

ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ В МОДЕЛИ ДВУПОРИСТОЙ РЕГУЛЯРНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ КОЛЛОИДОВ

*Л. В. Матвеев**

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук
115191, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 января 2009 г.

Решается задача адвекции примеси в канале, окруженном слабопроницаемой средой, при наличии в канале дрейфующих коллоидных частиц. Вследствие адсорбции примеси на коллоидах и ее диффузионного обмена с матрицей на умеренных временах устанавливается режим, при котором фронт облака примеси движется с постоянной скоростью, а концентрация позади фронта убывает степенным образом. На больших временах в результате десорбции примеси и ее окончательного ухода в матрицу перенос в канале происходит в квазидиффузионном режиме.

PACS: 05.60.-k, 82.70.Dd, 68.43.-h

1. ВВЕДЕНИЕ

Вот уже несколько десятилетий неослабевающий интерес исследователей привлекают процессы миграции в сильно неоднородных средах, в которых влияние различных областей и механизмов транспорта приводит к неклассическим закономерностям переноса [1–3]. Следует отметить, что неклассические закономерности проявляются как в случае неупорядоченных, так и регулярно-неоднородных сред. Например, при рассмотрении диффузии примеси в плоской трещине, окруженной слабопроницаемой матрицей (задача Дыхне [4]), режим переноса в достаточно широком интервале времени описывается субдиффузионным законом. Именно, для среднего смещения частиц примеси внутри трещины справедлива зависимость $\langle x^2 \rangle \propto t^\beta$ при $\beta = 1/2$. В случае, когда слабопроницаемая среда имеет собственную внутреннюю структуру (так называемые «разветвленные гребешковые структуры»), перенос примеси также описывается субдиффузионной закономерностью, однако значение β зависит уже от особенностей структуры слабопроницаемой среды [5]. В другом важном случае, когда перенос примеси в трещине определяется дрейфом с постоянной скоростью,

возможность временного ухода частиц в слабопроницаемую среду приводит к тому, что на больших временах центр масс облака примеси в трещине будет смещаться вниз по течению не с постоянной скоростью, а в соответствии с классическим диффузионным законом ($\beta = 1$) [6]. Данные примеры показывают, что хотя перенос по второй среде сам по себе достаточно медленный (коэффициент диффузии в ней мал), его влияние на процесс на больших временах оказывается принципиальным и приводит к качественному замедлению режима переноса в целом.

С другой стороны, существуют физические механизмы, способные препятствовать уходу частиц примеси в медленную среду и, тем самым, подавлять замедление переноса примеси. Одним из таких механизмов является адсорбция частиц примеси на коллоидах (мелких частицах размером $\rho \approx 10$ нм–10 мкм). Дело в том, что если размеры коллоидных частиц больше характерного диаметра каналов слабопроницаемой среды, они не будут уходить из трещины в пористую матрицу и их движение определяется течением жидкости внутри трещины. Соответственно, будет переноситься и часть примеси, адсорбированной на них. Окончательный режим переноса установится в результате конкуренции механизмов переноса примеси в виде раствора,

*E-mail: matweev@ibrae.ac.ru

ухода растворенных примесей в пористую слабопроницаемую матрицу, адсорбции примеси на коллоидах и переноса адсорбированной примеси вместе с коллоидами. Целью настоящей работы является аналитическое описание такого режима.

В данной работе рассматривается перенос примеси в неоднородных геологических средах. Следует отметить, что аналогичная задача может быть исследована и для процесса теплопереноса потоком жидкости в канале с учетом теплопроводности стенок и при наличии в жидкости вкраплений с теплоемкостью, существенно превышающей теплоемкость основной жидкости.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассматриваем перенос примеси в регулярно-неоднородной среде, состоящей из двух областей с сильно различающимися транспортными свойствами и являющейся частным случаем двупористой среды [7]. Область 1 представляет собой канал, вытянутый вдоль осей x и y . Толщина канала вдоль координаты z равна a . Канал заполнен водой, текущей с постоянной скоростью v в направлении x . Растворенная в воде примесь переносится течением со скоростью v и диффундирует внутри канала с коэффициентом диффузии D . Также в канале присутствуют коллоидные частицы, которые могут адсорбировать растворенную примесь.

