ЖЭТФ, 2009, том 135, вып. 6, стр. 1129–1133

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ β-ФУНКЦИИ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

И. М. Суслов *

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 января 2009 г.

Показано, что асимптотика функции Гелл-Манна–Лоу в квантовой электродинамике может быть установлена точно, $\beta(g) = g$ при $g \to \infty$, где $g = e^2$ — бегущая постоянная тонкой структуры. Это решает проблему электродинамики на малых расстояниях L (справедлива зависимость $g \propto L^{-2}$) и полностью снимает вопрос о «нуле заряда».

PACS: 11.10.Gh, 11.10.Hi, 11.10.Jj, 12.20.Ds

Как показали Ландау, Абрикосов, Халатников [1], связь затравочного заряда (e_0) с наблюдаемым (e) в квантовой электродинамике (КЭД) определяется выражением

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + \beta_2 e_0^2 \ln \Lambda^2/m^2}, \tag{1}$$

где m — масса электрона, Λ — параметр обрезания по импульсу. При конечном e_0 и $\Lambda \to \infty$ возникает ситуация «нуля заряда» ($e \to 0$). Общепринятая интерпретация формулы (1) состоит в ее обращении [1],

$$e_0^2 = \frac{e^2}{1 - \beta_2 e^2 \ln \Lambda^2/m^2}, \tag{2}$$

так что e_0 относится к масштабу расстояний Λ^{-1} и выбирается из соответствия со значением наблюдаемого заряда e. При увеличении Λ происходит рост e_0 и в области $e_0 \sim 1$ формулы (1), (2) теряют свою применимость; поэтому существование в формуле (2) так называемого полюса Ландау не имеет глубокого смысла.

Реальное поведение заряда как функции масштаба расстояний L определяется уравнением Гелл-Манна–Лоу[1)]

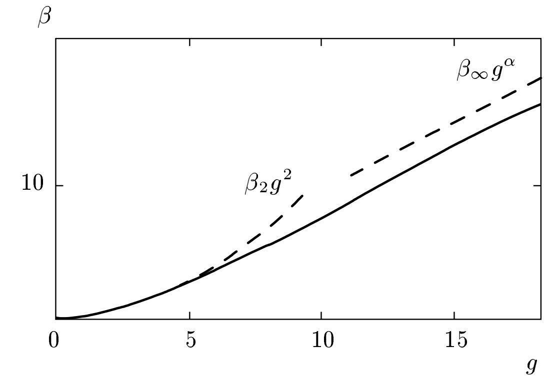
$$-\frac{dg}{d\ln L^2} = \beta(g) = \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \ldots \tag{3}$$

(где $g = e^2$ — постоянная тонкой структуры) и зависит от вида функции $\beta(g)$. Согласно классификации Боголюбова и Ширкова [2], рост $g(L)$ прекращается, если $\beta(g)$ имеет нуль при конечных g, и продолжается до бесконечности, если $\beta(g)$ знакопостоянна и имеет асимптотику $\beta(g) \propto g^\alpha$ с $\alpha \le 1$ при $g \to \infty$; если же $\beta(g) \propto g^\alpha$ с $\alpha > 1$, то $g(L) \to \infty$ при конечном $L = L_0$ (возникает реальный полюс Ландау) и теория внутренне противоречива ввиду неопределенности $g(L)$ при $L < L_0$. Ландау и Померанчук [5] пытались обосновать реализацию последней возможности, аргументируя, что формула (1) верна без ограничений; последнее однако возможно лишь при точном равенстве $\beta(g) = \beta_2 g^2$, которое заведомо не выполняется ввиду конечности β_3.

