

МЕХАНИЗМЫ ПОДАВЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ СВЯЗАННЫХ МОД В ЦИКЛИЧЕСКОМ УСКОРИТЕЛЕ

*В. В. Смалюк**

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 23 июля 2008 г.

Анализируется хроматическое и нелинейное подавление неустойчивости поперечных связанных мод в циклическом ускорителе. Аналитические оценки сравниваются с результатами экспериментов и численного моделирования. Неустойчивость поперечных связанных мод или fast head-tail является существенным фактором, ограничивающим интенсивность пучка в циклических ускорителях. Эта неустойчивость возникает, когда ток сгустка превышает пороговую величину, определяемую широкополосным импедансом вакуумной камеры. Традиционно для подавления неустойчивости применяются системы обратной связи. Опыт работы с такими системами показывает, что их эффективность сильно зависит от рабочих параметров ускорителя, особенно от хроматизма и нелинейности магнитной структуры. Таким образом, для лучшего понимания физических процессов и повышения эффективности обратной связи должны учитываться как хроматические, так и нелинейные эффекты.

PACS: 29.20.-c, 29.27.-a, 29.27.Bd

1. ВВЕДЕНИЕ

Интенсивный пучок частиц, движущийся в вакуумной камере ускорителя, наводит довольно сильные электромагнитные поля (wake-поля), в свою очередь воздействующие на сам пучок. Для анализа взаимодействия пучка с окружающей структурой используется понятие wake-потенциала, определенного как интеграл электромагнитных сил взаимодействия, взятый вдоль траектории пучка. В пространстве частот каждая часть вакуумной камеры может быть представлена как частотно-зависимый импеданс связи, представляющий собой фурье-образ wake-потенциала точечного заряда [1].

Причина неустойчивости поперечных связанных мод (transverse coupling modes, TMC или fast head-tail) заключается в резонансном взаимодействии пучка и короткоживущих wake-полей. Короткоживущие wake-поля, наведенные головной частью сгруппированного пучка, воздействуют на частицы его хвостовой части (head-tail-эффект). Из-за продольных синхротронных колебаний голова

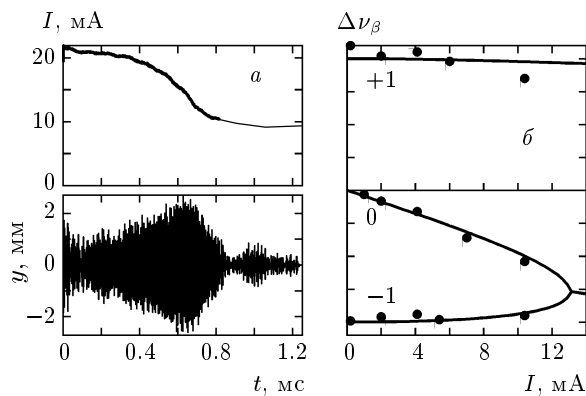


Рис. 1. Развитие TMC-неустойчивости (а) и связь head-tail-мод (б)

и хвост пучка периодически меняются местами, при выполнении резонансных условий происходит неограниченное нарастание амплитуды бетатронных колебаний, приводящие к потерям частиц пучка. На рис. 1а приведен пример поворотных измерений тока (верхний график) и вертикальной координаты (нижний график) пучка, инжектирован-

*E-mail: smaluk@inp.nsk.su

ного в электрон-позитронный коллайдер ВЭПП-4М Института ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН. Видно, как с развитием неустойчивости происходят потери пучка до величины, меньшей пороговой. В пространстве частот взаимодействие пучка с широкополосным импедансом приводит к сдвигу частот бетатронных колебаний, в основном 0-й (когерентной) моды. На рис. 1б показаны расчетные кривые сдвига частот для 0-й, 1-й и -1-й head-tail мод в зависимости от тока пучка, точками нанесены результаты измерений.

Поскольку ТМС-неустойчивость является существенным фактором, ограничивающим интенсивность пучка в циклических ускорителях, в ряде ускорительных лабораторий проводились довольно интенсивные экспериментальные и теоретические исследования с использованием как аналитических (двухчастичная модель, модель полого пучка, уравнение Власова и теория возмущений), так и численных методов.

Обратная связь является общепринятым способом подавления неустойчивости. Впервые реактивная схема обратной связи была предложена для предотвращения зависящего от тока пучка сдвига частоты когерентной моды бетатронных колебаний и, таким образом, для уменьшения связи head-tail-мод, приводящей к неустойчивости [2]. Согласно теории, разработанной с использованием как двухчастичной модели, так и уравнения Власова, реактивная обратная связь может быть использована для повышения порогового тока fast head-tail-неустойчивости, в то время как резистивная обратная связь представляется абсолютно неэффективной [3]. Вариант реактивной системы обратной связи, предложенной в работе [4], был реализован на установке LEP в ЦЕРНе (Швейцария). Было достигнуто некоторое увеличение порогового тока пучка — около 5% (компьютерное моделирование предсказывало 10%) [5].

