

# НАСЫЩЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ВЕЙБЕЛЕВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И СТАЦИОНАРНЫЕ ТОКОВЫЕ СЛОИ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

*В. Ю. Мартьянов<sup>a,\*</sup>, В. В. Кочаровский<sup>a,b</sup>, Вл. В. Кочаровский<sup>a</sup>*

*<sup>a</sup> Институт прикладной физики Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия*

*<sup>b</sup> Department of Physics, Texas A&M University  
77843-4242, Texas, USA*

Поступила в редакцию 18 июня 2008 г.

Рассмотрены особенности образования и возможные стационарные структуры самосогласованного магнитного поля в релятивистской бесстолкновительной плазме, характерные для простейшей геометрии вейбелевской неустойчивости, широко известной в нерелятивистском случае. Для широкого класса анизотропных функций распределения частиц установлены универсальное условие и инкремент вейбелевской неустойчивости и проанализированы критерии ее насыщения (для определенности — в случае электрон-позитронной плазмы). Выведено нелинейное уравнение типа Грэда–Шафранова, описывающее потенциальные токовые структуры, и аналитически исследованы его решения. Особое внимание уделено гармоническим в пространстве нелинейным токовым конфигурациям, параметры которых определяются свойствами исходной неравновесной однородной плазмы, подверженной вейбелевской неустойчивости. Показано, что в найденных решениях (гармонических и нет) плотность энергии магнитного поля может быть сравнима с плотностью кинетической энергии частиц плазмы.

PACS: 52.25.Dg, 52.27.Er, 52.27.Ny, 52.35.Mw, 52.35.Qz

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема генерации магнитного поля в неравновесной плазме остается актуальной на протяжении многих десятков лет (см., например, [1–3]). Ее решение, являющееся существенно нелинейным, требуется для самосогласованного описания токовых структур в плазме, определяющих динамику частиц и поля в ней. Данная проблема особенно важна для сильно неравновесной плазмы, например, имеющейся в астрофизических объектах или возникающей при воздействии на вещество сильных лазерных полей.

Значительный прогресс здесь достигнут лишь в магнитогидродинамическом приближении, справедливом для достаточно плотной плазмы и для структур с масштабами, много большими длины свободного пробега частиц [2, 4, 5]. Для структур с меньши-

ми масштабами, т. е. для более разреженной, так называемой бесстолкновительной плазмы, результаты решения данной нелинейной задачи являются весьма фрагментарными [3, 6–13]. Более того, хотя исходный механизм генерации магнитного поля в бесстолкновительной плазме указан уже давно [14, 15], исследование условий возникновения и линейной стадии соответствующей кинетической неустойчивости проведено лишь для нескольких простейших функций распределения частиц [8, 11, 12, 16–21]. Общий критерий данной, так называемой вейбелевской неустойчивости и детальный анализ особенностей ее нелинейного насыщения пока отсутствуют даже для нерелятивистской плазмы. В случае плазмы с релятивистскими частицами проблема усугубляется неквадратичной зависимостью энергии частиц от их скорости, еще более запутывающей траектории движения частиц в самосогласованном магнитном поле, особенно на нелинейной стадии (см., например, [22–25]).

\*E-mail: mavy7@mail.ru

В настоящей работе для преодоления указанных трудностей мы используем метод инвариантов движения частиц, позволяющий построить широкий класс стационарных нелинейных решений кинетических уравнений в бесстолкновительной плазме с самосогласованным магнитным полем [26, 27]. Оказывается, что среди найденных решений есть даже гармонические в пространстве. Именно эти решения мы проанализируем детально, учитывая, что их параметры фактически предопределены свойствами исходной однородной плазмы, в которой развивалась вейбелевская неустойчивость. Метод инвариантов движения частиц неоднократно использовался в физике плазмы; с его помощью, например, было установлено существование потенциальных нелинейных плазменных волн Бернштейна–Грина–Крускала [28–31]. Попытки использовать данный метод предпринимались и в задачах о самосогласованном магнитном поле токовых слоев в бесстолкновительной плазме [32–34], но не дали сколько-нибудь общих результатов. Тем не менее, возможности метода в рассматриваемой проблеме далеко не исчерпаны. Заметим, что его эффективное применение предполагает симметрию задачи, обеспечивающую наличие не менее двух инвариантов движения частиц. Так, наличие сферической симметрии позволяет использовать не только энергетический инвариант, но и инвариант момента импульса; с помощью последнего в работе [30] были построены трехмерные локализованные плазменные образования, поддерживаемые самосогласованным электростатическим полем.

Для токовых структур в этом отношении наиболее привлекательна простейшая вейбелевская геометрия, в которой имеются три инварианта движения частиц и поэтому оказывается возможной аналитическая процедура построения нелинейных решений для функционально широкого класса функций распределения частиц. Говоря о вейбелевской геометрии, будем рассматривать плазму с анизотропной функцией распределения частиц, «вытянутой» вдоль оси  $y$  (точнее,  $p_y$ ), и ограничимся анализом одной пространственной моды магнитного поля с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , направленным вдоль оси  $x$ , когда в результате развития вейбелевской неустойчивости возникают магнитное поле  $\mathbf{B}$ , направленное вдоль оси  $z$ , и плотность тока  $\mathbf{j}$ , направленного по оси  $y$  (см. рис. 1). Механизм неустойчивости качественно состоит в следующем [15]: нарастающее возмущение магнитного поля изменяет скорость электронов  $v_e$  и отклоняет их от преимущественного движения вдоль оси  $y$ ; смещаясь вдоль вектора  $\mathbf{k}$ , электроны

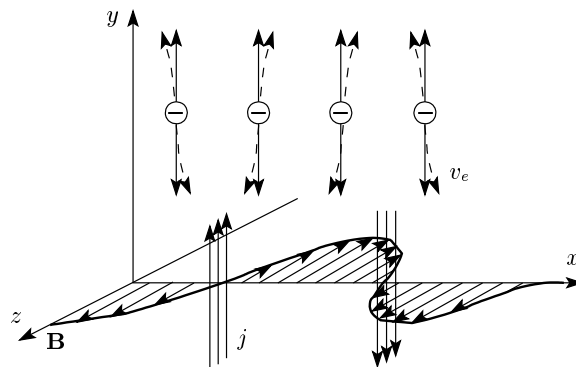


Рис. 1. Геометрия и физический механизм вейбелевской неустойчивости

образуют токовые слои с чередующимися направлениями тока, которые усиливают исходное возмущение магнитного поля.

В процессе развития неустойчивости функция распределения меняется в плоскости  $p_x p_y$ , степень ее анизотропии уменьшается и наступает насыщение неустойчивости. Простейшие нелинейные стационарные решения естественно искать в этой же, по существу, двумерной геометрии, не затрагивающей функцию распределения частиц по оси  $p_z$ . Динамика насыщения вейбелевской неустойчивости до сих пор мало исследована, особенно с учетом генерации непрерывного спектра мод, когда неясным остается даже вопрос о возможности возникновения пространственно-периодических токовых структур и установления стационарного состояния в первоначально неоднородной неравновесной плазме.

