

К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Д. В. Карловец, А. П. Потылицын*

*Томский политехнический университет
634050, Томск, Россия*

Поступила в редакцию 14 мая 2008 г.

Развита макроскопическая теория дифракционного излучения, возникающего при движении точечной заряженной частицы вблизи идеально проводящего экрана. Получены интегральные выражения для полей излучения, на основе которых анализируются сходства и различия процессов дифракции электромагнитного излучения и дифракционного излучения заряженной частицы. Показано, что в рассматриваемом случае распространяемая модель, в которой поле излучения представляется как поле поверхностного тока, имеет более жесткие границы применимости, нежели в классической теории дифракции. Это существенно ограничивает применимость полученных ранее данным методом результатов ультрарелятивистскими энергиями и углами пролета частицы, близкими к направлению нормали к поверхности экрана. С помощью развитого в работе метода двойного слоя рассматриваются известные задачи дифракционного излучения: излучение при нормальном пролете частицы по оси круглого отверстия в экране, излучение при наклонном пролете вблизи идеально проводящей полуплоскости, а также излучение при наклонном пролете частицы через прямоугольную щель в бесконечном экране. В последнем случае при предельном переходе к нулевой ширине щели полученные результаты полностью совпадают с теорией переходного излучения для произвольных энергии частицы и ее угла падения на экран.

PACS: 41.60.-m, 41.75.Ht

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интенсивно развивается новое направление в диагностике ультрарелятивистских пучков современных ускорителей, основанное на использовании дифракционного излучения [1, 2]. Преимущества такого метода очевидны: характеристики пучка при взаимодействии с проводящей мишенью остаются практически неизменными. В макроскопической теории дифракционного излучения (ДИ) и переходное излучение (ПИ) электронов с энергией в сотни МэВ и выше часто рассматриваются по аналогии с оптикой с использованием известных простых методов, например, метода псевдофотонов [3–6] или метода поверхностных токов [7–10]. Это привело к тому, что ряд результатов был получен без указания области их применимости. Как будет показано ниже, оказывается, например, что в теории ДИ метод поверхностных токов является приближенным, причем даже в ультрарелятивистском случае при определенной геометрии задачи (угол

между вектором нормали к поверхности и вектором скорости частицы) результаты могут быть неверными. Целью данной работы является разработка более корректной макроскопической теории ДИ точечной заряженной частицы, пролетающей вблизи идеально проводящего экрана. Полученные результаты позволяют сформулировать критерии применимости ряда известных приближенных методов.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 на основе известных из оптики интегральных соотношений (называемых иногда векторными интегралами Кирхгофа) выводятся выражения для полей излучения, записанные через интегралы по поверхности экрана, а также по поверхности отверстия в экране. Показано, что эти выражения, в отличие от классической теории дифракции, не сводятся к простым формулам для полей поверхностного тока. Это связано с тем, что падающее на экран поле является полем заряженной частицы, удовлетворяющим неоднородным уравнениям Максвелла. В разд. 3 с помощью найденных выражений для полей излучения решается задача о ДИ частицы, пролетающей нормально по оси круглого отверстия в экране, а также

*E-mail: karlovets@tpu.ru

формулируется векторный аналог теоремы Бабине для ДИ, связывающий поля от так называемых дополнительных экранов. В разд. 4 рассматривается излучение при наклонном пролете частицы вблизи идеально проводящей полуплоскости, в разд. 5 — излучение при наклонном пролете частицы через прямоугольную щель в идеально проводящем экране. В последнем случае показано, что при нулевой ширине щели возникающее излучение соответствует точным результатам теории переходного излучения [11]. Полученные здесь результаты сравниваются с полученными ранее с помощью метода поверхностных токов и указывается область применимости данного метода. Показано, в частности, что метод токов приводит к значительной погрешности в задаче об излучении при параллельном пролете частицы вблизи полуплоскости даже в ультрарелятивистском случае.

