

АВТОКОЛЕБАНИЯ И КРИТИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ

*Н. И. Ваганова, Э. Н. Руманов**

*Институт структурной макрокинетики и проблем материаловедения Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 9 июля 2008 г.

Рассмотрена активная система, в пространстве параметров которой бистабильная область стационарных режимов заканчивается точкой возврата. Эта точка напоминает критическую точку перехода между фазами одинаковой симметрии (большая восприимчивость на низких частотах, рост флуктуаций и т. п.). Наряду со стационарными в рассматриваемой системе возможны также периодические режимы. Когда граница колебательной неустойчивости в результате изменения параметров проходит через точку возврата, непрерывный спектр флуктуаций преобразуется в линейчатый спектр периодического режима. Изучена динамика такого преобразования.

PACS: 05.45.-a, 05.65.+b

1. ВВЕДЕНИЕ

С точки зрения нелинейной физики экзотермические реакции интересны тем, что между температурой и скоростью реакции имеет место обратная связь. Реакция вызывает нагрев, который, в свою очередь, ускоряет реакцию. Математическая модель, описывающая процессы с участием таких реакций, должна включать уравнения с экспоненциальными источниками (зависимость скорости реакции от температуры обычно активационная). Сильная нелинейность обеспечивает контрастную картину, легче обнаруживаются новые эффекты. В литературе (см., например, [1, 2]) основное внимание уделялось более слабым степенным нелинейностям. В случае экспоненциальных источников удается развить приближенные методы (см. [3] и ссылки там), помогающие анализировать результаты численных экспериментов.

Примером модели, сочетающей простоту с богатством различных решений (волны переключения, бегущие импульсы и др.), служат уравнения [3, 4]

$$\partial_t \eta - L\chi \Delta \eta = \Phi(\eta, T) - \eta \tau^{-1}, \quad (1)$$

$$\partial_t T - \chi \Delta T = (Q/c)\Phi - \alpha(T - T_a) \quad (2)$$

для концентрации продукта реакции η и температуры T . Систему, которую описывают уравнения (1),

(2), можно представить как набор малых проточных реакторов мгновенного перемешивания, связанных между собой диффузией и теплопроводностью. Элементы системы образуют цепочку или мембрану, соответственно Δ — одно- или двумерный оператор Лапласа. Скорость реакции Φ в простейшем случае имеет вид

$$\Phi = (1 - \eta)k \exp(-E/T), \quad (3)$$

где k — постоянная с размерностью частоты, E — энергия активации, обычно $E \gg T$. Другие обозначения: L — число Льюиса (Lewis), отношение коэффициента диффузии к температуропроводности χ ; τ — время пребывания смеси в реакторе; Q — теплота реакции; c — теплоемкость; $\alpha = \tau^{-1} + \tau_f^{-1}$, τ_f — время остывания без протока, т. е. при $\tau \rightarrow \infty$; T_a — температура термостата и поступающей смеси.

Если в уравнениях (1), (2) опустить пространственные производные, получится система, для которой еще в работе [5] была обнаружена бистабильность: в зависимости от начальных условий возможен выход либо на холодный стационарный режим с температурой, близкой к T_a , либо на горячий режим с $T - T_a \approx Q/c\alpha\tau$. Переход к точечной системе возможен [5], если время перемешивания мало по сравнению с τ . Это условие будем считать выполненным. Длинные цепочки и мембраны ниже не рассматриваются. Когда T и η зависят только от времени, можно рассмотреть одно уравнение второго

*E-mail: ed@ism.ac.ru

порядка. Например, выражая η через T и dT/dt с помощью формулы (2) и подставляя это выражение в (1), получим [6]

$$\ddot{T} = -\frac{dV}{dT} - \gamma(T, \dot{T})\dot{T}, \quad (4)$$

точка над буквой означает дифференцирование по времени,

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{Q}{c\tau}ke^{-E/T} + \left(ke^{-E/T} + \frac{1}{\tau} \right) \alpha(T - T_a), \quad (5)$$

$$\gamma = \alpha + \frac{1}{\tau} + ke^{-E/T} - \frac{E}{T^2} \left[\alpha(T - T_a) + \dot{T} \right]. \quad (6)$$

Уравнение (4) в математическом отношении эквивалентно уравнению одномерного движения частицы с единичной массой и координатой T под действием потенциальной силы (5) и силы трения $-\gamma\dot{T}$. При заданных в начальный момент времени η , T начальная «скорость» \dot{T} определяется с помощью (2). «Коэффициент трения» (6) может в зависимости от параметров менять знак и становиться отрицательным. В этом уравнение (4) сходно с уравнением Ван дер Поля [7]. Возможность выполнения условия $\gamma < 0$ обусловлена, очевидно, накачкой — протоком вещества через реактор.

