

ДИСКРЕТНОЕ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИЕ КВАНТОВЫХ СКАЧКОВ НА V-КОНФИГУРАЦИИ АТОМНЫХ УРОВНЕЙ

*Г. П. Мирошниченко**

*Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 27 февраля 2009 г.

Развита теория процесса дискретного фотодетектирования квантовых скачков на V-конфигурации атомных уровней. Трехуровневый атом-источник помещен в резонатор, накачиваемый полем резонансной флуоресценции. Резонатор настроен в точный резонанс с атомным переходом. Состояние моды резонатора тестируется с помощью пролетающего через резонатор потока невозбужденных (на входе) атомов-зондов. Энергетические состояния вылетающих зондов определяются с помощью ионизационных камер, которые предполагаются идеальными. Эта апостериорная статистическая информация косвенным образом связана с числовыми характеристиками измеряемой квантовой системы, состоящей из атома-источника и моды резонатора. В работе найдены условия «настройки» дискретного фотодетектора, т. е. правила выбора параметров и длительностей взаимодействия моды резонатора с зондом и источником, напряженностей накачивающего и контролирующего полей, необходимых для наблюдения квантовых скачков из «яркого» состояния в «темное» и обратно. Исследована модель двух состояний, описывающая динамику квантового скачка. Получены формулы для наблюдаемых характеристик квантовых скачков: для средних длительностей пребывания квантовой системы в квазистационарных состояниях (длительностей яркого и темного периодов), вероятностей квантовых скачков, средних уровней возбуждения квантованной моды резонатора и др.

PACS: 03.65.Ta, 42.50.Xa

1. ВВЕДЕНИЕ

Детальная информация о свойствах индивидуальной квантовомеханической системы может быть получена в процессе последовательных косвенных квантовых измерений [1]. Для проведения непрямого (косвенного) измерения в квантовой системе используется еще одна квантовая система — зонд, или пойнтер. Зонд приводится во взаимодействие с изучаемой квантовой системой, и состояние зонда измеряется классическим прибором, имеющим сплошной спектр состояний. Если в процессе измерения зонд разрушается, то при следующем измерении используется другой зонд. Метод последовательных косвенных квантовых измерений широко применяется в эксперименте. В работе [2] изучаются состояния электрона в цилиндрической ловушке Пеннинга (уровни Ландау циклотрона). Здесь в качестве зонда используется мода колебательного движения

электрона вдоль магнитного поля. В работе [3] измеряемой системой является квантовая мода микроволнового резонатора. В качестве зондов используются атомы, пролетающие через резонатор. В работах [4–10] изучаются квантовые скачки на метастабильное атомное состояние, прерывающие процесс резонансной флуоресценции на разрешенном переходе. Этот эффект (shelving effect) впервые был рассмотрен в работе [11]. В работах [4–10] исследуемой квантовой системой является электромагнитное поле резонансной флуоресценции и изолированный от внешней среды в ловушке отдельный атом — источник поля. В качестве зонда используются атомы детектора фотонов.

В процессе квантовых измерений снимается случайная реализация последовательности классических событий — срабатываний детектора. Так, в работе [2] отслеживаются скачки частоты колебаний электрона вдоль магнитного поля. В работе [3] изучаются случайные скорости срабатываний селектив-

*E-mail: gpmirosh@gmail.com, gpmirosh@pisem.net

ной к атомным состояниям ионизационной камеры, в которую попадают атомы-зонды после каждого пролета резонатора. В работах [4–10] изучаются последовательности импульсов тока фотоионизации и приводятся случайные графики скоростей срабатывания фотодетектора. Несмотря на различные способы проведения последовательных квантовых измерений, временные зависимости снятых реализаций очень похожи. Примеры можно найти в работах [2–10]; приведенные в них графики представляют собой кривые, случайно колеблющиеся около средних (квазистационарных) значений. Эти квазистационарные уровни в некоторый случайный момент времени резко меняют свои значения. Такие резкие смены средних значений принято называть квантовыми скачками. Теория квантовых скачков по сути дела является теорией последовательных косвенных квантовых измерений.

Квантовая теория непрерывного фотодетектирования на основе фотоэлектрического эффекта развита в работе [12], согласно которой цикл фотодетектирования состоит из интервала времени взаимодействия квантовой системы с детектором, мгновенного акта фотоионизации свободного фотоионизационного состояния и интервала свободного (с выключенным детектором) развития квантовой системы (интервал приготовления детектора в основном состоянии, «мертвое» время). В квантовую систему включают квантованные моды поля излучения резонансной флуоресценции и атом-источник поля, накачиваемый резонансным классическим полем. Временная длительность цикла случайна. Один из основных результатов работы [12] — вывод формулы для совместной (неэксклюзивной) плотности вероятности обнаружения K сигналов фотоионизации в заданной последовательности K моментов времени. В работе обоснованы приближения, позволяющие выразить эту плотность через временную корреляционную функцию Глаубера зависящих от времени (в представлении свободного, без источников, поля) полевых операторов рождения и уничтожения. Главное приближение работы — расчет операторов развития совместной матрицы плотности атома, поля и детектора в линейном приближении по взаимодействию детектора и поля. Теория непрерывного фотодетектирования применяется для изучения квантовых скачков на V -конфигурации атомных уровней. Обширный обзор работ по этому эффекту представлен в работе [13].

В отличие от имеющихся работ, в нашей работе теория квантовых скачков строится на основе теории дискретного фотодетектирования. Идея и тер-

мин «дискретное фотодетектирование» предложены в работах [14–16], дальнейшее развитие метод получил в работах [17, 18]. Такой метод квантовых измерений широко применяется для анализа работы одноатомного лазера [19–21]. В этом методе присутствуют все этапы детектирования, описанные в работе [12]. В данной работе предлагается наблюдать квантовые скачки по резкому изменению состояния моды одномодового резонатора, который накачивается фотонами резонансной флуоресценции от атома, помещенного в резонатор. Атом имеет три уровня в V -конфигурации. Состояние моды резонатора тестируется с помощью пролетающего через резонатор потока невозбужденных (на входе) атомов. Каждый атом является квантовым зондом, «собирающим» информацию о квантованной моде. В данной работе не используется теория возмущений для расчета взаимодействия зонда и квантовой системы. В процессе дискретного фотодетектирования информация о развитии квантовой системы поступает к исследователю в определенные, назначаемые экспериментатором, моменты времени. В случае идеальности процесса (что предполагается в дальнейшем) при каждом срабатывании ионизационной камеры исследователь получает информацию об энергетическом состоянии атома-зонда. Эта апостериорная статистическая информация косвенным образом связана с числовыми характеристиками измеряемой квантовой системы. Окончательным результатом работы являются формулы, позволяющие связать параметры квантовой системы «атом-источник и мода резонатора» и параметры взаимодействия квантовой системы с атомом-зондом с наблюдаемыми характеристиками квантовых скачков. Среди таких характеристик особое значение имеют средние длительности пребывания квантовой системы в квазистационарных состояниях (длительности «яркого» и «темнового» периодов), вероятности квантовых скачков, средние уровни возбуждения квантованной моды резонатора и другие характеристики.

2. НАКАЧКА РЕЗОНАТОРА ФОТОНАМИ РЕЗОНАНСНОЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ

Квантовые скачки на метастабильный уровень наблюдаются в спектре резонансной флуоресценции отдельного атома, помещенного в атомную ловушку. Экспериментально [4–10] этот эффект наблюдался на V -конфигурации атомных уровней, таких как, например, у атома ртути («сильный» переход между уровнями $^2S_{1/2}$ и $^2P_{1/2}$ и «слабый», метастабильный,

переход между уровнями ${}^2S_{1/2}$ и ${}^2D_{1/2}$). Резонансная флуоресценция возбуждается классическим полем на сильном переходе, квантовые скачки контролируются слабым классическим полем на метастабильном переходе. Поместим атом (источник) в одномодовый резонатор и возбудим резонансную флуоресценцию внешним классическим резонансным полем на сильном переходе. Часть фотонов резонансной флуоресценции захватывается резонатором, возбуждая колебания квантованной резонаторной моды. Уравнение Лиувилля для матрицы плотности ρ квантовой системы, состоящей из атома-источника и резонаторной моды, запишем в следующем виде:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H_{AM}, \rho] + iW \rho. \quad (1)$$

Здесь гамильтониан квантовой системы H_{AM} в резонансном приближении имеет вид

$$H_{AM} = F(\sigma_{01} + \sigma_{10}) + \varepsilon a^\dagger a + \kappa(a^\dagger \sigma_{01} + a \sigma_{10}) + f(\sigma_{02} + \sigma_{20}), \quad (2)$$

где $\sigma_{ij} = |i\rangle_{AA} \langle j|$, $i, j = 0, 1, 2$ — атомные операторы уничтожения и рождения атомного возбуждения, $|i\rangle_A$, $i = 0, 1, 2$ — атомный базис V-схемы уровней (0 — основное состояние, 1 и 2 — возбужденные состояния, переход 0–1 — сильный, переход 0–2 — слабый, метастабильный), a^\dagger и a — операторы рождения и уничтожения фотона в резонаторе, символ « \dagger » означает эрмитово сопряжение, а $[,]$ — коммутатор. Параметры гамильтониана имеют размерность частоты: F — половина частоты Раби возбуждающего классического поля, ε — отстройка частоты моды резонатора от частоты атомного перехода 0–1, κ — параметр взаимодействия квантованной моды и атома (однофотонная частота Раби), f — половина частоты Раби контролирующего классического поля на метастабильном переходе 0–2. Классическое возбуждающее поле F настроено в точный резонанс с атомным переходом 0–1. Классическое контролирующее поле f настроено в точный резонанс с атомным переходом 0–2.