Исследование нелинейной стадии вейбелевской неустойчивости в однородной плазме неоднократно проводилось численно, особенно подробно в работе [11], где было показано, что на временах, больших тысячи плазменных времен, плазма, подверженная вейбелевской неустойчивости, может перейти в квазистационарное состояние, в котором присутствует достаточно сильная анизотропия распределения частиц с отношением поперечной и продольной температур  $T_{\perp}/T_{\parallel} \approx 3$ , самосогласованная с неоднородным магнитным полем. Медленная эволюция и крупномасштабные неустойчивости получающихся квазистационарных состояний, известные для классических токовых слоев типа слоя Харриса [35], по-прежнему, еще не анализировались. В последние годы численное исследование данной проблемы возобновилось с новой силой благодаря появившейся возможности трехмерного компьютерного моделирования формирования бесстолкновитель-

ных ударных волн, в которых генерация самосогласованного магнитного поля играет принципиальную роль [22–25, 36, 37]. Поскольку в этой задаче имеется специфическая пространственная неоднородность, даже в наиболее продвинутом численном эксперименте [37] на временах, больших  $10^4$  плазменных времен, пока не удалось проследить пространственно-временную эволюцию развития вейбелевской неустойчивости до стадии формирования стационарной ударной волны. Тем не менее, в этом эксперименте доля энергии магнитного поля, возникшего благодаря вейбелевской неустойчивости, вблизи фронта ударной волны в электрон-позитронной плазме превысила 1 % от энергии имеющихся там частиц.

Настоящая статья построена следующим образом. В разд. 2 проведен линейный анализ вейбелевской неустойчивости в анизотропной плазме на примере ряда характерных функций распределения частиц и установлен общий критерий возникновения данной неустойчивости. Ее механизмы насыщения и оценка величины насыщающего магнитного поля рассмотрены в разд. 3. Нелинейное уравнение типа Грэда–Шафранова, описывающее стационарные токовые слои, получено в разд. 4. Анализ его гармонических решений и их сопоставление со структурами, ожидаемыми в результате развития вейбелевской неустойчивости, даны в разд. 5. Более сложные решения уравнения типа Грэда–Шафранова обсуждаются в разд. 6.

## 2. ЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ И ОБЩИЙ КРИТЕРИЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Вейбелевская неустойчивость в бесстолкновительной плазме, схематически изображенная на рис. 1, определяется единственной компонентой тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{yy}$  и описывается следующим дисперсионным уравнением (см., например, [38]):

$$1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \int \frac{d\mathbf{p}}{\gamma_j} \frac{p_y}{(\omega - kp_x/\gamma_j m_j)} \times \left[ \left( \omega - \frac{kp_x}{\gamma_j m_j} \right) \frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{kp_y}{\gamma_j m_j} \frac{\partial}{\partial p_x} \right] F_j^0(\mathbf{p}) = 0. \quad (1)$$

Здесь индекс « $j$ » нумерует сорта заряженных частиц,  $\omega_{pj}^2 = 4\pi N_j e_j^2 / m_j$  — квадрат нерелятивистской плазменной частоты частиц сорта  $j$ ;  $N_j$ ,  $e_j$  и  $m_j$  — их концентрация, заряд и масса,  $\gamma_j = (1 + p^2/m_j^2 c^2)^{1/2}$ ,  $c$  — скорость света в вакууме,  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — частота и вол-

новой вектор рассматриваемого возмущения, пропорционального  $\exp(-i\omega t + ikx)$ ,  $F_j^0(\mathbf{p})$  — функция распределения частиц сорта  $j$  по импульсам, нормированная таким образом, что

$$\int F_j^0(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = 1.$$

При интегрировании по проекции импульса  $p_x$  у частоты  $\omega$  предполагается наличие положительной мнимой части, а затухающие решения находятся путем аналитического продолжения в комплексной плоскости  $\omega$ .

При выводе уравнения (1) предполагалось обращение в нуль недиагональных элементов тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{xy}$  и  $\epsilon_{yz}$ ; достаточным условием для этого является, например, зеркальная симметрия функции  $F_j^0(\mathbf{p})$  относительно плоскости  $p_y = 0$  при условии отсутствия постоянных токов. Для дальнейшего удобно преобразовать уравнение (1), выполнив интегрирование по частям:

$$\omega^2 - k^2 c^2 + \sum_j \omega_{pj}^2 \int \frac{F_j^0(\mathbf{p})}{\gamma_j} \frac{v_y^2}{c^2} \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{(\omega - kv_x)^2} d\mathbf{p} - \sum_j \omega_{pj}^2 \int \frac{F_j^0(\mathbf{p})}{\gamma_j} d\mathbf{p} = 0, \quad (2)$$

где введена скорость  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\gamma_j m_j$ . Собственно вейбелевской неустойчивости, рассматриваемой в настоящей статье, отвечают аperiодические решения с чисто мнимой частотой:  $-i\omega = \text{Im } \omega > 0$ .

Простейшим примером функции распределения, обеспечивающей вейбелевскую неустойчивость, является двухпотоковое холодное распределение, содержащее частицы только с импульсами  $p_y = \pm p_0$ ,  $p_x = p_z = 0$ :

$$F_j^0(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \delta(p_x) \delta(p_z) [\delta(p_y - p_0) + \delta(p_y + p_0)]. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - k^2 c^2 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\gamma_j^3} \frac{k^2 p_{0j}^2}{\omega^2 m_j^2} - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\gamma_j^3} = 0, \quad (4)$$

квадратное относительно  $\omega^2$ . Из него легко видеть, что при всех  $k \in (0, \infty)$  есть аperiодическая неустойчивость, причем максимальный инкремент неустойчивости  $\Gamma_{max} = \max \text{Im } \omega$  в этом случае определяется как

$$\Gamma_{max} = \sqrt{\sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\gamma_j} \frac{v_{0j}^2}{c^2}}. \quad (5)$$

Нарастание возмущений с длинами волн, стремящимися к нулю, является нетипичным для вейбелевской неустойчивости и в приведенном примере (3) обусловлено отсутствием разброса импульсов частиц по углам в плоскости  $p_x p_y$ . Чтобы продемонстрировать влияние этого разброса, рассмотрим функцию распределения

$$F_j^0(\mathbf{p}) = \frac{1}{4p_{0j}\xi_j} \delta(p_z) \delta(p - p_{0j}) \times \left| \frac{p_y}{p_{0j}} \right| H(\xi_j p_{0j} - p_x) H(\xi_j p_{0j} + p_x), \quad (6)$$

представляющую из себя пару симметричных дуг окружностей на плоскости  $p_x p_y$ , в которых частицы распределены по проекции  $p_x$  равномерно от  $-\xi_j p_{0j}$  до  $+\xi_j p_{0j}$ , где  $0 < \xi_j \leq 1$ . Функция  $H(x)$  есть функция Хевисайда, т. е. ступенчатая функция, равная единице при положительных значениях аргумента  $x$  и нулю — при отрицательных. Заметим, что при  $\xi_j \rightarrow 0$  распределение (6) сжимается по оси  $p_x$  и переходит в (3). Дисперсионное уравнение получается подстановкой выражения (6) в (2):

$$\omega^2 - k^2 c^2 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\gamma_j} \left[ \left( \frac{M_j^2 p_{0j}^2}{m_j^2 c^2 \gamma_j^2} + 1 \right) \times \left( -\frac{\xi_j^2 + 2M_j^2 + 1}{\xi_j^2 + M_j^2} + \frac{M_j}{\xi_j} \left( \pi - 2 \arctg \frac{M_j}{\xi_j} \right) \right) + 1 \right] = 0, \quad (7)$$

где введено обозначение  $M_j = -i\omega m_j \gamma_j / k p_{0j}$ . Видно, что для интересующего нас случая аперидической неустойчивости (мнимое  $\omega$ ) уравнение становится чисто действительным. Его анализ показывает, что неустойчивость есть в диапазоне волновых чисел  $0 < k < k'_{max}$ , где

$$k'_{max} = \sqrt{\sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\xi_j^2 c^2 \gamma_j}}, \quad (8)$$

причем данное граничное значение не обращается в нуль даже в случае  $\xi_j = 1$ , поскольку при этом распределение (6) остается существенно анизотропным. При  $k \ll k'_{max}$  и  $\xi_j \ll 1/\gamma_j$  решения дисперсионных уравнений (4) и (7) близки друг к другу. Типичный график зависимости инкремента от волнового числа для электрон-позитронной плазмы с  $\xi_{e^-} = \xi_{e^+} = \xi$  приведен на рис. 2, который подтверждает, что с увеличением степени анизотропии (т. е. с уменьшением  $\xi$ ) неустойчивость охватывает все более коротковолновую область. В длинноволновой области при