2. ВЕКТОРНЫЙ ПОДХОД В МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

2.1. Метод поверхностных токов

Прежде чем приступать к основному изложению, приведем простой, но в то же время весьма наглядный пример, иллюстрирующий границы применимости в теории ДИ одного из широко используемых в классической теории дифракции методов. Речь пойдет о методе поверхностных токов, называемом иногда также методом «зеркальных» токов [12]. Согласно данному методу (см., например, [8, 10]), поле излучения представляется как поле поверхностного тока, для нахождения которого используются стандартные граничные условия на поверхности идеального проводника. Например, для электрического поля в волновой зоне имеем известное выражение:

$$\mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega) = -\frac{i}{\omega} \times \times \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \int \mathbf{j}_s^e(\mathbf{r}, \omega) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} dS. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{k} = k\mathbf{e}$ — волновой вектор, $k = \omega/c$,

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}_0/r_0 = \{\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta\},$$

а интегрирование ведется по поверхности, занятой током $\mathbf{j}_s^e(\mathbf{r}, \omega)$. Поскольку в нашем случае поверхностный ток наводится полным полем, включающим собственное поле заряда, выражение для тока записывается в виде [8, 13] (происхождение «лишней» двойки будет объяснено позднее)

$$\mathbf{j}_s^e(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0 - \frac{1}{2\pi} \mathbf{n} \times \int \mathbf{j}_s^e(\mathbf{r}', \omega) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \times \left(ik - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dS'. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{n} — нормаль к поверхности экрана. В классической теории дифракции данное интегральное уравнение (сформулированное В. А. Фоком) используется для нахождения приближенного выражения для поля, рассеянного на поверхности конечной кривизны. В случае, если радиус кривизны достаточно велик, уравнение (2) решается методом итераций, причем нулевой член разложения соответствует плоскому экрану [13]. В задаче о переходном или дифракционном излучении поверхностью S является плоский экран, расположенный в плоскости $z = 0$ (в данной статье мы рассматриваем лишь плоские поверхности). Тогда, раскрывая двойное векторное произведение, убеждаемся, что второе слагаемое в (2) есть тождественный нуль. Подобный подход в задачах о ПИ применялся в работах [8, 10]. Заметим, что для определения поверхностного тока часто также используется другое граничное условие:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^R(\mathbf{j}_s^e)) = 0,$$

также представляющее собой интегральное уравнение. Обычно оно решается методом Винера–Хопфа–Фока [7, 14, 15].

Пусть теперь на поверхность сплошного бесконечного экрана со скоростью $v = \beta c$ падает нормально точечный заряд. Для определения поля возникающего при этом переходного излучения в соответствии с формулой (1) можно использовать полярные координаты: $dS = \rho d\rho d\phi$. Для магнитного поля частицы, движущейся против оси z , имеем выражение $\mathbf{H}^0 = \beta \times \mathbf{E}^0$, где

$$\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e\omega}{\pi v^2 \gamma} \left(\frac{\rho}{\rho} K_1 \left[\frac{\omega \rho}{v \gamma} \right] - \frac{i}{\gamma} \frac{\mathbf{v}}{v} K_0 \left[\frac{\omega \rho}{v \gamma} \right] \right) \times \times \exp \left(-i \frac{\omega}{v} z \right). \quad (3)$$

Здесь $\rho = (x, y)$, γ — лоренц-фактор, $K_{0,1}$ — функции МакДональда [16]. Интегрирование в формуле (1) проводится с использованием известных соотношений:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi e^{-ia_1 \rho \cos \phi} d\phi = -2i\pi J_1(a_1 \rho), \quad (4)$$

$$\int_0^\infty \rho J_1(a_1 \rho) K_1(a_2 \rho) d\rho = \frac{a_1}{a_2} \frac{1}{a_1^2 + a_2^2},$$

где J_1 — функция Бесселя, a_1, a_2 — вещественные положительные постоянные. В итоге получаем следующее выражение для интенсивности переходного излучения «назад» (здесь термин «назад» используем, следуя монографии [3]):

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = cr_0^2 |\mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega)|^2 = \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}. \quad (5)$$

По сравнению с известными результатами [17] данная формула имеет «лишний» множитель $\beta^2 \cos^2 \theta$, что позволяет применять ее лишь в релятивистском случае и для углов излучения $\theta \rightarrow 0, \theta \rightarrow \pi$. Любопытно, что используемый здесь векторный подход приводит точно к тем же результатам, что и скалярная теория [18].