Канал окружен пористой матрицей (область 2). Растворенная примесь может диффундировать в матрицу. Обычно диффузия примеси в матрице происходит также по жидкой фазе, заполняющей поры. Вследствие извилистости поровых каналов коэффициент диффузии в матрице d , как правило, несколько меньше (иногда значительно меньше) коэффициента диффузии D .

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда коллоиды движутся в канале со скоростью v . Размеры коллоидных частиц существенно больше размеров пор матрицы, поэтому коллоиды не уходят из канала в матрицу. Также, ввиду больших по сравнению с молекулярными размерами коллоидных частиц, их диффузией в канале можно пренебречь. Коллоиды распределены в канале однородно с концентрацией \mathfrak{N} .

Рассматривается двумерная постановка, когда начальная концентрация примеси не зависит от координаты y .

Концентрация растворенной примеси n в канале описывается уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial x} - D \Delta n = -Q, \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а Q описывает уход примеси из раствора вследствие ее адсорбции на коллоидах. В нашем приближении n — концентрация, усредненная по микрообъему, содержащему большое число коллоидных частиц, v — среднее по толщине канала значение скорости.

Для оценки скорости обмена примеси между раствором и адсорбирующими коллоидами было использовано газовое приближение (см., например, [8]). Именно, если среднее расстояние между коллоидами $\mathfrak{N}^{-1/3}$ много больше их характерных размеров ρ , $\mathfrak{N}^{-1/3} \gg \rho$, диффузионный поток примеси на сферическую коллоидную частицу с характерным радиусом ρ можно оценить из стационарного решения уравнения для микроскопической, не усредненной концентрации \tilde{n} с использованием граничных условий $\tilde{n}(r = \mathfrak{N}^{-1/3}) = n$ и $\tilde{n}(r = \rho) = n_b$. Здесь n_b — концентрация растворенной примеси вблизи поверхности коллоидной частицы, определяемая равновесием с адсорбированной компонентой; частица помещена в начало координат; $r = |\mathbf{r}|$. В итоге выражение для плотности потока на единицу поверхности частицы имеет вид $j = D(n - n_b)/\rho$. Умножая данное выражение на площадь одной коллоидной частицы и на их концентрацию, для объемной плотности стока примеси получаем выражение

$$Q = (n - n_b)/\tau, \quad (2)$$

где τ определяется как

$$\tau \approx (4\pi D \rho \mathfrak{N})^{-1}. \quad (3)$$

Как показано в работе [9], газовое приближение, приводящее к формуле (2), справедливо только при относительно равномерном распределении коллоидных частиц в пространстве. Учет флуктуаций расстояний между коллоидными ловушками приводит к тому, что для некоторой доли частиц примеси время адсорбции на коллоидах оказывается существенно больше средней величины τ , что должно приводить к изменению соотношения (2). Однако эта доля экспоненциально мала (в соответствии с пуассоновским распределением для расстояний между коллоидными частицами), причем она тем меньше, чем меньше параметр $\mathfrak{N}\rho^3$ (см. [9]), и в данной работе мы ее не рассматриваем. Отметим также, что если скорость адсорбции определяется граничной кинетикой на поверхности коллоидных частиц, вид выражения

(2) остается прежним, меняется только выражение для τ .

Концентрация примеси c в области 2 (в матрице) также описывается уравнением диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - d\Delta c = 0. \quad (4)$$

Связь между величинами n и c определяется граничными условиями, которые заключаются в непрерывности концентрации и нормальной компоненты плотности потока частиц.