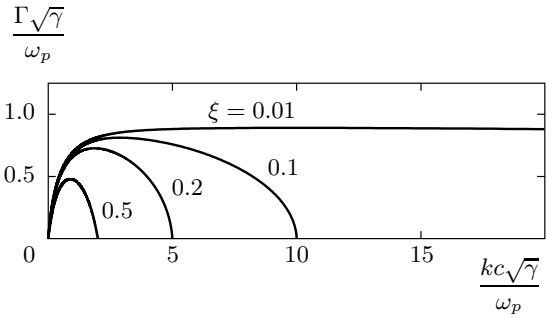


Рис. 2. Инкремент как функция волнового числа для вейбелевской неустойчивости в электрон-позитронной плазме с функцией распределения частиц (6) при  $v = p_0/m\gamma = 0.9c$  и различных значениях параметра  $\xi$

$k \ll \omega_p/c\sqrt{\gamma}$  для инкремента справедлива практически универсальная зависимость  $\Gamma \sim kv/(\xi + \gamma^{-1})$  при любых  $\xi, \gamma$  и  $v = p_0/m\gamma$ .

В обоих рассмотренных примерах все частицы одного сорта имели одинаковую энергию  $\sqrt{m_j^2 c^4 + p_{0j}^2 c^2}$ . Откажемся теперь и от этого ограничения, рассмотрев в качестве третьего примера, для которого удастся аналитически взять входящие в дисперсионное уравнение интегралы, функцию распределения, обобщающую так называемое waterbag-распределение из работы [17] на случай произвольного распределения частиц по поперечным импульсам  $p_\perp = \sqrt{p_y^2 + p_z^2}$ :

$$F_j^0(\mathbf{p}) = \tilde{F}_j \left( \sqrt{p_y^2 + p_z^2} \right) \times H(m_j v_{x0j} \gamma_j - p_x) H(m_j v_{x0j} \gamma_j + p_x). \quad (9)$$

Здесь  $\tilde{F}_j(p_\perp)$  — произвольная неотрицательная функция, обеспечивающая нормировку распределения (9). Дисперсионное уравнение в этом случае принимает вид

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\langle \gamma_j \rangle} \left[ \frac{c}{2v_{x0j}} \ln \frac{c + v_{x0j}}{c - v_{x0j}} + \frac{\langle v_{\perp j}^2 \rangle}{2(c^2 - v_{x0j}^2)} \frac{c^2 k^2 - \omega^2}{\omega^2 - k^2 v_{x0j}^2} \right] = 0, \quad (10)$$

где введены средние лоренц-фактор и квадрат поперечной (по отношению к  $\mathbf{k}$ , т. е. к оси  $x$ ) скорости частиц:

$$\langle \gamma_j \rangle = \frac{\int \tilde{F}_j(p_\perp) \gamma_j p_\perp dp_\perp}{\int \tilde{F}_j(p_\perp) p_\perp dp_\perp}, \quad (11)$$

$$\langle v_{\perp j}^2 \rangle = \frac{\int \tilde{F}(p_{\perp}) p_{\perp} v_{\perp j}^2 dp_{\perp}}{\int \tilde{F}(p_{\perp}) p_{\perp} dp_{\perp}}, \quad (12)$$

которые являются интегральными характеристиками функции распределения, не зависящими от  $\omega$  и  $k$ . В последних формулах  $\gamma_j$  и  $v_{\perp j}$  вычисляются через  $p_{\perp}$  на границе распределения, при  $v_x = v_{x0j}$ .

Неустойчивость существует в диапазоне волновых чисел

$$0 < k^2 < k_{max}^2 = \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\langle \gamma_j \rangle} \times \left[ \frac{\langle v_{\perp j}^2 \rangle}{2v_{x0j}^2(c^2 - v_{x0j}^2)} - \frac{1}{2cv_{x0j}} \ln \frac{c + v_{x0j}}{c - v_{x0j}} \right]. \quad (13)$$

График зависимости инкремента от волнового числа качественно выглядит так же, как на рис. 2, а максимальный инкремент определяется выражением

$$\Gamma_{max} = \sqrt{\frac{c^2}{2(c^2 - v_{x0}^2)} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\langle \gamma_j \rangle} \langle v_{\perp j}^2 \rangle} - \sqrt{\frac{cv_{x0}}{2(c^2 - v_{x0}^2)} \ln \frac{c + v_{x0}}{c - v_{x0}} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\langle \gamma_j \rangle}}, \quad (14)$$

записанным для простоты в случае, когда  $v_{x0j} = v_{x0}$  для всех сортов частиц  $j$ . Этот максимум достигается для волнового числа  $k_{opt}$ , определяемого из выражения

$$\frac{k_{opt}^2 v_{x0}^2}{\Gamma_{max}^2} = -\frac{v_{x0}^2}{c^2} + \frac{c^2 - v_{x0}^2}{c^2} \times \sqrt{\frac{cv_{x0}}{2} \ln \frac{c + v_{x0}}{c - v_{x0}} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\langle \gamma_j \rangle}} \times \left\{ \sqrt{\frac{c^2}{2(c^2 - v_{x0}^2)} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\langle \gamma_j \rangle} \langle v_{\perp j}^2 \rangle} - \sqrt{\frac{cv_{x0}}{2} \ln \frac{c + v_{x0}}{c - v_{x0}} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\langle \gamma_j \rangle}} \right\}^{-1}. \quad (15)$$

В случае слабой анизотропии распределения частиц, когда подкоренные выражения в формуле (14) близки друг к другу, значение  $k_{opt} \approx k_{max}/\sqrt{2}$ , причем  $k_{max}v_{x0} \gg \Gamma_{max}$ .

Среди других известных примеров функций распределения частиц в релятивистской плазме, для которых проводился анализ вейбелевской

неустойчивости, можно назвать бимаксвелловские распределения [12, 18, 19, 39, 40], степенное распределение [11] и различные варианты waterbag-распределений [8, 11, 17, 25]. В частности, для релятивистского бимаксвелловского распределения, рассмотренного в работе [18], и для ультрарелятивистского степенного распределения, рассмотренного в работе [11], при малой степени анизотропии  $T_{\perp}/T_{\parallel} - 1$  максимальный инкремент ведет себя как

$$\Gamma_{max} \sim \omega_p \gamma^{-1/2} (T_{\perp}/T_{\parallel} - 1)^{3/2},$$

а его отношение к величине  $k_{opt}v_T$  подчиняется линейному закону

$$\Gamma_{max}/k_{opt}v_T \sim T_{\perp}/T_{\parallel} - 1,$$

где  $k_{opt}$  — волновое число наиболее неустойчивых возмущений,  $v_T$  — характерная тепловая скорость частиц в случае близких по величине поперечной  $T_{\perp}$  и продольной  $T_{\parallel}$  температур.

Анализ всех рассмотренных точных решений показывает, что вейбелевская неустойчивость, как правило, реализуется для длинноволновых возмущений, т. е. существует в диапазоне волновых чисел от 0 до  $k_{max}$ , на краях которого инкремент обращается в нуль. В общем случае многокомпонентной плазмы, например электрон-позитрон-протонной, величина оптимального волнового числа, для которого инкремент максимален, зависит от дисперсионного вклада всех компонент, даже тех, с которыми наличие вейбелевской неустойчивости непосредственно не связано. Для сильно анизотропной электрон-позитронной плазмы, в которой роль электронов и позитронов одинакова, наиболее длинноволновые возмущения, для которых инкремент близок к максимальному, отвечают волновому числу  $k \sim \omega_p/c\sqrt{\gamma}$ . Максимальное значение инкремента в случае достаточно сильной анизотропии функции распределения частиц, ответственных за неустойчивость, имеет порядок их релятивистской плазменной частоты, точнее,  $\omega_p v/c\sqrt{\gamma}$ , где  $v$  и  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — характерная скорость и лоренц-фактор этих частиц. При уменьшении степени анизотропии максимальный инкремент уменьшается, а интервал волновых чисел, отвечающих неустойчивости, становится уже, пока не исчезнет совсем.