Гораздо чаще в реальных экспериментах используется наклонное падение заряда на экран (экран при этом не обязательно плоский [5, 19, 20]). Поэтому несравненно больший интерес представляет излучение при наклонном падении. Решение данной задачи методом токов приводит к значительно более громоздким выражениям, и мы не будем их здесь приводить. Однако уже из выражения для тока (2) видно, что для случая наклонного падения заряда на экран в выражение для поля излучения не будет входить продольная (вдоль скорости) компонента поля \mathbf{E}^0 . Вклад данной компоненты весьма значителен для наклонного падения в случае малых энергий (см. формулу (3), а также [20]). Пренебрежение этим вкладом приводит к тому, что метод токов дает заметную погрешность даже для энергий электронов в несколько десятков МэВ. Это существенно ограничивает применимость данного подхода ультрарелятивистскими энергиями и малыми углами падения.

2.2. Метод двойного слоя

Как известно из классической теории дифракции, поля в объеме, ограниченном некоторой замкнутой поверхностью, могут быть выражены через значения их тангенциальных и нормальных составляющих на самой поверхности. Тангенциальные компоненты магнитного и электрического полей интерпретируются соответственно как поверхностные электрические и магнитные токи, а их нормальные составляющие — как поверхностные электрические и магнитные заряды¹⁾. Если поля удовлетворяют

¹⁾ Данный термин не имеет, конечно же, ничего общего с дираковскими магнитными токами и зарядами, а является лишь удобной терминологией, широко используемой в оптике [12, 16].

условиям излучения на бесконечности, то интеграл по замкнутой поверхности можно свести к интегралу по поверхности экрана, либо по поверхности отверстия [16]. Попробуем использовать подобный подход в задаче о дифракционном излучении.

С помощью векторной теоремы Грина для полей излучения можно получить следующие интегральные представления, называемые иногда векторными интегралами Кирхгофа (см., например, [16, 21, 22]):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \times \\ &\times \oint_S \left(ik\mathbf{n} \times \mathbf{H}^R g + \right. \\ &+ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^R] \times \nabla g + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^R) \nabla g \Big) dS, \\ \mathbf{H}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \times \\ &\times \oint_S \left(-ik\mathbf{n} \times \mathbf{E}^R g + \right. \\ &+ [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^R] \times \nabla g + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^R) \nabla g \Big) dS. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $g = e^{ik|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}/|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|$ — функция Грина бесконечного пространства, \mathbf{n} — единичный вектор нормали, направленный внутрь объема, ограниченного поверхностью S . Данные выражения являются прямым следствием уравнений Максвелла. При их получении использовался лишь тот факт, что стоящие под интегралами поля удовлетворяют однородным уравнениям $(\nabla \mathbf{E}^R) = 0$. Поскольку в оптике падающее на экран поле представляет собой плоскую волну, под векторами $\mathbf{E}^R(\mathbf{r}, \omega), \mathbf{H}^R(\mathbf{r}, \omega)$ в правой части (6) понимаются полные поля, тогда как в нашем случае однородным уравнениям удовлетворяет лишь поле излучения. Заметим, что в известном учебнике Джексона [16] подобные интегралы получены с помощью скалярной теоремы Грина, однако их вывод довольно громоздок и намного проще использовать векторный подход [21, 22].

Следующий шаг состоит в выборе поверхности S в виде, удобном для дальнейших расчетов. Первый и наиболее очевидный вариант: выбрать в качестве S поверхность рассматриваемого экрана с опирающейся на него полусферой бесконечного радиуса. На поверхности последней поля удовлетворяют условиям излучения, что позволяет оставить лишь интеграл по поверхности экрана. Такой подход весьма распространен, однако он имеет тот существенный недостаток, что значения полей на отверстии в экране необходимо задавать приближенно. Обычно полагают, что полное поле на отверстии равно по-