На электрон-позитронном коллайдере ВЭПП-4М была разработана система обратной связи с регулируемой фазой, позволяющая реализовать как реактивную, так и резистивную схемы. В противоречие теории [3] экспериментально было обнаружено, что резистивная обратная связь также является эффективной. При малом положительном хроматизме оптимальная фаза обратной связи оказалась ближе к нулю (резистивная обратная связь), чем к $\pi/2$ (реактивная обратная связь), при этом на установке ВЭПП-4М был достигнут ток пучка, вдвое превышающий порог ТМС-неустойчивости [6].

Математическая модель head-tail-неустойчивости, вызванной электронными облаками, разработанная

с учетом хроматизма магнитной структуры на основе многомодового анализа задачи на собственные значения, опубликована в работе [7]. С использованием такой же методики условия применимости реактивной, резистивной либо некоторой промежуточной схемы обратной связи для подавления ТМС-неустойчивости были подробно исследованы в работе [8]. Согласно [8], резистивная обратная связь должна эффективно подавлять неустойчивость при большом отрицательном хроматизме. Основная идея заключается в подавлении когерентной моды колебаний (центр масс пучка) с помощью обратной связи при стабильности высших мод за счет отрицательного хроматизма.

Однако новые эксперименты на ВЭПП-4М показали, что, напротив, обратная связь гораздо более эффективна при положительном хроматизме, чем при отрицательном. Была также обнаружена сильная зависимость от нелинейности магнитной структуры. Похожие эффекты наблюдались и на других установках: ESRF, Франция [9] (хроматизм) и KEK Photon Factory, Япония [10] (нелинейность).

Итак, для понимания механизмов возникновения и подавления неустойчивости поперечных связанных мод должны одновременно учитываться как хроматические, так и нелинейные эффекты.

2. МОДЕЛЬ ШИРОКОПОЛОСНОГО ИМПЕДАНСА

Частицы пучка, двигаясь в вакуумной камере ускорителя, взаимодействуют между собой посредством наведенных электромагнитных полей. Вследствие этого движение частиц в сгруппированном пучке отличается от движения единственной частицы, определяемого только полями элементов магнитной структуры ускорителя. В пространстве частот взаимодействие частиц пучка с окружающей структурой характеризуется импедансом связи. Узкополосный импеданс приводит к взаимодействию нескольких сгустков между собой, в то время как широкополосный импеданс вносит взаимодействие частиц внутри сгустка. В результате наличие в ускорителе участков с узкополосным импедансом (например, паразитные высшие моды ускоряющих резонаторов) может приводить к возникновению многосгустковой неустойчивости, а широкополосный импеданс может вызывать односгустковую неустойчивость.

В большинстве практических случаев частотная зависимость широкополосного поперечного им-

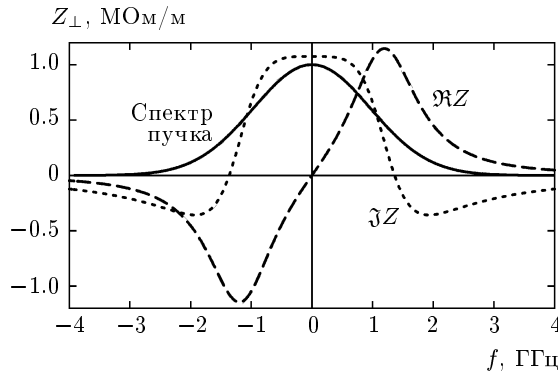


Рис. 2. Модель широкополосного импеданса ВЭПП-4М

педанса $Z_{\perp BB}$ может быть приближенно описана моделью низкодобротного резонатора:

$$Z_{\perp BB} = \frac{R_s}{\frac{\omega}{\omega_r} + iQ \left(\frac{\omega^2}{\omega_r^2} - 1 \right)}, \quad (1)$$

где R_s — шунтовое сопротивление, Q — добротность, ω_r — характеристическая частота. Эта частота определяет ширину полосы взаимодействия, ее величина зависит от размера области взаимодействия, $\omega_r = c/b$ для коротких ($\sigma_z \ll b$) сгустков и $\omega_r = c/\sigma_z$ для длинных ($\sigma_z \gg b$) сгустков, b — характерный поперечный размер вакуумной камеры, σ_z — среднеквадратичная длина сгустка. В случае ВЭПП-4М эти две величины близки: $b \approx 30$ мм, $\sigma_z \approx 35$ –50 мм.

Модель широкополосного импеданса ВЭПП-4М, используемую в дальнейших расчетах, иллюстрирует рис. 2, на котором приведены графики действительной (резистивной) $\Re Z$ и мнимой (реактивной) $\Im Z$ частей импеданса, а также спектр пучка (преобразование Фурье гауссовского продольного распределения с $\sigma_z = 35$ мм).