Общий критерий наличия вейбелевской неустойчивости можно получить из условия существования на дисперсионной кривой точки, в которой  $\omega \rightarrow 0$ , а  $k > 0$ . Это единственное значение  $k$  находится из уравнения (2). Воспользовавшись указанными со-

ображениями, получаем точный критерий вейбелевской неустойчивости (в релятивистском случае)

$$\sum_j \omega_{pj}^2 \int \frac{F_j^0(\mathbf{p})}{\gamma_j} \left(1 + \frac{p_y^2}{p_x^2}\right) d\mathbf{p} < 0 \quad (16)$$

и диапазон волновых чисел, отвечающих неустойчивости,

$$0 < k^2 < k_{max}^2 = - \sum_j \omega_{pj}^2 \int \frac{F_j^0(\mathbf{p})}{c^2 \gamma_j} \left(1 + \frac{p_y^2}{p_x^2}\right) d\mathbf{p}. \quad (17)$$

Полученные выражения в явном виде содержат оценку степени анизотропии функции распределения. Интегралы в формулах (16), (17) понимаются в смысле теории функций комплексного переменного, т. е. особенность в точке  $p_x = 0$  обходится в комплексной плоскости  $p_x$ . Поскольку особенность для симметричных по  $p_x$  распределений имеет второй порядок, способ ее обхода не влияет на результат, который при этом оказывается чисто действительным. Однако именно из-за этой особенности значение интеграла в формуле (16) может стать отрицательным, хотя подынтегральное выражение положительно во всех неособых точках<sup>1)</sup>. Нетрудно проверить, в частности, что интервал неустойчивых волновых чисел для рассмотренных выше случаев (8) и (13) в точности определяется формулой (17).

### 3. НАСЫЩЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Нелинейная динамика релятивистской вейбелевской неустойчивости не поддается столь же строгому математическому исследованию, как линейная. Имеющиеся фрагментарные численные исследования [6, 9, 10, 11, 23, 24, 37] свидетельствуют о том, что неустойчивость насыщается в результате уменьшения степени анизотропии функции распределения частиц и формирования квазистационарных квазипериодических в пространстве токовых структур, магнитное поле которых согласовано с квазипериодической анизотропной функцией распределения частиц. В данном разделе приведем простые качественные оценки уровня электромагнитных полей, насыщающих неустойчивость, причем для определенности проделаем это только для

<sup>1)</sup> По-видимому, указанное обстоятельство не было принято во внимание авторами работы [40] и не позволило им сформулировать строгий критерий вейбелевской неустойчивости (16), (17).

случая электрон-позитронной плазмы. Оценки для электрон-ионной плазмы имеют свою специфику, которая обсуждается, например, в работах [8, 36, 41].

Линейная стадия развития неустойчивости заканчивается, когда электромагнитные возмущения существенно меняют распределение частиц, отвечающих за неустойчивость. Простейшая оценка уровня насыщения неустойчивости получается, если потребовать, чтобы угол поворота частиц в генерируемом магнитном поле  $B_{sat}$  за время развития неустойчивости, т. е. за время порядка обратного инкремента, стал порядка единицы. Иными словами, циклотронная частота в насыщающем магнитном поле сравнивается по величине с инкрементом неустойчивости  $\Gamma$ :

$$\frac{eB_{sat}}{mc\gamma} \approx \Gamma. \quad (18)$$

О наступлении нелинейной стадии можно говорить и тогда, когда вызванные неустойчивостью дополнительные смещения частиц с характерной скоростью  $v$  сравниваются с длиной волны нарастающего возмущения. Соответствующая оценка насыщающего магнитного поля записывается как

$$\frac{eB_{sat}}{mc\gamma} \sim \frac{\Gamma^2}{kv} \quad (19)$$

и дает меньшую, чем (18), величину в случае  $\Gamma < kv$ .

Кроме того, поведение системы будет уже явно нелинейным, если изменение характерного импульса частиц под действием электрического поля  $E_{sat}$  за время обратного инкремента будет сравнимо с самим импульсом частиц  $mv\gamma$ . Отсюда

$$\frac{eE_{sat}}{\Gamma} \sim mv\gamma, \quad (20)$$

где, согласно уравнениям Максвелла,  $E_{sat} = \Gamma B_{sat}/kc$ . Оценка (20) дает меньшую, чем (18), величину в случае  $\Gamma > kv$ .

Окончательно получаем три оценки, которые частично обсуждались ранее [8, 11, 13, 41]:

$$B_{sat} \sim \frac{mc\gamma\Gamma}{e}, \quad B_{sat} \sim \frac{mc\gamma\Gamma}{e} \frac{\Gamma}{kv}, \quad B_{sat} \sim \frac{mc\gamma\Gamma}{e} \frac{kv}{\Gamma}. \quad (21)$$

Фактическое насыщающее поле определяется наименьшим из указанных значений. Они совпадают между собой в случае  $\Gamma \approx kv$ , типичном для сильно анизотропной плазмы. Последняя из оценок (21) указывает также минимальную величину магнитного поля, обеспечивающего замагниченность частиц, при которой их гирорадиус сравнивается с пространственным масштабом возмущения. Вторая же

из оценок (21) соответствует наступлению условия «магнитного удержания» частиц, когда частота их баунс-осцилляций в магнитном поле оказывается порядка инкремента возмущения [8, 11].

Подставив в (21) максимальный инкремент в виде  $\Gamma \sim (v/c)\omega_p/\sqrt{\gamma}$  и волновое число в виде  $k \sim \omega_p/c\sqrt{\gamma}$ , получаем соотношение

$$\frac{B_{sat}}{8\pi} \frac{1}{Nmc^2\gamma} \sim \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}, \quad (22)$$

из которого следует, что в релятивистской плазме при  $\Gamma \sim kv$  энергия магнитного поля, насыщающего вейбелевскую неустойчивость, может быть порядка кинетической энергии частиц плазмы. Если же  $\Gamma \ll kv$  либо  $\Gamma \gg kv$ , то насыщающее поле оказывается слабее и не достигает указанного «равнораспределительного» значения.

#### 4. УРАВНЕНИЕ ТИПА ГРЭДА – ШАФРАНОВА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВЫХ СЛОЕВ

Перейдем теперь к построению нелинейных стационарных решений — систем нейтральных токовых слоев, которые могли бы установиться в результате вейбелевской неустойчивости бесстолкновительной плазмы после окончания обмена энергией между частицами и полем, причем электрическое поле будем считать отсутствующим, а магнитное поле — статическим и согласованным с анизотропным пространственно-неоднородным распределением частиц. Оно должно удовлетворять кинетическому уравнению [38]

$$\mathbf{p} \frac{\partial F_j}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_j}{c} [\mathbf{p} \times \mathbf{B}] \frac{\partial F_j}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (23)$$

где функции распределения  $F_j$  нормированы не в каждой точке  $\mathbf{r}$ , а только в среднем по пространству:  $\langle \int F_j d\mathbf{p} \rangle = 1$ .

Набор аналитически исследованных к настоящему времени самосогласованных токовых структур является довольно узким (см., например, обзор [7] и статью [42]). В большинстве из них присутствует максвелловское распределение по скоростям, так или иначе сдвинутое и/или деформированное для разных сортов частиц; см., например, работы [33, 34, 43–45]. Для релятивистской плазмы известные решения фактически ограничиваются соответствующим обобщением токового слоя Харриса.