Величина W в уравнении (1) имеет смысл супероператора атомной релаксации [22], резонатор будем считать идеальным. Разобьем W на два слагаемых: $W = W^{(d)} + W^{(nd)}$. Здесь

$$\left(W^{(d)} \rho\right)_{ii} = \sum_{j=0}^2 (\gamma_{ji} \rho_{jj} - \gamma_{ij} \rho_{ii})$$

— супероператор релаксации диагональных по атомному базису элементов матрицы плотности,

$$\left(W^{(nd)} \rho\right)_{ij} = -w_{ij} \rho_{ij}, \quad i \neq j$$

— супероператор релаксации недиагональных по атомному базису элементов $\rho_{ij} = {}_A \langle i | \rho | j \rangle_A$ матрицы плотности, γ_{ij} и $w_{ij} = w_{ji}$, $i, j = 0, 1, 2$ — соответствующие скорости релаксации.

Упростим задачу, положив $\varepsilon = 0$, и выполним преобразование уравнения (1) с помощью унитарного оператора

$$U = \exp[-q(a^\dagger - a)], \quad q = F/\kappa. \quad (3)$$

Будем называть это преобразование переходом в когерентное представление. Получаем

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho} = [\tilde{H}_{AM}, \tilde{\rho}] + iW \tilde{\rho}.$$

Здесь введены следующие обозначения операторов в когерентном представлении:

$$\tilde{\rho} = U^\dagger \rho U,$$

$$\tilde{H}_{AM} = U^\dagger H_{AM} U = \kappa(a^\dagger \sigma_{01} + a \sigma_{10}) + f(\sigma_{02} + \sigma_{20}).$$

Обозначения операторов a^\dagger и a в когерентном представлении (3) сохранены.

Предположим, что скорости релаксации недиагональных по атомным индексам элементов матрицы плотности велики (по сравнению со скоростями релаксации диагональных элементов). Применим секулярное приближение [23] и разделим процессы релаксации диагональных и недиагональных элементов. Система уравнений для диагональных ($i = j$) по атомным индексам элементов атомно-полевой матрицы плотности имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{00} &= -\frac{\kappa^2}{w_{10}} (a^\dagger a \tilde{\rho}_{00} + \tilde{\rho}_{00} a^\dagger a - 2a^\dagger \tilde{\rho}_{11} a) - \\ &\quad - \frac{2f^2}{w_{20}} (\tilde{\rho}_{00} - \tilde{\rho}_{22}) + \left(W^{(d)} \tilde{\rho}\right)_{00}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{11} &= -\frac{\kappa^2}{w_{10}} (a a^\dagger \tilde{\rho}_{11} + \tilde{\rho}_{11} a a^\dagger - 2a \tilde{\rho}_{00} a^\dagger) - \\ &\quad - \left(W^{(d)} \tilde{\rho}\right)_{11}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{22} &= -\frac{2f^2}{w_{20}} (\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{00}) + \left(W^{(d)} \tilde{\rho}\right)_{22}. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем супероператоры K^2 , K_0 , K_- , K_+ , образующие алгебры $su(1,1)$ с помощью соотношений (здесь K^2 — оператор Казимира)

$$\begin{aligned} K_0 \tilde{\rho} &= \frac{1}{2} (a^\dagger a \tilde{\rho} + \tilde{\rho} a a^\dagger), \\ K_+ \tilde{\rho} &= a^\dagger \tilde{\rho} a, \quad K_- \tilde{\rho} = a \tilde{\rho} a^\dagger. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем краткие обозначения атомных проекторов,

$$|i\rangle_A = |i\rangle_{AA} \langle i|, \quad i = 0, 1, 2, \quad (6)$$

и определим набор атомных супероператоров

$$\theta_{ij} = |i\rangle\langle j|_{AA}, \quad i, j = 0, 1, 2. \quad (7)$$

С помощью обозначений (5), (6), (7) система уравнений (4) переписывается в операторном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho} = L\tilde{\rho} = (L_0 + L_v)\tilde{\rho}, \quad (8)$$

где лиувиллиан имеет вид

$$L_0 = -\frac{2\kappa^2}{w_{10}} \left[K_0(\theta_{00} + \theta_{11}) + \frac{1}{2}(\theta_{11} - \theta_{00}) - K_+\theta_{01} - K_-\theta_{10} \right], \quad (9)$$

$$L_v = -\frac{2f^2}{w_{20}}(\theta_{00} + \theta_{22} - \theta_{02} - \theta_{20}) + \sum_{j,i=0}^2 \gamma_{ij}(\theta_{ji} - \theta_{ii}).$$

Введем обозначение для собственного базиса оператора K_0 и определим действие операторов K_- , K_+ на элементы этого базиса:

$$|n, k\rangle = |n\rangle\langle n+k|, \quad \langle n, k| = \langle n+k|\langle n|, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

$$K_0|n, k\rangle = \left(n + \frac{k+1}{2}\right)|n, k\rangle,$$

$$K_-|n, k\rangle = \sqrt{n(n+k)}|n-1, k\rangle,$$

$$K_+|n, k\rangle = \sqrt{(n+1)(n+k+1)}|n+1, k\rangle.$$

Здесь введено обозначение для собственных векторов оператора $a^\dagger a$ в когерентном представлении (3):

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Как следует из соотношений (10), лиувиллиан (9) сохраняет номер k «фотонной» диагонали для элементов атомно-полевой матрицы плотности (в когерентном представлении). С алгебраической точки зрения, подпространство векторов (10) с фиксированным числом k является пространством представления алгебры $su(1, 1)$ для определенного собственного числа оператора Казимира K^2 [17]:

$$K^2|n, k\rangle = \left[K_0^2 - \frac{1}{2}(K_+K_- + K_-K_+) \right] |n, k\rangle = \left(\frac{k^2 - 1}{4} \right) |n, k\rangle.$$

Для упрощения аналитических выражений предположим, что

$$\gamma_{01} = \gamma_{21} = \gamma_{12} = 0 \quad (12)$$

(отсутствуют релаксационные процессы возбуждения флуоресцирующего уровня из основного и метастабильного состояний). Тогда можно проверить, что стационарное состояние уравнения (8) имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{ST} = |0, 0\rangle \otimes (\varepsilon_0|0\rangle_A + \varepsilon_2|2\rangle_A), \quad (13)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\mu_{20}}{\mu_{20} + \mu_{02}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\mu_{02}}{\mu_{20} + \mu_{02}},$$

$$\mu_{02} = \gamma_{02} + \frac{2f^2}{w_{20}}, \quad \mu_{20} = \gamma_{20} + \frac{2f^2}{w_{20}}.$$

Основное состояние моды $|0\rangle$ (11) в когерентном представлении (3) отвечает когерентному состоянию в исходном фоковском представлении. Отсюда среднее число фотонов $\bar{n}^{(ST)}$ в одномодовом резонаторе в результате его накачки полем резонансной флуоресценции при нулевой отстройке $\varepsilon = 0$ в гамильтониане (2) равно

$$\bar{n}^{(ST)} = q^2 = (F/\kappa)^2. \quad (14)$$

При малых константах взаимодействия уровень возбуждения моды может быть большим. Уровень возбуждения при больших отстройках (боковые резонансы Моллоу) исследован в работе [18].

3. СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛНОГО АНСАМБЛЯ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ В ПРИСУТСТВИИ ПОТОКА АТОМОВ-ЗОНДОВ

Пропустим через резонатор разреженный поток невозбужденных (на входе в резонатор) атомов-зондов. Обозначим через $T + \tau$ средний интервал времени между пролетающими атомами. Каждый пролетающий через резонатор атом взаимодействует с резонаторной модой и несет информацию о состоянии моды [17, 18]. Результаты дискретного фотодетектирования могут не учитываться исследователем. В этом случае взаимодействие атомов-зондов с квантовой системой следует рассматривать как дополнительный канал релаксации, который необходимо учесть для расчета редуцированной матрицы плотности квантовой системы. Предположим, что в резонаторе может находиться только один атом-зонд, который взаимодействует с модой резонатора в течение малого времени $\tau \ll T$ (сильно разреженный поток атомов). Добавим к гамильтониану $H_{AM}(2)$ квантовой системы гамильтониан взаимодействия моды и атома-зонда (в резонансном приближении) и получаем полный гамильтониан H_{AMD} взаимодействия трех подсистем (трехуровневый атом-источник, резонаторная мода, двух-

уровневый атом-зонд) в исходном фоковском представлении:

$$H_{AMD} = H_{AM} + V_D = H_{AM} + \nu(a^\dagger \sigma_D^- + a \sigma_D^+).$$

Здесь ν — параметр взаимодействия квантованной моды и атома-зонда,

$$\sigma_D^- = |0\rangle_{DD}\langle 1|, \quad \sigma_D^+ = |1\rangle_{DD}\langle 0|$$

— операторы уничтожения и рождения возбуждения на детекторе, $|0\rangle_D, |1\rangle_D$ — векторы основного и возбужденного уровней атома-зонда, V_D — оператор взаимодействия моды и зонда. Предполагается, что зонд настроен в точный резонанс с квантованной модой резонатора. Предположим следующее соотношение между параметрами задачи:

$$\tau^{-1} \gg F, f, \kappa, \gamma_{ij}, w_{ij}. \quad (15)$$

Условие (15) означает, что за время взаимодействия τ атома-зонда с квантованной модой резонатора изменением состояния атома-источника можно пренебречь. За малое время τ измениться может (при достаточно большом ν) только состояние резонаторной моды. Предположение (15) упрощает анализ, и из него следует, что редуцированная (по степени свободы детектора) матрица плотности полного ансамбля квантовой системы за время взаимодействия изменится согласно соотношению