Вне бистабильной области потенциал $V(T)$ имеет один минимум, а внутри этой области — три экстремума, два минимума и максимум между ними. Положения экстремумов $T_d < T_m < T_u$, разумеется, совпадают с температурами однородных и стационарных решений системы (1), (2). Однако, рассматривая $V(T)$, можно увидеть, какое из двух устойчивых состояний отвечает более глубокому минимуму. Условие $V_d = V_u$ можно представить в виде

$$\int_{T_d}^{T_u} \frac{dV}{dT} dT = 0,$$

что на плоскости $(T, dV/dT)$ отвечает равенству площадей фигур, ограниченных осью T и графиком dV/dT в интервалах соответственно $T_d < T < T_m$ и $T_m < T < T_u$. Часто в качестве параметров используются числа Дамкелера (Damköhler) и Семенова

$$D = \tau k \exp(-E/T_*), \quad S = D(\alpha\tau)^{-1}, \quad (7)$$

T_* — удобный температурный масштаб. Линия на плоскости (D, S) , определяемая равенством минимумов $V_d = V_u$, подобна [8] кривой кипения на плоскости давление—температура. Эта линия делит бистабильную область на две части, в одной из которых

метастабильно горячее состояние реактора, в другой — холодное. При данном D верхняя (по S) граница бистабильной области отвечает слиянию максимума V с холодным минимумом, а нижняя — с горячим. Бистабильная область на плоскости (D, S) заканчивается точкой возврата D_c, S_c . В точке возврата сливаются все три экстремума.

Очевидно, точка возврата подобна критической точке переходов между фазами одинаковой симметрии. Зависимость потенциала $V(T)$ вблизи экстремумов становится «пологой» при $D \rightarrow D_c, S \rightarrow S_c$. Поэтому по мере приближения к этой точке должна расти восприимчивость, которую можно определить, например, как (отнесенное к величине малого периодического возмущения какого-либо параметра) отклонение температуры от своего стационарного значения, вызванное этим возмущением. Рости будет преимущественно низкочастотная часть восприимчивости. Поскольку параметры реальной системы всегда подвержены малым случайным вариациям, около точки возврата неизбежны заметные беспорядочные отклонения от стационарного режима, которые легко возникают и медленно релаксируют. Режим, который согласно системе (1), (2) или уравнению (4) был бы стационарным, в действительности оказывается хаотическим.

Новое по сравнению с критической точкой фазовых переходов состоит в том, что кроме стационарных режимов возможны периодические решения (1), (2) или (4). Такие решения были обнаружены в работе [9], затем в [10] и подробно исследованы в статье [11]. Граница «колебательной» неустойчивости, определяемая условием $\gamma(T = T_0, \dot{T} = 0) = 0$, T_0 — стационарная температура (отвечающая минимуму V), может при изменении параметров пройти через точку возврата. В этом случае критические флуктуации существенно влияют на динамику перехода к регулярным автоколебаниям. Будем исследовать критическое поведение около точки возврата и переход к периодическому режиму с помощью численного моделирования. В качестве «затравки» используется слабый источник белого шума. Шум в реальных системах не является, вообще говоря, белым. Однако корреляционное время критических флуктуаций велико, так что по отношению к ним любой шум должен выглядеть как δ -коррелированный (белый).

2. ОКРЕСТНОСТЬ ТОЧКИ ВОЗВРАТА

Температуру T_c в точке возврата выберем масштабом T_* в формуле (7) и введем вместо T новую

переменную $\theta = (E/T_c^2)(T - T_c)$. Если ограничиться окрестностью точки возврата, можно приближенно положить

$$e^{-E/T} \approx e^{-E/T_c} e^\theta.$$

Тогда безразмерная форма потенциала V , полученная делением на $[(T_c^2/E)k \exp(-E/T_c)]^2$, согласно формуле (5) примет вид

$$V = e^\theta \left(\frac{1+\theta}{S} - \frac{Z}{D} \right) + \frac{1}{DS} \left(2\theta + \frac{\theta^2}{2} \right) + \text{const}, \quad (8)$$