В выбранной нами «вейбелевской» геометрии (рис. 1) у поля  $\mathbf{B}$  отлична от нуля только компонен-

та, которая направлена вдоль оси  $z$  и которую удобно выразить через векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , направленный по оси  $y$ :  $B(x) = dA(x)/dx$ . Тогда система уравнений Максвелла сводится к одному обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению

$$-\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{4\pi}{c} \sum_j N_j \int F_j(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \frac{p_y}{m_j \gamma_j} d\mathbf{p}, \quad (24)$$

где под знаком суммы стоит  $y$ -компонента плотности тока частиц сорта  $j$ , а  $N_j$  — их средняя концентрация. При движении каждой частицы сохраняется ее энергия (а значит, и модуль импульса), проекция импульса  $p_z$  и проекция обобщенного импульса  $p_y + e_j A/c$  на ось  $y$ , поэтому в стационарном состоянии функцию распределения можно выразить через эти три инварианта:

$$F_j(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \hat{F}_j(p, p_z, p_y + e_j A/c). \quad (25)$$

В результате уравнение (23) удовлетворяется тождественно, а подстановка (25) в (24) при заданном виде функций  $\hat{F}_j$  дает уравнение типа Грэда–Шафранова для векторного потенциала<sup>2)</sup>:

$$-\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{4\pi}{c} \times \sum_j N_j \int \hat{F}_j \left( p, p_z, p_y + \frac{e_j A}{c} \right) \frac{p_y}{m_j \gamma_j} d\mathbf{p}. \quad (26)$$

Разлагая функции  $\hat{F}_j(p, p_z, p_y + e_j A/c)/\gamma_j$  в ряд Тейлора по аргументу  $p_y + e_j A/c$  и переходя к цилиндрическим координатам  $p_z, p_{xy} = \sqrt{p^2 - p_z^2}$ ,  $\varphi$  в пространстве импульсов, получаем

$$-\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{4\pi}{c} \sum_j N_j \int \frac{p_{xy}^2}{m_j} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \int C_{ij}(p_{xy}, p_z) dp_z \times \int \left( p_{xy} \cos \varphi + \frac{e_j A}{c} \right)^i \cos \varphi d\varphi \right] dp_{xy}, \quad (27)$$

<sup>2)</sup> Подобные уравнения для самосогласованных стационарных токовых структур, в том числе двумерно-неоднородных, известны в магнитной гидродинамике [46–48]. Заметим, что, отказавшись от однородности по оси  $z$  (но не по оси  $y$ ), можно обобщить полученное уравнение (26), заменив в нем  $d^2/dx^2$  на двумерный лапласиан. Разнообразные самосогласованные двумерно-неоднородные решения  $A(x, z)$  в этом случае легко находятся методом инвариантов, если функция  $\hat{F}_j$  не содержит явной зависимости от  $p_z$ ; ср. работу [33], где без использования метода инвариантов было найдено частное двумерно-неоднородное решение вида квадратной решетки, соответствующее максвелловскому распределению частиц с пространственно-неоднородным фактором, квадратично зависящим от обобщенного импульса  $p_y + e_j A/c$ . В одномерно-неоднородном случае уравнение (26) очевидным образом обобщается на двухкомпонентное магнитное поле, лежащее в плоскости  $yz$  (для нерелятивистского случая см. [34]).

где  $C_{ij}$  — зависящие от  $p$  и  $p_z$  коэффициенты указанного разложения. Интеграл по  $\varphi$  берется независимо от них, и если лишь конечное число из них отлично от нуля, то правая часть (27) есть просто многочлен от  $A$ , коэффициенты которого некоторым интегральным образом выражаются через функции  $C_{ij}(p_{xy}, p_z)$ . Заметим, что слагаемые с  $C_{0j}$  не дают вклада в ток, т. е. в правую часть уравнения (27).

Поскольку благодаря калибровочной инвариантности изменение векторного потенциала на постоянную величину не влияет на магнитные поля, токи и функции распределения частиц, выбором этой постоянной можно добиться обращения в нуль свободного члена указанного многочлена, если последний имеет действительные корни. Это удобно, в частности, для записи уравнения (27) в форме

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = -\frac{dU}{dA}, \quad (28)$$

где потенциал Грэда–Шафранова  $U(A)$  будет иметь экстремум при  $A = 0$ . Если это минимум, то простейшими решениями являются малые периодические «колебания», соответствующие гармоническим в пространстве профилям  $A(x)$ . Последние, таким образом, являются типичными токовыми слоями, причем нелинейными, поскольку для них не справедлив принцип суперпозиции. Мы рассмотрим их в следующем разделе. О других возможных решениях см. разд. 6.

Решению полученного уравнения Грэда–Шафранова (27), описывающего структуру магнитного поля, соответствует неоднородное в пространстве анизотропное распределение частиц. Естественно ожидать, что устойчивыми, т. е. физически реализуемыми, окажутся те решения, которым отвечают не слишком анизотропные функции распределения. Последнее ограничивает, в частности, допустимую функциональную зависимость распределения  $\hat{F}_j$  от переменной  $p_z$  и, следовательно, зависимость коэффициентов  $C_{ij}$  от переменной  $p_z$ . Впрочем, эта зависимость непосредственно не проявляется в уравнении (27) благодаря интегрированию по  $p_z$ . Кроме того, в выбранной геометрии (рис. 1) развитие вейбелевской неустойчивости не сопровождается перераспределением частиц по проекции импульса  $p_z$ . В частности,  $p_z \equiv 0$  в ходе эволюции распределений (3) и (6). Поэтому ниже при анализе стационарных решений для простоты не будем рассматривать движение по оси  $z$ , полагая  $p_z = 0$  для всех частиц.

Оказывается, что нетривиальные решения можно найти даже в более частном, моноэнергетическом случае:

$$F_j(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \delta(p_z)\delta(p - \hat{p}_j)\hat{\gamma}_j \times \sum_{i=0}^{\infty} C_{ij} \left( \hat{p}_j \cos \varphi + \frac{e_j A}{c} \right)^i, \quad (29)$$

где  $C_{ij}, \hat{\gamma}_j = (1 + \hat{p}_j^2/m_j^2 c^2)^{1/2}$ ,  $\hat{p}_j$  — константы. Уравнение (27) тогда записывается в виде

$$-\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{4\pi}{c} \sum_j e_j N_j \frac{\hat{p}_j^2}{m_j} \times \sum_{i=1}^{\infty} C_{ij} \int_0^{2\pi} \left( \hat{p}_j \cos \varphi + \frac{e_j A}{c} \right)^i \cos \varphi d\varphi. \quad (30)$$

Легко понять, что, поскольку плотность тока является линейным функционалом от функции распределения, любая линейная нормированная комбинация функций распределения (29) с различными энергиями частиц, отвечающих одному и тому же решению  $A(x)$ , приводит к тому же самому решению  $A(x)$  уравнения Грэда–Шафранова (26). Сказанное аналогично содержащейся в уравнении (27) возможности использовать суперпозицию функций распределения с различными  $z$ -компонентами импульса  $p_z$ . Иными словами, любая структура магнитного поля, найденная для функции распределения частного вида (29), может быть самосогласована с более широким классом функций распределения, отвечающих одному и тому же пространственному распределению плотности тока. Это, в частности, будет ясно и из приводимого ниже анализа гармонических в пространстве токовых структур.