Концентрация части примеси N , адсорбированной на коллоидах, определяется скоростью адсорбции и движением коллоидов, так что уравнение для N имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} + v \frac{\partial N}{\partial x} = Q. \quad (5)$$

Мы рассмотрим случай, когда концентрация примеси n_{ad} , адсорбированной на поверхности коллоидных частиц, много меньше концентрации насыщения n_{ad}^{sat} . В этом случае можно считать, что концентрация примеси в растворе вблизи адсорбирующей поверхности линейно зависит от n_{ad} : $n_b = \xi n_{ad}$ [10]. Тогда, учитывая соотношение между поверхностной концентрацией адсорбированных частиц n_{ad} и N : $N \propto 4\pi\rho^2 n_{ad} \mathfrak{N}$, окончательно выражение для стока можно представить в виде

$$Q = (n - \sigma N)/\tau, \quad (6)$$

где

$$\sigma \approx \frac{\xi}{4\pi\rho^2 \mathfrak{N}}. \quad (7)$$

Начальное условие таково, что

$$n(x, z)|_{t=0} = N_0 \delta(x) \delta(z). \quad (8)$$

Значения параметров, характеризующих задачу, могут лежать в широком диапазоне, и в зависимости от соотношений между ними реализуются различные режимы переноса. В данной работе исследуется случай, для которого характерны следующие соотношения между скоростями различных процессов.

Будем рассматривать поведение примеси на временах $t \gg t_0$ ($t_0 = a^2/4D$), когда распределение частиц в канале заведомо однородно по координате z . Характерное время проникновения примеси в матрицу на глубину порядка толщины канала a равно

$$t_1 = a^2/4d. \quad (9)$$

Будем считать, что

$$t_1 \ll \tau. \quad (10)$$

Также рассмотрим случай, когда величина параметра адсорбции мала, $\sigma \ll 1$, так что выполняется соотношение

$$\tau\sigma \ll t_1. \quad (11)$$

Относительная роль адвекции и матричной диффузии характеризуется комбинацией параметров $Pe = \sqrt{v^2 t_1}/D$, которая в случае $D \approx d$ соответствует стандартному числу Пекле. В данной работе полагаем, что $Pe \gg 1$.

3. ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Проинтегрировав уравнение (1) по координате z внутри канала и выполнив преобразование Фурье по координате x , а также преобразование Лапласа по времени, приходим к алгебраическому уравнению:

$$(p + ikv + Dk^2 + \tau^{-1}) n_{pk} + \frac{q_{pk}}{a} = \frac{M_0}{a} + \tau^{-1} \sigma N_{pk}. \quad (12)$$

Здесь

$$n_{pk} = \int_0^\infty dt \int dx \exp(-pt - ikx) n(x, t), \quad (13)$$

$n(x, t)$ — концентрация, усредненная по z ; аналогичное выражение записывается для N_{pk} ; q_{pk} — образ Фурье–Лапласа плотности потока примеси через границу, отнесенной к единице ее площади; $M_0 = M(0)$, где $M(t)$ — полное число частиц раствора, локализованного в канале. При выводе уравнения (12) полагалось, что начало координат находится внутри объема первоначальной локализации примеси.

Аналогично, уравнение (5) для частиц, адсорбированных на коллоидах, принимает вид

$$(p + ikv + \sigma/\tau) N_{pk} = n_{pk}/\tau. \quad (14)$$

Решение уравнения (4) с учетом равенства концентраций c и n на границе канала приводит к следующему выражению для компоненты Фурье–Лапласа концентрации частиц в матрице при $t \gg t_0$:

$$c_{pk}(z) = n_{pk} \exp\left\{-|z| \sqrt{\frac{p + dk^2}{d}}\right\}. \quad (15)$$

Поток частиц на границе канал–матрица вычисляется из (15) согласно

$$q_{pk} = -2d \left. \frac{dc_{pk}}{dz} \right|_{z=\pm 0}.$$

Подставляя формулу для q_{pk} в (12) и разрешая систему (12) и (14), получаем для N_{pk} следующее выражение:

$$N_{pk} = \frac{M_0}{a\tau} \left[\left(p + ikv + Dk^2 + \frac{1}{\tau} + \sqrt{\frac{p + dk^2}{t_1}} \right) \times \left(p + ikv + \frac{\sigma}{\tau} \right) - \frac{\sigma}{\tau^2} \right]^{-1}. \quad (16)$$