3. ДВУХЧАСТИЧНАЯ МОДЕЛЬ

Двухчастичная модель неустойчивости поперечных связанных мод подробно анализируется в работе [1]. Пучок представлен в виде двух макрочастиц, приближенные решения уравнений движения позволяют определить зависящий от интенсивности сдвиг частоты колебаний когерентной моды. Постоянная wake-функция W_0 , используемая в работе [1], может быть определена в терминах импеданса как

$$W_0 = \frac{c}{\sigma_z} \frac{\nu_\beta \langle \beta \rangle}{R} Z_{\perp 11}, \quad (2)$$

где $Z_{\perp 11}$ — низкочастотный поперечный импеданс, c/σ_z — характеристическая частота, ν_β — частота бетатронных колебаний в единицах частоты обращения пучка, $\langle \beta \rangle$ — средняя по кольцу бета-функция, R — средний радиус ускорителя. В рамках модели низкодобротного резонатора (1) $Z_{\perp 11} = \Im Z_{\perp BB}(0)$. Геометрический коэффициент $\nu_\beta \langle \beta \rangle / R$ равен единице для аксиально-симметричной модели ускорителя.

Используя формулу (2) можно записать выражение для когерентного сдвига бетатронной частоты ν_β в виде

$$\Delta \nu_\beta = - \frac{\sqrt{2\pi} R}{\sigma_z} \frac{\Im Z_{\perp BB}(0) \langle \beta \rangle}{8\pi E/e} I_b, \quad (3)$$

где E — энергия пучка, $I_b = Nef_0$ — его средний ток, множитель $\sqrt{2\pi}$ обычно используется для гауссовского сгустка и следует из определения амплитудного значения тока пучка $I_p = \sqrt{2\pi} R I_b / \sigma_z$. Реактивная часть широкополосного импеданса может быть определена экспериментально по измеренной зависимости (3).

Пороговый ток неустойчивости поперечных связанных мод определен как ток пучка, при котором сдвиг бетатронной частоты $\Delta \nu_\beta$ достигает величины, равной половине синхротронной частоты ν_s [1]. С учетом множителя $\sqrt{2\pi}$ из (3) получается известная формула для гауссовского сгустка:

$$I_{tmci} = - \frac{\sigma_z}{\sqrt{2\pi} R} \frac{8\pi \nu_s E/e}{\Im Z_{\perp BB}(0) \langle \beta \rangle}. \quad (4)$$

Чтобы определить вид зависимости инкремента неустойчивости от тока пучка, уравнения движения в рамках двухчастичной модели решались численно. Линейные продольные колебания двух макрочастиц описываются противофазными синусоидами постоянной амплитуды, бетатронные колебания с учетом wake-полей — следующими дифференциальными уравнениями (выведенными из [1]):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \omega_\beta^2 y_1 &= y_2 \omega_\beta \omega_s \frac{I_b}{I_{tmci}} \varepsilon(\cos \omega_s t), \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \omega_\beta^2 y_2 &= y_1 \omega_\beta \omega_s \frac{I_b}{I_{tmci}} \varepsilon(-\cos \omega_s t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega_\beta = \nu_\beta \omega_0$ — циклическая частота бетатронных колебаний, $\omega_s = \nu_s \omega_0$ — синхротронных, $\varepsilon(x)$ — функция Хевисайда.

Для ряда численных решений системы (5), полученных при различных значениях нормализованного тока пучка I_b/I_{tmci} и синхротронной частоты ν_s , вычислялась огибающая колебаний центра масс

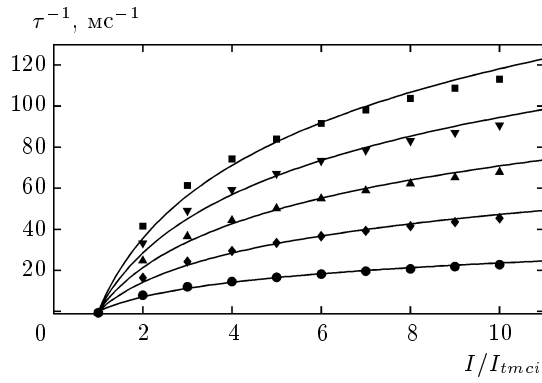


Рис. 3. Инкремент ТМС-неустойчивости, двухчастичная модель, $\nu_s = 0.025$ (■), 0.020 (▼), 0.015 (▲), 0.010 (◆), 0.005 (●)

пучка $(y_1 + y_2)/2$, аппроксимация которой экспоненциальной функцией $\exp(t/\tau_{tmc})$ дает величину инкремента, τ_{tmc} — время нарастания неустойчивости. На рис. 3 представлены вычисленные таким образом значения инкремента при $\nu_s = 0.005-0.025$ и $I_b/I_{tmc} = 1-10$. Как видно на рис. 3, зависимость $\tau_{tmc}^{-1}(I_b/I_{tmc})$ довольно хорошо описывается логарифмической функцией (сплошные линии на графике):

$$\tau_{tmc}^{-1} = \sqrt{2\pi} \omega_s \ln \frac{I_b}{I_{tmc}}. \quad (6)$$

4. ХРОМАТИЧЕСКИЙ HEAD-TAIL-ЭФФЕКТ

При ненулевом хроматизме магнитной структуры возникает head-tail-эффект, при котором некоторые моды колебаний становятся неустойчивыми при любом токе пучка, без порога. Хроматический head-tail-эффект характеризуется head-tail-фазой:

$$\chi = \frac{\xi \sigma_z}{\alpha R}, \quad (7)$$

где α — коэффициент расширения орбит, а хроматизм ξ определен как

$$\xi = \frac{\Delta \nu_\beta}{\Delta p/p}. \quad (8)$$

Двухчастичная модель дает широко используемую для оценок устойчивости формулу, верную при условии $\chi \ll 1$ [1]:

$$\tau_{\pm}^{-1} = \mp I_b \frac{c \xi}{2\pi \alpha \nu_\beta E/e} Z_{\perp 1}. \quad (9)$$

