

МНОГОФОТОННАЯ ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ И ИОНОВ ИНТЕНСИВНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛАЗЕРОВ

С. В. Попруженко^{a,b*}, В. Д. Мур^a, В. С. Попов^c, Д. Бауэр^{b**}

^a Московский инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия

^b Max-Planck Institut für Kernphysik
Postfach 103980, 69029, Heidelberg, Germany

^c Институт теоретической и экспериментальной физики
117218, Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 декабря 2008 г.

Вычислены кулоновские поправки к функции действия и к скорости многофотонной ионизации атомов и ионов в интенсивном линейно поляризованном электромагнитном поле при больших значениях параметра адиабатичности Келдыша. Кулоновские поправки существенно (на несколько порядков) увеличивают скорость ионизации атома. Предложена интерполяционная формула для скорости ионизации, применимая при произвольных значениях параметра адиабатичности. Высокая точность полученной формулы подтверждается сравнением полученных с ее помощью результатов с данными численных расчетов. Обсуждается также общий случай эллиптической поляризации лазерного излучения.

PACS: 32.80.Rm, 32.80.Fb, 03.65.Sq

1. ВВЕДЕНИЕ

Значительный прогресс в физике взаимодействия интенсивных лазерных полей с веществом наблюдается в последние годы в связи с разработкой и введением в строй мощных источников когерентного излучения ультрафиолетового и рентгеновского диапазонов длин волн. Такие источники имеют в своей основе лазер на свободных электронах; уникальная установка этого типа FLASH в настоящее время работает в лаборатории DESY (Гамбург, Германия) [1, 2]. В 2002 г. установка FLASH генерировала импульсы электромагнитного излучения с длиной волны около 100 нм (энергия фотона $\hbar\omega \approx 13$ эВ), длительностью порядка 100 фс и интенсивностью до 10^{13} Вт/см² [3]. С 2007 г. на той же установке проводятся эксперименты с импульсами излучения с длиной волны 13 нм ($\hbar\omega \approx 93$ эВ), длительностью около 10 фс и интенсивностью до 10^{16} Вт/см² [4]. В ближайшей перспективе предполагается перейти к длине волны 6 нм, а также использовать третью

и пятую гармоники основной частоты, последняя из которых имеет длину волны 1.2 нм [2]. С использованием лазеров на свободных электронах в лаборатории DESY в 2002–2007 гг. были выполнены многочисленные эксперименты по взаимодействию интенсивного когерентного излучения высокой частоты с атомами, молекулами, многозарядными ионами, наноструктурами и твердым телом (см. работы [4–9] и ссылки в них).

Одним из фундаментальных нелинейных процессов, индуцируемых интенсивным лазерным полем, является многоквантовая ионизация атомов, впервые наблюдавшаяся [10] в 1965 г. (современное состояние исследований см. в обзорах [11–14]). До последнего времени физика взаимодействия интенсивных лазерных полей с веществом была в основном связана с использованием в экспериментах мощных оптических и инфракрасных лазеров с длиной волны порядка одного микрометра и более¹⁾. Соответ-

*E-mail: poprz@theor.mephi.ru

**D. Bauer

¹⁾ Среди мощных лазеров наиболее распространенными являются титан-сапфировый, неодимовый и СО₂-лазеры с длинами волн соответственно 0.79–0.80 мкм, 1.06 мкм и 10.6 мкм.

ственно, теоретические исследования также большей частью относились к случаю малой частоты лазерного поля. Напомним, что в теории многоквантовой ионизации электромагнитное поле считается низкочастотным, если параметр γ , введенный Келдышем [15], мал по сравнению с единицей. В этом случае ионизация называется туннельной. Противоположный предел $\gamma \gg 1$ принято называть случаем многофотонной ионизации. При ионизации атомов и положительных ионов полем интенсивного инфракрасного или оптического лазера параметр Келдыша оказывается обычно порядка единицы или менее. Появление мощных рентгеновских лазеров расширяет экспериментальные возможности в область высоких частот и малых длин волн. Типичные значения параметра Келдыша в экспериментах [4, 7] составляли $\gamma \approx 30-100$, что соответствует многофотонному режиму ионизации. Развитию теории в этой области параметров уделялось до недавнего времени существенно меньшее внимание. В настоящей работе исследована многоквантовая ионизация атомов и положительно заряженных ионов в интенсивном высокочастотном поле (т. е. при $\gamma \gg 1$) и получены аналитические выражения для полной вероятности ионизации в единицу времени. Скорость ионизации, вычисленная по этим формулам, сравнивается с результатами точных численных расчетов.

В расчетах многофотонной ионизации атомов интенсивным лазерным излучением широко используется теория Келдыша [15], известная также как приближение сильного поля [16]. В рамках этого приближения электромагнитное поле волны учитывается точно, а кулоновским взаимодействием вылетающего электрона с атомным остовом пренебрегается, что позволяет получить для вероятности ионизации и импульсных спектров фотоэлектронов удобные аналитические формулы (см. работы [17, 18] и дальнейшие ссылки в обзоре [12]). Для случая ионизации отрицательно заряженных ионов приближение сильного поля дает хорошее количественное согласие с результатами точных численных расчетов и экспериментальными данными (см., например, обзор [19] и ссылки в нем). Между тем в случае нейтральных атомов и положительных ионов кулоновское взаимодействие приводит к подавлению потенциального барьера, через который туннелирует электрон, что существенно повышает вероятность ионизации. Так, в постоянном электрическом поле напряженностью \mathcal{E} скорость ионизации w s -состояния атома отличается от аналогичной величины w_{sr} для уровня в короткодействующей яме [12, 20, 21] (с тем же потенциалом ионизации I) множителем [22]

$$Q_C(\mathcal{E}, \omega = 0) \equiv Q_0(\mathcal{E}) = \frac{w(\mathcal{E})}{w_{sr}(\mathcal{E})} = \left(\frac{2\hbar^2 \kappa^3}{m e \mathcal{E}} \right)^{2n^*} = \left(\frac{2}{F} \right)^{2n^*} \gg 1, \quad (1)$$

где

$$w_{sr}(\mathcal{E}) = C_\kappa^2 \frac{\kappa^2 \hbar}{m} \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{ch}} \exp\left(-\frac{2\mathcal{E}_{ch}}{3\mathcal{E}}\right). \quad (2)$$

Здесь $\kappa = \sqrt{2mI}/\hbar$ и $\mathcal{E}_{ch} = \hbar^2 \kappa^3 / m e$ — соответственно характерный импульс и электрическое поле атома (для основного состояния атома водорода $\mathcal{E}_{ch} \equiv \mathcal{E}_a = m^2 e^5 / \hbar^4 = 5.14 \cdot 10^9$ В/см), $n^* = Z e^2 m / \hbar^2 \kappa = Z (I/I_H)^{-1/2}$ — эффективное главное квантовое число уровня ($I_H = m e^4 / 2 \hbar^2 = 13.6$ эВ — потенциал ионизации атома водорода), m и $-e$ — масса и заряд электрона, Z — заряд атомного остова ($Z = 1$ для нейтральных атомов, $Z = 0$ для отрицательных ионов H^- , Na^- , и т. п.). Отношение $F = \mathcal{E}/\mathcal{E}_{ch}$ часто называется приведенным полем:

$$F = 0.169 \sqrt{\frac{\mathcal{I}}{1 + \rho^2}} \left(\frac{I}{I_H} \right)^{-3/2}, \quad (3)$$

где ρ — эллиптичность излучения ($-1 \leq \rho \leq 1$, причём $\rho = 0$ соответствует линейной, $\rho = \pm 1$ — циркулярной поляризации волны), \mathcal{I} — интенсивность, измеряемая в единицах 10^{15} Вт/см². Наконец, C_κ — безразмерный асимптотический коэффициент атомной волновой функции на расстояниях $r \gg \hbar/\kappa$ от ядра²⁾. Подчеркнем, что в выражении (2) потенциал ионизации I и асимптотический коэффициент C_κ относятся к атомному состоянию, вероятность ионизации которого вычисляется, а не к состоянию в короткодействующем потенциале. Наконец, параметр Келдыша определяется как

$$\gamma = \frac{\sqrt{2mI}\omega}{e\mathcal{E}} = \frac{1}{2K_0 F}, \quad (4)$$

где $K_0 = I/\hbar\omega$ — параметр многоквантовости процесса. В теории Келдыша предполагается, что

$$K_0 \gg 1, \quad F \ll 1, \quad (5)$$

при этом параметр γ может принимать произвольные значения. Далее мы используем атомные единицы $\hbar = e = m = 1$.

²⁾ Для основных состояний нейтральных атомов и однозарядных ионов эти коэффициенты численно близки к единице [12]: так, $C_\kappa = 1, 0.95, 1.04$ для атомов H, K, Na и $C_\kappa = 1.15$ для иона H^- . Простая приближенная формула для коэффициентов C_κ была предложена Хартри [23].

Выражение (1) для кулоновской поправки к скорости ионизации применимо не только в случае постоянного поля, но и в туннельном режиме ($\gamma < 1$) для плоской электромагнитной волны с произвольной поляризацией. Обычно эта поправка увеличивает вероятность туннельной ионизации на несколько порядков — эффект, твердо установленный в экспериментах (см., например, работу [24]). В настоящее время выражения для скорости туннельной ионизации с учетом кулоновской поправки [22] (известные также как формулы Аммосова–Делоне–Крайнова [25], см. в этой связи работу [26]), широко используются для калибровки интенсивности лазерных импульсов.

В настоящей работе мы получим кулоновскую поправку $Q_C(\mathcal{E}, \omega)$ в противоположном пределе поля высокой частоты, $\gamma \gg 1$, в простейшем случае ионизации s -состояния атома или положительного иона линейно поляризованным полем ($\rho = 0$). В этом случае формулы для вероятности туннельной ионизации совершенно неприменимы даже для качественных оценок: так, при интенсивности порядка 10^{16} В/см², использовавшейся в эксперименте [4], последовательная туннельная ионизация приведет к образованию ионов вплоть до Xe^{8+} – Xe^{9+} , вместо наблюдавшихся ионов Xe^{21+} , а вероятность туннельной ионизации иона Xe^{10+} при данной интенсивности составляет (для импульса длительностью около 10 фс) величину порядка 10^{-24} . В расчетах используется метод мнимого времени (ММВ), в рамках которого для описания квантового туннелирования сквозь барьер рассматриваются подбарьерные траектории, удовлетворяющие классическому уравнению движения, но в мнимом времени [27, 28]. При выводе кулоновской поправки будет использован метод Капицы [29, 30] для описания усредненного движения частицы в быстроосциллирующем поле. Применение ММВ для исследования кулоновских эффектов в спектрально-угловых распределениях фотоэлектронов в интенсивном лазерном поле подробно обсуждается в работах [31].