В дальнейшем нас будет интересовать поведение примеси, адсорбированной на коллоидах, $N(x, t)$, поскольку именно эта фракция приводит к быстрому переносу примеси на большие расстояния, в том числе, определяет на этих расстояниях и концентрацию растворенной компоненты. Непосредственный перенос растворенной компоненты по жидкой фазе существенно замедляется вследствие ухода примеси в матрицу. Для концентрации $N(x, t)$ получаем следующее выражение:

$$N(t, x) = \frac{M_0}{a\tau} \int_{\Gamma} \frac{dp}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(pt + ikx) \times \left[\left(p + ikv + \frac{\sigma}{\tau} \right) \left(p + ikv + Dk^2 + \sqrt{\frac{p + dk^2}{t_1}} \right) + \frac{p + ikv}{\tau} \right]^{-1}. \quad (17)$$

Здесь Γ обозначает контур Меллина.

4. ПОЛНОЕ ЧИСЛО ЧАСТИЦ, АДСОРБИРОВАННЫХ КОЛЛОИДАМИ

Рассмотрим полное число частиц примеси (в расчете на единицу длины вдоль оси y), адсорбированной на коллоидах для различных интервалов времени:

$$N(t) = a \int_{-\infty}^{\infty} N(t, x) dx = \frac{M_0}{\tau} \int_{\Gamma} \frac{\exp(pt)}{\left(p + \frac{\sigma}{\tau} \right) \left(p + \sqrt{\frac{p}{t_1}} \right) + \frac{p}{\tau}} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (18)$$

Вычисление этого интеграла в главных порядках приводит к следующим выражениям:

$$\tau \ll t \ll \tau_1, \quad N(t) \approx M_0 \sqrt{\frac{4t}{\pi\tau_1}}, \quad (19)$$

$$\tau_1 \ll t \ll \tau_2, \quad N(t) \approx M_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_1}{\pi t}} \right), \quad (20)$$

$$\tau_2 \ll t \ll \tau_3, \quad N(t) \approx M_0 \left(1 - \sqrt{\frac{4t}{\pi\tau_3}} \right), \quad (21)$$

$$t \gg \tau_3, \quad N(t) \approx M_0 \sqrt{\frac{\tau_3}{\pi t}}, \quad (22)$$

где введены обозначения для новых характерных времен:

$$\tau_1 = \tau \frac{\tau}{t_1}, \quad \tau_2 = \frac{\tau}{\sigma}, \quad \tau_3 = \frac{t_1}{\sigma^2}. \quad (23)$$

Из выражения (19) следует, что характерным временем адсорбции примеси на коллоидах является τ_1 . В отсутствие ухода примеси в матрицу либо, если $\tau \ll t_1$, рост числа частиц примеси на коллоидах на временах $t < \tau_2$ будет определяться (с точностью до флуктуационных поправок, исследованных в работе [9]) экспоненциальной зависимостью:

$$N(t) \approx \frac{M_0}{1 + \sigma} \left(1 - \exp\left(-\frac{t(1 + \sigma)}{\tau}\right) \right).$$

В нашем случае осаждение на коллоидах происходит по существенно более медленному степенному закону, и эффективное время адсорбции τ_1 оказывается (вследствие (10)) значительно больше τ . Отметим также, что в диапазоне времени $\tau_1 \ll t \ll \tau_3$ основная часть примеси сосредоточена на коллоидах, хотя влияние десорбции начинает проявляться уже на временах $t > \tau_2$.

5. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИМЕСИ

Рассмотрим пространственное распределение примеси на временах $t \gg \tau_1$ в области $0 \leq x \leq vt$. При анализе выражения (17) сделаем ряд упрощений. Можно опустить член dk^2 под корнем, поскольку, как это будет видно ниже, диффузия примеси вдоль канала по матрице оказывается гораздо медленнее всех режимов переноса, возникающих в данной задаче. В результате выражение в квадратных скобках превращается в полином третьей степени по k и интеграл по k может быть вычислен по теории вычетов. Дополнительные упрощения зависят от рассматриваемого пространственно-временного диапазона.