Из сказанного ясно, что проблема электродинамики на малых расстояниях требует установления вида функции Гелл-Манна–Лоу $\beta(g)$ при произвольных g, и в частности — ее асимптотического поведения при $g \to \infty$. В недавней работе автора [4] обнаружено, что асимптотики ренормгрупповых функций для актуальных теорий поля могут быть найдены аналитически. Предпринятые ранее попытки восстановления функции Гелл-Манна–Лоу $\beta(g)$ в теории φ^4 путем суммирования рядов теории возмущений привели к асимптотике $\beta(g) = \beta_\infty g^\alpha$ при $g \to \infty$, где $\alpha \approx 1$ для размерностей пространства $d = 2, 3, 4$ [6–8]. Возникает гипотеза, что асимптотика имеет

*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

1) Ввиду различия ренормировочных схем, зависимости от L для затравочного и перенормированного заряда не совпадают и описываются различными β-функциями [3]; для этих функций одинаковы лишь первых два коэффициента β_2 и β_3.



Общий вид функции Гелл-Манна – Лоу в КЭД

вид $\beta(g) \propto g$ для всех d. Анализ нуль-мерного случая подтверждает гипотезу и вскрывает механизм ее реализации. Он связан с неожиданным обстоятельством: предел $g \to \infty$ для перенормированного заряда g определяется не большими значениями затравочного заряда g_0 (что кажется интуитивно очевидным), а его комплексными значениями. Более того, оказывается достаточным ограничиться областью $|g_0| \ll 1$, где функциональные интегралы могут оцениваться в перевальном приближении. Если направление в комплексной плоскости g_0 выбрано так, что перевальный вклад от тривиального вакуума сравним по величине с перевальным вкладом от главного инстантона, то функциональный интеграл может обратиться в нуль. С нулем одного из функциональных интегралов и связан предел $g \to \infty$, который в результате оказывается вполне контролируемым, позволяя получить асимптотики как β-функции, так и аномальных размерностей: первая действительно оказывается линейной.

В настоящей работе показано, что та же идея может быть применена и в КЭД. Попытка восстановления функции Гелл-Манна – Лоу в этой теории [9] дает знакопостоянную $\beta(g)$ (рисунок) с асимптотикой $\beta_\infty g^\alpha$, где

$$\alpha = 1.0 \pm 0.1, \quad \beta_\infty = 1.0 \pm 0.3. \tag{4}$$

В пределах погрешности полученная β-функция удовлетворяет неравенству

$$0 \le \beta(g) < g, \tag{5}$$

полученному в работах [10, 11] из спектральных представлений, тогда как найденная асимптотика (4) в пределах точности совпадает с верхней границей неравенства (5). Такое совпадение выглядит неслучайным и указывает на то, что асимптотика $\beta(g) = g$ является точным результатом. Ниже показано, что это действительно так.

Наиболее общий функциональный интеграл КЭД содержит в предэкспоненте M фотонных и $2N$ фермионных полей:

$$\begin{aligned} I_{M,2N} = \int DAD\bar\psi D\psi\, A_{\mu_1}(x_1)\ldots \times \\ \times \ldots A_{\mu_M}(x_M)\,\psi(y_1)\bar\psi(z_1)\ldots\psi(y_N)\bar\psi(z_N) \times \\ \times \exp\left(-S\{A,\psi,\bar\psi\}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

где $S\{A,\psi,\bar\psi\}$ — евклидово действие,

$$\begin{aligned} S\{A,\psi,\bar\psi\} = \int d^4x \times \\ \times \left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \bar\psi(i\not\partial - m_0 + e_0\not A)\psi\right], \end{aligned} \tag{7}$$

e_0 и m_0 — затравочные заряд и масса; перечеркнутые символы отмечают свертки соответствующих величин с матрицами Дирака. Будем обозначать $K_{MN}(q_i, p_i)$ фурье-образы интегралов $I_{M,N}$, из которых исключены δ-функции сохранения импульса и выделены обычные множители, зависящие от тензорных индексов[2)]; q_i и p_i — импульсы фотонов и электронов. Вводя функции Грина $G^{(M,N)} = K_{MN}/K_{00}$, можно определить интересующие нас «ампутированные» вершины $\Gamma^{(M,N)}$ с M фотонными и N электронными концами:

$$\Gamma^{(0,2)}(p) = 1/G^{(0,2)}(p) \equiv 1/G(p),$$

$$\Gamma^{(2,0)}(q) = 1/G^{(2,0)}(q) \equiv 1/D(q),$$

$$G^{(1,2)}(q,p,p') = D(q)G(p)G(p')\Gamma^{(1,2)}(q,p,p'), \tag{8}$$

и т. д., где $G(p)$ и $D(q)$ — точные электронный и фотонный пропагаторы.

Мультипликативная перенормируемость вершины $\Gamma^{(M,N)}$ означает, что

$$\begin{aligned} \Gamma^{(M,N)}(q_i, p_i; e_0, m_0, \Lambda) = \\ = Z_3^{-M/2} Z_2^{-N/2} \Gamma_R^{(M,N)}(q_i, p_i; e, m), \end{aligned} \tag{9}$$

т. е. ее расходимость при $\Lambda \to \infty$ исчезает после надлежащего выделения Z-факторов и перехода к перенормированным заряду e и массе m. Примем условия ренормировки на нулевом импульсе:

$$\Gamma_R^{(0,2)}(p)\Big|_{p\to 0} = \not p - m,$$

[2)] Конкретный вид этих множителей несуществен, так как результаты не зависят от абсолютной нормировки e и m.

$$\Gamma_R^{(2,0)}(q)\Big|_{q\to 0} = q^2, \qquad (10)$$
$$\Gamma_R^{(1,2)}(q,p,p')\Big|_{q,p,p'\to 0} = e,$$

где учтена обычная полюсная структура электронного и фотонного пропагаторов. Подстановка выражений (10) в формулу (9) определяет e, m, Z_2, Z_3 в терминах затравочных величин:

$$Z_2 = \left(\frac{\partial}{\partial \not{p}}\, \Gamma^{(0,2)}(p; e_0, m_0, \Lambda)\Big|_{p=0}\right)^{-1},$$
$$Z_3 = \left(\frac{\partial}{\partial q^2}\, \Gamma^{(2,0)}(q; e_0, m_0, \Lambda)\Big|_{q=0}\right)^{-1}, \qquad (11)$$
$$m = -Z_2\, \Gamma^{(0,2)}(p; g_0, m_0, \Lambda)\Big|_{p=0},$$
$$e = Z_2 Z_3^{1/2}\, \Gamma^{(1,2)}(q,p,p'; e_0, m_0, \Lambda)\Big|_{q,p,p'=0}.$$

Функция Гелл-Манна–Лоу в используемой ренормировочной схеме определяется как

$$\beta(g) = \frac{dg}{d\ln m^2}\Big|_{e_0,\Lambda=\mathrm{const}}, \quad g = e^2. \qquad (12)$$

Из выражений (8) и определения функций Грина $G^{(M,N)}$ имеем

$$\Gamma^{(0,2)}(p) = \frac{K_{00}}{K_{02}(p)}, \quad \Gamma^{(2,0)}(q) = \frac{K_{00}}{K_{20}(q)}, \quad \Gamma^{(1,2)} = \frac{K_{12}K_{00}^2}{K_{02}^2 K_{20}}, \qquad (13)$$

где последнее соотношение — при $q,p,p' = 0$. Полагая при малых импульсах

$$K_{02}(p) = K_{02} + \tilde K_{02}\not{p}, \quad K_{20}(q) = K_{20} + \tilde K_{20} q^2, \qquad (14)$$

имеем в силу (11)

$$Z_2 = -\frac{K_{02}^2}{K_{00}\tilde K_{02}}, \quad Z_3 = -\frac{K_{20}^2}{K_{00}\tilde K_{20}}, \quad m = \frac{K_{02}}{\tilde K_{02}}, \quad g = -\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde K_{02}^2 \tilde K_{20}}. \qquad (15)$$