План изложения следующий. В разд. 2 сформулирован метод вычисления кулоновской поправки в высокочастотном поле с линейной поляризацией и получено явное выражение для нее. В разд. 3 приводится анализ полученных результатов и сравнение их с численными расчетами. В разд. 4 обсуждается общий случай эллиптически поляризованного поля. В разд. 5 сформулированы условия применимости полученных аналитических формул. Описание метода усреднения Капицы в приложении к задаче о фотоионизации, подробности вычислений для случая

линейно поляризованного поля и краткое описание численных методов, использованных для контроля точности полученной аналитической формулы, содержатся в Приложениях. Предварительные результаты данной работы анонсированы в [32].

2. КУЛОНОВСКАЯ ПОПРАВКА В ЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗОВАННОМ ПОЛЕ

2.1. Метод мнимого времени в задаче об ионизации

В рамках ММВ вероятность ионизации уровня с энергией связи $-I$ электромагнитным полем с амплитудой \mathcal{E}_0 и характерной частотой ω определяется (с экспоненциальной точностью) мнимой частью функции укороченного действия, вычисленного вдоль траектории, на которой электрон имеет заданный импульс \mathbf{p} [18, 28]:

$$w(\mathcal{E}_0, \omega, \mathbf{p}) \propto \exp[-2 \operatorname{Im} W(\mathcal{E}_0, \omega, \mathbf{p})]. \quad (6)$$

Для частицы, связанной короткодействующими силами, действие и траектория определяются полем электромагнитной волны. В волне с векторным потенциалом $\mathbf{A}(t)$ и электрическим полем $\mathcal{E}(t) = -\dot{\mathbf{A}}(t)/c$ (c — скорость света) укороченное действие W_0 и функция Лагранжа \mathcal{L}_0 имеют вид³⁾

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_{t_s(\mathbf{p})}^{\infty} (\mathcal{L}_0 - I) dt + F_0(\mathbf{p}), \\ \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_0^2 - \mathcal{E}(t) \mathbf{r}_0, \\ F_0(\mathbf{p}) &= -(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_0) \Big|_{t=t_s}^{t \rightarrow \infty} = \mathbf{p} \cdot [\mathbf{p} t_s + \mathbf{G}(t_s)], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\mathbf{G}(t) = \frac{1}{c} \int^t dt' \mathbf{A}(t')$$

и в правой части выражения для $F_0(\mathbf{p})$ опущено значение функции в точке $t \rightarrow \infty$, вклад которого чисто вещественный и не влияет на величину вероятности. Индексы «0» указывают на то, что все величины вычисляются с учетом только лазерного поля, т. е. траектория является решением уравнения Ньютона без учета кулоновского взаимодействия

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 = -\mathcal{E}(t). \quad (8)$$

³⁾ Эти формулы являются одним из основных результатов ММВ для теории ионизации атомов переменным электрическим полем. Относительно их вывода мы отсылаем читателя к работам [27, 28].

Она стартует в комплексный момент времени $t_s(\mathbf{p})$, определяемый из уравнения

$$\left(\mathbf{p} + \frac{1}{c}\mathbf{A}(t_s)\right)^2 + \kappa^2 = 0. \quad (9)$$

Это же уравнение определяет и начальную комплексную скорость $\mathbf{v}_0(t_s) = \mathbf{p} + \mathbf{A}(t_s)/c$. Сама траектория имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0(t) &= \mathbf{p} + \frac{1}{c}\mathbf{A}(t), \\ \mathbf{r}_0(t) &= \mathbf{X}_0 + \mathbf{p}(t - t_s) + \mathbf{G}(t) - \mathbf{G}(t_s). \end{aligned} \quad (10)$$

Величина \mathbf{X}_0 имеет смысл начальной точки подбарьерного движения, $\mathbf{X}_0(\mathbf{p}) = \mathbf{r}_0(t = t_s(\mathbf{p}))$. Обычно полагают $\mathbf{X}_0 = 0$; в этом случае для ненулевого значения импульса \mathbf{p} траектория в вещественном времени имеет постоянную мнимую часть [28].

Для вычисления полной вероятности ионизации с экспоненциальной точностью достаточно найти действие (7) вдоль траектории, отвечающей наиболее вероятному значению конечного импульса \mathbf{p}_0 . Ниже мы рассматриваем поле, линейно поляризованное вдоль оси x ,

$$\mathcal{E}(t) = -\mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad (11)$$

в этом случае⁴⁾ $\mathbf{p}_0 = 0$. Соответствующая траектория одномерна и направлена вдоль вектора поляризации:

$$\begin{aligned} x_0(\tau) &= \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2}(\text{ch } \tau_0 - \text{ch } \tau), \quad \tau_0 \geq \tau \equiv -i\omega t \geq 0, \\ x_0(\theta) &= \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2}(\text{ch } \tau_0 - \cos \theta), \quad \theta \equiv \omega t \geq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

а отвечающая ей стационарная точка имеет вид⁵⁾

$$\begin{aligned} \omega t_s(\mathbf{p}_0 = 0) &= i\tau_0, \\ \tau_0 = \text{arsh } \gamma &\approx \begin{cases} \gamma, & \gamma \ll 1, \\ \ln(2\gamma), & \gamma \gg 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Величина

$$\begin{aligned} b \equiv x_0(\theta = 0) &= \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2} \left(\sqrt{1 + \gamma^2} - 1 \right) \approx \\ &\approx \begin{cases} (I/\mathcal{E}_0)(1 - \gamma^2/4), & \gamma \ll 1, \\ \left(\sqrt{2I}/\omega \right) (1 - \gamma^{-1}), & \gamma \gg 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

⁴⁾ Более строго, наиболее вероятная энергия фотозлектрона не обязательно равна нулю, но не превосходит энергии фотона, так что $0 \leq p_0 < \sqrt{2\omega}$ и $p_0/\kappa < 1/\sqrt{K_0} \ll 1$.

⁵⁾ Здесь мы выбрали траекторию, вдоль которой электрон движется направо (в положительном направлении оси x), так что $\mathcal{E}(t_s) = -\mathcal{E}_0 \text{ch } \tau_0 < 0$. Симметричная траектория, уходящая влево от атома, начинается в момент времени $\omega t_s = \pi + i\tau_0$ и вносит такой же по величине вклад в вероятность ионизации.

имеет смысл ширины туннельного барьера. Электрон начинает движение в вещественном времени в этой точке. Заметим, что при выполнении условий (5) ширина барьера всегда много больше размера связанного состояния, $\kappa b \gg 1$, что обеспечивает применимость квазиклассического приближения (в данном случае — ММВ).

2.2. Кулоновские поправки

Кулоновское взаимодействие между вылетающим электроном и атомным остовом можно учесть, принимая введенные выше траектории и действие за нулевое приближение и вычисляя поправки к ним [22]. Естественно, что такой метод применим, если кулоновское поле в некотором смысле мало по сравнению с лазерным. Критерий малости сформулирован ниже (см. также работы [31, 33]). При этом возникают поправки двух типов. Во-первых, энергия кулоновского взаимодействия $U_C = -Z/r$ приводит к появлению добавки к действию

$$W_{C0} = - \int_{t_s}^{\infty} U_C(\mathbf{r}_0(t)) dt = Z \int_{t_s}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\mathbf{r}_0^2(t)}}. \quad (15)$$

Поскольку эта поправка явно содержит «малое» кулоновское взаимодействие (она пропорциональна заряду Z), интеграл можно вычислять вдоль невозмущенной кулоновским полем траектории. На нижнем пределе интеграл расходится логарифмически и требует сшивания с асимптотикой волновой функции свободного атома. Процедура сшивания подробно описана в работах [22, 31, 33] (см. ниже разд. 4, где поправка (15) вычисляется в случае эллиптической поляризации). В линейно поляризованном поле такое вычисление дает известный результат (1). При этом оказывается, что поправка (1) имеет один и тот же вид в туннельном и многофотонном пределах и формально вообще не зависит от частоты, что, однако, характерно только для поля с линейной поляризацией⁶⁾. Эта поправка всегда увеличивает вероятность ионизации. В туннельном режиме эффект возрастания вероятности ионизации легко интерпретировать, заметив, что кулоновское поле понижает барьер, через который туннелирует электрон. Тот факт, что выражение (1) для кулоновской поправки «затягивается» в многофотонную область, впервые был установлен в работе [22].

⁶⁾ Это утверждение верно для строго монохроматического поля с постоянной временной огибающей. Для коротких импульсов поправка зависит от частоты даже в случае линейной поляризации [33], см. также Приложение Г.

Другая поправка возникает от искажения кулоновским полем траектории электрона. Если поправка $\mathbf{r}_1(t)$ к траектории каким-либо образом найдена (например, численно), то соответствующая поправка к действию есть

$$W_{C1} = \int_{t_s}^{\infty} \left[\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_1^2 - \mathcal{E}(t) \mathbf{r}_1 \right] dt + F_1, \quad (16)$$

где

$$F_1 = -(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_1) \Big|_{t=t_s}^{t \rightarrow \infty}. \quad (17)$$

Для вычисления поправки (16) начнем с рассмотрения забарьерной части траектории, когда время вещественно. При $\gamma \gg 1$ можно усреднить по быстрым осцилляциям в лазерном поле и рассматривать только плавное движение в кулоновском поле [33]. В таком приближении задача становится консервативной, и из закона сохранения энергии можно найти связь между импульсом p_{\parallel} на выходе из-под барьера (для рассматриваемой одномерной траектории импульс направлен вдоль вектора поляризации волны) и импульсом $p_0 = 0$ на бесконечности. Подробности вычислений приведены в Приложении А, результат имеет вид

$$p_{\parallel} = \sqrt{p_0^2 + 2\mathcal{Z}/b} = \sqrt{2n^*\omega} = \kappa\sqrt{2\mu}. \quad (18)$$

Здесь возник малый параметр

$$\mu = \frac{\mathcal{Z}\omega}{\kappa^3} = \frac{n^*}{2K_0} \ll 1, \quad (19)$$

определяющий вклад кулоновского поля в искажение траектории электрона.