1) $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$. Из выражения (20) следует, что десорбция примеси не важна, и мы можем пренебречь членом σ/τ в квадратных скобках (17). Это позволяет выделить общий множитель $p + ikv$. В

итоге главный вклад в интеграл по волновому вектору в формуле (17) определится полюсом в точке $k_0 = ip/v$, который соответствует переносу адсорбированной примеси со скоростью v . Из двух оставшихся полюсов один расположен в нижней полуплоскости комплексной переменной k и определяет поведение концентрации при $x < 0$. Третий полюс находится в верхней полуплоскости k , но расположен существенно выше точки $k_0 = ip/v$. В частности, вклад, определяемый этим полюсом, содержит множитель $\exp(-x/v\tau)$, а на расстояниях $x > v\sqrt{t_1 t}$ убывает как $\exp(-x^2/v^2 t_1 t)$ и, следовательно, существен только вблизи нуля в диапазоне $0 \leq x \leq v\tau$. На рассматриваемых временах на большей части интервала $0 \leq x \leq v\tau$ этим вкладом можно пренебречь. В итоге выражение (17) принимает вид

$$N_1(t, x) = \frac{N_0}{av\tau} \int_{\Gamma} \frac{\exp(p\tilde{t})}{\frac{1}{\tau} - \frac{p^2 t_1}{\text{Pe}^2} + \sqrt{\frac{p}{t_1}}} \frac{dp}{2\pi i}, \quad (24)$$

где

$$\tilde{t} = t - x/v. \quad (25)$$

Исследуем пространственное распределение концентрации, определяемое интегралом (24). При этом учтем очевидный факт, что основной вклад в интеграл дают значения переменной Лапласа

$$p \leq \tilde{t}^{-1}. \quad (26)$$

В узком интервале вблизи $x \approx vt$, а именно при

$$v(t - t_1 \text{Pe}^{-4/3}) < x \leq vt,$$

концентрация достигает максимальной величины:

$$N(t, x) \approx \frac{M_0}{\pi av\tau} \text{Pe}^{2/3}. \quad (27)$$

Полученное выражение позволяет записать условие применимости линейной теории, которое состоит в том, что поверхностная концентрация адсорбированной на коллоидах примеси должна быть много меньше концентрации насыщения:

$$\frac{M_0 \text{Pe}^{2/3}}{4\pi^2 \rho^2 \mathcal{N} av\tau} \ll n_{ad}^{sat}. \quad (28)$$

В области $v(t - \tau_1) < x < v(t - t_1 \text{Pe}^{-4/3})$ наблюдается слабое степенное убывание концентрации с уменьшением x :

$$N(t, x) \approx \frac{M_0}{av\sqrt{\pi\tau_1\tilde{t}}}. \quad (29)$$

В оставшейся области $0 < x < v(t - \tau_1)$ выражение для концентрации имеет вид

$$N(t, x) \approx \frac{M_0 \sqrt{\tau_1}}{2\sqrt{\pi} av\tilde{t}^{3/2}}. \quad (30)$$

Таким образом, в данном диапазоне времени фронт облака примеси движется со скоростью v , причем максимальное значение концентрации достигается на фронте, а позади фронта уменьшается по степенному закону. Такое поведение связано с обратным потоком (из матрицы в канал) примеси, ушедшей в матрицу во время прохождения данного участка фронтом облака.

2) $\tau_2 \ll t \ll \tau_3$. На этих временах при вычислении интеграла необходимо учитывать небольшой сдвиг (по сравнению с ip/v) главного полюса в комплексной плоскости k , определяемый слагаемым σ/τ в квадратных скобках (17). В силу малости эту поправку можно найти по теории возмущений. Вычисляя в формуле (17) интеграл по dk и переходя при интегрировании по Лапласу к новой переменной $s = p\tilde{t}$, получаем следующее выражение:

$$N(t, x) \approx \frac{M_0}{av\sqrt{\tilde{t}\tau_1}} \times \int_{\Gamma} \frac{\exp\left(s - \frac{x\sigma}{v\tau} \frac{\Phi(s, \tilde{t})}{\sqrt{\tilde{t}/\tau_1} + \Phi(s, \tilde{t})}\right)}{\sqrt{\tilde{t}/\tau_1} + \Phi(s, \tilde{t})} \frac{ds}{2\pi i}, \quad (31)$$

где

$$\Phi(s, \tilde{t}) = \sqrt{s} - \text{Pe}^{-2} (t_1/\tilde{t})^{3/2} s^2. \quad (32)$$

Анализ интеграла (31) показывает, что, как и в предыдущем случае, поведение концентрации зависит от пространственного диапазона.