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \\ &= \text{Sp}_D [\exp(-iV_D\tau)\rho(0) \otimes |0\rangle_{DD}\langle 0| \exp(iV_D\tau)] = \\ &= M_0(\tau)\rho(0)M_0^\dagger(\tau) + M_1(\tau)\rho(0)M_1^\dagger(\tau). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\rho(0)$ и $\rho(\tau)$ — редуцированные матрицы плотности до и после взаимодействия, $|0\rangle_{DD}\langle 0|$ — начальная матрица плотности зонда (атом в основном состоянии) и введены обозначения операторов-трансформеров [17, 18, 24]

$$\begin{aligned} M_\xi(\tau) &= {}_D\langle \xi | \exp(-iV_D\tau) | 0 \rangle_D, \quad \xi = 0, 1, \\ M_0(\tau) &= \cos(\tau\nu\sqrt{a^\dagger a}), \\ M_1(\tau) &= -ia \frac{\sin(\tau\nu\sqrt{a^\dagger a})}{\sqrt{a^\dagger a}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Перепишем выражение (17) в когерентное представление (3):

$$\begin{aligned} \tilde{M}_0(\tau) &= \cos \left[\tau\nu\sqrt{(a^\dagger - q)(a - q)} \right], \quad q = F/\kappa, \\ \tilde{M}_1(\tau) &= -i(a - q) \frac{\sin \left[\tau\nu\sqrt{(a^\dagger - q)(a - q)} \right]}{\sqrt{(a^\dagger - q)(a - q)}}. \end{aligned}$$

Найдем установившееся состояние квантовой системы $\tilde{\rho}_{ST}$ (в когерентном представлении) после пролета большого числа атомов-зондов через резонатор. Предполагается, что цикл детектирования состоит из двух этапов: этапа релаксации (зонд отсутствует в резонаторе, длительность T) и этапа взаимодействия с зондом (длительность τ). Искомое установившееся состояние $\tilde{\rho}_{ST}$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{M}_0(\tau)(\Gamma\tilde{\rho}_{ST})\tilde{M}_0^\dagger(\tau) + \\ + \tilde{M}_1(\tau)(\Gamma\tilde{\rho}_{ST})\tilde{M}_1^\dagger(\tau) = \tilde{\rho}_{ST}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\Gamma = \exp(LT) \quad (19)$$

— супероператор развития в отсутствие атомов-зондов. Найдем приближенное выражение для Γ , решив уравнения (4), (8), (9) при условии

$$\frac{2\kappa^2}{w_{10}} \gg \frac{2f^2}{w_{20}}, \gamma_{ij} \quad (20)$$

(переход 0–1 сильный, переход 0–2 слабый) и условиях на время T :

$$T \frac{2\kappa^2}{w_{10}} \gg 1, \quad \mu_{02}T, \mu_{20}T < 1. \quad (21)$$

Неравенства (21) означают, что за время T отсутствия зонда в резонаторе разность заселенностей метастабильного 2 и основного 0 атомных состояний не успевает прийти к равновесному значению, описываемому формулой (13).

Для поиска супероператора Γ используем собственный базис лиувиллиана L_0 :

$$\begin{aligned} L_0|\chi_{n,\alpha}^{(k)}\rangle &= \lambda_{n,\alpha}^{(k)}|\chi_{n,\alpha}^{(k)}\rangle, \\ n &= 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \alpha = 0, 1, 2, \\ \lambda_{n,\alpha}^{(k)} &= -\frac{\kappa^2}{w_{10}} \left[\sqrt{n} - (-1)^\alpha \sqrt{n+k} \right]^2, \\ &\quad \alpha = 0, 1, \\ |\chi_{n,\alpha}^{(k)}\rangle &= |n, k\rangle|0\rangle_A + (-1)^\alpha |n-1, k\rangle|1\rangle_A, \\ &\quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} |\chi_{0,0}^{(k)}\rangle &= |0, k\rangle|0\rangle_A, \\ |\chi_{n,2}^{(k)}\rangle &= |n, k\rangle|2\rangle_A, \quad \lambda_{n,2}^{(k)} = 0, \\ &\quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Будем называть индекс « n » фотонным, а индекс « α » атомным. Здесь $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ — сохраняющееся число — номер «фотонной» диагонали для

элементов (10) атомно-полевой матрицы плотности. Введем обозначение $\Gamma^{(k)}$ для супероператора развития элементов k -й диагонали. Действие супероператора Γ на матрицу плотности удобно записать в виде

$$\Gamma\tilde{\rho} = \Gamma^{(0)}\tilde{\rho}^{(0)} + \left(\sum_{k=1} \Gamma^{(k)}\tilde{\rho}^{(k)} + \text{H.c.} \right). \quad (23)$$

Здесь $\tilde{\rho}^{(k)}$ — обозначение атомно-полевой матрицы, содержащей только k -ю фотонную диагональ в базе (10). Для построения Γ будет использован базис $|\chi_{n,\alpha}^{(k)}\rangle$ (22), где атомные индексы « α » принимают два значения, $\alpha = 0, 2$. Удобно выделить супероператоры, имеющие индексы $\Gamma_{\alpha\beta}$. С помощью $\Gamma_{\alpha\beta}$ действие Γ запишется в виде

$$(\Gamma\tilde{\rho})_{\alpha} = \sum_{\beta=0}^2 \Gamma_{\alpha\beta}\tilde{\rho}_{\beta}, \quad (24)$$

где $\tilde{\rho}_{\beta}$ обозначает полевые матрицы в подпространствах с атомным индексом « β ». Аналогично выражениям (23), (24) вводятся обозначения для супероператоров $\Gamma_{\alpha\beta}^{(k)}$ и матриц $\rho_{\alpha}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2$.

Как следует из условия (20) и соотношений (22), для определения собственного базиса лиувиллиана L (8), (9) и получения выражения для $\Gamma_{\alpha\beta}^{(k)}$ необходимо решить секулярное уравнение для L в базе $|\chi_{n,0}^{(0)}\rangle, |\chi_{n,2}^{(0)}\rangle$ при $k = 0$ (главная диагональ) и $\alpha, \beta = 0, 2$. Остальные базисные векторы L_0 (9) можно в нулевом приближении (по $2f^2/w_{20}$ и γ_{ij}) (20) выбрать в качестве собственных векторов для лиувиллиана L . Сделаем предположение относительно скоростей релаксации γ_{ij} (по аналогии с (12)):

$$\gamma_{01} = \gamma_{10} = \gamma_{21} = \gamma_{12} = 0. \quad (25)$$

Такое предположение существенно облегчает решение секулярной задачи. Это приближение оправдано, так как квантовая система, состоящая из атома-источника и резонаторной моды, взаимодействует с атомами-зондами и это взаимодействие создает сильный канал релаксации. Найдем супероператоры развития $\Gamma_{\alpha\beta}^{(k)}$ в подпространствах с фиксированным номером диагонали k и атомными индексами $\alpha, \beta = 0, 2$. Если принять условие (25), то секулярная матрица лиувиллиана L в базе $|\chi_{n,0}^{(0)}\rangle, |\chi_{n,2}^{(0)}\rangle$ для $k = 0$ разбивается на блоки размерности 2×2 для фиксированного числа n и базис нулевого приближения легко находится. Приведем окончательное выражение для супероператора развития $\Gamma_{\alpha\beta}^{(k)}$ в предположении (21). Используя малость параметров

$\mu_{02}T, \mu_{20}T < 1$ (21), удобно выделить нулевой порядок Λ и поправку $\Delta\Gamma$, записав (19) в виде

$$\Gamma = \Lambda + \Delta\Gamma.$$

Для нулевого порядка получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_{00}^{(0)} &= \sum_{n=0} |\chi_{n,0}^{(k)}\rangle\langle\chi_{n,0}^{(k)}|, \\ \Lambda_{00}^{(k)} &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ \Lambda_{22}^{(0)} &= \sum_{n=0} |\chi_{n,2}^{(k)}\rangle\langle\chi_{n,2}^{(k)}|, \\ \Lambda_{20}^{(k)} &= \Lambda_{02}^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (26)$$

В первом порядке по $\mu_{02}T, \mu_{20}T < 1$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{22}^{(k)} &= -\mu_{20}T \sum_{n=0} |\chi_{n,2}^{(k)}\rangle\langle\chi_{n,2}^{(k)}|, \\ & \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ \Delta\Gamma_{00}^{(0)} &= -\mu_{02}T \left(|\chi_{0,0}^{(0)}\rangle\langle\chi_{0,0}^{(0)}| + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=1} |\chi_{n,0}^{(0)}\rangle\langle\chi_{n,0}^{(0)}| \right), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{02}^{(0)} &= \mu_{20}T \left(|\chi_{0,0}^{(0)}\rangle\langle\chi_{0,2}^{(0)}| + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=1} |\chi_{n,0}^{(0)}\rangle\langle\chi_{n,2}^{(0)}| \right), \\ \Delta\Gamma_{20}^{(0)} &= \mu_{02}T \sum_{n=0} |\chi_{n,2}^{(0)}\rangle\langle\chi_{n,0}^{(0)}|, \\ \Delta\Gamma_{02}^{(k)} &= \Delta\Gamma_{20}^{(k)} = \Delta\Gamma_{00}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Здесь $\langle\langle\chi_{n,2}^{(k)}|, \langle\langle\chi_{n,0}^{(k)}|$ — транспонированный базис,

$$\begin{aligned} \langle\langle\chi_{n,0}^{(k)}| &= \frac{1}{2} (\langle\langle n, k|_A \langle\langle 0| + \langle\langle n-1, k|_A \langle\langle 1|), \\ & \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \langle\langle\chi_{0,0}^{(k)}| &= \langle\langle 0, k|_A \langle\langle 0|, \quad \langle\langle\chi_{n,2}^{(k)}| = \langle\langle n, k|_A \langle\langle 2|, \\ & \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Вначале найдем решение $\tilde{\rho}_{ST}$ уравнения (18) в нулевом приближении по пробному полю и по скоростям γ_{02}, γ_{20} положив

$$f = \gamma_{02} = \gamma_{20} = 0. \quad (28)$$

В приближении (28) получаем $\Gamma = \Lambda$. Из соотношений (26) следует, что можно построить два решения уравнения (18) в нулевом порядке по $\Delta\Gamma$. Первое решение $\tilde{\rho}_2$ и второе решение $\tilde{\rho}_0$ в подпространствах с