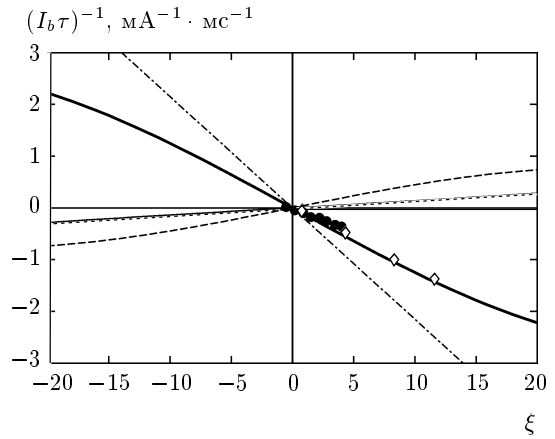


Рис. 4. Инкременты/декременты низших мод хроматического head-tail-эффекта: измерения 1997 (●), 2008 (◇) гг.; $n = 0$ (сплошная линия), 1 (штриховая), 2 (пунктирная); штрихпунктирная линия — расчет по двухчастичной модели

Когерентная мода (колебания центра масс), характеризующая временем τ_+ затухает при $\xi/\alpha > 0$ и нарастает при $\xi/\alpha < 0$, в то время как некогерентная (поперечный размер пучка), характеризующая τ_- , — наоборот.

В рамках двухчастичной модели инкремент/декремент двух мод колебаний при одном и том же хроматизме отличается только знаком. Как было отмечено в работе [1], двухчастичная модель дает завышенные значения инкремента/декремента. Более точное выражение для инкремента/декремента n -й head-tail-моды получено путем приближенного решения уравнения Власова методами теории возмущений:

$$\tau_n^{-1} = -I_b \frac{c}{4\pi \omega_\beta E/e} \times \int_{-\infty}^{\infty} \Re Z_{\perp BB}(\omega) J_n^2 \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \chi \right) d\omega, \quad (10)$$

где J_n — функция Бесселя порядка n .

Если при положительном хроматизме ξ возбудить когерентные бетатронные колебания пучка с помощью импульсного кикера, то величина импеданса может быть оценена по измеренной зависимости времени быстрого затухания колебаний от тока пучка. На рис. 4 представлены графики нормированных на ток пучка инкрементов/декрементов (10) 0-й, 1-й и 2-й head-tail-мод в зависимости от хроматизма вместе с экспериментальными данными, полученными в 1997 и 2008 гг. Для сравнения показана

также зависимость (9), полученная в рамках двух-частичной модели.

По результатам измерений, принимая во внимание измеренную величину когерентного сдвига частоты (3), пропорционального реактивной части импеданса, можно определить параметры резонаторной модели широкополосного импеданса (1). Так, вертикальный широкополосный импеданс ВЭПП-4М может быть охарактеризован следующими параметрами, полученными в результате измерений: $R_s \approx 1.1$ МОм/м, $Q = 1$, $\omega_r = c/\sigma_z = 1.36$ ГГц при $\sigma_z = 35$ мм.

5. ПОТЕРЯ КОГЕРЕНТНОСТИ КОЛЕБАНИЙ

Анализ динамики когерентных бетатронных колебаний в ведущем магнитном поле с ненулевым хроматизмом и кубической нелинейностью приведен в работе [11]. Не учитывая коллективные эффекты, рассмотрим одиночный сгусток в отсутствие когерентных бетатронных и синхротронных колебаний. Функция распределения частиц в фазовом пространстве бетатронных колебаний имеет вид

$$f(a^2, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(a^2, t) \exp\{-in(\omega_\beta t - \varphi)\}, \quad (11)$$

где a — амплитуда, φ — фаза, ω_β — циклическая частота. Усреднение за время, много большее периода колебаний, дает огибающую n -й моды:

$$A_n = \left| \int_0^\infty f_n(a^2, t) da^2 \right|. \quad (12)$$

При нулевом хроматизме и без коллективных эффектов приближение первого порядка дает

$$f_n(a^2, t) = f_n(a^2, 0) \exp\left\{-in \frac{\partial \omega_\beta}{\partial a^2} a^2 t\right\}, \quad (13)$$

где $\partial \omega_\beta / \partial a^2$ — амплитудно-зависимый сдвиг частоты бетатронных колебаний, вызванный кубической нелинейностью ведущего магнитного поля.