В мнимом времени, т. е. при $0 < \tau \leq \tau_0$, кулоновская поправка к траектории (12) находится из уравнения

$$\ddot{x}_1 = -\frac{\mathcal{Z}}{x_0^2}. \quad (20)$$

Решение уравнения (20), отвечающее импульсу (18) в момент времени $\omega t = 0$, получено в Приложении А (см. также работы [33]):

$$\begin{aligned} x_0(\tau) &= b(1-u), \\ x_1(\tau) &= b \left(a + i\sqrt{2\mu}\tau + \right. \\ &\left. + \mu \left[\frac{1}{2}\tau^2 - \ln(1-u) + L_2(u) \right] \right), \\ u &= \exp(\tau - \tau_0), \end{aligned} \quad (21)$$

где L_2 — дилогарифм Эйлера [34],

$$\begin{aligned} L_2(u) &= -\int_0^u \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k^2} = \\ &= \begin{cases} u + \frac{1}{4}u^2 + O(u^3), & u \rightarrow 0, \\ \frac{\pi^2}{6} + (1-u)[\ln(1-u) - 1] + \dots, & u \rightarrow 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Видно, что поправка к траектории в мнимом времени комплексна. Вещественная константа a обращается в нуль при $\mu \rightarrow 0$ и на результат не влияет.

Вычисление вклада от поправки к траектории (21) в действие (16) приведено в Приложении Б. Мнимая часть действия есть

$$\text{Im } W_{C1} = \mu \frac{\kappa^2}{\omega} \tau_0. \quad (22)$$

Подстановка этой величины в показатель экспоненты (6) приводит к появлению в вероятности ионизации дополнительного множителя

$$Q_1 = \exp(-2 \text{Im } W_{C1}) = (2\gamma)^{-2n^*}, \quad \gamma \gg 1. \quad (23)$$

Простое, хотя и не вполне строгое рассмотрение убеждает в справедливости асимптотики (23) для Q_1 и даже позволяет уточнить ее. Согласно (18), в момент выхода из-под барьера $p_{\parallel} \geq \kappa\sqrt{2\mu}$ (нижняя граница отвечает порогу фотоионизации). Такой импульс необходим электрону, чтобы преодолеть кулоновское притяжение в надбарьерном движении, усредненном по быстрым осцилляциям. С другой стороны, вероятность вырывания электрона из потенциальной ямы (короткодействующего потенциала) убывает с ростом продольного импульса p_{\parallel} [12, 18]:

$$\begin{aligned} w_{sr}(p_{\parallel}) &= w_{sr}(0) \exp \left\{ -c_1(\gamma) \frac{p_{\parallel}^2}{\omega} \right\}, \\ c_1(\gamma) &= \text{arsh } \gamma - \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя сюда $p_{\parallel}^2 = 2\mu\kappa^2$ и $\mu\kappa^2/\omega = n^*$ и учитывая, что $c_1(\gamma) = \ln(2\gamma) - 1 + O(\gamma^{-2})$ при $\gamma \gg 1$, непосредственно приходим к (23).

Таким образом, полную кулоновскую поправку можно записать в виде

$$Q_C(\mathcal{E}_0, \omega) = Q_0 Q_1 = Q_0 \exp \{-2n^* c_1(\gamma)\}, \quad (25)$$

пригодном при произвольных значениях параметра адиабатичности γ .

Отметим, что в работах [33] мнимая часть функции F_1 (17) не была учтена, что привело к ошибочному результату. Полученная выше формула (25), имеющая тот же смысл, что и формулы (14) и (20) в [33], исправляет эту неточность.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И СРАВНЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМИ РАСЧЕТАМИ

Кулоновская поправка (25) состоит из двух сомножителей, из которых Q_0 не зависит от параметра адиабатичности, а $Q_1 \rightarrow 1$ при $\gamma \ll 1$ и $Q_1 \ll 1$ при $\gamma \gg 1$, как это следует из (23). Таким образом, найденная здесь кулоновская поправка Q_1 эффективно уменьшает вероятность ионизации в многофотонной области, однако полная поправка (25) остается численно большой:

$$Q_C \approx (2eK_0)^{2n^*} \gg 1, \quad \gamma \gg 1. \quad (26)$$

Скорость ионизации s -состояния в короткодействующем потенциале дается выражением [12, 17, 18]

$$w_{sr} = \frac{\kappa^2}{\pi} C_\kappa^2 K_0^{-3/2} \beta^{1/2} \sum_{N \geq N_{th}} \mathcal{F} \left(\sqrt{\beta(N - N_{th})} \right) \times \exp \left\{ -\frac{2g(\gamma)}{3F} - 2c_1(N - N_{th}) \right\}, \quad (27)$$

где

$$g(\gamma) = \frac{3}{2\gamma} \left[\left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \operatorname{arsh} \gamma - \frac{\sqrt{1 + \gamma^2}}{2\gamma} \right], \quad (27')$$

$$\beta = \frac{2\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}},$$

$$\mathcal{F}(x) = \int_0^x dy \exp(-x^2 + y^2) = x {}_1F_1(1, 3/2; -x^2)$$

— функция Досона [35] и $N_{th} = K_0(1 + 1/2\gamma^2)$ — пороговое число квантов, необходимое для ионизации уровня.

Скорость ионизации атомного s -состояния равна⁷⁾

$$w = Q_C w_{sr}. \quad (28)$$

В пределе низких частот $\gamma \ll 1$ поправка $Q_1 \rightarrow 1$, и выражение (28) переходит в известную формулу

⁷⁾ Отметим, что в работе [36] скорость ионизации атома также вычислялась по формуле (28), причем вероятность w_{sr} находилась численно для произвольных значений параметра γ , но для кулоновской поправки брался туннельный предел (1).

для скорости туннельной ионизации s -уровня в низкочастотном поле [22, 25]:

$$w = 2C_\kappa^2 \kappa^2 \sqrt{\frac{3F}{\pi}} \left(\frac{2}{F} \right)^{2n^*-1} \exp \left(-\frac{2}{3F} \right), \quad (29)$$

отличающуюся от соотношений (1), (2) множителем $\sqrt{3F/\pi}$. Этот дополнительный множитель [18] связан с переменностью поля во времени (напомним, что скорость ионизации (2) относится к статическому полю).

Следовательно, хотя результат (25) получен при условии $\gamma \gg 1$, он обеспечивает правильный статический предел $\gamma \rightarrow 0$. В промежуточной области $\gamma \approx 1$ формула (25) для кулоновской поправки может рассматриваться как интерполяционная. Поскольку величина Q_C монотонно зависит от параметров, точность такой интерполяции оказывается достаточно высокой, что подтверждается сравнением с результатами численных расчетов, приведенными ниже. Таким образом, выражения (25), (27) и (28) определяют вероятность ионизации s -состояний атомов и положительных ионов для произвольных значений параметра адиабатичности (при условии, что ионизация многоквантовая, т. е. $K_0 \gg 1$). Заметим также, что с хорошей точностью $\exp[-2n^*c_1(\gamma)] \approx (1 + 2e^{-1}\gamma)^{-2n^*}$, что позволяет представить поправку (25) в простом и удобном для выполнения оценок виде:

$$Q_C \approx \left(\frac{2}{F} \right)^{2n^*} (1 + 2e^{-1}\gamma)^{-2n^*}, \quad e = 2.718 \dots \quad (30)$$

В пределе $\gamma \gg 1$ поправка (26) не зависит от интенсивности и численно велика. Вдали от закрытия каналов многофотонной ионизации⁸⁾ функция Досона в (27) порядка единицы и наибольший вклад в сумму дается первым слагаемым, т. е. ионизация происходит с поглощением минимально возможного числа фотонов N_{min} . При этом выражение для скорости ионизации принимает простой вид:

$$w \approx \frac{I}{\hbar} A(K_0, n^*) F^{2N_{min}}, \quad (31)$$

$$A(K_0, n^*) \approx 2^{2n^*} C_\kappa^2 e^{N_{min} + 2n^*} K_0^{-2N_{min} + 2n^* - 3/2}.$$

Таким образом, воспроизводится степенной закон, характерный для теории возмущений порядка N_{min} , что естественно ожидать в многофотонном режиме [12, 15]. Существенно, однако, что получено

⁸⁾ Закрытием канала называется изменение минимального числа фотонов, необходимого для ионизации, $N_{min} = [K_0] + 1$, на единицу ($[K_0]$ — целая часть числа K_0), т. е. случай, когда $N_{th} = N_{min}$.

также явное и хорошо согласующееся с результатами численных расчетов (как видно из приводимых ниже графиков) значение для коэффициента $A(K_0, n^*)$. Он численно велик и представляет собой произведение больших чисел, а потому весьма чувствителен даже к незначительным изменениям параметров. Кулоновская поправка (25) вносит существенный вклад в величину A . При характерных для ионизации атомов и ионов в интенсивном поле параметрах $K_0 \approx 5-10$ и $n^* \approx 1-3$, величина Q_C изменяется в пределах 10^2-10^{10} . Сомножитель Q_1 , отвечающий за отклонение от туннельного предела, также принципиально важен: $Q_1 \approx 10^{-9}-10^{-1}$.

Заметим, что простое аналитическое выражение для скорости ионизации атомов в многофотонном режиме было получено Берсонсом в работах [37] при условии $n^* \geq N_{min}$. При $K_0 \gg 1$ это условие означает, что речь идет об ионизации высоколежащего ридберговского уровня и введенный выше параметр (19) велик, $\mu > 1$. Полученные в данной работе результаты применимы в противоположном пределе $\mu < 1$, $K_0 \gg n^*$ и поэтому не обеспечивают предельного перехода к случаю однофотонной ионизации $N_{min} = 1$. Формула Берсонса, напротив, переходит при $N_{min} = 1$ в известную формулу Крамерса для фотоэффекта [38]. Кроме того, скорость ионизации, найденная в работе [37], усреднена по орбитальному квантовому числу l ридберговского уровня, в то время как наш результат относится к случаю $l = 0$. Как следствие, выражение для коэффициента, аналогичного по смыслу $A(K_0, n^*)$, полученное в [37], существенно отличается от (31).