где число Зельдовича $Z = EQ/cT_c^2$. В точке возврата $D_c = 1$, $S_c = 4/Z$. Удобно ввести отклонения параметров от этой точки:

$$D = 1 + d, \quad S = (4/Z)(1 + s),$$

так что граница бистабильной области определяется равенством

$$s \approx \frac{d}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}(-d)^{3/2}, \quad d < 0. \quad (9)$$

Прямая $s = d/2$ при $d < 0$ подобна линии равновесия фаз (оба минимума V равны), а при $d > 0$ — критической изохоре. На этой прямой стационарные значения температуры равны $\theta_0(d > 0) \approx 0$, $\theta_0(d < 0) \approx \pm\sqrt{-6d}$, а на бистабильных границах (9) $\theta_0 \approx \mp\sqrt{-2d}$.

Используя в качестве масштаба времени величину $(1/k) \exp(E/T_c)$, запишем безразмерный вариант уравнения (4), линеаризованный около стационарной точки θ_0 ,

$$\ddot{\theta}_1 + \gamma_0 \dot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = 0. \quad (10)$$

Здесь $\theta_1 = \theta(t) - \theta_0$, $\gamma_0 = \gamma(\theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0)$, а частота

$$\omega_0 = \left[e^{\theta_0} \left(\frac{Z}{D} + \frac{3 + \theta_0}{S} \right) + \frac{1}{DS} \right]^{1/2}. \quad (11)$$

В точке возврата частота ω_0 обращается в нуль, а вблизи этой точки мала. Иначе говоря, мала «возвращающая сила», которая появляется при отклонении реактора от стационарного режима. Поэтому такие отклонения возникают легко и релаксируют медленно. Для стационарных состояний можно ввести восприимчивость. Например, малая добавка $\varepsilon e^{-i\omega t}$ в правой части (10) дает в решении слагаемое $A e^{-i\omega t}$ (линейный отклик), восприимчивость $\sigma(\omega)$ есть отношение A/ε . Таким образом,

$$\text{Re } \sigma = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{R}, \quad \text{Im } \sigma = \frac{\gamma_0 \omega}{R}, \quad (12)$$

$$R = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma_0^2 \omega^2. \quad (13)$$

Если в качестве воздействия на «осциллятор» (10) использовать белый шум, то компонента Фурье корреляционной функции $\langle \theta_1(0)\theta_1(t) \rangle$ равна

$$\langle \theta_1^2 \rangle_\omega = \rho \gamma_0^{-1} \frac{\text{Im } \sigma}{\omega}, \quad (14)$$

где ρ — не зависящая от частоты спектральная плотность шума, (аналог флуктуационно-диссипационной теоремы — роль температуры играет величина $\rho/2\gamma_0$). Шум в реальной системе, конечно, не обязательно белый. Однако в силу малости ω_0 корреляционное время хаотических пульсаций температуры ($\sim \gamma_0 \omega_0^{-2}$) растет по мере приближения к точке возврата и заведомо превышает корреляционное время шума. Любой шум в таких условиях выглядит как δ -коррелированный (белый). Спектр пульсаций (14) отнюдь не воспроизводит спектр инициирующего шума, благодаря лоренцеву знаменателю R низкие частоты преобладают. Чем ближе к точке возврата, тем выше и острее низкочастотный пик.

Формулы (10)–(14) принадлежат, так сказать, ван-дер-ваальсовой области. В достаточно малой окрестности точки возврата нелинейность становится существенной. Границы этой окрестности можно определить, сопоставив, по аналогии с критерием Гинзбурга [12], дисперсию критических флуктуаций $\langle \theta_1^2 \rangle$ и характерное значение $\theta_0^2 \sim |d|$. Нелинейные эффекты изучены с помощью численного интегрирования системы

$$\dot{\eta} = (1 - \eta)e^\theta - \eta D^{-1}, \quad (15)$$

$$\dot{\theta} = Z(1 - \eta)e^\theta - \frac{2 + \theta}{S} - \frac{2}{S}y(t), \quad (16)$$

полученной из точечного варианта (1), (2) путем преобразований, о которых сказано выше. Случайная функция $y(t)$ принимает значения из интервала $(-m, m)$,

$$\langle y^2 \rangle = \int \rho d\omega = m^2/12.$$

При расчетах генератором случайных чисел служила встроенная подпрограмма RANDOM компилятора FORTRAN 77, счет осуществлялся с помощью подпрограммы RKF 45. По выбору значений параметров, входящих в систему (15), (16), вычисления можно разделить на две группы. Для первой группы эти значения были такими, что колебательная неустойчивость не развивалась. Граница неустойчивости ($\gamma = 0$) проходит через точку возврата при $Z = 8$. В приближенной теории реактора [5] параметр Z велик. При расчетах было принято $Z = 7$ —