атомными индексами соответственно $\alpha = 2$ и $\alpha = 0$. Действие супероператора Λ на эти решения имеет вид

$$\Lambda \tilde{\rho}_0 = \Lambda_{00}^{(0)} \tilde{\rho}_0 = \tilde{\rho}_0^{(0)}, \quad (29)$$

$$\Lambda \tilde{\rho}_2 = \Lambda_{22} \tilde{\rho}_2 = \tilde{\rho}_2. \quad (30)$$

Из (30) следует, что решение $\tilde{\rho}_2$ (18) имеет вид

$$\tilde{\rho}_2 = U^\dagger |0\rangle \langle 0| U \otimes |2\rangle \langle 2|_A. \quad (31)$$

Решение $\tilde{\rho}_2$ факторизуется на атомное и полевое состояния. Полевое состояние $U^\dagger |0\rangle \langle 0| U$ — это чистый вакуум Фока (в исходном представлении). Второе решение $\tilde{\rho}_0$ строится с помощью уравнения (29). Оно состоит из диагональной ($k = 0$) части $\tilde{\rho}_0^{(0)}$ и недиагональной ($k \neq 0$) части. Запишем диагональную матрицу $\tilde{\rho}_0^{(0)}$ в виде

$$\tilde{\rho}_0^{(0)} = \sum_{n=0} \rho_n |\chi_{n,0}\rangle \langle \chi_{n,0}|, \quad (32)$$

где ρ_n — произвольные матричные элементы. Эта матрица не меняется при действии супероператора развития Λ (на этапе релаксации),

$$\Lambda \tilde{\rho}_0^{(0)} = \tilde{\rho}_0^{(0)}, \quad (33)$$

т. е. матрица $\tilde{\rho}_0^{(0)}$ будет стационарной для релаксационного процесса в нулевом порядке по параметрам (28). Из уравнений (18) и (33) для $\tilde{\rho}_0^{(0)}$ получаем

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{M}_0(\tau) \tilde{\rho}_0^{(0)} \tilde{M}_0^\dagger(\tau) \right)_0^{(0)} + \\ & + \left(\tilde{M}_1(\tau) \tilde{\rho}_0^{(0)} \tilde{M}_1^\dagger(\tau) \right)_0^{(0)} = \tilde{\rho}_0^{(0)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Запись (34) означает, что после умножения $\tilde{\rho}_0^{(0)}$ на матрицы $\tilde{M}_0(\tau)$, $\tilde{M}_1(\tau)$ и их сопряженные в результате следует оставить слагаемые в подпространстве, построенном на векторах $|\chi_{n,0}\rangle$, и отбросить все недиагональные ($k \neq 0$) слагаемые.

Решим уравнение (34), предположив, что амплитуда поля накачки F удовлетворяет условию

$$q = \frac{F}{\kappa} < 1. \quad (35)$$

Получаем для матричных элементов ρ_n (32) следующие формулы во втором порядке по q :

$$\rho_0 = 1 - 2q^2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\tau\nu}{2} \right), \quad \rho_1 = q^2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\tau\nu}{2} \right). \quad (36)$$

Остальные матричные элементы будут иметь более высокий порядок малости по q^2 . Окончательно матрица $\tilde{\rho}_0$ имеет вид

$$\tilde{\rho}_0 = \tilde{M}_0(\tau) \tilde{\rho}_0^{(0)} \tilde{M}_0^\dagger(\tau) + \tilde{M}_1(\tau) \tilde{\rho}_0^{(0)} \tilde{M}_1^\dagger(\tau). \quad (37)$$

Формулы (36) теряют смысл около значений $\nu\tau \approx \pi(1 + 2k)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. При таких значениях $\nu\tau$ необходимо учитывать дополнительное вырождение задачи, связанное с появлением других стационарных состояний.

Итак, в нулевом порядке получаем два равноправных стационарных состояния полного ансамбля (в отсутствие измерений, без использования дополнительной информации о состояниях атомов-зондов). Это редуцированные матрицы $\tilde{\rho}_2$ (31) и $\tilde{\rho}_0$ (37) квантовой системы. Для поиска истинного стационарного состояния $\tilde{\rho}_{ST}$ (18) необходимо найти их правильную линейную комбинацию, которая является собственной матрицей возмущения $\Delta\Gamma$ при нулевом значении собственного числа. Такая комбинация легко находится и в когерентном представлении имеет вид

$$\tilde{\rho}_{ST} = \varepsilon_0 \tilde{\rho}_0 + \varepsilon_2 \tilde{\rho}_2. \quad (38)$$

Здесь параметры $\varepsilon_0, \varepsilon_2$ определены в (13). Это решение следует сравнить с решением (13), которое получено в отсутствие потока атомов-зондов через резонатор. В приближении (35) получим формулу для оценки вероятности обнаружения в ионизационных камерах вылетевшего атома-зонда в основном состоянии, если квантовая система находится в стационарном состоянии $\tilde{\rho}_{ST}$ (38):

$$\begin{aligned} P_0^{(ST)} &= \operatorname{Sp}_{A,M} \left(\tilde{M}_0(\tau) \Gamma \tilde{\rho}_{ST} \tilde{M}_0^\dagger(\tau) \right) = \\ &= 1 - q^2 4\varepsilon_0 \sin^2(\nu\tau/2). \end{aligned} \quad (39)$$

Найдем среднее число фотонов в резонаторе в состоянии $\tilde{\rho}_{ST}$ по формуле

$$\begin{aligned} \bar{n}^{(ST)} &= \operatorname{Sp}_{A,M} \left(\tilde{\rho}_{ST} (a^\dagger - q)(a - q) \right) \approx \\ &\approx q^2 \varepsilon_0 \frac{\cos^2(\nu\tau)}{\cos^2(\nu\tau/2)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Найдем заселенности атомных уровней атома-источника в стационарном состоянии $\tilde{\rho}_{ST}$ (38). Редуцированная атомная матрица плотности имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp}_M(\tilde{\rho}_{ST}) &= a_0 |0\rangle_{AA} \langle 0| + a_1 |1\rangle_{AA} \langle 1| + \\ &+ a_2 |2\rangle_{AA} \langle 2|, \\ a_0 &= \varepsilon_0 \left[1 - q^2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\tau\nu}{2} \right) \right], \\ a_1 &= \varepsilon_0 q^2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\tau\nu}{2} \right), \quad a_2 = \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (41)$$

Сравнивая выражение (40) с (14), делаем вывод о том, что в рассматриваемом приближении среднее число фотонов в резонаторе с учетом атомов-зондов

будет ниже среднего числа фотонов (в стационарном состоянии (13)) без атомов-зондов. Здесь следует отметить, что расчет величины $\bar{n}^{(ST)}$ в (40) сделан без учета релаксационных процессов (25), (28) между уровнями 0 и 1, а при расчете этой величины в (14) релаксационный процесс учитывался.

Формулами данного раздела можно воспользоваться и для анализа установившегося состояния в полном ансамбле, где атом-источник описывается двухуровневой схемой (метастабильный уровень не возбуждается). Для этого следует положить $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0$. В этом случае матрица плотности полного ансамбля равна $\tilde{\rho}_0$ (37).

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ (КВАНТОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ)

Выполним численное моделирование результатов последовательных квантовых измерений состояний атомов-зондов. Цикл работы дискретного детектора состоит из большого интервала времени T , когда атом-зонд отсутствует в резонаторе и сформированное на предыдущем цикле состояние квантовой системы (мода и атом-источник) релаксирует согласно уравнению (8). По окончании времени T зонд влетает в резонатор и взаимодействует со сформированной модой в течение малого времени τ . По окончании взаимодействия энергетическое состояние вылетевшего зонда мгновенно измеряется в ионизационной камере. Цикл квантового измерения заканчивается. Условную редуцированную матрицу плотности в начале ℓ -го цикла (в конце $\ell - 1$ -го) обозначим через $\tilde{\rho}(\ell)$. Матрицы $\tilde{\rho}(\ell + 1)$ и $\tilde{\rho}(\ell)$ связаны рекуррентным соотношением [17, 18]

$$\tilde{\rho}(\ell+1) = \frac{\tilde{M}_\xi(\tau) (\Gamma \tilde{\rho}(\ell)) \tilde{M}_\xi^\dagger(\tau)}{P_\xi(\ell)}, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots, \quad (42)$$

где

$$P_\xi(\ell) = \text{Sp}_{A, M} \left(\tilde{M}_\xi(\tau) (\Gamma \tilde{\rho}(\ell)) \tilde{M}_\xi^\dagger(\tau) \right), \quad \xi = 0, 1.$$