### 5. ГАРМОНИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОГРАНИЧЕНИЕ НА ЭНЕРГИЮ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Пусть в разложении Тейлора, использованном при выводе уравнения (27), отличны от нуля только коэффициенты  $C_{0j}$  и  $C_{2j}$ . Тогда

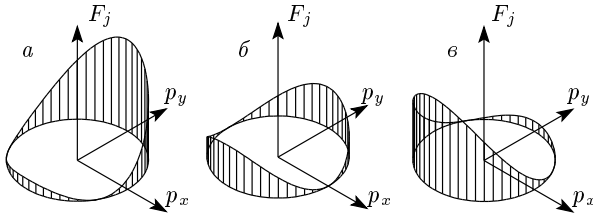
$$-\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{8\pi^2}{c^2} \sum_j N_j \frac{\hat{p}_j^3 e_j^2}{m_j} C_{2j} A \quad (31)$$

и для магнитного поля получается уравнение пространственного гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2 B}{dx^2} + \left( \sum_j \frac{8\pi^2}{c^2} N_j \frac{\hat{p}_j^3 e_j^2}{m_j} C_{2j} \right) B = 0. \quad (32)$$

Соответствующая функция распределения частиц по импульсам (29) зависит от координаты  $x$  и качественно изображена на рис. 3. Нетрудно показать,





**Рис. 3.** Функция распределения частиц по импульсам (29) для гармонического решения (33) в трех плоскостях  $x = \text{const}$ , в которых  $A = A_{max}$  (а), 0 (б),  $-A_{max}$  (в), где  $A_{max} = B_{max}/k$

что степень ее анизотропии, которую можно охарактеризовать отношением средних квадратов импульсов вдоль осей  $y$  и  $x$ , максимальна в области максимального магнитного поля и не превышает трех.

Таким образом, в стационарном случае можно получить в точности ту же структуру магнитного поля

$$B = B_{max} \cos(kx), \tag{33}$$

которая была в начале роста одной моды вейбелевской неустойчивости. Если такая конфигурация возникла в результате развития вейбелевской неустойчивости, то должны быть выполнены три условия — закон сохранения числа частиц каждого сорта  $j$ :

$$\left\langle \int F_j d\mathbf{p} \right\rangle = 2\pi C_{0j} \hat{\gamma}_j \hat{p}_j + \pi C_{2j} \hat{\gamma}_j \left( \hat{p}_j^2 + \frac{e_j^2}{k^2 c^2} B_{max}^2 \right) \hat{p}_j = 1, \tag{34}$$

где  $B_{max}$  — амплитуда магнитного поля в стационарном состоянии, условие равенства пространственных периодов исходной гармоники вейбелевского возмущения и конечной стационарной структуры:

$$\sum_j \frac{8\pi^2}{c^2} N_j \frac{\hat{p}_j^3 e_j^2}{m_j} C_{2j} = k^2, \tag{35}$$

и закон сохранения энергии:

$$\frac{B_{max}^2}{16\pi} + \sum_j N_j m_j c^2 \hat{\gamma}_j = \sum_j N_j m_j c^2 \int F_j^0(\mathbf{p}) \gamma_j d\mathbf{p}, \tag{36}$$

где  $F_j^0(\mathbf{p})$  — начальное распределение частиц в неравновесной плазме до развития вейбелевской неустойчивости.

Из условий (34) и (35) получаем

$$\frac{B_{max}^2}{16\pi} = \frac{1}{2} \sum_j N_j m_j c^2 \hat{\gamma}_j \frac{\hat{v}_j^2}{c^2} (1 - 2\pi C_{0j} \hat{\gamma}_j \hat{p}_j) \times (1 + k^2 r_{Hjmin}^2)^{-1}, \tag{37}$$

где введен гирорадиус в области максимума магнитного поля  $r_{Hjmin} = c \hat{p}_j / e_j B_{max}$ . Не нарушая условия неотрицательности функции распределения  $F_j(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \geq 0$ , можно положить  $C_{0j} = 0$ , что соответствует максимально возможному исключению изотропной компоненты функции распределения частиц, не участвующей в создании тока и поддержании магнитного поля:

$$\frac{B_{max}^2}{16\pi} = \frac{1}{2} \sum_j N_j m_j c^2 \hat{\gamma}_j \frac{\hat{v}_j^2}{c^2} (1 + k^2 r_{Hjmin}^2)^{-1}. \tag{38}$$

Видно, что для достаточно длинноволновых структур энергия магнитного поля в стационарном гармоническом решении может быть близка к кинетической энергии частиц в нерелятивистской плазме и к половине полной энергии частиц в релятивистской плазме. Используя далее закон сохранения энергии (36), можно утверждать, что если гармоническое нелинейное решение возникает в результате вейбелевской неустойчивости неравновесной анизотропной плазмы, то средняя скорость частиц уменьшается не более чем в корень из двух раз, а их средний лоренц-фактор — не более чем на одну треть (соответственно в нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях).

В более общем случае, когда в функции распределения присутствует разброс по энергиям, разложение (29) принимает вид

$$F_j(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \delta(p_z) \gamma_j \sum_{i=0}^{\infty} \hat{C}_{ij}(p) (p \cos \varphi + e_j A/c)^i, \tag{39}$$

где  $\hat{C}_{ij}$  — функция импульса, и при учете только первых трех членов разложения опять получается уравнение гармонического осциллятора с квадратом пространственной частоты, равным

$$k^2 = \frac{2\pi}{c^2} \sum_j \frac{4\pi N_j e_j^2}{m_j} \int p^3 \hat{C}_{2j}(p) dp. \tag{40}$$

Подобные гармонические решения для нерелятивистской бесстолкновительной плазмы с максвелловской функцией распределения по скоростям обсуждались в работе [34]. Предлагаемый нами подход позволяет рассматривать любые функции распределения частиц по энергии, а не только экспоненциальные. В частности, для любой функции распределения по энергии нетрудно найти относительное энергосодержание  $\epsilon_B$  магнитного поля в гармонических

токовых структурах. Так, если ненулевым оставить только квадратичный член разложения (39), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_B &= \frac{B_{max}^2/16\pi}{\sum_j N_j m_j c^2 \left\langle \int F_j \gamma d\mathbf{p} \right\rangle} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_j N_j m_j e_j^2 A_{max}^2 \int \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \hat{C}_{2j}(p) p dp \times \\ &\times \left\{ \sum_j N_j m_j e_j^2 A_{max}^2 \int \gamma^2 \hat{C}_{2j}(p) p dp + \right. \\ &\left. + \sum_j N_j m_j c^2 \int \gamma^2 \hat{C}_{2j}(p) p^3 dp \right\}^{-1}, \quad (41) \end{aligned}$$

где  $A_{max} = B_{max}/k$ . Отсюда также легко видеть, что для гармонических решений доля энергии магнитного поля  $\varepsilon_B$  в релятивистской немоноэнергетической плазме не превышает 1/2.

Необходимым условием для проведения описанной выше процедуры построения стационарного решения является электрическая нейтральность плазмы, т. е. равенство локальных концентраций положительно и отрицательно заряженных частиц:

$$\sum_j e_j N_j \int F_j d\mathbf{p} \equiv 0.$$

Это условие, представляющееся особенно актуальным для токовых структур с пространственным масштабом, меньшим дебаевского, можно выполнить различными способами<sup>3)</sup>. Например, можно считать, что токи создаются только электронами, и решать задачу (23), (24) для электронов, а к найденному решению добавить покоящиеся положительные частицы (ионы или позитроны) с тем же пространственным распределением плотности. Другой способ обеспечить нейтральность состоит в том, чтобы использовать зарядовую инверсию функции распределения, т. е. положить  $F_+(\mathbf{p}) = F_-(-\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})$ ,  $N_+ = N_- = N/2$ , где индексами «+» и «-» обозначены величины, относящиеся соответственно к положительно и отрицательно заряженным частицам.