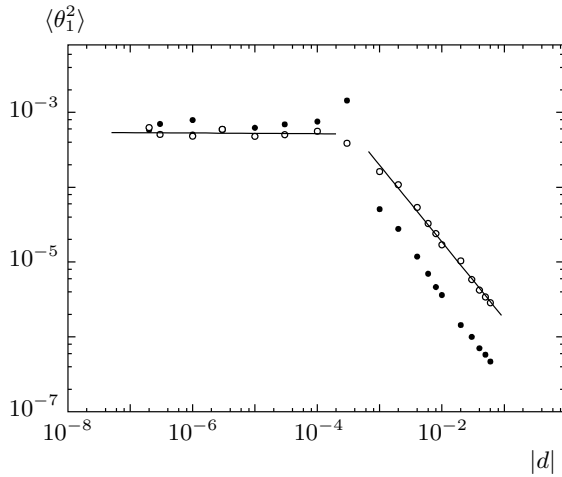


Рис. 1. Зависимости дисперсии флуктуаций температуры от расстояния до точки возврата; $m = 0.001$; $d > 0$ (\circ), $d < 0$ (\bullet). Прямые получены путем обработки соответствующей части графика по методу наименьших квадратов

число достаточно большое и в то же время не слишком близкое к границе неустойчивости. Моделирование критических флуктуаций проведено для ряда значений d , m при $s = d/2$.

На рис. 1 показана в дважды логарифмическом масштабе зависимость дисперсии

$$\langle \theta_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\theta_1^2)_\omega d\omega$$

от $|d|$. При $d > 0$, т. е. вне бистабильной области, сначала имеет место рост по степенному закону, а затем — насыщение. Показатель степени, согласно равенству (14) должен быть равен -1 , обработка по методу наименьших квадратов дает -0.99 . При $d < 0$ картина сложнее. На графике виден аномальный пик дисперсии и лишь затем — выход на постоянное значение. При $d < 0$ потенциал имеет два минимума, барьер между ними понижается по мере уменьшения $|d|$. Появляется возможность спонтанных переходов между минимумами [13] в результате «диффузии» в поле $dV/d\theta$ под действием шума. Вероятность переходов W подчиняется закону Аррениуса, который в данном случае можно записать в виде

$$W \propto \exp[-(2\gamma_0/\rho)(V_m - V_{d,u})].$$

На рис. 2 показана зависимость $\theta(t)$ для двух значений d , одинаковых по абсолютной величине, но отличающихся знаком. Основное различие графиков —

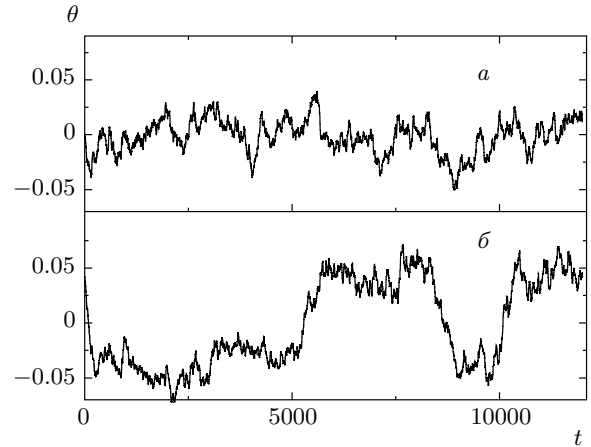


Рис. 2. Примеры зависимости температуры от времени; $m = 0.001$, $|d| = 3 \cdot 10^{-4}$; $d > 0$ (а), $d < 0$ (б)