Здесь $P_\xi(\ell)$ — априорная вероятность результата измерения в конце ℓ -го цикла, $\xi = 0, 1$ — случайная переменная, отмечающая результат измерения. Предполагается, что ионизационные камеры детектируют состояния каждого атома-зонда (идеальность детектирования). Далее цикл измерений повторяется. Редуцированная матрица плотности полного ансамбля в когерентном представлении после вылета

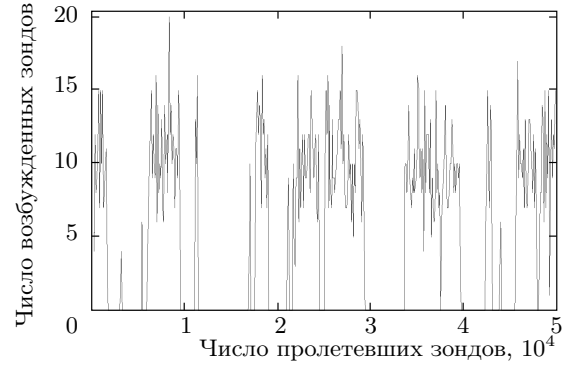


Рис. 1. Скорость счета возбужденных атомов-зондов (число возбужденных атомов на 100 пролетевших) по случайной выборке измерений состояний атомов-зондов, вылетающих из резонатора. Выборка длительностью в 50000 пролетов получена с помощью численного моделирования для значения параметров (45). Изучаемый эффект (переход атома на метастабильный уровень) отвечает интервалам времени, когда возбужденные атомы не наблюдаются

атомов-зондов разбивается на два слагаемых (аналог формулы полной вероятности):

$$\tilde{\rho}(\ell + 1) = P_0(\ell) \frac{\tilde{M}_0(\tau) \Gamma \tilde{\rho}(\ell) \tilde{M}_0^\dagger(\tau)}{P_0(\ell)} + P_1(\ell) \frac{\tilde{M}_1(\tau) \Gamma \tilde{\rho}(\ell) \tilde{M}_1^\dagger(\tau)}{P_1(\ell)}. \quad (43)$$

В пределе $\ell \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(\ell) \approx \tilde{\rho}_{ST}, \quad (44)$$

где $\tilde{\rho}_{ST}$ — (приближенная) установившаяся матрица плотности полного ансамбля (38).

В реальном эксперименте изучают интегральную статистику детектирования. В работах [2–10] приводятся графики мгновенных скоростей детектирования. Под мгновенной скоростью детектирования понимается число срабатываний детектора за короткий интервал времени накопления. Скорости детектирования представляют случайный процесс, и в течение эксперимента снимается его конкретная реализация. Развитый в данной работе метод (формулы (42), (43)) можно применить для численного моделирования случайной последовательности результатов квантовых измерений. На рис. 1 приводится пример случайной последовательности обнаружений зонда в возбужденном состоянии, полученной в результате статистической обработки 50000

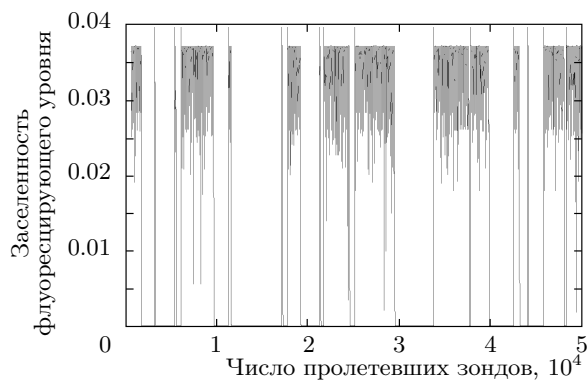


Рис. 2. Заселенность флуоресцирующего уровня атома-источника, рассчитанная с помощью условной редуцированной матрицы плотности квантовой системы (42) при каждом пролете атомов-зондов. Выборка длительностью в 50000 пролетов получена с помощью численного моделирования для значения параметров (45). Изучаемый эффект (переход атома на метастабильный уровень) отвечает интервалам времени, когда флуоресценция на сильном переходе 0–1 не наблюдается

атомов-зондов, пропущенных через резонатор. Последовательность сгенерирована численно по формулам (42) для следующего набора (безразмерных) параметров задачи:

$$\begin{aligned} \tau &= 0.04, \quad \nu = 26, \quad f = 0.015, \quad \kappa = 3, \\ F &= 1, \quad w_{01} = 0.2, \quad w_{02} = 0.3, \\ \gamma_{10} &= 0.0002, \quad \gamma_{01} = 0.0001, \quad \gamma_{20} = 0.00002, \\ \gamma_{02} &= 0.00001, \quad T = 0.4. \end{aligned} \quad (45)$$

Мгновенная скорость детектирования определялась по 100 пролетевшим атомам. Как и в эксперименте по наблюдению квантовых скачков на V-схеме уровней, «яркие» периоды, в течение которых обнаруживается примерно 10 возбужденных атомов на 100 пролетевших, сменяются «темновыми» периодами, когда возбужденные атомы-зонды не наблюдаются. Длительности и моменты появления периодов случайны.

С помощью формул (42), (43) можно получить более детальные характеристики квантовой системы, подверженной процессу последовательных измерений. На рис. 2 приведен график зависимости заселенности флуоресцирующего уровня атома-источника в зависимости от числа пролетевших через резонатор атомов-зондов. Расчет выполнен с помощью условной редуцированной матрицы плотности квантовой системы $\tilde{\rho}(\ell)$ (42). Всплески заселенности — яркие периоды — соответствуют интер-

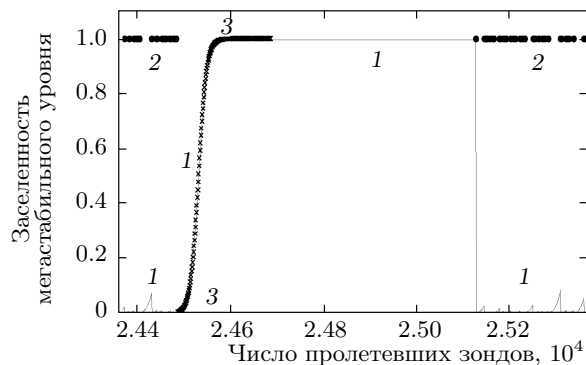


Рис. 3. Заселенность метастабильного уровня 2 атома-источника, рассчитанная с помощью условной редуцированной матрицы плотности квантовой системы (42) между 24360 и 26360 пролетами атомов-зондов (кривая 1). На кривой 2 отмечены атомы-зонды, найденные в возбужденном состоянии. Кривая 3 — расчет заселенности с помощью модели двух состояний (67)

валам, представленным на рис. 1, когда детектор обнаруживает вылетающие атомы-зонды в возбужденном и основном состояниях в пропорции примерно 1 : 10. Во время темновых периодов наблюдаются атомы-зонды исключительно в основном состоянии. Развитая теория позволяет детально проанализировать динамику перехода от яркого периода к темновому и обратно, т. е. динамику квантовых скачков. Детальная динамика квантовых скачков представлена ниже на рис. 3–5.

5. УСЛОВНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ, КОГДА АТОМЫ-ЗОНДЫ ДЕТЕКТИРУЮТСЯ В ОСНОВНОМ СОСТОЯНИИ

Как отмечено выше, полученное стохастическое рекуррентное соотношение (42) позволяет генерировать реализации событий, свойства которых качественно подобны свойствам случайных последовательностей скоростей детектирования, получаемых в эксперименте. На рис. 1 и 2 видны изучаемые квантовые скачки, представляющие собой резкие переходы от темнового состояния квантовой системы к яркому и обратно. Моменты квантовых скачков абсолютно случайны. Согласно развиваемой в данной работе теории, можно сформулировать «причину» квантового скачка из яркого состояния в темновое. Это событие, представляющее собой обнаружение

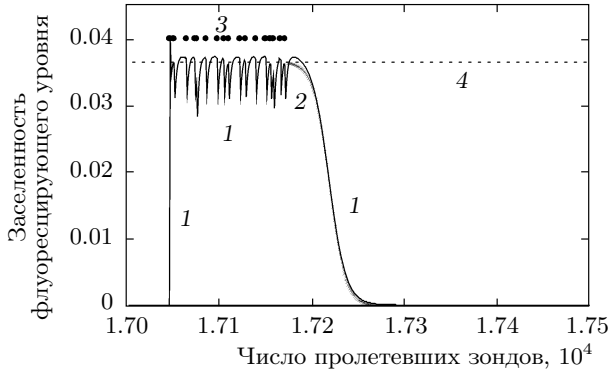


Рис. 4. Заселенность флуоресцирующего уровня 1 атома-источника, рассчитанная с помощью условной редуцированной матрицы плотности квантовой системы (42) между 17000 и 17500 пролетами атомов-зондов (кривая 1). Атомы-зонды в возбужденном состоянии отмечены жирными точками 3. Кривая 2 — расчет заселенности с помощью модели двух состояний (66), 4 — установившаяся величина заселенности a_1 , рассчитанная по формуле (41)