В области

$$0 < x < v\left(t - \frac{t^2}{\tau_3}\right) \quad (33)$$

поправки, связанные со вторым членом в экспоненте, малы и концентрация адсорбированной на коллоидах примеси приблизительно определяется выражением, аналогичным (30):

$$N(t, x) \approx \frac{M_0 \sqrt{\tau_1}}{2\sqrt{\pi} av\tilde{t}^{3/2}} \left(1 + \frac{x}{v\tau_2}\right). \quad (34)$$

На расстояниях $x > v(t - t^2/\tau_3)$ учет второго слагаемого в показателе экспоненты приводит к быстрому убыванию концентрации с ростом x или, другими словами, формированию «хвоста» концентрации. Мы рассмотрим структуру хвоста несколько позже.

3) $t \gg \tau_3$. В этом случае область, в которой концентрация ведет себя как степенная функция, ограничивается следующим выражением:

$$0 < x < 2v\sqrt{\tau_3 t}. \quad (35)$$

Концентрация в этой области, по-прежнему, определяется выражением (34).

Таким образом, на временах $t > \tau_2$ выражения (33) и (35) задают размер облака примеси в канале или, другими словами, режим переноса.

Структура хвоста концентрации также зависит от временного интервала. На временах

$$\tau_2 \ll t \ll \tau_2 \frac{\tau}{t_1} \text{Pe}^{2/3}$$

она имеет следующий вид.

Сразу за фронтом облака примеси, в интервале

$$vt \left(1 - \frac{t}{\tau_3}\right) < x < vt \left(1 + \frac{\tau_2}{2\tau_3}\right)^{-1} \quad (36)$$

интеграл определяется перевальной точкой $s_* \approx x^2/4v^2\tau_3 t$ и концентрация убывает по гауссову закону:

$$N(t, x) \approx \frac{M_0 x}{2\sqrt{\pi} av^2 \sqrt{\tau_3 t}^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4v^2\tau_3 t}\right). \quad (37)$$

При

$$vt \left(1 + \frac{\tau_2}{2\tau_3}\right)^{-1} < x < vt \left(1 - \frac{\tau_2^4}{\tau_3 t^3}\right) \quad (38)$$

вид перевальной точки меняется:

$$s_* \approx \left(\frac{x}{2v\tau_2} \sqrt{\frac{t}{\tau_1}}\right)^{2/3},$$

и справедливо выражение

$$N(t, x) \approx \frac{M_0}{\sqrt{3\pi} av \sqrt{\tau_1 t}} \times \exp\left(-\frac{x}{v\tau_2} + \left(\frac{x}{2v\tau_2} \sqrt{\frac{t}{\tau_1}}\right)^{2/3}\right). \quad (39)$$

В интервале

$$vt \left(1 - \frac{\tau_2^4}{\tau_3 t^3}\right) < x < vt \left(1 + \frac{\sigma t_1^2}{2\tau^2 \text{Pe}^2}\right)^{-1} \quad (40)$$

зависимость второго слагаемого в показателе экспоненты (31) от переменной интегрирования s в

области, дающей основное значение интеграла, очень слабая. Поэтому экспоненциальный множитель можно вынести из-под знака интеграла, так что в итоге получаем

$$N(t, x) \approx \frac{M_0}{\sqrt{\pi} av \sqrt{\tau_1 t}} \exp\left(-\frac{x}{v\tau_2}\right). \quad (41)$$

Аналогично, в диапазоне

$$vt \left(1 + \frac{\sigma t_1^2}{2\tau^2 \text{Pe}^2}\right)^{-1} < x \leq vt \quad (42)$$

имеем

$$N(t, x) \approx \frac{M_0}{\pi av \tau} \text{Pe}^{2/3} \exp\left(-\frac{x}{v\tau_2}\right). \quad (43)$$