Далее, отмечая штрихом дифференцирование по m_0, имеем

$$\frac{dm}{dm_0} = \left(\frac{K_{02}}{\tilde K_{02}}\right)' = \frac{K_{02}'\tilde K_{02} - K_{02}\tilde K_{02}'}{\tilde K_{02}^2}. \qquad (16)$$

Поскольку дифференцирование в формуле (12) проводится при $e_0, \Lambda = \mathrm{const}$, последние параметры удобно считать фиксированными на протяжении всех вычислений; тогда m является функцией только m_0 и формулу (16) можно «перевернуть», т. е. считать выражением для производной dm_0/dm. Согласно определению β-функции (12) имеем

$$\beta(g) = \frac{m}{2}\left(-\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde K_{02}^2 \tilde K_{20}}\right)'_{m_0} \frac{dm_0}{dm} \qquad (17)$$

и после преобразований получим

$$g = -\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde K_{02}^2 \tilde K_{20}}, \qquad (18)$$

$$\beta(g) = \frac{1}{2}\,\frac{K_{02}\tilde K_{02}}{K_{02}\tilde K_{02}' - K_{02}'\tilde K_{02}}\,\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde K_{02}^2 \tilde K_{20}} \times \left\{\frac{2K_{12}'}{K_{12}} + \frac{K_{00}'}{K_{00}} - \frac{2\tilde K_{02}'}{\tilde K_{02}} - \frac{\tilde K_{20}'}{\tilde K_{20}}\right\}. \qquad (19)$$

Формулы (18), (19) определяют зависимость $\beta(g)$ в параметрической форме: их правые части зависят от параметров m_0, g_0, Λ, из которых два последних считаются фиксированными; выражая m_0 через g с помощью равенства (18) и подставляя в формулу (19), получим β как функцию g, g_0 и Λ, но фактическое отсутствие зависимости от последних двух параметров гарантируется общими теоремами (см., например, [3, 12]).

Согласно анализу работы [4], режим сильной связи для перенормированного взаимодействия связан с нулем одного из функциональных интегралов. Как ясно из формулы (18), предел $g\to\infty$ может быть достигнут двумя способами: устремлением к нулю $\tilde K_{02}$ или $\tilde K_{20}$. При $\tilde K_{02}\to 0$ выражение (19) упрощается:

$$g = -\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde K_{02}^2 \tilde K_{20}}, \quad \beta(g) = -\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde K_{02}^2 \tilde K_{20}}, \qquad (20)$$

и параметрическое представление разрешается в виде

$$\beta(g) = g, \quad g\to\infty. \qquad (21)$$

При $\tilde K_{20}\to 0$ имеем

$$g \propto \frac{1}{\tilde K_{20}}, \quad \beta(g) \propto \frac{1}{\tilde K_{20}^2}, \qquad (22)$$

откуда

$$\beta(g) \propto g^2, \quad g\to\infty. \qquad (23)$$

Таким образом, для асимптотики $\beta(g)$ имеются две возможности: (21) и (23). Вторая возможность противоречит неравенству (5), тогда как первая находится в прекрасном согласии с результатами (4), полученными путем суммирования ряда теории возмущений. На наш взгляд, это дает достаточные основания считать (21) точным результатом для асимптотики $\beta(g)$. Это означает, что и общий вид β-функции (рисунок) установлен достаточно надежно. Если наблюдаемый заряд (относящийся к масштабам $L \gtrsim m^{-1}$) конечен, то рост постоянной тонкой структуры при малых L происходит в чистой электродинамике по закону $g \propto L^{-2}$.