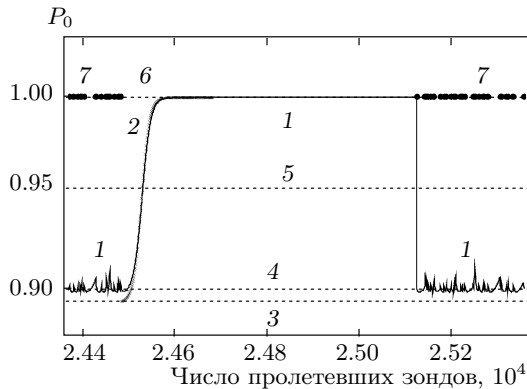


Рис. 5. Априорная вероятность $P_0(\ell)$ (42) обнаружения атомов-зондов в основном состоянии между 24360 и 26360 пролетами (1). Жирными точками 7 отмечены атомы-зонды, найденные в возбужденном состоянии; 5 — уровень априорной вероятности, рассчитанный по формуле (39) для установившегося состояния (38) полного ансамбля; 3 — приближенное значение априорной вероятности, равное 0.89, вычисленное по формуле (39); 4 — точное значение этой вероятности, равное 0.897; 6 — уровень априорной вероятности $\lambda_{max} \approx 0.9994$, рассчитанный по формуле (58); 2 — вероятность, рассчитанная с помощью модели двух состояний (65)

порядк достаточно большого числа атомов-зондов в основном состоянии (случайная переменная принимает подряд одно и то же значение $\xi = 0$). На вопрос, когда и почему возникает такая критическая флуктуация в работе ионизационных камер, ответа нет. Можно оценить вероятность такой флуктуации, а также исследовать динамику квантового скачка [17, 18], если определить условное стационарное состояние $\tilde{\rho}_{ST}$, отвечающее максимальному собственному числу λ_{max} , решив уравнение

$$\tilde{M}_0(\tau)(\Gamma\tilde{\rho}_{ST})\tilde{M}_0^\dagger(\tau) = \lambda_{max}\tilde{\rho}_{ST}. \quad (46)$$

Квантовая система будет стремиться к состоянию $\tilde{\rho}_{ST}$, если подряд наблюдается последовательность атомов-зондов в основном состоянии. Уравнение (46) решим по аналогии с уравнением (18). В нулевом порядке по параметрам (28) два решения ($\tilde{\rho}_2$ и $\tilde{\rho}_0$) уравнения (46) будем искать аналогично тому, как это было сделано ранее (см. соотношения (29)–(33)). Решение $\tilde{\rho}_2$ имеет вид

$$\tilde{\rho}_2 = U^\dagger|0\rangle\langle 0|U \otimes |2\rangle\rangle_A, \quad \lambda_2 = 1. \quad (47)$$

Здесь λ_2 обозначает максимальное собственное число для решения $\tilde{\rho}_2$ в нулевом порядке по параметрам (28). По аналогии с (34) уравнение для $\tilde{\rho}_0^{(0)}$ получается из (46):

$$\left(\tilde{M}_0(\tau)\tilde{\rho}_0^{(0)}\tilde{M}_0^\dagger(\tau)\right)_0^{(0)} = \lambda_0\tilde{\rho}_0^{(0)}.$$

Здесь λ_0 обозначает собственное число решения $\tilde{\rho}_0$ в нулевом порядке по параметрам (28). Решение $\tilde{\rho}_0^{(0)}$ ищем в виде

$$\tilde{\rho}_0^{(0)} = \sum_{n=0} \rho_n |\chi_{n,0}^{(0)}\rangle, \quad (48)$$

где матричные элементы и собственное число λ_0 легко находятся во втором порядке по q :

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1 - 2q^2 \operatorname{tg}^2(\tau\nu/2), & \rho_1 &= q^2 \operatorname{tg}^2(\tau\nu/2), \\ \rho_n &= 0, & n &= 2, 3, \dots, \\ \lambda_0 &= 1 - 4q^2 \sin^2(\tau\nu/2). \end{aligned} \quad (49)$$

Решение $\tilde{\rho}_0$ по аналогии с (37) имеет вид

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{1}{\lambda_0} \tilde{M}_0(\tau)\tilde{\rho}_0^{(0)}\tilde{M}_0^\dagger(\tau).$$

Откажемся от условия (28) и найдем поправки к решению (46) по супероператору $\Delta\Gamma$. Сейчас решения в нулевом приближении, $\tilde{\rho}_0^{(0)}$ (48) и $\tilde{\rho}_2$ (47), формально совпадают с соответствующими решениями (32) и (31) уравнения (18). Существенное различие

этих решений состоит в том, что они относятся к разным по величине собственным числам $\lambda_2 \neq \lambda_0$, т. е. эти состояния не образуют равновероятных стационарных состояний нулевого приближения, как в случае (29), (30), и вырождение в задаче (46) отсутствует. Чтобы найти истинное стационарное состояние (46), отвечающее максимальному собственному числу, необходимо учесть поправки $\Delta\Gamma$ (27). Поправки зависят от «настройки» детектора (выбора параметров τ, ν) и от параметра q^2 (уровня накачки моды резонатора). Выберем такое соотношение этих параметров, чтобы в процессе дискретного фотодетектирования обнаруживались квантовые скачки в метастабильное состояние $|2\rangle$ атома. Решение уравнения (46), содержащее квантовые скачки, в нулевом приближении по $\Delta\Gamma$ имеет вид (47).

Найдем поправки к решению (47), взяв $\tilde{\rho}_2$ в качестве нулевого приближения. Покажем, что поправка к $\tilde{\rho}_2$ будет мала при условии

$$\mu_{02}, T, \mu_{20}T \ll 4q^2 \sin^2(\tau\nu/2) < 1. \quad (50)$$

Соотношение (50) определяет правило «настройки» дискретного фотодетектора. Поправку к $\tilde{\rho}_2$ обозначим $\Delta\tilde{\rho}_0$. Здесь индекс «0» указывает на принадлежность к подпространству с «атомным» индексом $\alpha = 0$ (22), (24). Будем искать $\Delta\tilde{\rho}_0$ в ортогональном к $\tilde{\rho}_2$ (47) подпространстве. Часть поправки для $k = 0$ (23) обозначим $\Delta\tilde{\rho}_0^{(0)}$,

$$\Delta\tilde{\rho}_0^{(0)} = \sum_{n=0} \Delta\rho_n |\chi_{n,0}^{(0)}\rangle. \quad (51)$$

Уравнение для поправки $\Delta\tilde{\rho}_0^{(0)}$ получаем из (46) с помощью (27):

$$\tilde{M}_0(\tau) \left(\Lambda \Delta\tilde{\rho}_0^{(0)} \right) \tilde{M}_0^\dagger(\tau) + \tilde{M}_0(\tau) \left(\Delta\Gamma_{02}^{(0)} \tilde{\rho}_2^{(0)} \right) \tilde{M}_0^\dagger(\tau) - \mu_{20}T \tilde{M}_0(\tau) \tilde{\rho}_2 \tilde{M}_0^\dagger(\tau) = \Delta\tilde{\rho}_0 + \Delta\lambda_2 \tilde{\rho}_2. \quad (52)$$

Здесь $\Delta\lambda_2$ обозначает поправку к собственному числу λ_2 (47). Использовано правило действия $\Delta\Gamma$ (27):

$$\Delta\Gamma \tilde{\rho}_2 = \Delta\Gamma_{02}^{(0)} \tilde{\rho}_2^{(0)} - \mu_{20}T \tilde{\rho}_2.$$

Главная диагональ состояния (47) имеет вид

$$\tilde{\rho}_2^{(0)} = \exp(-q^2) \sum_{n=0} \frac{q^{2n}}{n!} |\chi_{n,2}^{(0)}\rangle. \quad (53)$$

Из (51), (52) получаем

$$\Delta\lambda_2 = -\mu_{20}T,$$

$$\left(\tilde{M}_0(\tau) \Delta\tilde{\rho}_0^{(0)} \tilde{M}_0^\dagger(\tau) \right)_0^{(0)} + \left(\tilde{M}_0(\tau) \left(\Delta\Gamma_{02}^{(0)} \tilde{\rho}_2^{(0)} \right) \tilde{M}_0^\dagger(\tau) \right)_0^{(0)} = \Delta\tilde{\rho}_0^{(0)}. \quad (54)$$

Вся поправка $\Delta\tilde{\rho}_0$ задается выражением

$$\Delta\tilde{\rho}_0 = \tilde{M}_0(\tau) \Delta\tilde{\rho}_0^{(0)} \tilde{M}_0^\dagger(\tau) + \tilde{M}_0(\tau) \left(\Delta\Gamma_{02}^{(0)} \tilde{\rho}_2^{(0)} \right) \tilde{M}_0^\dagger(\tau), \quad (55)$$

при выводе которого было использовано правило действия Λ (26),

$$\Lambda \Delta\tilde{\rho}_0^{(0)} = \Delta\tilde{\rho}_0^{(0)}.$$

Правило действия $\Delta\Gamma_{02}^{(0)} \tilde{\rho}_2^{(0)}$, согласно (27), (53), имеет вид

$$\Delta\Gamma_{02}^{(0)} \tilde{\rho}_2^{(0)} = \mu_{20}T \exp(-q^2) \times \left(|\chi_{0,0}^{(0)}\rangle + \frac{1}{2} \sum_{n=1} \frac{q^{2n}}{n!} |\chi_{n,0}^{(0)}\rangle \right). \quad (56)$$

Подставив (56) в (54), получим формулы для матричных элементов матрицы $\Delta\tilde{\rho}_0^{(0)}$ (51):

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \Delta\rho_0 + \Delta\rho_1 = \frac{\mu_{20}T}{4q^2 \sin^2(\tau\nu/2)}, \\ \eta_1 &= \Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 = \frac{\mu_{20}T}{4 \cos^2(\tau\nu/2)}, \\ \eta_2 &= \Delta\rho_2 + \Delta\rho_3 = \\ &= q^2 \mu_{20}T \frac{[\cos(\tau\nu) - \cos(\tau\nu\sqrt{2})]^2}{2 \cos^2(\tau\nu/2) \sin^2(\tau\nu\sqrt{2})}. \end{aligned} \quad (57)$$