Влияние кулоновских поправок на скорость ионизации атомов и ионов в поле инфракрасного и рентгеновского лазера иллюстрируется в табл. 1 и 2.

Из табл. 1 видно, что при ионизации атомов полем титан-сапфирового лазера параметр адиабатичности не слишком велик, $\gamma \approx 2-3$, для разумных значений интенсивности⁹⁾. Соответственно, отклонение кулоновской поправки от ее туннельного предела (1), характеризуемое величиной Q_1 , не очень значительно, $Q_1 \approx 0.1$ (см. ниже рис. 2). Ситуация существенно меняется при переходе к многозарядным ионам благородных газов в поле рентгеновского лазера (табл. 2): скорость ионизации остается в пределах возможности наблюдения при значениях $\gamma \geq 20$. Кулоновские поправки растут по абсолют-

ной величине в основном из-за увеличения эффективного главного квантового числа n^* (этот эффект виден уже из табл. 1). В результате кулоновские поправки увеличивают вероятность ионизации на 5-7 порядков и более (см. ниже рис. 3). Отклонение кулоновской поправки от туннельного предела также весьма существенно.

Для оценки точности выражения (25) мы сравнили скорость ионизации, рассчитанную по формуле (28) с результатами численного расчета [32]. На рис. 1 показаны логарифмы скорости ионизации для атома водорода в $1s$ -состоянии в поле (11) второй гармоники титан-сапфирового лазера с энергией фотона $\hbar\omega = 3.10$ эВ и в поле с несколько более низкой частотой ($\hbar\omega = 2.94$ эВ). Численные результаты получены двумя разными методами, краткое описание которых дано в Приложении В. Скорость ионизации, рассчитанная методом комплексных квазиэнергий (метод Флоке), показана черными точками. Результатам, полученным численным решением временного уравнения Шредингера в поле короткого импульса длительностью в 10 периодов поля, соответствуют треугольники. Практически полное совпадение результатов двух независимых численных расчетов, очевидное из рис. 1, свидетельствует об их надежности.

При не очень больших значениях параметра адиабатичности отличие полной кулоновской поправки Q_C от Q_0 не очень существенно, что демонстрируется графиками, приведенными на рис. 2 для случая ионизации атома водорода полем излучения Nd-лазера с длиной волны 1064 нм. Здесь результаты численного расчета скорости ионизации методом Флоке оказываются даже ближе к аналитической кривой, построенной только с учетом поправки Q_0 , чем к вычисленной по формуле (28).

На рис. 3 показана скорость ионизации состояния $4p_0$ иона Xe^{17+} , рассчитанная по формулам (25), (27) и (28) и найденная численным интегрированием одночастичного временного уравнения Шредингера для электрона в эффективном потенциале в присутствии электрического поля волны (см. Приложение В). Сопоставление аналитических результатов с численными демонстрирует хорошее количественное согласие даже в случае ксенона, хотя здесь параметр $\mu = 0.34$ не слишком мал, а связанное состояние обладает угловым моментом, равным единице, в то время как аналитические результаты получены для s -состояний. Отклонения аналитических результатов от численно найденных скоростей ионизации связано в основном с резонансами, не учитываемыми в данной теории. Тот факт, что именно резонан-

⁹⁾ С уменьшением интенсивности параметр γ растет, но одновременно вероятность ионизации становится столь малой, что ее обсуждение не имеет физического смысла. Как видно из табл. 1, для гелия это имеет место уже при интенсивности $I = 10^{13}$ Вт/см².

Таблица 1. Кулоновские поправки для нейтральных атомов

Атом	I , эВ	F	K_0	n^*	μ	γ	Q_C	Q_1	w_{sr}	w
К	4.34	0.094	2.77	1.78	0.321	1.90	8.2(+3)	0.16	3.0(-5)	0.25
Na	5.14	0.073	3.29	1.63	0.248	2.06	7.5(+3)	0.15	1.1(-5)	8.3(-2)
Li	5.39	0.068	3.48	1.59	0.228	2.12	7.1(+3)	0.15	6.4(-6)	4.6(-2)
I	10.5	0.025	6.77	1.14	0.084	2.96	3.0(+3)	0.14	2.0(-11)	6.1(-8)
Xe	12.1	0.020	7.81	1.06	0.068	3.18	2.4(+3)	0.14	3.9(-13)	9.4(-10)
H	13.6	0.017	8.77	1.00	0.057	3.37	2.0(+3)	0.14	7.5(-15)	1.5(-11)
He	24.6	0.007	15.8	0.74	0.023	4.53	7.2(+2)	0.16	5.1(-28)	3.7(-25)

Примечание. Приведены параметры F , K_0 , n^* , μ , γ , величина кулоновской поправки (25), величина поправки Q_1 , скорость ионизации (27) из короткодействующего потенциала с тем же значением энергии связи, что и в соответствующем атоме, и аналогичная величина (28) с учетом кулоновской поправки для нейтральных атомов в поле титан-сапфирового лазера ($\hbar\omega \approx 1.55$ эВ, $\lambda \approx 800$ нм) при интенсивности $J = 10^{13}$ Вт/см². Кулоновская поправка Q_1 бралась в виде $Q_1(\gamma) = \exp[-2n^*c_1(\gamma)]$. Используется обозначение $a(b) \equiv a \cdot 10^b$. Вероятность ионизации за время действия импульса получается умножением приведенной скорости ионизации на длительность импульса в атомных единицах: 100 фс $\approx 2.5 \cdot 10^3$ ат.ед. В случае атомов К, Na, Li, когда эта величина оказывается больше единицы, насыщение однократной ионизации происходит до окончания импульса.

Таблица 2. Кулоновские поправки для положительных ионов

Ион	I , эВ	F	K_0	n^*	μ	γ	Q_C	Q_1	w_{sr}	w
Хе ²⁺	32	0.015	2.52	1.96	0.388	13	2.7(+4)	1.3(-4)	1.2(-8)	3.5(-4)
Хе ³⁺	47	0.0083	3.70	2.15	0.291	16	4.0(+5)	2.3(-5)	6.2(-12)	2.5(-6)
Хе ⁴⁺	60	0.0057	4.72	2.38	0.252	18	5.1(+6)	4.1(-6)	3.5(-15)	1.8(-8)
Хе ⁵⁺	72	0.0044	5.67	2.61	0.230	20	5.8(+7)	7.8(-7)	1.9(-18)	1.1(-10)
Ar ²⁺	41	0.010	3.23	1.73	0.268	15	2.0(+4)	2.4(-4)	2.1(-11)	4.1(-7)
Ar ³⁺	60	0.0058	4.72	1.91	0.202	18	2.3(+5)	4.9(-5)	4.5(-15)	1.1(-9)

Примечание. То же, что и в табл. 1, для положительно заряженных ионов в поле рентгеновского лазера с энергией фотона $\hbar\omega \approx 12.7$ эВ ($\lambda \approx 98$ нм) и интенсивностью 10^{14} Вт/см².

сы ответственны за расхождения между численными результатами и теорией, подтверждается сравнением кривых на рис. 1а и 1б. В первом случае в области интенсивностей $(2-3) \cdot 10^{13}$ Вт/см² наблюдается четырехфотонный резонанс с одним из ридберговских уровней, положение которого зависит от интенсивности благодаря динамическому штарковскому сдвигу. На рис. 1б длина волны, не соответствующая какому-либо конкретному лазеру, подобрана так, что резонанс отсутствует. При этом совпадение аналитических и численных результатов оказывается практически идеальным.

Помимо приведенных выше численных результатов авторам известен только один пример расче-

тов вероятности многоквантовой ионизации положительно заряженных ионов полем излучения интенсивных рентгеновских лазеров, выполненных в работе [39] для случая ионизации ксенона полем с энергией фотона $\hbar\omega = 12.7$ эВ и интенсивностью 10^{13} Вт/см², т.е. в условиях эксперимента [7], в котором наблюдались зарядовые состояния до Хе⁶⁺ включительно. В работе [39] были численно найдены многофотонные сечения

$$\sigma_{N_{min}} = w_{N_{min}} / j^{N_{min}},$$

где N_{min} — введенное выше минимальное число фотонов, необходимое для ионизации, и $j = c\mathcal{E}_0^2/8\pi\omega$ — плотность потока фотонов. В условиях эксперимен-

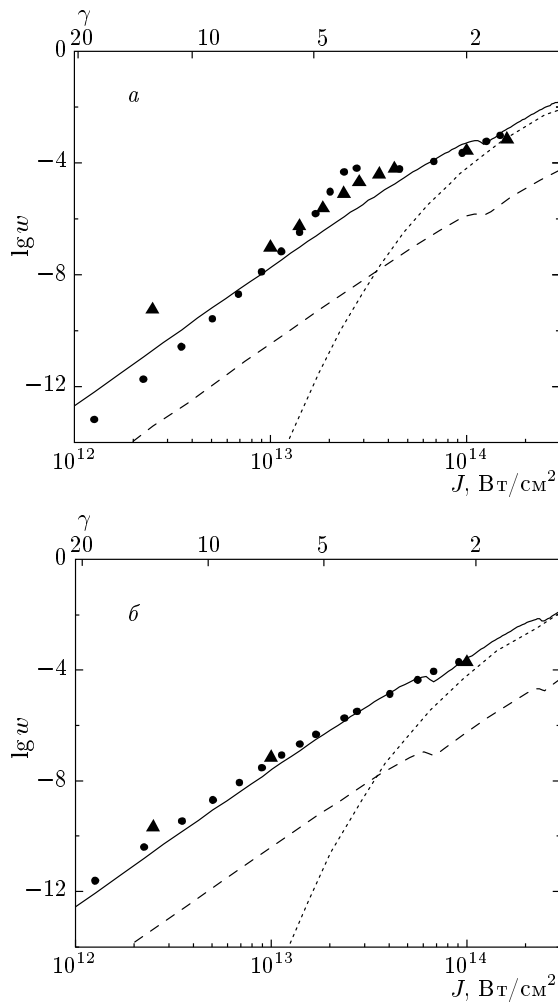


Рис. 1. Скорость ионизации (в атомных единицах, 1 ат. ед. = $4.13 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$), вычисленная по формулам (28) — сплошная линия, (27) — штриховая линия, и по туннельной формуле (29) — пунктирная линия, а также найденная численно методом Флоке (•) и решением временного уравнения Шредингера (▲) в зависимости от интенсивности для 1s-состояния атома водорода в поле линейно поляризованной волны с длинами волн 400 нм (а) и 422 нм (б). Параметры K_0 равны соответственно 4.39 и 4.63. Интенсивности 10^{14} Вт/см^2 соответствует амплитуда поля $\mathcal{E}_0 = 0.053\mathcal{E}_a$, интенсивности 10^{13} Вт/см^2 — $\mathcal{E}_0 = 0.0169\mathcal{E}_a$. Кулоновская поправка $Q_C \approx 6 \cdot 10^2$