Наиболее естественным последнее предположение является для электрон-позитронной плазмы, в

<sup>3)</sup> В общем случае стационарные токовые слои могут быть и заряженными и тогда для их описания в дополнение к уравнению Грэда–Шафранова нужно использовать уравнение Пуассона и учитывать электростатический потенциал в инварианте энергии для частиц. Анализ подобных уравнений выходит за рамки настоящей работы.

которой имеет место равенство масс всех частиц. Тогда в простейшем случае моноэнергетической функции распределения  $F(\mathbf{p})$  выражение (37) удается упростить и записать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_B &= \frac{B_{max}^2/16\pi}{N m c^2 \hat{\gamma}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hat{v}^2}{c^2} \left( 1 - 2\pi \hat{p} \hat{\gamma} C_0 - \frac{k^2 c^2 \hat{\gamma}}{2\omega_p^2} \right), \quad (42) \end{aligned}$$

где плазменная частота включает полную (среднюю по пространству) концентрацию электронов и позитронов. Здесь для полноты картины учтена изотропная компонента плазмы, описываемая нулевым коэффициентом  $\hat{\gamma} C_0$  тейлоровского разложения функции распределения (линейное слагаемое в тейлоровском разложении (29) несущественно, поскольку убирается калибровочным преобразованием векторного потенциала). Наличие этой компоненты, как видно из формулы (42), лишь уменьшает долю энергии магнитного поля. Указанное уменьшение может частично компенсироваться для слоев, возникающих в результате развития вейбелевской неустойчивости на малых волновых числах, что характерно для слабоанизотропной неравновесной плазмы (см. разд. 2). Однако в последнем случае величина  $2\pi \hat{p} \hat{\gamma} C_0$  близка к единице и поэтому при любых условиях энергия магнитного поля установившихся гармонических токовых слоев оказывается малой по сравнению с равномерной, как и ожидалось согласно разд. 3. В случае же достаточно сильно анизотропной электрон-позитронной плазмы, где  $2\pi \hat{p} \hat{\gamma} C_0 \lesssim 1/2$  и  $k^2 c^2 \hat{\gamma} \lesssim \omega_p^2$ , максимальная допустимая доля энергии магнитного поля (42) гармонических токовых структур согласуется с оценкой (22), полученной из условия насыщения вейбелевской неустойчивости.

## 6. О МНОГООБРАЗИИ ТОКОВЫХ СТРУКТУР С САМОСОГЛАСОВАННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Наряду с рассмотренными выше гармоническими решениями нетрудно построить и более сложные периодические решения уравнения Грэда–Шафранова (27). Полагая в уравнении (27) или (30) отличными от нуля коэффициенты при степенях, больших двух, получаем неквадратичный профиль потенциала Грэда–Шафранова  $U(A)$  и соответствующие ему ангармонические «колебания» величины  $A(x)$ . Легко видеть, что форма этого потенциала  $U(A)$ , определяемая видом зависимости функции распределения (25) от интегралов движения, а вместе с ней и форма периодического профиля магнитного поля

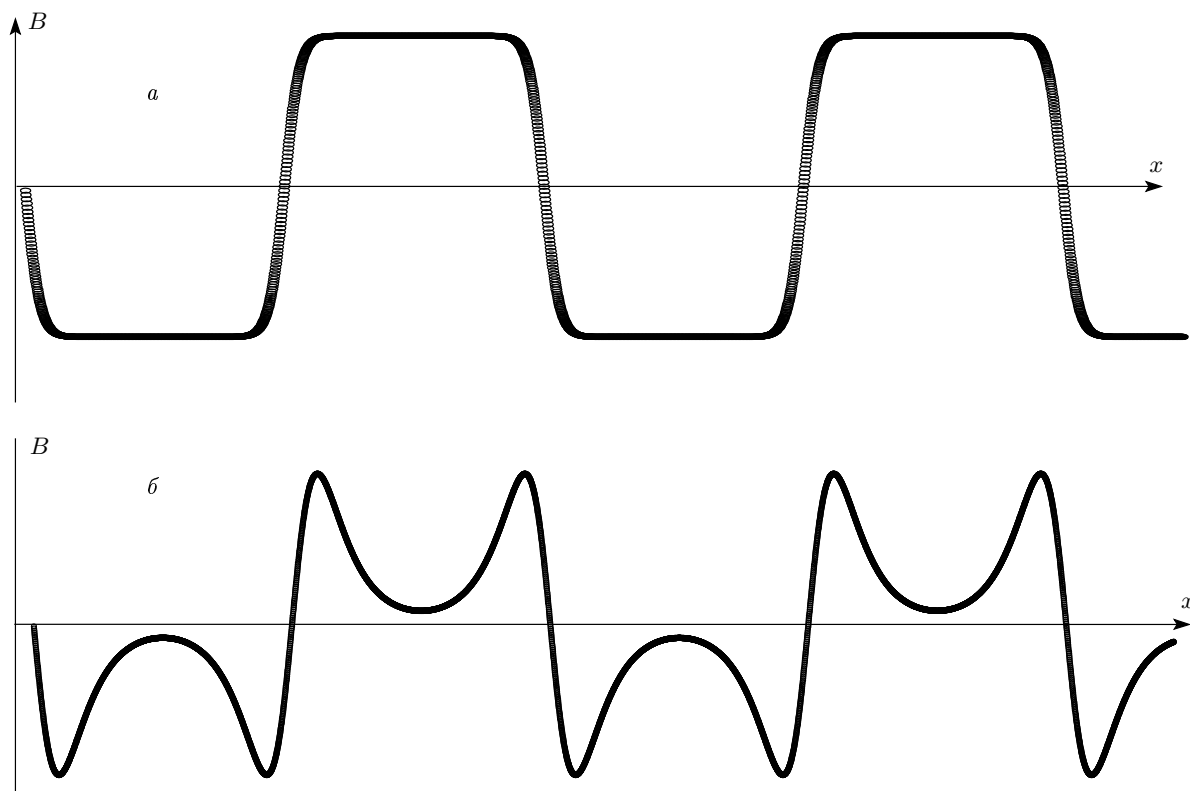


Рис. 4. Возможные негармонические профили магнитного поля в токовых слоях, описываемых потенциалом Грэда – Шафранова вида  $U \propto A^{16}$  (а),  $U \propto A^4 - (\hat{p}^2 c^2 / e^2) A^2$  (б)

$B(x)$  могут меняться в широких пределах. Таким образом, мы имеем возможность аналитически описывать функционально широкий класс самосогласованных токовых структур.

Некоторые примеры негармонических профилей, построенных с помощью метода инвариантов, приведены на рис. 4. Для рис. 4а использовано тейлоровское разложение с единственным отличным от нуля коэффициентом  $C_{2n} \neq 0$ , порождающее потенциал Грэда – Шафранова вида  $U(A) \propto A^{2n}$ , в случае  $n = 8$ . Структура магнитного поля в этой конфигурации представляет собой почти однородные области с чередующимся знаком поля, разделенные относительно тонкими токовыми слоями. Степень анизотропии функции распределения частиц, определенная как отношение средних квадратов их импульсов  $p_y^2$  и  $p_x^2$ , для данного потенциала максимальна в области максимума магнитного поля и достигает величины  $2n+1$ . Для рис. 4б потенциал Грэда – Шафранова выбран в виде  $U(A) \propto A^4 - (\hat{p}^2 c^2 / e^2) A^2$ , причем  $A_{max} = 1.001 \hat{p} c / e$ . Этот потенциал имеет подъем в области  $|A| < \hat{p} c / e \sqrt{2}$ , который отвечает уменьшению величины  $B$  на каждом периоде поля. Нетрудно

показать, что для этих и других подобных решений плотности энергии магнитного поля и энергии частиц могут быть одного порядка.