Остальные матричные элементы матрицы $\Delta\tilde{\rho}_0^{(0)}$ (51) имеют более высокий порядок малости по параметру q^2 . Окончательно нормированная на единицу собственная матрица плотности $\tilde{\rho}_{ST}$ (46) для максимального собственного числа λ_{max} равна

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{ST} &= \tilde{\rho}_2 (1 - \eta_0 - \eta_1 - \eta_2) + \Delta\tilde{\rho}_0, \\ \lambda_{max} &= 1 - \mu_{20}T. \end{aligned} \quad (58)$$

Если квантовая система находится в состоянии $\tilde{\rho}_{ST}$ (58), то вероятность обнаружить вылетевший из резонатора атом-зонд в основном состоянии равна

$$P_0^{(ST)} = \lambda_{max} = 1 - \mu_{20}T. \quad (59)$$

Заселенности метастабильного атомного состояния 2, основного состояния 0, и первого состояния 1 равны

$$\begin{aligned} \text{Sp}_M(\tilde{\rho}_{ST}) &= a_0|0\rangle\langle 0| + a_1|1\rangle\langle 1| + a_2|2\rangle\langle 2|, \\ a_0 &= \eta_0 + \eta_2, \quad a_1 = \eta_1, \quad a_2 = 1 - \eta_0 - \eta_1 - \eta_2. \end{aligned} \quad (60)$$

При условии (50) заселенность метастабильного атомного состояния 2 близка к единице, т. е. наблюдается квантовый скачок в метастабильное состояние. При условии (50) состояние квантовой системы $\tilde{\rho}_{ST}$ близко к состоянию $\tilde{\rho}_2$,

$$\tilde{\rho}_{ST} \approx \tilde{\rho}_2.$$

Редуцированное состояние моды близко к вакууму Фока $U^\dagger|0\rangle\langle 0|U$. Состояние (58) описывает завершившийся квантовый скачок в метастабильное состояние.

6. ДИНАМИКА КВАНТОВОГО СКАЧКА В МЕТАСТАБИЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ V-СХЕМЫ

Изучим динамику квантового скачка в метастабильное состояние 2. Квантовый скачок — это квантомеханический процесс, динамику которого можно описать. Как отмечено выше, квантовый скачок в метастабильное состояние происходит в процессе редкой флуктуации — последовательного наблюдения вылетающих атомов-зондов в основном состоянии. Для описания динамики квантового скачка из яркого состояния в темновое необходимо определить начальное состояние квантовой системы перед скачком, которое обозначим $\tilde{\rho}_{in}$, и конечное состояние $\tilde{\rho}_{out}$. Как показывает эксперимент [7, 25], численное моделирование и полученные выше формулы, условная динамика квантовой системы, состоящей из моды резонатора и атома-источника, на интервалах времени яркого периода (между редкими квантовыми скачками) происходит таким образом, что метастабильный уровень 2 атома заселен слабо, а взаимодействие с метастабильным состоянием «выключено», т. е. трехуровневый атом эволюционирует на этом интервале времени, как двухуровневый. Как следствие, квантовое состояние системы, с которого начинается квантовый скачок, случайно, но близко к состоянию $\tilde{\rho}_{in} \approx \tilde{\rho}_0$ (37). Конечное состояние квантовой системы, в которое она переходит в процессе квантового скачка, — это собственная матрица $\tilde{\rho}_{ST}$ для максимального собственного числа (46)

$$\tilde{\rho}_{out} = \tilde{\rho}_{ST}. \tag{61}$$

Этих двух состояний достаточно, чтобы описать динамику перехода квантовой системы в процессе последовательных квантовых измерений из состояния $\tilde{\rho}_{in}$ в $\tilde{\rho}_{out}$.

Приближение двух состояний для описания квантового скачка использовалось в работе [26]. Разло-

жим начальное состояние $\tilde{\rho}_{in}$ по собственным матрицам $\tilde{\rho}_0$ и $\tilde{\rho}_{ST}$ задачи (46):

$$\tilde{\rho}_{in} = \frac{r_0 \tilde{\rho}_0 + r_2 \tilde{\rho}_{ST}}{r_0 + r_2}. \tag{62}$$

В силу сказанного выше, коэффициент r_0 близок к единице, $r_0 \approx 1$. Коэффициент r_2 мал (при условии (50)) и не равен нулю, потому что в матрице $\tilde{\rho}_{ST}$ имеется добавка $\Delta\tilde{\rho}_0$ (55). Величину r_2 можно оценить по формуле

$$r_2 = \text{Sp}_{A,M}(\Delta\tilde{\rho}_0) = \eta_0 = \frac{\mu_{20}T}{4q^2 \sin^2(\tau\nu/2)}.$$

Условная матрица плотности квантовой системы после ℓ циклов измерений, в результате которых зонд обнаружен в основном состоянии, имеет вид

$$\tilde{\rho}(\ell) = \frac{r_0(\lambda_0)^\ell \tilde{\rho}_0 + r_2(\lambda_{max})^\ell \tilde{\rho}_{ST}}{r_0(\lambda_0)^\ell + r_2(\lambda_{max})^\ell}. \tag{63}$$

С помощью матрицы (63) можно получить различные свойства квантового скачка. Изучим длительность скачка из яркого состояния в темновое. Длительность скачка (для идеального детектора) можно определять по числу пролетевших атомов-зондов. Будем считать скачок в состояние $\tilde{\rho}_{out} = \tilde{\rho}_{ST}$ законченным, если состояние $\tilde{\rho}_0$ заселено на 10 %, т. е. выполнено соотношение

$$\frac{r_0}{r_2} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{max}} \right)^{N_J} \approx 0.1.$$

Здесь λ_0 и λ_{max} определяются формулами (49) и (58). Отсюда число последовательных обнаружений атомов-зондов в основном состоянии, необходимое для завершения квантового скачка, равно

$$N_J = \ln \frac{0.1 \mu_{20}T}{4q^2 \sin^2(\tau\nu/2)} \times \left(\ln \frac{1 - 4q^2 \sin^2(\tau\nu/2)}{1 - \mu_{20}T} \right)^{-1}. \tag{64}$$

Получим формулу для априорной вероятности последовательных обнаружений атомов-зондов в основном состоянии (перед измерением):

$$P_0(\ell + 1) = \text{Sp}_{A,M} \left(\tilde{M}_0(\tau) (\Gamma \tilde{\rho}(\ell)) \tilde{M}_0^\dagger(\tau) \right) = \frac{r_0(\lambda_0)^{\ell+1} + r_2(\lambda_{max})^{\ell+1}}{r_0(\lambda_0)^\ell + r_2(\lambda_{max})^\ell}. \tag{65}$$

Среднее число фотонов в резонаторе после очередного (ℓ -го) обнаружения атома-зонда в основном состоянии оценивается по формуле

$$\bar{n}(\ell) = q^2 \frac{\cos^2(\nu\tau)}{\cos^2(\nu\tau/2)} \frac{r_0(\lambda_0)^\ell}{r_0(\lambda_0)^\ell + r_2(\lambda_{max})^\ell}.$$

Заселенность флуоресцирующего атомного уровня 1 на переднем фронте квантового скачка равна

$$a_1(\ell) = q^2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\tau\nu}{2} \right) \frac{r_0(\lambda_0)^\ell}{r_0(\lambda_0)^\ell + r_2(\lambda_{max})^\ell}. \quad (66)$$

Заселенность метастабильного атомного уровня 2 на переднем фронте квантового скачка равна

$$a_2(\ell) = \frac{r_2(\lambda_{max})^\ell}{r_0(\lambda_0)^\ell + r_2(\lambda_{max})^\ell}. \quad (67)$$

В процессе квантового скачка квантовая система переходит в метастабильное состояние $\tilde{\rho}_{ST}$, где она остается некоторое время. Как показывают эксперимент и моделирование, квантовая система покидает метастабильное состояние также скачком. Квантовый скачок из метастабильного состояния во флуоресцирующее (переход от темнового состояния к яркому) происходит в тот момент, когда очередной вылетевший атом-зонд детектируется в возбужденном состоянии. Вероятность такого события равна

$$P_1^{(ST)} = 1 - P_0^{(ST)} = \mu_{20}T. \quad (68)$$

Здесь величина $P_0^{(ST)}$ определена в (59). Условное состояние квантовой системы после квантового скачка из метастабильного состояния равно

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_J &= \frac{\tilde{M}_1(\tau) (\Gamma \tilde{\rho}_{ST}) \tilde{M}_1^\dagger(\tau)}{\operatorname{Sp}_{A,M} \left(\tilde{M}_1(\tau) (\Gamma \tilde{\rho}_{ST}) \tilde{M}_1^\dagger(\tau) \right)} \approx \\ &\approx \frac{\tilde{M}_1(\tau) \Delta \tilde{\rho}_0^{(0)} \tilde{M}_1^\dagger(\tau)}{\operatorname{Sp}_{A,M} \left(\tilde{M}_1(\tau) \Delta \tilde{\rho}_0^{(0)} \tilde{M}_1^\dagger(\tau) \right)}, \end{aligned}$$

где матрица $\Delta \tilde{\rho}_0^{(0)}$ определена в (51), (57).