Выше мы исходили из того, что механизм возникновения асимптотики β-функции такой же, как в теории φ^4. Строго говоря, нельзя исключить возможность того, что режим сильной связи достигается за счет другого механизма, например за счет быстрого роста K_{12}. Однако такая возможность выглядит маловероятной: если провести грубую оценку интегралов, считая все поля локализованными на единичном масштабе длины,

$$K_{12} \sim \langle A\rangle\langle\psi\bar\psi\rangle K_{00}, \quad \tilde K_{02} \sim K_{02} \sim \langle\psi\bar\psi\rangle K_{00}, \qquad \tilde K_{20} \sim K_{20} \sim \langle A\rangle^2 K_{00}, \tag{24}$$

то подстановка в формулу (18) дает $g \sim 1$. Изменение общего масштаба всех длин не влияет на величину g просто в силу ее безразмерности. Поэтому достигнуть больших значений g, изменяя амплитуды полей $A, \psi, \bar\psi$ или общий масштаб их пространственной локализации, не удается. По-видимому, единственная возможность состоит в том, что среднее $\langle A\rangle$ или $\langle\psi\bar\psi\rangle$ для одного из интегралов по каким-то причинам (например, из-за знакопеременности полей) оказывается аномально малым по сравнению с другими интегралами; но это возвращает нас к уже рассмотренным вариантам.

Аналогично [4], нули функциональных интегралов могут быть получены при комплексных g_0 с $|g_0| \ll 1$ из условия компенсации вклада тривиального вакуума с перевальным вкладом инстантонной конфигурации, имеющей минимальное действие. Последний вклад хорошо изучен в связи с вычислением асимптотики Липатова [9, 13–15] и имеет вид

$$[K_{M,2N}(q_i,p_i)]^{inst} = ic(q_i,p_i)\left(\frac{S_0}{g_0^2}\right)^b \exp\left(-\frac{S_0}{g_0^2}\right), \tag{25}$$

где S_0 — инстантонное действие, $b = (M+r)/2$, r — число нулевых мод. Полагая $t^2 = -S_0/g_0^2$, придем к выражениям того же типа, которые анализировались в работе [4]. Легко убедиться, что нули различных интегралов K_{MN} и их производных по m_0 реализуются в разных точках.

Использованный подход позволяет по-новому взглянуть на идеи Ландау и Померанчука [5]. Они заметили, что согласно формуле (1) при увеличении e_0 наблюдаемый заряд e выходит на значение $1/(\beta_2 \ln \Lambda^2/m^2)^{1/2}$, не зависящее от e_0, и в силу соотношения $e^2 \propto e_0^2 D$ фотонный пропагатор имеет поведение $D \propto 1/e_0^2$. Такое поведение можно получить, сделав в функциональном интеграле (6) замену $A \to \tilde A/e_0$ и опустив в действии (7) квадратичный по A член. Если такая процедура оправдана уже при $e_0 \ll 1$, то она тем более верна при $e_0 \gtrsim 1$, что и дает основания считать формулу (1) применимой при произвольных e_0.

На качественном уровне эти соображения могут оказаться правильными[3)] для действительных значений e_0, которые в них предполагались. Из аналогии с теорией φ^4 можно ожидать [4], что изменение e_0 вдоль действительной оси соответствует изменению e от нуля до конечного значения e_{max}. Если окажется, что $e_{max} \to 0$ при $\Lambda \to \infty$, то это и будет означать качественную справедливость формулы (1); исследования методом Монте-Карло [16] указывают на правильность такой картины в теории φ^4. Для построения же теории с конечным взаимодействием на больших расстояниях требуется использование комплексных значений e_0 с $|e_0| \lesssim 1$ [4]: при этом несправедливо ни приведение к безразмерному виду функционального интеграла (обоснованное при $|e_0| \gg 1$), ни сама формула (1); последнее связано с тем, что, несмотря на возможность использования значений $|e_0| \ll 1$, теория возмущений неприменима из-за существенности инстантонного вклада.