та [7] плотность потока $j \approx 5 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Зная сечения, несложно вычислить соответствующие им вероятности и сопоставить их с аналогичными величинами, найденными из (31). Сравнение наших результатов с вероятностями, вычисленными по данным работы [39], демонстрирует неплохое согла-

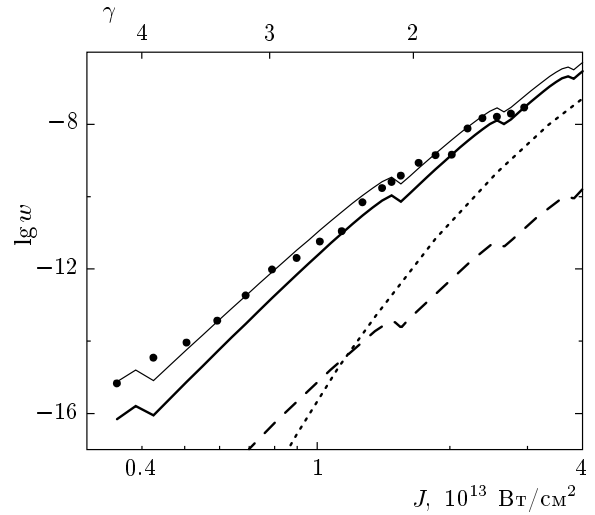


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для лазера на неодиме, длина волны 1064 нм. Сплошной тонкой линией показана скорость ионизации, вычисленная только с учетом поправки Q_0

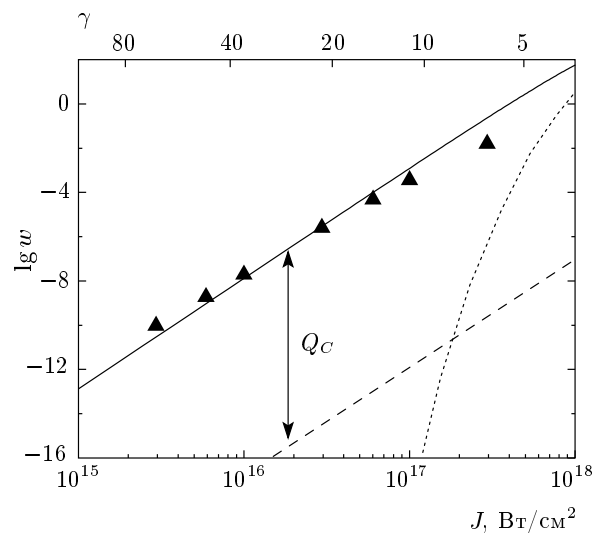


Рис. 3. То же, что на рис. 1, 2, для иона Xe^{17+} ($I = 434 \text{ эВ}$, оболочка $4p_0$) в поле рентгеновского лазера с длиной волны $\lambda = 13.3 \text{ нм}$ ($\hbar\omega \approx 93 \text{ эВ}$) [4]. Параметры K_0 , n^* и μ равны соответственно 4.67, 3.19 и 0.34, кулоновская поправка $Q_C \approx 9 \cdot 10^8$

сие: из (31) находим $w_4(\text{Xe}^{3+}) \approx 4.2 \cdot 10^{-10}$ ат. ед. и $w_5(\text{Xe}^{4+}) \approx 4.0 \cdot 10^{-13}$ ат. ед., в то время как из [39] для тех же величин соответственно следует $w_4(\text{Xe}^{3+}) \approx 2.7 \cdot 10^{-9}$ ат. ед. и $w_5(\text{Xe}^{4+}) \approx 8.3 \cdot 10^{-12}$ ат. ед. Вероятности, найденные из (31), меньше численных результатов работы [39]. По на-

шему мнению, систематическое расхождение связано со способом извлечения сечений из данных численных расчетов: авторы работы [39] использовали комплексный поглощающий потенциал, включающийся на расстояниях $r > R_0 = 4$ ат. ед. от ядра. Это приводило к тому, что электроны, населяющие высоколежащие ридберговские уровни, интерпретировались как ионизованные, что эффективно увеличивало сечение ионизации. Как показано в недавнем эксперименте [40], вероятность возбуждения электрона в ридберговское состояние в процессе многоквантовой ионизации полем интенсивного короткого импульса отнюдь не мала. В численном расчете, использованном в данной работе, электроны, возбужденные в ридберговские состояния, не считаются ионизованными (см. Приложение В), аналитические же результаты вообще не учитывают наличия связанных возбужденных состояний.

4. СЛУЧАЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

4.1. Монохроматическое поле

Обсудим теперь поправку к действию (15) и соответствующую поправку к вероятности Q_0 в общем случае эллиптической поляризации. Вклад в функцию действия, возникающий за счет энергии кулоновского взаимодействия и регуляризованный сшиванием с асимптотикой атомной волновой функции, имеет вид

$$W_{C0} = -in^* \ln[\kappa r_0(\tau_*)] - i \frac{Z}{\omega} \int_0^{\tau_*} \frac{d\tau}{\sqrt{\mathbf{r}_0^2(\tau)}}. \quad (32)$$

Здесь τ_* — точка сшивания, такая что $\tau_0 - \tau_* \ll \tau_0$ и $\kappa r_0(\tau_*) \gg 1$ [22, 33]. Подбарьерная траектория $\mathbf{r}_0(\tau)$ и уравнение для мнимого начального времени τ_0 относятся к случаю $Z = 0$. Формулу для кулоновской поправки удобно, следуя работе [22], записать в следующем виде:

$$Q_0 = \left\{ \frac{2}{F} C(\gamma, \rho) \right\}^{2n^*}, \quad (33)$$

где

$$C(\gamma, \rho) = \frac{\tau_0}{2\gamma} \times \exp \left\{ \int_0^{\tau_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2(\tau)}} - \frac{1}{\tau_0 - \tau} \right) d\tau \right\} \quad (33')$$

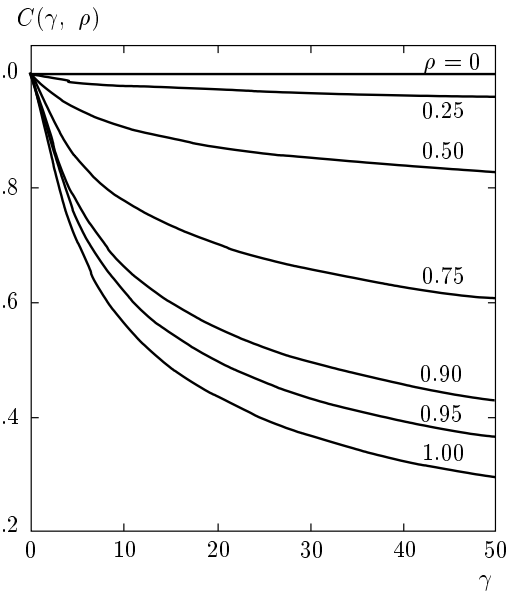


Рис. 4. Фактор $C(\gamma, \rho)$ в кулоновской поправке (33) в зависимости от γ при различных значениях эллиптичности ρ

и $\xi_0 = \omega \mathbf{r}_0 / \kappa$. Последнее выражение получено регуляризацией формулы (32) и уже не содержит произвольной точки сшивания τ_* , что удобно для численных расчетов. Нетрудно показать, что $|\xi_0(\tau)| = \tau_0 - \tau + \dots$ при $\tau \rightarrow \tau_0$, поэтому особенности подынтегрального выражения в (33') взаимно сокращаются, и интеграл всегда сходится. Отметим, что выражения (32), (33) и (33') справедливы не только для произвольной поляризации, но и для импульса произвольной формы, не обязательно монохроматического.

В монохроматическом эллиптически поляризованном поле

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(\mathbf{e}_x \cos \omega t + \rho \mathbf{e}_y \sin \omega t) \quad (34)$$

траектория \mathbf{r}_0 находится аналитически:

$$\mathbf{r}_0(\tau) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2} \left\{ (\text{ch } \tau_0 - \text{ch } \tau) \mathbf{e}_x + i \rho \left(\frac{\tau}{\tau_0} \text{sh } \tau_0 - \text{sh } \tau \right) \mathbf{e}_y \right\}, \quad (35)$$

$$\text{sh}^2 \tau_0 \left[1 - \rho^2 \left(\text{cth } \tau_0 - \frac{1}{\tau_0} \right)^2 \right] = \gamma^2. \quad (36)$$

Численный расчет по уравнениям (33'), (35) и (36) показывает (рис. 4), что фактор $C(\gamma, \rho)$ уменьшается с ростом γ , причем особенно резко для поляриза-

ции, близкой к циркулярной. Подставляя (35) в (33), (33'), приходим к выражению

$$Q_0 = \exp\{-2 \operatorname{Im} W_{C0}\} = \exp\{2n^*[\ln(2K_0\tau_0) + J(\gamma, \rho)]\}, \quad (37)$$

где

$$J = \int_0^1 ds \left\{ \gamma [(\operatorname{ch} \tau_0 - \operatorname{ch}[\tau_0(1-s)])^2 - \rho^2((1-s) \operatorname{sh} \tau_0 - \operatorname{sh}[\tau_0(1-s)])^2]^{-1/2} - \frac{1}{s} \right\}, \quad (38)$$

$s = 1 - \tau/\tau_0$. При $\rho = 0$ интеграл вычисляется аналитически: $J = \ln(2\gamma/\tau_0)$, что дает известное выражение (1) для кулоновской поправки в линейно поляризованном поле.