большие скачки температуры, которые изредка происходят при $d < 0$ на фоне ординарных пульсаций. Эти скачки отвечают спонтанным переходам между горячим и холодным состояниями и приводят к существенному росту дисперсии, вычисляемой как $\langle (\theta - \langle \theta \rangle)^2 \rangle$. При $|d| \rightarrow 0$ разность $\theta_m - \theta_{d,u}$ уменьшается и вклад скачков исчезает. Если d увеличивать, вероятность W экспоненциально уменьшается и за время счета не происходит ни одного скачка. Вместе с тем нелинейные эффекты в бистабильной области выражены сильнее благодаря квадратичному члену в разложении силы $dV/d\theta$ около минимума V по степеням θ_1 (при $d > 0$ такой член отсутствует). Как видно из рис. 1, для этой области тоже есть интервал, где действует степенной закон $\langle \theta_1^2 \rangle \propto |d|^{-n}$, но критический показатель $n \approx 1.2$ заметно больше единицы. Сходные скачки в бистабильной системе описаны в недавней работе [14]. Изучались вынужденные колебания микромеханического вибратора, бистабильность обусловлена S -образной кривой нелинейного резонанса. Отметим также, что в работе [15] численно моделировались флуктуации при переходе от одной потенциальной ямы к двум, но рассматривалась только «симметричная фаза» (с одним минимумом).

Кроссовер на рис. 1 (при $d > 0$) определяется по порядку величины соотношением $\langle \theta_1^2 \rangle \sim \theta^2$. Характерное значение θ , при котором квадратичный член и член четвертой степени в разложении потенциала V сопоставимы, $\theta \approx \sqrt{d}$. В ван-дер-ваальсовой области $\langle \theta_1^2 \rangle = \pi\rho\omega_0^{-2}$, $\omega_0 \approx \sqrt{2d}$. Таким образом, кроссоверу отвечает значение $d_* \propto \sqrt{\rho}$, а максимальная

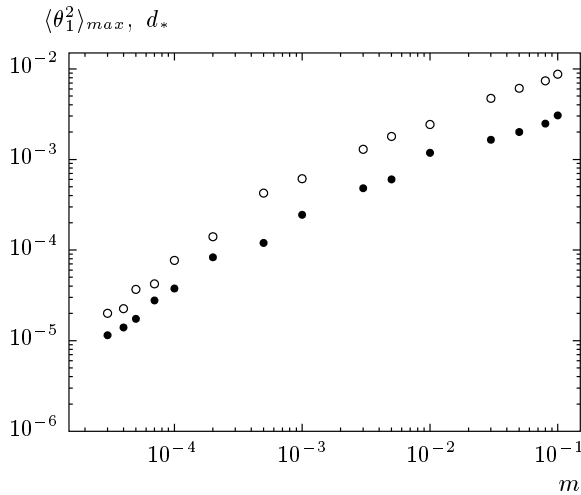


Рис. 3. Зависимости от интенсивности шума m величины d_* (•), отвечающей кроссоверу, и максимальной дисперсии пульсаций (○)

величина дисперсии порядка d_* . Для оценки спектральной плотности шума ρ заметим, что новое случайное число $y(t)$ вводилось при каждом шаге. Величина шага естественно не зависит от интенсивности шума, а так как дисперсия шума $\langle y^2 \rangle \propto m^2$, то и $\rho \propto m^2$. Это дает значение 1 для критического показателя зависимости d_* и $\langle \theta_1^2 \rangle_{max}$ от интенсивности шума m (рис. 3). Разброс точек отражает некоторый произвол в определении кроссовера. Видно, что при малых m показатель действительно близок к 1. Отметим, что переход к уравнению (4), формулы (12), (13) и др. играют лишь поясняющую роль. Для численного моделирования использовалась только система (15), (16). Правые части этих уравнений (без шума) не являются производными энтропии по соответствующей переменной, как это было бы вблизи равновесия. Существенно, однако, что результаты моделирования не зависят от конкретного вида функции $y(t)$. Это, как сказано выше, обусловлено ростом характерных времен в окрестности точки возврата, где проводились численные эксперименты.

3. РАЗВИТИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Граница колебательной неустойчивости, определяемая условием $\gamma = 0$, проходит через точку d ($d > 0$), $s = d/2$ при

$$Z = Z_b \approx 8 + 2d^2, \tag{17}$$

вблизи этой точки

$$\gamma \approx \gamma_0 - \theta - \dot{\theta}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{d}{2} \right) (Z_b - Z). \tag{18}$$

Легко видеть, что рождение периодического режима должно быть жестким. Действительно, в случае мягкого рождения и при достаточно малой надкритичности можно было бы приближенно рассматривать колебания как синусоидальные с частотой ω_0 . Их амплитуда определяется условием обращения в нуль работы силы трения за период колебаний:

$$\oint \gamma \dot{\theta} d\theta = \int_0^{2\pi/\omega_0} \gamma \dot{\theta}^2 dt. \tag{19}$$

Согласно формуле (18), такой интеграл обращается в нуль лишь при $Z = Z_b$. Как показано в работах [9–11], колебания носят релаксационный характер, после вспышки реакции наступает пауза ($\sim \tau$), за время которой продукты замещаются свежей смесью, затем следует новая вспышка.