Существует мнение, что для КЭД с N сортов фермионов в пределе $N \to \infty$ асимптотика $\beta(g)$ оказывается квадратичной, но на самом деле это не так. Коэффициенты разложения β-функции являются полиномами по N и имеют следующую структуру [17, 18]:

$$\beta(g) = \beta_2 N g^2 + \beta_3 N g^3 + \beta_4(N^2 + aN) g^4 + \beta_5(N^3 + bN^2 + cN) g^5 + \ldots, \tag{26}$$

где β_2, β_3, β_4, $a, \ldots \sim 1$. Модель является точно решаемой в специфическом пределе $N \to \infty$, $gN = \text{const}$ [19], т. е. нужно положить $g = \tilde g/N$,

[3)] Их правильность на количественном уровне исключается неквадратичностью β-функции. Фактически пропорциональность $D \propto 1/e_0^2$ следует из приведения функционального интеграла к безразмерному виду только при $e_0 \gg 1$, тогда как та же зависимость, вытекающая из формулы (1) при $e_0 \ll 1$, может быть связана с другими причинами; при $e_0 \sim 1$ она по-видимому нарушается, но совпадение коэффициентов пропорциональности по порядку величины можно ожидать из условия сшивки.

$\beta(g) = \tilde{\beta}(\tilde{g})/N$ и считать $\tilde{g}$ фиксированным. Тогда $\tilde{\beta}(\tilde{g}) = \beta_2\tilde{g}^2 + O(1/N)$ и при $N \to \infty$ β-функция эффективно оказывается однопетлевой. Использованная процедура справедлива для $\tilde{g} = \mathrm{const}$ или $g \sim 1/N$, но не дает никакой информации об области $g \sim 1$ и тем более $g \gg 1$. Поэтому никакие суждения об асимптотике β-функции не могут быть сделаны [4)].

Автор признателен Л. П. Питаевскому и М. В. Садовскому за обсуждение результатов и критические замечания, а также участникам семинаров в ИТЭФ и ПИЯФ за интерес к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-17541).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН СССР **95**, 497, 773, 1177 (1954).

2. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).

3. А. А. Владимиров, Д. В. Ширков, УФН **129**, 407 (1979).

4. И. М. Суслов, ЖЭТФ **134**, 490 (2008).

5. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН СССР **102**, 489 (1955); И. Я. Померанчук, ДАН СССР **103**, 1005 (1955).

6. И. М. Суслов, ЖЭТФ **120**, 5 (2001).

7. А. А. Погорелов, И. М. Суслов, ЖЭТФ **132**, 406 (2007).

8. А. А. Погорелов, И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **86**, 41 (2007).

9. И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **74**, 211 (2001).

10. N. V. Krasnikov, Nucl. Phys. B **192**, 497 (1981).

11. H. Yamagishi, Phys. Rev. D **25**, 464 (1982).

12. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and M. S. Green, Academic, New York (1976), Vol. VI.

13. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).

14. E. B. Bogomolny and V. A. Fateyev, Phys. Lett. B **76**, 210 (1978).

15. E. B. Bogomolny, V. A. Fateyev, and L. N. Lipatov, Sov. Sci. Rev. A — Physics Reviews, ed. by I. M. Khalatnikov, **2**, 247 (1980).

16. B. Freedman, P. Smolensky, and D. Weingarten, Phys. Lett. B **113**, 481 (1982).

17. S. G. Gorishny, A. L. Kataev, S. A. Larin, and L. R. Surguladze, Phys. Lett. B **256**, 81 (1991).

18. A. Palanques-Mestre and P. Pascual, Commun. Math. Phys. **95**, 277 (1984).

19. M. Moshe and J. Zinn-Justin, Phys. Rept. **385**, 69 (2003).

[4)] Явное вычисление поправки $O(1/N)$ к однопетлевому результату показывает [18], что эта поправка имеет периодические расходимости и не может считаться малой при произвольно больших N.