В многофотонном пределе $\tau_0 \gg 1$ имеем асимптотику

$$\tau_0(\gamma, \rho) = \begin{cases} \ln(2\gamma/\sqrt{1-\rho^2}), & 1-\rho^2 \gg 1/\ln(2\gamma), \\ \ln(\gamma\sqrt{2\ln\gamma}), & \rho^2 = 1 \end{cases} \quad (39)$$

(в узкой переходной области вблизи $\rho = \pm 1$ асимптотика τ_0 имеет более сложный вид). При этом выражение (38) упрощается:

$$J \approx \int_0^1 ds \left\{ [\tau_0^2 - \rho^2(\tau_0 - 1)^2]^{1/2} [(1 - \exp(-\tau_0 s))^2 - \rho^2(1 - s - \exp(-\tau_0 s))^2]^{-1/2} - \frac{1}{s} \right\}. \quad (40)$$

При $\gamma \gg 1$ можно указать простую интерполяционную формулу для интеграла (40):

$$J(\gamma, \rho) = \sqrt{\tau_0^2 - \rho^2(\tau_0 - 1)^2} \frac{\arcsin \rho}{\rho} - \frac{\pi \rho^2}{2[\tau_0(1 - \rho^2) + \rho^2]} - \ln \tau_0. \quad (41)$$

Кривые, приведенные на рис. 5, показывают, что при $\gamma \geq 10$ эта формула обеспечивает хорошую точность при всех ρ , а для поляризации, не слишком близкой к циркулярной, $\rho \leq 0.5$, выражение (41) хорошо совпадает с точным результатом (40) вплоть до $\gamma \approx 1$.

В случае циркулярной поляризации

$$J \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{2\tau_0} - \ln \tau_0, \quad \tau_0 \approx \ln(\gamma\sqrt{2\ln\gamma})$$

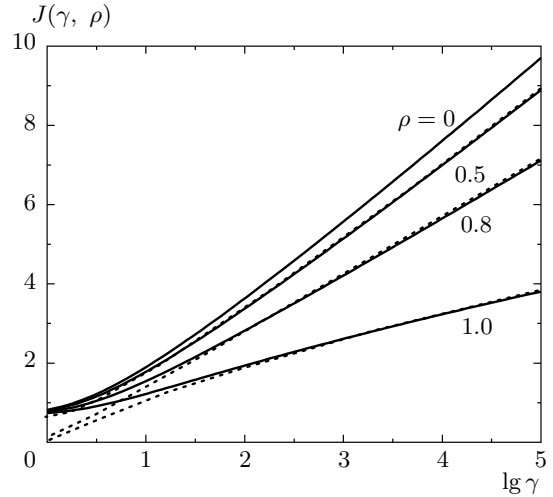


Рис. 5. Графики функций (38) (сплошные линии) и (41) (штриховые линии) в зависимости от γ для различных значений эллиптичности ρ . При $\rho = 0.5$ кривые практически неотличимы во всем интервале изменения параметра γ , при меньших значениях эллиптичности различия между точным результатом и (41) еще меньше

и кулоновская поправка (37) принимает вид

$$Q_0 \approx (2K_0)^{2n^*} \exp(\pi n^* \sqrt{2\ln\gamma}). \quad (42)$$

4.2. Адиабатический случай

Если $\gamma \ll 1$ (что обычно имеет место для оптических и инфракрасных лазеров), то все функции в выражениях (35), (38) можно разложить по степеням τ , τ_0 и γ^2 . После несложных, хотя и довольно громоздких вычислений получаем [41]

$$C(\gamma, \rho) = 1 - \rho^2 \left[\frac{1}{18} \gamma^2 - \frac{1}{45} \left(1 - \frac{25}{72} \rho^2 \right) \gamma^4 + \dots \right], \quad (43)$$

что при $\gamma < 2$ с процентной точностью согласуется с результатами, представленными на рис. 4, так что в этой области параметров можно воспользоваться разложением (43), не вычисляя интеграла (38). Можно обобщить (43) на релятивистский случай, т. е. для уровня, энергия связи которого сравнима с энергией покоя mc^2 . При этом коэффициент при γ^2 уже не обращается в нуль для линейной поляризации [41].

4.3. Плоская волна произвольной формы

Выше мы рассматривали ионизацию полем монохроматической волны (11), однако формулы (33), (33') справедливы и в более общем случае. Пусть

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \varphi(\theta), \quad -\infty < \theta \equiv \omega t < \infty, \quad (44)$$

где функция $\varphi(\theta)$ задает форму импульса. Для вычисления кулоновского фактора $C(\gamma, \rho)$ нужно подставить в (33') подбарьерную траекторию $\xi_0(\tau)$ при $\mathcal{Z} = 0$, которая находится из уравнений, приведенных в Приложении Г. В случае $\gamma \ll 1$ вероятность ионизации определяется поведением поля $\mathcal{E}(t)$ вблизи его максимума. Полагая при $\theta \rightarrow 0$

$$\varphi(\theta) = 1 - \frac{a_2}{2!} \theta^2 + \frac{a_4}{4!} \theta^4 + \dots, \quad a_2 > 0, \quad (45)$$

получаем (подробности приведены в [42])

$$C(\gamma) = 1 + \frac{1}{216} (a_4 - a_2^2) \gamma^4 + O(\gamma^6). \quad (46)$$

Отметим, что это разложение начинается с γ^4 (а не с γ^2), что, однако, является спецификой линейной поляризации, ср. с (43). При этом коэффициент при γ^4 , как правило, численно мал (см. примеры в Приложении Г), в силу чего кулоновскую поправку в области $\gamma \leq 1$ можно брать в том же виде (1), что и для постоянного поля.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найденные в работе аналитические формулы для кулоновских поправок получены методом теории возмущений по кулоновскому полю. Возникает вопрос, каковы ограничения на применимость этого метода. Поправка $x_1(\tau)$ к подбарьерной траектории вычисляется по теории возмущений, поэтому кулоновское поле должно быть мало по сравнению с лазерным на большей части подбарьерной траектории. В случае $\gamma \gg 1$ это условие сводится к неравенству

$$\gamma \mu \ll 1, \quad (47)$$

которое является довольно жестким¹⁰⁾. Действительно, как видно из табл. 1, 2, для основных состояний атомов и для положительно заряженных ионов благородных газов параметр (19) изменяется в пределах $\mu \approx 0.05-0.2$. В соответствии с неравенством (47) это означает, что верхняя граница параметра адиабатичности $\gamma \approx 10$.

¹⁰⁾ Известно, однако, что квазиклассические формулы часто «затягиваются» за пределы области их формальной применимости [43, 44].

Из рис. 1, 2 видно, однако, что применимость результата (25) «затягивается» в область существенно больших γ . Для установления более точного критерия применимости следует сравнить кулоновские поправки к действию (т. е. экспоненты от каждого из множителей в (25)) с действием, набирающимся в лазерном поле. Последнее в многофотонном режиме равно $K_0 [\ln(2\gamma) - 1/2]$. В результате вместо (47) получаем более слабое неравенство

$$\mu \ll 1, \quad (48)$$

которое вообще не содержит γ , но подразумевает, что $\gamma \gg 1$.

Таким образом, при выполнении условия $K_0 \gg 1$, формулы (25), (28) применимы для произвольных значений параметра адиабатичности γ и обеспечивают правильный переход к пределу слабого поля, когда применима теория возмущений наименьшего порядка N_{min} . Полученные результаты обобщают известные ранее выражения [22] для скорости многоквантовой ионизации атомов и положительно заряженных ионов на случай сильного поля произвольной частоты. Наиболее естественная область приложения развитой выше теории относится к активно проводящимся в настоящее время экспериментам по ионизации вещества в поле мощных рентгеновских лазеров.

Отметим, что вопрос об учете кулоновского взаимодействия в теории Келдыша рассматривался в ранних работах [22, 45], но не получил тогда окончательного решения. Никишов и Ритус развили специальную диаграммную технику (метод экспоненцирования [45]) и получили в случае циркулярной поляризации соотношение

$$Q_C(\mathcal{E}, \omega) = \frac{w(\mathcal{E}_0, \omega)}{w_{sr}(\mathcal{E}_0, \omega)} = \left(F \sqrt{1 + \gamma^2} \right)^{-2n^*}, \quad (49)$$

которое качественно согласуется с формулой (42), если $\gamma \gg 1$. С другой стороны, приведенный в [45] результат для линейной поляризации излучения, $w = w_{sr} \exp(c\sqrt{K_0})$, с константой $c \sim 1$ не совпадает с (25) и, на наш взгляд, представляется странным: при $\omega \rightarrow 0$ это выражение не переходит в известную формулу (1) для кулоновской поправки при ионизации постоянным полем.