В работе [16] была рассчитана зависимость от времени температуры в самой точке возврата, где устойчивость не является асимптотической, отклонения не затухают, но и не нарастают. При $Z = 7$ наблюдались хаотические пульсации, вид которых качественно не изменился при $Z = 8$, т. е. при условии перехода к циклу. При $Z = 9$ виден периодический режим, причем амплитуда колебаний примерно такая же, как у хаотических пульсаций для вариантов с меньшими Z . Здесь мы приводим результаты численного моделирования при $d = 5 \cdot 10^{-5}$, $m = 0.1$, значения Z выбирались из интервала от 7 до 9. Изучена эволюция частотного спектра системы в этом интервале. Время счета каждого варианта составляло 10^5 в единицах системы (15), (16). Наиболее характерные спектры приведены на рис. 4.

При $Z = 7$, в силу неравенства $\gamma_0 \gg \omega_0$, спектр согласно соотношениям (12)–(14) спадает примерно по закону $1/\omega$. Однако в отличие от фликкер-шума (см., например, [17]), низкочастотный пик исчезает при удалении параметров от точки возврата. Отметим также, что численные эксперименты проводились в существенно нелинейной области, где формулы (10)–(14) можно использовать лишь для ориентировки. Значение $Z = 8$ близко к границе колебательной неустойчивости, $Z_b - 8 \approx 5 \cdot 10^{-9}$. Теперь $\gamma_0 \ll \omega_0$, но резонанс на частоте $\omega_0 (\approx 0.1)$ не замечен. Возможно, имеется слабый и пологий максимум при $\omega \approx 0.2$ (частота нелинейного резонанса), однако в основном виден интенсивный фон, обусловленный высокой восприимчивостью и малым коэф-