На временах $t > \text{Pe}^{2/3} \tau^2/\sigma t_1$ формула (37) остается справедливой в области (36), а (39) описывает распределение концентрации в интервале

$$vt \left(1 + \frac{\tau_2}{2\tau_3}\right)^{-1} < x < vt \left(1 + \frac{\sigma t_1^2}{2\tau^2 \text{Pe}^2}\right)^{-1}, \quad (44)$$

так что интервал (40) исчезает. В области (42) концентрация описывается формулой

$$N(t, x) \approx \frac{M_0 \text{Pe}}{av \sqrt{\pi t t_1 \sigma}} \exp\left(-\frac{x}{v\tau_2}\right). \quad (45)$$

В итоге картина распространения примеси в канале следующая. На временах $t < \tau_2$ фронт облака примеси движется со скоростью коллоидов, так что область, занимаемая примесью, простирается от нуля до $x = vt$, причем максимальная концентрация достигается на фронте облака. В интервале $\tau_2 \ll t \ll \tau_3$ скорость несколько уменьшается, $v' \approx v(1 - t/\tau_3)$, но в силу того, что $t \ll \tau_3$, это уменьшение мало, поэтому перенос по-прежнему происходит в режиме дрейфа. На временах $t \gg \tau_3$ основное количество примеси, переносимое по каналу, сосредоточено в области $x \leq 2v\sqrt{\tau_3 t}$. Можно сказать, что на этих временах дрейфовый режим переноса примеси сменяется квазидиффузионным, с эффективным коэффициентом диффузии

$$D_{eff} \approx v^2 \tau_3. \quad (46)$$

Отметим, что при рассматриваемых значениях параметров $D_{eff} \gg d$. Впереди фронта убывание концентрации происходит сначала по гауссову закону (37), а затем практически по экспоненциальному $\exp(-x/v\tau_2)$ (вплоть до $x = vt$).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами исследован перенос растворенной примеси в канале, окруженном слабопроницаемой матрицей, при учете ее адсорбции на коллоидах. Показано, что наличие коллоидов является определяющим фактором, приводящим к тому, что в достаточно большом интервале времени фронт облака примеси будет двигаться с постоянной скоростью, равной скорости коллоидов. Возможность диффузионного ухода растворенной примеси в окружающую матрицу и возвращения ее в канал приводит к распределению концентрации в широком пространственном интервале от начального положения примеси $x = 0$ до расстояния, равного vt , а также к существенному уменьшению значения концентрации на фронте облака. Одновременно эффективная скорость адсорбции примеси на коллоидах существенно уменьшается. Позади фронта облака примеси концентрация убывает как степенная функция, причем скорость убывания зависит от пространственного интервала. Можно сказать, что диффузионное взаимодействие растворенной примеси с матрицей приводит к формированию степенного шлейфа концентрации позади фронта облака примеси. На больших временах становится существенным десорбция примеси, которая приводит к окончательному уходу примеси из канала в матрицу и замедлению переноса примеси вдоль канала. В итоге фронт облака движется не с постоянной скоростью, а в квазидиффузионном режиме ($\sim \sqrt{t}$). В области перед фронтом формируется хвост концентрации, имеющий гауссов вид

на умеренных и экспоненциальный на больших (но меньших vt) расстояниях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 06-08-00176а, 09-08-00573а). Автор выражает благодарность П. С. Кондратенко за плодотворные дискуссии и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Havlin and D. Ben-Avraham, *Adv. Phys.* **36**, 695 (1987).
2. J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Phys. Rep.* **195**, 127 (1990).
3. M. V. Isichenko, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 961 (1992).
4. П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, *ЖЭТФ* **131**, 494 (2007).
5. В. Ю. Забурдаев, П. В. Попов, А. С. Романов, К. В. Чукбар, *ЖЭТФ* **133**, 1140 (2008).
6. К. В. Чукбар, *ЖЭТФ* **109**, 1335 (1996).
7. H. H. Gerke and M. T. van Genuchten, *Water Resour. Res.* **29**, 305 (1993).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
9. Б. Я. Балагуров, В. Г. Вакс, *ЖЭТФ* **65**, 1939 (1973).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1995).