В слабых полях, пока гирорадиус частиц  $r_H$  велик по сравнению с масштабом неоднородности периодической токовой структуры, движение почти всех частиц вдоль оси  $x$  является инфинитным. Исключение составляют лишь частицы, испытывающие баунс-осцилляции, т. е. движущиеся в окрестности минимумов магнитного поля с импульсами, которые направлены почти вдоль плоскости  $p_x p_z$ . Однако поскольку построенные нелинейные решения допускают произвольное соотношение между гирорадиусом частиц и периодом структуры, возможна и противоположная ситуация  $r_H \ll 1/k$ , когда все частицы будут «захвачены» магнитным полем и движение каждой частицы вдоль оси  $x$  будет финитным. Поскольку насыщение вейбелевской неустойчивости наступает раньше, при  $kr_H \approx 1$ , формирование подобных токовых структур с сильно замагниченными частицами возможно лишь благодаря существенно нелинейной динамике плазмы или под действием внешних факторов.

Использованные в тех или иных местах в данной статье предположения относительно отсутствия разброса частиц по проекции импульса  $p_z$  и/или по энергиям, как и привязка к одномерной геометрии, в которой токи и магнитные поля зависят только от одной координаты  $x$ , также не являются необходимыми ограничениями для применения метода инвариантов. На его основе возможны систематическое описание и анализ гораздо более широкого класса самосогласованных токовых конфигураций бесстолкновительной релятивистской плазмы. Так, возможно построение неперiodических решений, решений с цилиндрической симметрией (токовых филаментов) и двумерно-неоднородных структур. Применение метода инвариантов ко всем перечисленным случаям и решения соответствующих уравнений типа Грэда–Шафранова требуют отдельного рассмотрения.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, метод инвариантов движения частиц позволяет указать и аналитически исследовать функционально широкий класс стационарных нейтральных токовых слоев с самосогласованным магнитным полем в релятивистской бесстолкновительной плазме. Подобные слои, по-видимому, могут возникать в результате развития вейбелевской неустойчивости в неравновесной плазме с анизотропной функцией распределения частиц. Для широкого класса анизотропных функций распределения частиц установлены универсальное условие и инкремент вейбелевской неустойчивости и выяснены критерии ее насыщения.

Найдены и проанализированы гармонические в пространстве решения выведенного нелинейного уравнения типа Грэда–Шафранова, описывающие указанные токовые структуры. Показано, что для плазмы с достаточно сильной анизотропией функции распределения частиц параметры указанных токовых слоев определяются свойствами исходной неравновесной однородной плазмы, подверженной вейбелевской неустойчивости. Указан класс токовых слоев (гармонических и нет), плотность энергии магнитного поля в которых может быть сравнима с плотностью кинетической энергии частиц. При этом степень анизотропии функции распределения частиц оказывается довольно большой и сильно неоднородной в пространстве, что существенно усложняет проблему устойчивости подобных конфигураций. Она требует дополнительного исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-02-00163-а), Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-4485.2008.2) и программы Президиума РАН «Происхождение и эволюция звезд и галактик».

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. G. Haines, *Canad. J. Phys.* **64**, 912 (1986).
2. A. Brandenburg and K. Subramanian, *Phys. Rep.* **417**, 1 (2005).
3. V. P. Krainov, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **36**, 3187 (2003).
4. B. V. Somov, *Plasma Astrophys. Part II*, Springer (2006).
5. F. Califano, D. D. Sarto, and F. Pegoraro, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 105008 (2006).
6. R. C. Davidson, D. A. Hammer, I. Haber et al., *Phys. Fluids* **15**, 2 (1972).
7. P. H. Yoon and A. T. Y. Lui, *J. Geophys. Res.* **110**, A01202 (2005).
8. Y. Lyubarsky and D. Eichler, *Astrophys. J.* **647**, 1250 (2006).
9. T. N. Kato, *Phys. Plasmas* **12**, 080705 (2005).
10. F. Califano, F. Pegoraro, S. V. Bulanov et al., *Phys. Rev. E* **57**, 7048 (1998).
11. T.-Y. B. Yang, J. Arons, and A. B. Langdon, *Phys. Plasmas* **1**, 3059 (1994).
12. M. Lazar, R. Schlickeiser, and P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **13**, 102107 (2006).
13. M. Medvedev and A. Loeb, *Astrophys. J.* **526**, 697 (1999).
14. E. S. Weibel, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 83 (1959).
15. B. D. Fried, *Phys. Fluids* **2**, 337 (1959).
16. F. D. Kahn, *J. Fluid Mech.* **14**, 321 (1962).
17. P. H. Yoon and R. C. Davidson, *Phys. Rev. A* **35**, 2718 (1987).
18. P. H. Yoon, *Phys. Fluids B* **1**, 1336 (1989).
19. U. Schaefer-Rolffs and R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **12**, 022104 (2005).
20. L. N. Tshintsadze and P. K. Shukla, arXiv:0712.2874.

21. А. Ю. Романов, В. П. Силин, С. А. Урюпин, ЖЭТФ **126**, 843 (2004).
22. A. Spitkovsky, arXiv:0802.3216.
23. К.-И. Nishikawa, Р. Е. Hardee, С. В. Hededal et al., *Astrophys. J.* **642**, 1267 (2006).
24. L. O. Silva, R. A. Fonseca, J. W. Tonge et al., *Astrophys. J.* **596**, L121 (2003).
25. R. A. Fonseca, L. O. Silva, J. W. Tonge et al., *Phys. Plasmas* **10**, 1979 (2003).
26. V. Ju. Martyanov, V. V. Kocharovsky, V. V. Kocharovsky et al., *Proc. Int. Conf. «Frontiers of Nonlinear Physics»* (2005), p. 647.
27. V. Ju. Martyanov, E. V. Derishev, V. V. Kocharovsky et al., *AIP Conf. Proc.* **801**, 357 (2005).
28. I. B. Bernstein, J. M. Greene, and M. D. Kruskal, *Phys. Rev.* **108**, 546 (1957).
29. H. Schamel, *Phys. Plasmas* **7**, 4831 (2000).
30. C. S. Ng and A. Bhattacharjee, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 245004 (2005).
31. L.-J. Chen, J. Pickett, P. Kintner et al., *J. Geophys. Res.* **110**, A09211 (2005).
32. K. Schindler and J. Birn, *J. Geophys. Res.* **107**, 1193 (2002).
33. A. Suzuki and T. Shigeyama, arXiv:0803.3843v1.
34. N. Attico and F. Pegoraro, *Phys. Plasmas* **6**, 3 (1999).
35. I. Silin, J. Büchner, and L. Zelenyi, *Phys. Plasmas* **9**, 1104 (2002).
36. A. Spitkovsky, *Astrophys. J.* **673**, L39 (2008).
37. U. Keshet, B. Katz, A. Spitkovsky et al., arXiv:0802.3217.
38. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Госатомиздат, Москва (1961).
39. R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **11**, 5532 (2004).
40. U. Schaefer-Rolffs, I. Lerche, and R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **13**, 012107 (2006).
41. J. Wiersma and A. Achterberg, *Astron. Astrophys.* **428**, 365 (2004).
42. F. Mottez, *Phys. Plasmas* **10**, 2501 (2003).
43. E. G. Harris, *Nuovo Cimento* **23**, 117 (1962).
44. W.-Z. Fu and L.-N. Hau, *Phys. Plasmas* **12**, 070701 (2005).
45. S. M. Mahajan and R. D. Hazeltine, *Phys. Plasmas* **7**, 1287 (2000).
46. H. Grad, *Rev. Mod. Phys.* **32**, 830 (1960).
47. V. D. Shafranov, *Rev. Plasma Phys.* **2**, New York: Consultants Bureau (1966), p. 103.
48. В. С. Бескин, *Осесимметричные стационарные течения в астрофизике*, Физматлит, Москва (2006).