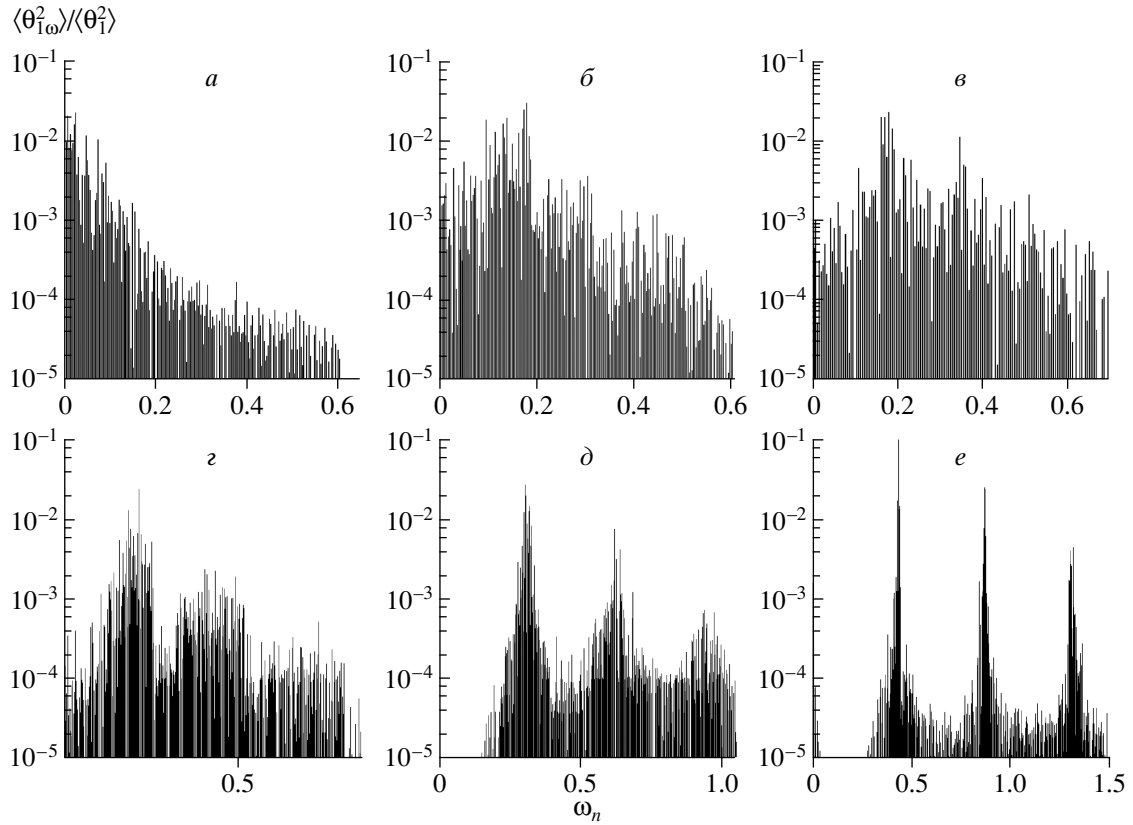


Рис. 4. Частотные спектры реактора, $Z = 7$ (а), 8 (б), 8.1 (в), 8.2 (г), 8.5 (д), 9 (е). По оси абсцисс отложена величина $\omega_n = 2\pi n/t_0$, t_0 — время счета

фициентом трения. Хаос при вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора на резонансной частоте был описан в начале 70-х годов. При $Z = 8.1$ различие между пиком и фоном немного увеличивается, но это значение бифуркационного параметра отвечает уже периодическому режиму ($\gamma < 0$, предельная точка неустойчива). На остальных графиках (рис. 4г–е) видно, как постепенно растут пики основной частоты и обертонов за счет непрерывной составляющей спектра. Поскольку $\int \langle \theta^2 \rangle_\omega d\omega = \langle \theta^2 \rangle$, все графики рис. 4 нормированы на дисперсию, чтобы интеграл по спектру был равен единице.

«Сгущение» мощности непрерывного спектра в линии можно интерпретировать как частотную синхронизацию, классический аналог бозе-конденсации. Действительно, состояние при периодическом режиме характеризуется фазой. При конденсации число частиц (или квантов) в данном состоянии велико, и соотношение неопределенностей для числа частиц и фазы не накладывает существенных ограничений на точность определения последней. Пока трудно судить, насколько интересна отмеченная ана-

логия. Сходные соображения о макроскопическом наполнении длинноволновых мод за счет коротковолновых содержатся в работе [18]. По мере роста Z смысл величины $\langle \theta^2 \rangle$ меняется, она характеризует размах формирующихся колебаний. Зависимость от Z тоже подчиняется степенному закону (рис. 5). Таким образом, картина, наблюдающаяся при росте Z , имеет мало общего с переходом от стационарного режима к периодическому (жестким или мягким). Правильнее говорить о формировании периодического режима из хаотического.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное моделирование в критической области (в окрестности точек бифуркации) считается ненадежным. Очевидной причиной этого является рост восприимчивости стационарных состояний, когда параметры системы приближаются к своим критическим значениям. Мы предлагаем вводить в уравнения слабые источники белого шума, превра-

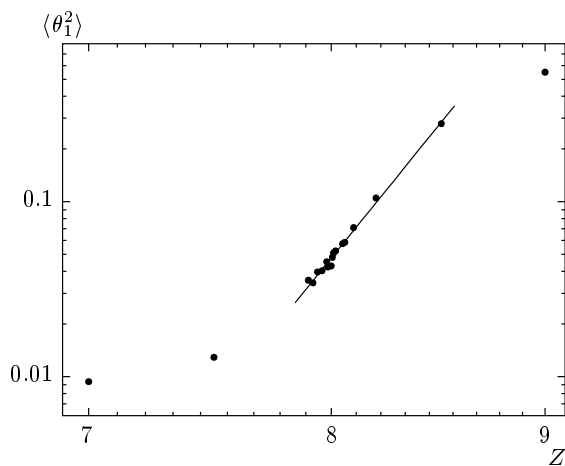


Рис. 5. Скачкообразное рождение периодического режима сменяется степенной зависимостью $\langle \theta^2 \rangle$ от Z с большим критическим показателем

шая их в уравнения Ланжевена (Langevin). При изучении тепловых флуктуаций интенсивность шума должна подбираться так, чтобы обеспечивалось согласие с термодинамическими формулами для дисперсии. В случае активной системы эта интенсивность не должна подчиняться каким-либо требованиям (кроме малости). Как мы видели, дисперсия критических пульсаций, инициированных слабым шумом, может иметь тот же порядок, что и среднее значение флуктуирующей величины — подобно развитой турбулентности. Режим, который с точки зрения исходных уравнений был бы стационарным (и устойчивым), на деле оказывается хаотическим. Статистические свойства пульсаций не зависят от «затравочного» шума, определяются рассматриваемой активной системой. Поэтому численное интегрирование уравнений Ланжевена в критической области и последующая статистическая обработка решений могут, на наш взгляд, существенно дополнить данные, полученные в натуральных экспериментах.

