).
21. А. А. Zabolotskii, Physica D **185**, 1239 (2003).
22. А. А. Zabolotskii, Phys. Rev. E **67**, 066606 (2003).
23. А. V. Gulakov and S. V. Sazonov, J. Phys.: Condens. Matter **16**, 1733 (2004).
24. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ЖЭТФ **130**, 646 (2006).
25. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **132**, 493 (2007).
26. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ТМФ **151**, 228 (2007).
27. Дж. Такер, Р. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, Москва (1975).
28. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловьев, Б. М. Хабибулин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, Москва (1977).
29. В. В. Балашов, В. К. Долинов, *Курс квантовой механики*, Изд-во МГУ, Москва (1982).
30. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **76**, 176 (2002).
31. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
32. Дж. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, Москва (1983).
33. М. D. Crisp, Phys. Rev. A **8**, 2128 (1973).
34. K. Konno, W. Kameyama, and J. H. Sanuki, J. Phys. Soc. Jpn. **37**, 171 (1974).
35. A. M. Kosevich and A. S. Kovalev, Sol. St. Comm. **12**, 763 (1973).
36. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **119**, 419 (2001).
37. H. Leblond, S. V. Sazonov, I. V. Mel'nikov, D. Mihalache, and F. Sanchez, Phys. Rev. E **74**, 066608 (2006).
38. Е. Б. Александров, В. С. Запасский, *Лазерная магнитная спектроскопия*, Наука, Москва (1986).
39. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, ЖЭТФ **92**, 1612 (1987).
40. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991).
41. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **130**, 145 (2006).
42. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Физматлит, Москва (2001).
43. А. С. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ **51**, 290 (1966).
44. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
45. И. А. Полуэктов, Ю. М. Попов, В. С. Ройтберг, УФН **114**, 97 (1974).
46. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, J. Phys. A.: Math. Nucl. Gen. **6**, 1337 (1973).