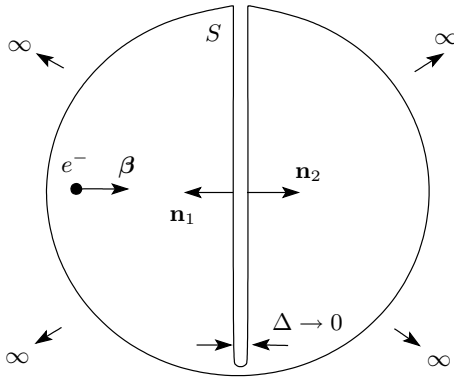


Рис. 1. Выбор поверхности S в виде двойного слоя и сферы бесконечного радиуса

лю падающей волны (приближение Кирхгофа). Это приводит к наличию разрывов непрерывности полей на границе экран–отверстие. Но исходные векторные тождества, из которых были получены формулы (6), справедливы лишь для замкнутых поверхностей и гладких функций. Разрыв полей на границе «компенсируется» введением линейных «токов», текущих по кромке отверстия. Только в этом случае получаемые выражения можно считать решением исходной электродинамической задачи (см. подробнее [21, 22]). Однако существует и другой вариант: выбрать поверхность S в виде, показанном на рис. 1. Интеграл по бесконечно удаленной сфере по-прежнему равен нулю, однако теперь поверхность интегрирования представляет собой двойной слой, толщину которого мы полагаем бесконечно малой. Рассматривая поле в одном из полупространств мы можем задать значения «вспомогательных» полей на теневой части экрана таким образом, чтобы интегралы (6) максимально упростились. Такой метод, иногда называемый методом двойного токового слоя, также известен и применяется в теории дифракции [16, 23, 24]. По сути такая поверхность эквивалентна поверхностному распределению электрических или магнитных диполей, являющихся источниками поля рассеянной волны [21, 23, 24]. Ниже мы еще вернемся к этому вопросу.

Предположим, что падающая волна (мы пока не интересуемся ее природой) освещает экран со стороны области 1 (рис. 1). Выберем значения полей в «теневой» области 2 при стремлении толщины слоя к нулю следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2^R &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1^R, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2^R &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1^R, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2^R &= -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1^R, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2^R &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1^R. \end{aligned} \quad (7)$$

Значения тангенциальных составляющих магнитно-

го поля при переходе из первой области во вторую не меняют знака, значение же нормальной составляющей меняет знак, для электрического поля ситуация обратная. Но можно выбрать и по-другому:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2^R &= -\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1^R, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2^R &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1^R, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2^R &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1^R, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2^R &= -\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1^R. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку нормали на противоположных сторонах экрана противоположны по направлению: $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, выражения (6) для полей в области 1 в случае (7) сводятся к простым формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \nabla_0 \times \frac{1}{2\pi} \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{E}^R g dS, \\ \mathbf{H}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= -\frac{i}{k} \times \\ &\times \left(\nabla_0 (\nabla_0) + k^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{E}^R g dS, \end{aligned} \quad (9)$$

соответствующим двойному магнитному слою (листу) [21, 23, 24]. Во втором случае (для условий (8)) выражения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \frac{i}{k} \left(\nabla_0 (\nabla_0) + k^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{H}^R g dS, \\ \mathbf{H}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \nabla_0 \times \frac{1}{2\pi} \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{H}^R g dS, \end{aligned} \quad (10)$$

характерный для двойного электрического слоя (листа) [21, 23, 24]. Индекс «0» у оператора означает, что дифференцирование ведется по переменным наблюдателя. При выводе (9) и (10) мы воспользовались свойством $\nabla g = -\nabla_0 g$ и кроме того, учли, что величины

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^m &= -\frac{c}{4\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^R, & \mathfrak{Q}^m &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^R, \\ \mathfrak{J}^e &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^R, & \mathfrak{Q}^e &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^R \end{aligned} \quad (11)$$

удовлетворяют «уравнениям непрерывности»:

$$\nabla \mathfrak{J}^e - i\omega \mathfrak{Q}^e = 0, \quad \nabla \mathfrak{J}^m - i\omega \mathfrak{Q}^m = 0. \quad (12)$$

Формулы (9) и (10) весьма напоминают обычные выражения для полей, записанные через запаздывающие потенциалы. В классической теории дифракции стоящие под интегралами поля, как уже говорилось, являются полными полями, поскольку как падающая, так и рассеянная волна удовлетворяют однородным уравнениям. Следовательно, в правых частях выражений (10) стоит обычный векторный потенциал с удвоенным поверхностным током в качестве источника. Этим и объясняется наличие «лишней» двойки в формуле Фока (2). Поскольку поверхностный ток отличен от нуля лишь на поверхности

экрана, интеграл в выражении (10) по поверхности отверстия тождественно равен нулю. Это избавляет от необходимости наложения дополнительных условий на значения полей в отверстии (использования приближения Кирхгофа) и введения контурных интегралов [12]. Формулы же (9), наоборот, сводятся к интегрированию лишь по поверхности отверстия, поскольку тангенциальные компоненты полного электрического поля на экране равны нулю (см. также [16]).