Авторы признательны С. П. Гореславскому, Д. Ф. Зарецкому, Б. М. Карнакову, М. В. Федорову и Н. И. Швецову-Шиловскому за полезные обсуждения и С. Г. Позднякову за помощь в численных расчетах. Работа выполнена при частичной под-

держке РФФИ (гранты №№ 05-02-04016-ННИО_а, 07-02-01116).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Метод Капицы в задаче об ионизации

При ионизации атома полем линейно поляризованной волны мнимая часть действия принимает наименьшие возможные значения для одномерных траекторий, лежащих на прямой, направленной вдоль поляризации волны. Рассмотрим такую одномерную траекторию в поле атомного остова $U_C = -e^2 Z/r$ и электромагнитной волны (11), удовлетворяющую уравнению

$$m\ddot{x} = -\frac{Ze^2}{x^2} + e\mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (\text{A.1})$$

(в этом Приложении мы восстанавливаем размерности \hbar , e и m). В быстропеременном поле, согласно методу Капицы [29, 30], представим движение электрона как перемещение вдоль плавной траектории $X(t)$ с малыми осцилляциями на частоте ω вблизи нее:

$$x(t) = X(t) + \frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t). \quad (\text{A.2})$$

Условие применимости метода усреднения имеет вид $\omega T \gg 1$, где T — характерное время классического движения в кулоновском поле [30] после выхода из-под барьера,

$$T = 2\pi b^{3/2} \sqrt{\frac{m}{Ze^2}} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2K_0}{n^*}}. \quad (\text{A.3})$$

Здесь $b = \hbar\kappa/m\omega$ — ширина барьера (14), а параметры K_0 и n^* определены в выражениях (1) и (4). Таким образом, метод Капицы применим в условиях многоквантовой ионизации:

$$\omega T \approx \sqrt{\frac{2K_0}{n^*}} = \mu^{-1/2} \gg 1, \quad (\text{A.4})$$

где безразмерный параметр μ определен в (19). При этом условие $\gamma \gg 1$ также предполагается выполненным, что обеспечивает малость амплитуды осцилляций по сравнению с пространственным масштабом b , характеризующим усредненное движение электрона:

$$\frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega^2 b} = \gamma^{-1} \ll 1. \quad (\text{A.5})$$

Переходя в (A.1) к безразмерным переменным $\xi = x/b$, $\theta = \omega t$ и выполняя усреднение по периоду $2\pi/\omega$, получаем

$$\frac{d^2 \xi}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[\xi - \gamma^{-1}(1 - \cos \theta)]^2} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi}, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{U} = -\frac{\mu}{\sqrt{\xi^2 - 2\xi/\gamma}}.$$

Движение, отвечающее плавной координате $\xi(\theta)$, является консервативным с интегралом энергии

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\theta} \right)^2 + \mathcal{U}(\xi) = E = \text{const}. \quad (\text{A.7})$$

Нас интересует решение, отвечающее порогу ионизации (т. е. нулевой скорости электрона на бесконечности, $E = 0$): именно оно определяет экстремальную [12, 28] траекторию, вдоль которой вероятность ионизации достигает максимального значения. В этом случае

$$(d\xi/d\theta)^2 \sqrt{\xi^2 - 2\gamma^{-1}\xi} = 2\mu. \quad (\text{A.8})$$

При $\gamma \gg 1$ и $\xi \geq 1$ потенциал \mathcal{U} сводится к кулоновскому и (A.8) дает

$$\xi = \left[\xi_0^{3/2} + \frac{3}{2} \sqrt{2\mu} (\theta - \theta_0) \right]^{2/3}. \quad (\text{A.9})$$

Здесь ξ_0 и $\theta_0 = 0$ — безразмерные начальная точка и начальный момент движения в вещественном времени. Из (A.9) находим среднюю скорость (дрейфовый импульс) электрона на выходе из-под барьера (18):

$$p_{\parallel} = m\dot{X}(\theta = \theta_0) = \kappa \sqrt{2\mu/\xi_0} \approx \kappa \sqrt{2\mu}, \quad (\text{A.10})$$

поскольку $\xi_0 \approx 1$ (при $\mu = 0$ имеем $\xi_0 = 1$). Таким образом, даже в одномерном случае точка выхода из-под барьера не является точкой остановки частицы, в отличие от обычной квазиклассики [20].

Переходя к мнимому времени $\tau = -i\theta$, находим граничное условие для подбарьерной траектории $\xi(\tau)$:

$$\xi(d\xi/d\tau)^2 = -2\mu, \quad \tau = 0, \quad (\text{A.11})$$

которое показывает, что при наличии кулоновского взаимодействия эта траектория уже не остается вещественной. Естественно, поэтому, что при $\mu \neq 0$ начальный момент движения t_s также смещается с мнимой оси времени.

При движении в мнимом времени лазерное поле не является осциллирующим и метод Капицы неприменим. При условии $\gamma\mu \ll 1$, см. (47), на большей части подбарьерной траектории кулоновское поле мало по сравнению с лазерным, так что поправку к

траектории можно найти из уравнения (20), которое в переменных ξ и τ принимает вид

$$\frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2} = \frac{\mu}{\xi_0^2}, \quad (A.12)$$

$$\xi_0(\tau) = \frac{1}{\gamma}(\text{ch } \tau_0 - \text{ch } \tau) \approx 1 - \exp(\tau - \tau_0).$$

Последнее равенство получено с учетом того, что при $\gamma \gg 1$ величина $\tau_0 \approx \ln(2\gamma) \gg 1$, так что $\text{ch } \tau_0 \approx \text{sh } \tau_0 = \gamma$. Интегрируя (A.12) дважды с начальными условиями $\xi(\tau = 0) = \xi_0 \equiv 1 + a$, $d\xi/d\tau(\tau = 0) = i\sqrt{2\mu}$, получаем поправку (21) к траектории. Вещественная константа a обращается в нуль при $\mu = 0$ и, как показано в Приложении Б, не влияет на величину вероятности ионизации.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Вычисление поправки к действию

Здесь мы опишем вывод формулы (23). Пусть

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_1(t) + \dots, \quad (B.1)$$

где \mathbf{r}_0 — траектория (10) без учета кулоновского взаимодействия, \mathbf{r}_1 — поправка к ней первого порядка по Z (или по μ); при этом $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i \equiv d\mathbf{r}_i/dt$.

Для вычисления поправки (16) заметим, что первое слагаемое под знаком интеграла можно взять по частям:

$$\int_{t_s}^{\infty} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1 dt = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}_1 \Big|_{t=t_s}^{t \rightarrow \infty} - \int_{t_s}^{\infty} \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r}_1 dt. \quad (B.2)$$

В результате внеинтегральная часть в (B.2) сокращается с таким же слагаемым в функции F_1 , имеющим противоположный знак. Так как $\dot{\mathbf{v}}_0 = -\mathcal{E}(t)$, интеграл в правой части выражения (B.2) также сокращается с третьим слагаемым в (16). Аналогичные сокращения происходят при получении формулы

$$\text{Im } W = \frac{1}{2} \int_0^{t_s} [\kappa^2 + \mathbf{p}^2(t)] dt, \quad (B.3)$$

справедливой [28] в случае короткодействующих потенциалов. На вероятность ионизации влияет только мнимая часть действия, поэтому вклад от верхнего предела в функции F_1 несущественен. По той же причине интеграл в (16) достаточно вычислить только по мнимому времени $\omega t = i\tau$, $0 \leq \tau \leq \tau_0$, $\omega t_s = i\tau_0$. Таким образом, мнимая часть функции действия (16) есть

$$\text{Im } W_{C1} = -\frac{1}{2\omega} \times$$

$$\times \int_0^{\tau_0} \mathbf{v}_1^2 d\tau + \text{Im}(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_1) \Big|_{\tau=\tau_0} =$$

$$= -\frac{1}{2\omega} \int_0^{\tau_0} \dot{x}_1^2 d\tau + \text{Im}(x_0 x_1 + x_1 \dot{x}_1) \Big|_{\tau=\tau_0} \quad (B.4)$$

(траектория одномерна). Удерживая вклады не выше первого порядка по параметру μ , из (21) находим

$$\dot{x}_1^2 = 2\kappa^2 \mu, \quad \text{Im } x_1(\tau_0) = b\sqrt{2\mu} \tau_0,$$

$$\text{Re } \dot{x}_1(\tau_0) = \kappa\sqrt{2\mu}. \quad (B.5)$$

Наконец, из (12) следует $x_0(\tau_0) = 0$. В результате из (B.4) получается

$$\text{Im } W_{C1} = -\frac{\kappa^2 \mu}{\omega} \tau_0 + b\sqrt{2\mu} \tau_0 \kappa \sqrt{2\mu}, \quad (B.6)$$

откуда и следует (22). Вещественная часть поправки (16) оказывается бесконечной на нижнем пределе интегрирования, но на величине вероятности это не сказывается. В частности, не влияет на вероятность константа a в кулоновской поправке к траектории (21).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Численные методы

Представленные на рис. 1–3 результаты численных расчетов скорости ионизации получены двумя различными методами. Метод Флоке, известный также как метод комплексных квазиэнергий, основан на представлении решения уравнения Шредингера для атомного электрона в присутствии монохроматической электромагнитной волны в виде ряда Фурье, коэффициенты которого — зависящие от координат функции — находятся из решения бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Собственные значения этой системы комплексны и носят название квазиэнергий [46, 47]. Удвоенная мнимая часть квазиэнергии, взятая со знаком минус, представляет собой вероятность ионизации атомного уровня в единицу времени. Подробное описание метода Флоке в приложении к задаче о фотоионизации атомов в сильном поле содержится, например, в работе [48]. Там же приведено описание легко доступного численного кода STRFLO для вычисления квазиэнергий атомных уровней в монохроматическом поле с произвольной поляризацией,

который мы использовали для получения результатов, показанных на рис. 1, 2. Для атома водорода метод Флоке весьма эффективен: время вычисления квазиэнергии заданного состояния при фиксированных параметрах поля (т. е. одной точки на рис. 1, 2) на многопроцессорном компьютере средней мощности занимает около 10 с. В чисто монохроматическом поле многофотонные резонансы между связанными состояниями, энергии которых зависят от приложенного поля за счет динамического штарковского сдвига, играют существенную роль, как это, в частности, видно из рис. 1а. С ростом интенсивности вероятность возбуждения многофотонных резонансов также растет, что существенно затрудняет вычисления. В итоге, вычислить ширины уровней атома водорода методом Флоке при интенсивностях выше 10^{14} Вт/см² нам не удалось.

Альтернативный метод вычисления скорости ионизации основан на прямом численном интегрировании уравнения Шредингера для атомного электрона в поле лазерного импульса конечной длительности. С математической точки зрения этот подход сводится к решению задачи Коши с начальным условием, отвечающим электрону в определенном связанном состоянии. Результаты, показанные на рис. 1 и 3 треугольниками, получены при помощи кода Qrgr [49], выполняющего численное интегрирование зависящего от времени одноэлектронного уравнения Шредингера в заданном эффективном атомном потенциале в поле электромагнитной волны с временной огибающей, отвечающей импульсу длительностью в 10 периодов:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 f(\omega t) \sin \omega t,$$

$$f(\theta) = \begin{cases} \theta/4\pi, & 0 \leq \theta < 4\pi, \\ 1, & 4\pi \leq \theta \leq 16\pi, \\ (20\pi - \theta)/4\pi, & 16\pi < \theta \leq 20\pi. \end{cases}$$

Для вычисления вероятности ионизации находилась норма $\mathcal{N}(t)$ (интеграл по объему от плотности вероятности) внутри сферы достаточно большого радиуса R после выключения лазерного импульса. Вероятность $1 - \mathcal{N}(\infty)$, поделенная на длительность импульса τ , дает значение скорости ионизации. Ту же величину можно оценить, вычисляя производную по времени от $\mathcal{N}(t)$. Существенно, что выбирая радиус сферы достаточно большим ($R = 40$ ат. ед. в случае атома водорода) мы исключаем интерпретацию электронов, возбужденных на ридберговские уровни, как ионизованных. Результаты расчетов показывают, что доля таких возбужденных электронов не мала.