В случае ненулевого хроматизма функция распределения может быть представлена в виде произведения:

$$f_n \xi(a^2, \epsilon) = f_n(a^2) \phi(\epsilon), \quad (14)$$

где ϵ — амплитуда синхротронных колебаний. Для учета хроматизма функция $f_n(a^2, t)$ (13) должна быть умножена на

$$M_n = 2\pi \int_0^\infty J_0 \left(2n \frac{\xi}{\nu_s} \frac{\epsilon}{E} \sin \frac{\omega_s t}{2} \right) \phi(\epsilon) \epsilon d\epsilon, \quad (15)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, E — равновесная энергия пучка. Это произведение означает, что огибающая n -й моды $A_n(t)$ модулирована по амплитуде с коэффициентом $M_n(t)$.

Если для равновесного пучка распределение амплитуд бетатронных колебаний описывается функцией $F(a^2)$, то при ударном возбуждении когерентных бетатронных колебаний с амплитудой a_0 функция распределения принимает вид

$$F(a^2 - 2a_0 a \sin \varphi + a_0^2) \phi(\epsilon).$$

Вычисляя огибающую $A_1(t)$ при выполнении условий

$$a_0 \gg \sigma_\perp, \quad t \ll \left| \frac{\partial \omega_\beta}{\partial a^2} \sigma_\perp^2 \right|^{-1},$$

где σ_\perp — поперечный размер пучка, получаем

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \\ &= M_1(t) \left| \int_0^\infty F(a^2) J_0 \left(2 \frac{\partial \omega_\beta}{\partial a^2} a_0 a t \right) da^2 \right|. \end{aligned} \quad (16)$$

Функции распределения $F(a^2)$ и $\phi(\epsilon)$ равновесного пучка являются гауссовыми и согласно (16) огибающая когерентных колебаний имеет вид

$$\begin{aligned} A_1(t) &\propto \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \times \\ &\times \exp\left[-\left(\frac{\xi}{\nu_s} \frac{\sigma_E}{E}\right)^2 (1 - \cos \omega_s t)\right], \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\tau^{-1} = 2 \frac{\partial \omega_\beta}{\partial a^2} a_0 \sigma_\perp, \quad (18)$$

а σ_E — среднеквадратичный энергетический разброс. В формуле (17) первый экспоненциальный множитель соответствует потере когерентности колебаний из-за нелинейности $\partial \omega_\beta / \partial a^2$, зависимость огибающей от времени имеет гауссовский вид. Второй множитель соответствует хроматической модуляции когерентных колебаний, представляющей собой периодический обмен энергией между когерентной и некогерентными модами колебаний.

Примеры измеренных когерентных колебаний пучка, инжектированного в ВЭПП-4М с различными значениями хроматизма и нелинейности, представлены на рис. 5. В предположении, что описанные выше процессы возбуждения и подавления колебаний независимы, огибающая колебаний вычислена как произведение экспоненциальных

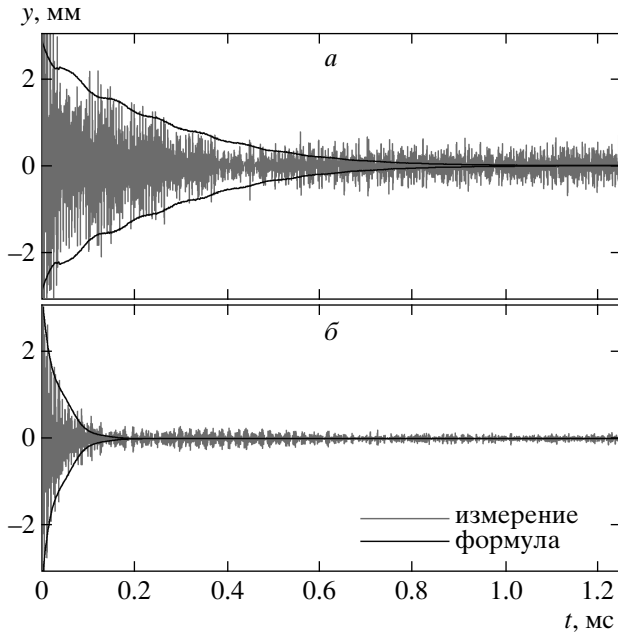


Рис. 5. Огибающая колебаний пучка: $\xi = 4.5$ (а), 10.0 (б); $d\nu_\beta/da^2 = -386$ (а), -2019 (б) м^{-2} , $I_{inj} = 23.9$ (а), 28.7 (б) мА, $I_{tmc} = 10.2$ (а), 10.9 (б) мА

множителей, представляющих ТМС-неустойчивость (6), быстрое затухание, вносимое хроматическим head-tail-эффектом (10), а также потери когерентности колебаний из-за хроматизма и нелинейности (17). Рисунок 5а иллюстрирует случай малых значений хроматизма и нелинейности, когда ток инжектируемого пучка, равный 23.9 мА, уменьшается из-за ТМС-неустойчивости до 10 мА (пороговый ток). Рисунок 5б соответствует большим значениям хроматизма и нелинейности, в этом случае неустойчивость быстро подавляется и потери тока пучка составляют около 3 мА, в то время как ток инжектируемого пучка равен 28.7 мА.