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квантовые скачки в метастабильное состояние, прерывающие резонансную флуоресценцию, впервые рассмотрены в работе [11], и там же обсуждаются возможные применения этого эффекта. Он может быть использован, например, для создания атомных стандартов частоты и квантового генератора случайных чисел, а также в спектроскопии сверхвысокого разрешения и в других случаях. Эффект можно наблюдать в спектре резонансной флуоресценции одиночного атома или иона, захваченного в атомной ловушке [4–10]. Различные варианты теоретического описания этого эффекта, использующие балансные уравнения и теорию непрерывного фотодетектирования, рассмотрены в обзоре [13]. В отличие

от имеющихся работ, в нашей работе показано, что эффект можно наблюдать в процессе дискретного фотодетектирования. Для этого необходимо следить за статистикой срабатываний ионизационной камеры, обнаруживающей вылетающий атом-зонд в возбужденном состоянии. Если параметры взаимодействия зонда с модой резонатора выбраны правильно (выполнено неравенство (50)), то в течение некоторых интервалов времени возбужденные атомы перестают наблюдаться (см. рис. 1). Как показывает теория, в течение этих интервалов атом переходит в метастабильное состояние и, таким образом, детектируются квантовые скачки.

Для построения теории дискретного фотодетектирования и ее применения для описания квантовых скачков в работе получены решения ряда задач. Показано, что резонансная флуоресценция атома, помещенного в одномодовый резонатор, возбуждается в резонаторе когерентное состояние моды (13). Для этого требуется настройка резонатора в точный резонанс с флуоресцирующим атомным переходом. Это решение дополняет результаты работы [18], где изучен уровень возбуждения резонаторной моды в зависимости от не равной нулю отстройки частоты резонатора от частоты атомного перехода. С возбуждаемой атомом-источником модой резонатора взаимодействуют невозбужденные атомы-зонды. В присутствии потока зондов квантовая система изменяет состояние равновесия. Редуцированная матрица плотности полного ансамбля оценивается по формуле (38). Установившееся состояние полного ансамбля квантовой системы, когда атом-источник описывается двумя уровнями (метастабильный переход не возбуждается), оценивается по приближенной формуле (37). Предельная условная матрица плотности квантовой системы, с помощью которой описывается завершившийся квантовый скачок в метастабильное состояние, оценивается по формуле (58).

На рис. 3 рассмотрен отрезок последовательности событий из полной последовательности в 50000 пролетов атомов-зондов (см. рис. 1, 2), которые произошли между 24360 и 26360 пролетами. Представлены смоделированная с помощью стохастических рекуррентных соотношений (42) и рассчитанная с помощью условной матрицы плотности $\tilde{\rho}(\ell)$ (42) последовательности значений заселенности метастабильного уровня 2 в зависимости от числа пролетевших атомов-зондов (кривая 1). Жирными точками показаны атомы-зонды, обнаруженные в возбужденном состоянии. Остальные атомы-зонды были найдены в основном состоянии. Как следует из кривой 1, переход в метастабильное состояние начинается тогда,

когда детектор перестает «видеть» атомы-зонды в возбужденном состоянии. Кривая 3 показывает передний фронт квантового скачка, рассчитанный по формуле (67) в приближении двух состояний $\tilde{\rho}_{in}$ (62) и $\tilde{\rho}_{out}$ (61). Модель двух состояний дает результат, близкий к численному расчету.

На рис. 4 рассмотрен отрезок последовательности событий, которые произошли между 17000 и 17500 пролетами. Представлен результат расчета значений заселенности флуоресцирующего уровня 1 — яркий период (кривая 1). Длительность яркого периода случайна, он начинается мгновенно, с момента обнаружения атома-зонда в возбужденном состоянии. С этого момента заканчивается темновой период. Яркий период длится до тех пор, пока не возникнет критическая флуктуация. Атомы-зонды перестают детектироваться в возбужденном состоянии, и яркий период переходит в темновой. Кривая 2 показывает задний фронт яркого периода, динамика которого смоделирована с помощью модели двух состояний по формуле (66). Представлена (прямая 4) величина заселенности a_1 флуоресцирующего уровня, рассчитанная по формуле (41), для значений $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_1 = 0$, т.е. эта величина рассчитана для установившегося состояния в полном ансамбле, где атом-источник описывается двухуровневой схемой (метастабильный уровень не возбуждается). Таким образом, подтверждается тот факт, что в течение яркого периода заселенность метастабильного уровня 2 мала, и ей можно пренебречь.

На рис. 5 показан результат расчета априорной вероятности $P_0(\ell)$ обнаружения атомов-зондов в основном состоянии между 24360 и 26360 пролетами (кривая 1). Расчет выполнен по формулам (42). Атомы-зонды, обнаруженные в возбужденном состоянии, показаны жирными точками 7. Показан уровень 5 априорной вероятности обнаружения зонда в основном состоянии, рассчитанный по формуле (39) для установившегося состояния (38) полного ансамбля. Приближенное значение вероятности обнаружения атома-зонда в основном состоянии, равное 0.89 (прямая 3), вычисленное по формуле (39) (где следует положить $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0$, возбуждением метастабильного уровня пренебрегается). Точное значение этой вероятности, равное 0.897 показывает прямая 4. Значения достаточно близки, что говорит о достаточной точности формулы (39) для расчета вероятности обнаружения атома-зонда в основном состоянии на протяжении яркого периода. Представлен уровень λ_{max} (прямая 6) вероятности обнаружения атома-зонда в основном состоянии, рассчитанный по формуле (58). Кривая 1 стремится к значению λ_{max}

с ростом числа атомов-зондов, найденных в основном состоянии. Кривая 2, рассчитанная по приближенной формуле (65), хорошо совпадает с передним фронтом 1. Этот факт говорит о том, что модель двух состояний дает достаточно хорошие результаты и для расчета априорной вероятности $P_\xi(\ell)$ (42).

Оценим вероятность P_{CF} критической флуктуации, предполагая, что вероятность обнаружения любого атома-зонда в основном состоянии одинакова и равна λ_0 (49). Тогда, используя формулу (64) для оценки N_J — числа атомов-зондов, обнаруженных в основном состоянии, т.е. «длительности» критической флуктуации, получаем

$$P_{CF} \approx (\lambda_0)^{N_J}. \quad (69)$$

Для набора параметров (45) получаем оценки

$$\lambda_0 \approx 0.89, \quad N_J \approx 65, \quad P_{CF} \approx 5 \cdot 10^{-4}. \quad (70)$$

С помощью формулы (69) можно оценить количество попыток, в течение которых произойдет критическая флуктуация, т.е. оценить N_B «длительность» яркого периода:

$$N_B \approx (P_{CF})^{-1} = 2000. \quad (71)$$

Вероятность $P_1^{(ST)}$ обнаружить атом-зонд в возбужденном состоянии в течение темнового периода оценивается по формуле (68). «Длительность» N_D темнового периода (число пролетов зондов) для набора параметров (45) оценивается по формуле

$$N_D \approx (P_1^{(ST)})^{-1} = 1700. \quad (72)$$

В заключение отметим, что оценки (70)–(72) хорошо согласуются с результатами численного моделирования, представленными на рис. 1, 2. Отметим также, что вероятность P_{CF} (69) может быть выше оценки (70). Здесь следует принять во внимание своеобразный эффект самоорганизации критической флуктуации. Как следует из рис. 5, в течение критической флуктуации обнаружение атома-зонда в основном состоянии изменяет условную редуцированную матрицу плотности моды так, что вероятность обнаружить очередной атом-зонд в основном состоянии возрастает. В результате переход в темновое состояние ускоряется, хотя и занимает конечный отрезок времени. Как показывает теория, обратный переход из темнового состояния в яркое осуществляется мгновенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Мандельштам, *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике*, Наука, Москва (1972).
2. S. Peil and G. Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1287 (1999).
3. O. Benson, G. Raithel, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3506 (1994).
4. W. Nagorney, J. Sandberg, and H. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2797 (1986).
5. J. C. Bergquist, R. G. Hulet, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1699 (1986).
6. Th. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt, and P. E. Toschek, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1696 (1986).
7. M. A. Finn, G. W. Greenlees, and T. W. Hodapp, *Phys. Rev. A* **40**, 1704 (1989).
8. D. A. Lewis, J. Kumar, M. A. Finn, and G. W. Greenlees, *Phys. Rev. A* **35**, 131 (1987).
9. D. J. Berkeland, D. A. Raymondson, and V. M. Tassin, *Phys. Rev. A* **69**, 052103 (2004).
10. M. Knoop, C. Champenois, G. Hagel et al., *Eur. Phys. J. D* **29**, 1 (2004).
11. H. G. Dehmelt, *Bull. Amer. Phys. Soc.* **20**, 60 (1975).
12. P. L. Kelley and W. H. Kleiner, *Phys. Rev.* **136**, A316 (1964).
13. M. B. Plenio and P. L. Knight, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 101 (1998).
14. Y. Ben-Aryeh and C. Brif, arXiv:quant-ph/9504009.
15. N. Imoto, M. Ueda, and T. Ogawa, *Phys. Rev. A* **41**, 4127 (1990).
16. A. V. Dodonov, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, *J. Opt. B: Quant. Semicl. Opt.* **7**, 99 (2005).
17. Г. П. Мирошниченко, *ЖЭТФ* **131**, 829 (2007).
18. Г. П. Мирошниченко, *ЖЭТФ* **134**, 1115 (2008).
19. D. Meschede, H. Walther, and G. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 551 (1985).
20. M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre et al., *Phys. Rev. Lett.* **65**, 976 (1990).
21. G. Rempe, F. Schmidt-Kaler, and H. Walter, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2783 (1990).
22. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Press, Dordrecht (1999).
23. К. Блум, *Теория матрицы плотности и ее приложения*, Мир, Москва (1983).
24. К. Краус, *States, Effects, and Operations*, Springer-Verlag, Berlin (1983).
25. A. Schenzle and R. G. Brewer, *Phys. Rev. A* **34**, 3127 (1986).
26. Г. П. Мирошниченко, *Опт. и спектр.* **96**, 776 (2004).