Вычисление восприимчивости во многих случаях (особенно для распределенных систем) оказывается громоздким, в достаточной близости к точкам бифуркации должна рассматриваться нелинейная восприимчивость. Однако вводить эти величины в описание критических явлений не обязательно. Решения уравнений Ланжевена представляют собой первичный материал — случайные функции времени (здесь мы следили за изменениями температуры). По этим данным можно находить корреляционные функции, критические показатели и др. величины, например, размерность аттрактора,

который отвечает установившемуся (хаотическому) режиму. Таким образом, численное моделирование позволяет получить весьма полное статистическое описание рассматриваемой бифуркации. Как уже отмечалось, интенсивные пульсации в критической области обусловлены малой величиной «силы», возвращающей систему в стационарное состояние после отклонения от него. Этим свойством обладают все изученные до сих пор бифуркации стационарных режимов. Для периодических и более сложных режимов (например, бифуркаций удвоения периода) предлагаемый подход, по-видимому, неприменим. В случае распределенных систем можно изучать (случайную) зависимость от времени искомого величин в заданной точке пространства или рассматривать какую-либо характеристику режима в целом. Например, для бегущих фронтов и импульсов удобно следить за изменениями скорости волны [4, 19, 20]. Помимо соображений, связанных с ростом характерных времен вблизи точек бифуркации, независимость результатов от свойств шума проверялась непосредственно [19]. При расчетах на компьютере не используются бесконечно малые величины, округления при счете действуют подобно шуму. Шум этот, конечно, не белый, его статистика неизвестна. Но по мере приближения к точке бифуркации флуктуации нарастают так же, как при включенном шумовом источнике, только с меньшей интенсивностью (для данного расстояния от точки бифуркации). Наконец отметим, что нарастание низкочастотных шумов в сложной технической или природной системе может служить признаком приближения ее параметров к значениям, соответствующим критической (аварийной) ситуации.

Один из авторов (Э. Р.) благодарен Л. В. Келдышу и Л. Н. Щуру за ряд замечаний. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-03-00079).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно, УФН **128**, 625 (1979).
2. Б. С. Кернер, В. В. Осипов, УФН **157**, 201 (1989).
3. A. G. Merzhanov and E. N. Rumanov, Rev. Mod. Phys. **71**, 1173 (1999).
4. А. Ю. Довженко, Э. Н. Руманов, ЖЭТФ **131**, 567 (2007).
5. Я. Б. Зельдович, ЖТФ **11**, 493 (1941).

6. Э. Н. Руманов, ДАН **408**, 325 (2006).
7. В. Van der Pol, Radio Rev. **1**, 701 (1920).
8. А. Г. Мержанов, Э. Н. Руманов, УФН **151**, 553 (1987).
9. Д. А. Франк-Каменецкий, И. Е. Сальников, ЖФХ **17**, 79 (1943).
10. R. Aris and V. R. Amundson, Chem. Eng. Sci. **7**, 121 (1958).
11. D. A. Vaganov, N. G. Samoilenko, and V. G. Abramov, Chem. Eng. Sci. **33**, 1133 (1978).
12. В. Л. Гинзбург, ФТТ **2**, 2031 (1960).
13. Н. Kramers, Physica **7**, 284 (1940).
14. H. B. Chan and C. Stambaugh, Phys. Rev. Lett. **99**, 060601 (2007).
15. Yu. A. Kravtsov and E. D. Surovyatkina, Phys. Lett. A **319**, 348 (2003).
16. Н. И. Ваганова, О. Д. Ваганова, Э. Н. Руманов, ДАН **396**, 174 (2004).
17. M. B. Weissman, Rev. Mod. Phys. **60**, 537 (1988).
18. Л. В. Келдыш, С. Г. Тиходеев, ЖЭТФ **91**, 78 (1986).
19. А. Ю. Довженко, С. В. Маклаков, И. Э. Руманов, Э. Н. Руманов, ЖЭТФ **122**, 1125 (2002).
20. А. Ю. Довженко, Э. Н. Руманов, ЖЭТФ **125**, 406 (2004).