По сравнению с методом Флоке, решение зависящего от времени уравнения Шредингера более удобно для обобщения на случай неводородоподобного атома или иона. Состояние $4p_0$ валентного электрона в ионе Xe^{17+} , выступающее в качестве начального условия для численного решения временного уравнения Шредингера, строилось как собственное состояние в эффективном потенциале

$$U(r) = -Z/r - (54 - Z)e^{-\beta r}/r,$$

где $Z = 18$ и параметр $\beta = 7.93$ выбран так, чтобы состояние $4p_0$ обладало известным потенциалом ионизации $I = 434$ эВ.

Вычисление скорости ионизации уровня путем решения временного уравнения Шредингера требует существенно большего времени: расчет одной точки (треугольника) на рис. 1 и 2 при помощи многопроцессорного компьютера занимает несколько часов.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Кулоновский фактор $C(\gamma)$ в случае импульса произвольной формы

В случае линейно поляризованного электромагнитного импульса произвольной формы (44) подбарьерная траектория $\xi_0(\tau)$ при $Z = 0$ (т. е. без учета кулоновского взаимодействия) определяется из уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_0 &= -\gamma^{-1} \varphi(i\tau), \\ \xi_0(\tau_0) &= \dot{\xi}_0(0) = 0, \quad \dot{\xi}_0^2(\tau_0) = 1. \end{aligned} \quad (\text{Г.1})$$

Здесь $\xi_0 = \omega \kappa^{-1} x_0(t)$, $0 \leq \tau \leq \tau_0$, $\varphi(\theta)$ задает форму импульса, а точкой обозначена производная по мнимому времени $\tau = -i\theta$. Последнее условие в (Г.1) определяет «начальный момент» τ_0 подбарьерного движения.

В ряде случаев эти уравнения решаются точно.

а) Для монохроматического поля $\varphi(\theta) = \cos \theta$ получаем

$$\xi_0(\tau) = \frac{1}{\gamma} (\text{ch } \tau_0 - \text{ch } \tau), \quad \tau_0 = \text{arsh } \gamma \quad (\text{Г.2})$$

и интеграл в (33') вычисляется аналитически и дает $C(\gamma) = 1$ при всех γ , так что $Q_1 = (2/F)^{2n^*}$ не зависит от γ (т. е. от частоты ω при фиксированной амплитуде \mathcal{E}_0). Последнее, однако, является спецификой линейной поляризации и данной формы поля, что мы продемонстрируем на следующих примерах.

б) В случае $\varphi(\theta) = 1/\text{ch}^2\theta$ (солитоноподобный импульс) имеем

$$\xi_0(\tau) = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\cos \tau}{\cos \tau_0}, \quad \tau_0 = \text{arctg} \gamma, \quad (\text{Г.3})$$

$$C(\gamma) = 1 + \frac{1}{54} \gamma^4 + O(\gamma^6). \quad (\text{Г.4})$$

в) Для импульсного поля $\varphi(\theta) = (1 + \theta^2)^{-3/2}$ получаем

$$\xi_0(\tau) = \frac{1}{\gamma} \left(\sqrt{1 - \tau^2} - \sqrt{1 - \tau_0^2} \right), \quad (\text{Г.5})$$

$$\tau_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}},$$

$$C(\gamma) = 1 + \frac{1}{6} \gamma^4 - \frac{2}{15} \gamma^6 + \dots \quad (\text{Г.6})$$

г) В рассмотренных выше примерах коэффициент $c_4 = a_4 - a_2^2$ в разложении (46) неотрицателен, как и для $\varphi(\theta) = \exp(-\theta^2)$, $1/\text{ch} \theta$ и т. д. Однако возможны также случаи, в которых $c_4 < 0$. Пусть, например,

$$\varphi(\theta) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(1-s)\theta^2 \right\} \cos(\sqrt{s}\theta) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}(3-2s^2)\theta^4 + \dots, \quad (\text{Г.7})$$

где $-\infty < s \leq 1$. Тогда, согласно (46),

$$C(\gamma) = 1 + \frac{1}{108}(1-s^2)\gamma^4 + O(\gamma^6) \quad (\text{Г.8})$$

и $c_4 < 0$ при $s < -1$. Таким образом, кулоновский фактор $C(\gamma)$ может как возрастать, так и убывать с ростом γ в зависимости от формы импульса. Заметим, что (Г.7) при $0 < s \leq 1$ соответствует модулированному импульсу с гауссовской огибающей (модель, часто используемая в лазерной физике), а при $s \leq 0$ осцилляции исчезают и формула (Г.7) описывает одиночный импульс.

В эксперименте используются ультракороткие импульсы [14], длительность которых составляет лишь несколько периодов поля, а форма далека от идеальной синусоиды. В этой связи для различных полей вида (44) были рассчитаны (с помощью ММВ) функции, определяющие зависимость скорости ионизации от параметра Келдыша, а также импульсные спектры фотоэлектронов [50, 51].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Andruskow, B. Aunte, V. Ayvazyan et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 3825 (2000).
2. <http://flash.desy.de>.
3. V. Ayvazyan, N. Baboi, I. Bohnet et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 104802 (2002).
4. A. A. Sorokin, S. V. Bobashev, T. Feigl et al., Phys. Rev. Lett. **99**, 213002 (2007).
5. H. Wabnitz, L. Bittner, A. R. B. de Castro et al., Nature **420**, 482 (2002).
6. T. Laarmann, A. R. B. de Castro, P. Gurtler et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 143401 (2004).
7. H. Wabnitz, A. R. B. de Castro, P. Gurtler et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 023001 (2005).
8. N. Stojanovic, D. von der Linde, K. Sokolowski-Tinten et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 241909 (2006).
9. S. W. Epp, J. R. Crespo Lopez-Urrutia, G. Brenner et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 023001 (2005).
10. Г. С. Воронов, Н. Б. Делоне, Письма в ЖЭТФ **1**, 42 (1965).
11. W. Becker, F. Grasbon, R. Kopold et al., Adv. Atom. Mol. Opt. Phys. **48**, 35 (2002).
12. В. С. Попов, УФН **174**, 921 (2004).
13. A. Becker and F. H. M. Faisal, J. Phys. B **38**, R1 (2005).
14. D. B. Miloevic, G. G. Paulus, D. Bauer, and W. Becker, J. Phys. B **39**, R203 (2006).
15. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
16. F. H. M. Faisal, J. Phys. B **6**, L89 (1973); H. R. Reiss, Phys. Rev. A **22**, 1786 (1980).
17. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **50**, 255 (1966).
18. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393; **51**, 309 (1966).
19. N. L. Manakov, M. V. Frolov, B. Vorca, and A. F. Starace, J. Phys. B **36**, R49 (2003).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
21. Ю. Н. Демков, Г. Ф. Друкарев, ЖЭТФ **47**, 918 (1964).
22. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **52**, 514 (1967).
23. D. R. Hartree, Proc. Cambr. Phil. Soc. **24**, 89 (1927).
24. S. L. Chin, C. Rolland, P. B. Corkum, and P. Kelly, Phys. Rev. Lett. **61**, 153 (1998).

25. М. В. Аммосов, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **91**, 2008 (1986).
26. В. С. Попов, УФН **169**, 819 (1999).
27. В. С. Попов, В. П. Кузнецов, А. М. Переломов, ЖЭТФ **53**, 331 (1967).
28. В. С. Попов, Препринт ИТЭФ 13-04 (2000); ЯФ **68**, 717 (2005).
29. П. Л. Капица, ЖЭТФ **21**, 588 (1951); УФН **44**, 7 (1951).
30. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1989).
31. S. V. Popruzhenko, G. G. Paulus, and D. Bauer, Phys. Rev. A **77**, 053409 (2008); S. V. Popruzhenko and D. Bauer, J. Mod. Opt. **55**, 2573 (2008).
32. S. V. Popruzhenko, V. D. Mur, V. S. Popov, and D. Bauer, Phys. Rev. Lett. **101**, 193003 (2008).
33. В. С. Попов, В. Д. Мур, С. В. Попруженко, Письма в ЖЭТФ **85**, 275 (2007); S. V. Popruzhenko, V. D. Mur, and V. S. Popov, Phys. Lett. A **372**, 59167 (2008).
34. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, Москва (1966).
35. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, Москва (1979).
36. A. Becker, L. Plaja, P. Moreno, M. Nurhuda, and F. H. M. Faisal, Phys. Rev. A **64**, 023408 (2001).
37. I. Bersons, Phys. Lett. A **84**, 364 (1981); И. Я. Берсонс, ЖЭТФ **83**, 1276 (1982).
38. H. A. Kramers, Phil. Mag. **46**, 836 (1923).
39. Robin Santra and Chris H. Greene, Phys. Rev. A **70**, 053401 (2004).
40. T. Nubbemeyer, K. Gorling, A. Saenz, U. Eichmann, and W. Sandner, Phys. Rev. Lett. **101**, 233001 (2008).
41. V. S. Popov, V. D. Mur, B. M. Karnakov, and S. G. Pozdnyakov, Phys. Lett. A **358**, 21 (2006).
42. В. С. Попов, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, ИТЭФ, Москва (1974).
43. R. E. Langer, Phys. Rev. **75**, 1573 (1949).
44. А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, Москва (1975).
45. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **52**, 223 (1967).
46. Я. Б. Зельдович ЖЭТФ **51**, 1492 (1966); УФН **110**, 139 (1973).
47. В. И. Ритус, ЖЭТФ **51**, 1544 (1966).
48. R. M. Potvliege, Comput. Phys. Comm. **114**, 42 (1998).
49. D. Bauer and P. Koval, Comput. Phys. Comm. **174**, 396 (2006).
50. V. S. Popov, Laser Phys. **10**, 1033 (2000); В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **73**, 3 (2001); ЖЭТФ **120**, 315 (2001).
51. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **88**, 495 (2008).