6. МНОГОЧАСТИЧНАЯ МОДЕЛЬ: ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Для анализа устойчивости бетатронных колебаний, принимая во внимание неустойчивость поперечных связанных мод, хроматический head-tail-эффект, а также потерю когерентности колебаний за счет хроматизма и нелинейности, была разработана многочастичная численная модель. В этой модели пучок представлен в виде ансамбля N_p макро-частиц, имеющих гауссовское начальное распреде-

ние по амплитудам бетатронных колебаний и равномерное распределение по фазам. В продольном направлении все частицы совершают линейные синхротронные колебания с одинаковой амплитудой и равномерно распределенными фазами. Бетатронное движение k -й частицы на каждом обороте определяется матричным преобразованием

$$\begin{pmatrix} x_{k,n+1} \\ x'_{k,n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\nu_{k,n} & \sin 2\pi\nu_{k,n} \\ -\sin 2\pi\nu_{k,n} & \cos 2\pi\nu_{k,n} \end{bmatrix} (x_{k,n}, x'_{k,n}). \quad (19)$$

Здесь n — номер оборота, β -функция полагается равной 1, а $\nu_{k,n}$ — переменный набег бетатронной фазы данной частицы на одном обороте, включая сдвиг бетатронной частоты, вносимый хроматизмом и нелинейностью:

$$\nu_{k,n} = \nu_\beta + \xi \delta_{k,n} + \frac{\partial \nu_\beta}{\partial a^2} x_{k,n}^2, \quad (20)$$

где ν_β — невозмущенная бетатронная частота, $\delta = \Delta E/E$ — отклонение энергии частицы от равновесного значения, $\partial \nu_\beta / \partial a^2$ — нелинейный сдвиг бетатронной частоты.

Взаимодействие частиц друг с другом, приводящее к ТМС-неустойчивости и хроматическому head-tail-эффекту, представлено в виде мгновенного комплексного приращения поперечного импульса частицы $\Delta x'_k$, производимого суперпозицией wake-полей, индуцированных всеми предыдущими частицами:

$$\Delta x'_k = \left(1 - i \frac{4}{\pi} \chi\right) \sum_{j=0}^{k-1} x_j q_j f_0 \frac{4\pi^2 \nu_\beta \nu_s}{I_{tmc}} \times \exp \left\{ i\omega_r \left(1 + \frac{i}{2Q}\right) \Delta t_{jk} \right\}, \quad (21)$$

где χ — head-tail-фаза (7), x_j — поперечная координата j -й частицы, $q_j = I_b/N_p f_0$ — ее заряд, Q — добротность модельного поперечного импеданса (1), Δt_{jk} — временной интервал между j -й и k -й частицами. Для упрощения и ускорения вычислений временной интервал между соседними частицами полагается одинаковым для всех частиц, в этом случае

$$\Delta t_{jk} = (k - j) \frac{\pi \sigma_z}{c N_p}. \quad (22)$$

Поскольку принимается во внимание только широкополосный импеданс, wake-поля считаются полностью затухающими за один оборот.

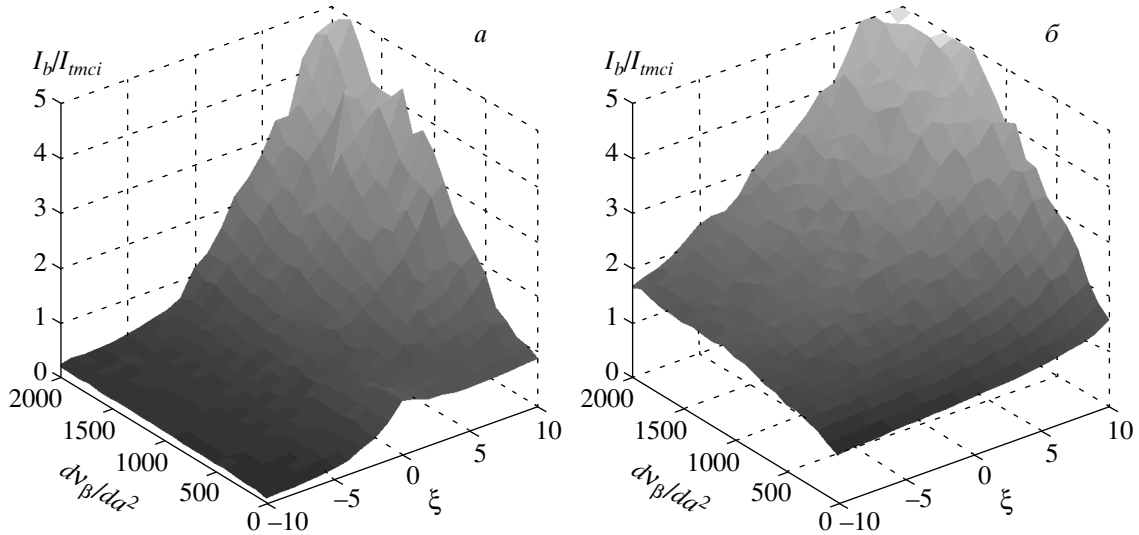


Рис. 6. Диаграммы максимального тока пучка ВЭПП-4М — многочастичная численная модель: *a* — без обратной связи, *б* — с обратной связью $\tau_{fb} = 50 T_0$

Радиационное затухание моделируется на каждом обороте как экспоненциальный множитель $\exp(-1/f_0\tau_{rad})$. Обратная связь представлена в виде мгновенного удара, пропорционального поперечному импульсу $\Delta x'_{fb} = K_{fb}x'$.

Стабильность поперечных колебаний пучка в зависимости как от хроматизма, так и от нелинейности исследовалась с помощью многочастичного многооборотного трекинга на основе описанной выше модели. Для заданных величин хроматизма и нелинейности проводились расчеты с различными значениями тока пучка. Если в процессе трекинга какая-либо частица достигает пределов апертуры, она исключается из дальнейших расчетов, а ток пучка уменьшается на соответствующую величину. Таким образом можно построить наглядную диаграмму максимально возможного тока пучка в одном ступке в зависимости как от хроматизма, так и от нелинейности, с обратной связью или без нее.

Примеры таких диаграмм, рассчитанные для ВЭПП-4М при энергии инжекции 1850 МэВ, приведены на рис. 6 для случаев без обратной связи (*a*), с обратной связью, обеспечивающей время затухания $50 T_0$ (*б*). Ток пучка ВЭПП-4М нормирован на пороговый ток неустойчивости поперечных связанных мод $I_{tnci} = 10.9$ мА.

7. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК

Основным недостатком многочастичного численного моделирования является большой объем и, как

следствие, длительное время вычислений, необходимых для построения диаграммы тока пучка, пример которой приведен на рис. 6. В процессе запуска системы обратной связи коллайдера ВЭПП-4М потребовались быстрые оценки стабильности пучка и предела по току при различных параметрах как ускорителя, так и системы обратной связи. Для приблизительных оценок была сформулирована упрощенная аналитическая модель.

В предположении, что процессы возбуждения и подавления неустойчивости независимы, огибающая 0-й head-tail-моды (колебания центра масс) может быть представлена как экспоненциальная функция времени:

$$X_0(t) = x_0 \exp \left\{ \frac{t}{\tau_{tnci}} + \frac{t}{\tau_{0ht}} - \frac{t^2}{2\tau_{nl}^2} - \left(\frac{\xi}{\nu_s} \frac{\sigma_\epsilon}{E} \right)^2 (1 - \cos \omega_s t) \right\}, \quad (23)$$

а огибающая m -й ($m > 0$) head-tail-моды — как функция

$$X_m(t) = \sigma_\perp \exp \left\{ \frac{t}{\tau_{mht}} - \frac{t^2}{2\tau_{nl}^2} - \left(\frac{\xi}{\nu_s} \frac{\sigma_\epsilon}{E} \right)^2 (1 - \cos \omega_s t) \right\}, \quad (24)$$

где x_0 — начальная поперечная координата центра масс инжектируемого пучка, τ_{ht} — характерное время хроматического head-tail-эффекта (10), τ_{nl} — характерное время нелинейной потери когерентности

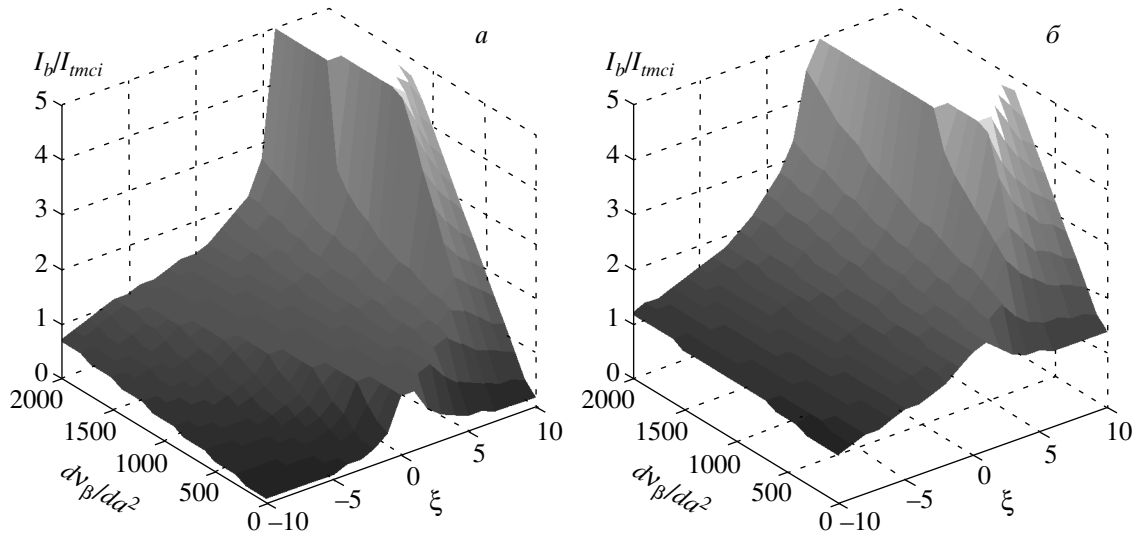


Рис. 7. Диаграммы максимального тока пучка ВЭПП-4М — приближенные аналитические формулы: *a* — без обратной связи, *b* — с обратной связью $\tau_{fb} = 50 T_0$

(18). Поскольку процессы возбуждения и подавления неустойчивости зависят от времени экспоненциально, начальные условия (если они достаточно малы по сравнению с апертурой) весьма слабо влияют на долговременную стабильность колебаний. Важным параметром является величина a_0 , определяющая характерное время нелинейной потери когерентности (18). В данной простой модели величина a_0 полагалась равной максимальной амплитуде каждой head-tail-моды и уточнялась в соответствии с результатами измерений и многочастичного моделирования.

Для анализа устойчивости с обратной связью соответствующий множитель может быть добавлен в выражения (23), (24). Идеальная широкополосная резистивная обратная связь производит на каждом обороте удар по пучку, пропорциональный его поперечному импульсу, внося таким образом экспоненциальное затухание с характерным временем τ_{fb} , определяемым коэффициентом обратной связи. При нулевом хроматизме такая обратная связь действует только на колебания центра масс пучка (0-я мода). Ненулевой хроматизм приводит к взаимодействию мод колебаний, в результате чего часть энергии высших мод может перекачиваться в движение центра масс и наоборот. В рамках двухчастичной модели усредненная по времени амплитуда некогерентной моды пропорциональна амплитуде когерентной с коэффициентом $\left| \frac{\xi}{\nu_s} \frac{\sigma_E}{E} \right|$.

Общепринятые критерии устойчивости не могут быть применены в рассматриваемом случае из-за существенной нелинейности движения. Сформулируем практический критерий устойчивости колебаний: будем считать пучок устойчивым, если эффективная огибающая N_m head-tail-мод, определенная как

$$X = \sqrt{\sum_{m=0}^{N_m} X_m^2}, \tag{25}$$

не превосходит заданного предела в течение длительного времени по сравнению с периодом синхротронных колебаний. Максимально возможный ток устойчивого пучка I_{max} определяется из условий

$$\begin{aligned} X_{max}(I_b) &= \{\max X, \quad t = 0-100 T_s\}, \\ I_{max} &= \{\max I_b, \quad X_{max}(I_b) < b\}, \end{aligned} \tag{26}$$

где T_s — период синхротронных колебаний, b — эффективная апертура вакуумной камеры.

Таким образом, используя данный критерий устойчивости и довольно простые аналитические формулы, можно построить диаграммы максимального тока пучка, аналогичные приведенным на рис. 6, проводя существенно меньший объем вычислений и затрачивая меньшее время, хотя и с потерей точности. На рис. 7 показан пример таких диаграмм, рассчитанных с учетом $N_m = 5$ низших head-tail-мод при тех же условиях, что и диаграммы на рис. 6.

Как численная многочастичная модель (рис. 6), так и приближенные аналитические формулы (рис. 7) демонстрируют, что даже без обратной связи возможно в несколько раз превысить пороговый ток ТМС-неустойчивости, повышая хроматизм и нелинейность магнитной структуры. Тем не менее надо помнить, что очень большая нелинейность может приводить к другим нежелательным эффектам, таким как сокращение времени жизни, уменьшение динамической апертуры и т. д.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье описаны результаты анализа хроматического и нелинейного механизмов подавления неустойчивости поперечных связанных мод. Проведено численное моделирование на основе многочастичной модели, а также получены довольно простые приближенные формулы для описания долговременной эволюции огибающей бетатронных колебаний. Сформулирован практический критерий устойчивости и предложен метод построения наглядных диаграмм, позволяющих оценить максимально возможный ток пучка в зависимости как от хроматизма, так и от нелинейности, с обратной связью или без таковой.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, Wiley, New York (1993).
2. S. Myers, LEP Note 436 (1983).
3. R. Ruth, *Proc. HEACC-1983*, Fermilab, Batavia (1983), p. 389.
4. V. V. Danilov and E. A. Perevedentsev, CERN SL/93-38 (AP), Geneva (1993).
5. S. Myers, *Conclusions of the Fifth LEP Performance Workshop*, CERN SL/95-10 (DI), Geneva (1995).
6. M. Karliner, V. Kiselev, A. Medvedko, V. Smaluk, A. Zelenin, and N. Zinevich, *Proc. EPAC-1996*, Barcelona (1996), p. 1009.
7. E. Perevedentsev, *Proc. ELOUD-2002, CERN-2002-001*, Geneva (2002), p. 171.
8. M. Karliner and K. Popov, *Nucl. Instr. Meth. A* **537**, 481 (2005).
9. J. Jacob, P. Kernel, R. Nagaoka, J.-L. Revol, and A. Ropert, *Proc. EPAC-1998*, Stockholm (1998).
10. K. Ohmi and Y. Kobayashi, *Phys. Rev. E* **59**, 1167 (1999).
11. Н. А. Винокуров, В. Н. Корчуганов, Г. Н. Кулипанов, Е. А. Переведенцев, Препринт ИЯФ СО АН СССР 76-87, Новосибирск (1976).