Пока мы нигде не учитывали тот факт, что падающее на экран поле является решением неоднородных уравнений Максвелла. Однако из выражений (9), (10) ясно видно различие между классической теорией дифракции плоской волны и теорией дифракционного излучения заряженной частицы. Действительно, поля излучения являются разностью между полным полем и полем заряженной частицы и, следовательно, в правой части данных формул выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^R &= \mathbf{n} \times \mathbf{E} - \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}^R &= \mathbf{n} \times \mathbf{H} - \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда следует, что в случае дифракционного излучения выражения для полей (10) отнюдь не сводятся к простым формулам для поля поверхностного тока. Кроме того, величина $\mathbf{n} \times \mathbf{H}^R$ не обращается в нуль на поверхности отверстия, что не позволяет свести задачу к интегрированию лишь по поверхности экрана. Этим и объясняется приближенность решения, получаемого с помощью метода поверхностных токов.

Если ввести в рассмотрение поверхностные электрические токи (двойку, как и в формуле (2), мы вносим в определение тока [13]):

$$\mathbf{j}_s^e = \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0 + \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^R, \quad (14)$$

а также магнитные токи (о смысле данного термина мы уже писали выше):

$$\mathbf{j}_s^m = \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0 + \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^R, \quad (15)$$

то из формул (9), (10) следуют интегральные уравнения для плотности данных токов (ср. с (2)):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_s^e(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0 - \frac{1}{2\pi} \mathbf{n} \times \int [\mathbf{j}_s^e(\mathbf{r}', \omega) \times \nabla g] d\dot{S}_{sc} + \\ &+ \frac{c}{4\pi^2} \mathbf{n} \times \int [[\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \nabla g] d\dot{S}_{sc}, \end{aligned} \quad (16)$$

для электрического тока, а также

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_s^m(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0 - \frac{1}{2\pi} \mathbf{n} \times \int [\mathbf{j}_s^m(\mathbf{r}', \omega) \times \nabla g] d\dot{S}_{ap} + \\ &+ \frac{c}{4\pi^2} \mathbf{n} \times \int [[\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \nabla g] d\dot{S}_{ap} \end{aligned} \quad (17)$$

для магнитного тока. Поскольку для градиента функции Грина выполняется соотношение

$$\nabla g = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(ik - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (18)$$

можно показать по аналогии со случаем, рассмотренным ранее в п. 2.1, что для плоского экрана все интегральные слагаемые в формулах (16), (17) обращаются в нуль. Это приводит к простым выражениям для токов:

$$\mathbf{j}_s^e(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0, \quad \mathbf{j}_s^m(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0. \quad (19)$$

Подстановка данных выражений в (9), (10) приводит к тому, что интегралы по областям, где токи не равны нулю (электрический ток отличен от нуля на поверхности экрана, а магнитный — на отверстии), тождественно обращаются в нуль. Это позволяет записать вместо формул (9) выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{sc}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= -\nabla_0 \times \frac{1}{2\pi} \int_{S_{sc}} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0 g dS_{sc}, \\ \mathbf{H}_{sc}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \\ &= \frac{i}{k} (\nabla_0(\nabla_0) + k^2) \frac{1}{2\pi} \int_{S_{sc}} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0 g dS_{sc}, \end{aligned} \quad (20)$$

а вместо формул (10) —

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ap}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \\ &= -\frac{i}{k} (\nabla_0(\nabla_0) + k^2) \frac{1}{2\pi} \int_{S_{ap}} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0 g dS_{ap}, \\ \mathbf{H}_{ap}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= -\nabla_0 \times \frac{1}{2\pi} \int_{S_{ap}} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0 g dS_{ap}. \end{aligned} \quad (21)$$

Эти формулы и дают решение задачи о дифракционном излучении заряженной частицы по методу двойного слоя. Видно, что отличие от классической теории дифракции заключается прежде всего в том, что поверхности интегрирования поменялись местами: в формуле (20) ведется интегрирование лишь по поверхности экрана S_{sc} (screen), в формуле (21) — лишь по поверхности отверстия S_{ap} (aperture).

3. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ПРОЛЕТЕ ЧЕРЕЗ КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ В ЭКРАНЕ

Рассмотрим задачу об излучении частицы, пролетающей нормально через круглое отверстие радиуса a в идеально проводящем экране, расположенном в плоскости $z = 0$ (рис. 2). Подобные задачи решались ранее в нерелятивистском приближении [25, 26], в ультрарелятивистском приближении [3, 6, 27] и др., а также с помощью скалярной теории [18]. Полученные в предыдущем разделе выражения (20) и (21) позволяют легко найти решение этой задачи.

Выпишем выражения для полей излучения в волновой зоне (их можно проверить непосредственным дифференцированием (20), (21) при условии $r_0 \gg r_{eff}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{sc}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \\ &= -\frac{i}{c} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \mathbf{k} \times \int \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dS_{sc}, \quad (22) \\ \mathbf{H}_{sc}^R &= \mathbf{e} \times \mathbf{E}_{sc}^R, \end{aligned}$$

где интегрирование проводится лишь по поверхности экрана, а также

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ap}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \\ &= -\frac{i}{c} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \mathbf{k} \times \int \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dS_{ap}, \quad (23) \\ \mathbf{E}_{ap}^R &= -\mathbf{e} \times \mathbf{H}_{ap}^R, \end{aligned}$$

где интеграл берется лишь по поверхности отверстий. Здесь, по-прежнему, $\mathbf{k} = k\mathbf{e}$ — волновой вектор,

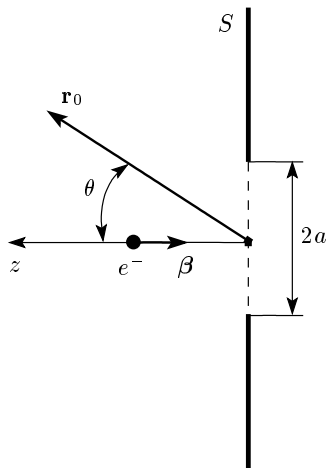


Рис. 2. Схема генерации дифракционного излучения «назад» при пролете частицы через круглое отверстие в экране

тор, $\mathbf{e} = \mathbf{r}_0/r_0 = \{\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta\}$. Заметим, что поскольку стоящие под интегралами поля убывают с увеличением расстояния по экспоненциальному закону (это следует из формулы (3)), данные выражения справедливы лишь на достаточно больших расстояниях. Как показано, например, в работе [28], эти расстояния составляют величину порядка $\gamma^2 \lambda$, причем как для излучения «вперед» (вдоль вектора скорости заряда), так и для излучения «назад» (под углом зеркального отражения к поверхности экрана). Расстояния, меньшие параметра $\gamma^2 \lambda$, для излучения «вперед» соответствуют зоне формирования (см., например, [18]), а для обратного излучения — так называемой предволновой зоне [20, 28, 29].

Найдем сначала поле излучения с помощью интеграла по экрану, для чего будем использовать полярные координаты, $dS_{sc} = \rho d\rho d\phi$. Поле частицы определяется выражением (3), азимутальный интеграл берется по первой формуле (4), а радиальный интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \rho J_1(b_1 \rho) K_1(b_2 \rho) d\rho &= \frac{a}{b_1^2 + b_2^2} \times \\ &\times \left(b_2 J_1(b_1 a) K_2(b_2 a) - b_1 J_2(b_1 a) K_1(b_2 a) \right), \quad (24) \end{aligned}$$

где b_1, b_2 — вещественные положительные постоянные. Отсюда находим поле дифракционного излучения:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{sc}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \frac{e}{\pi c} \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \times \\ &\times \{-\cos \theta \sin \phi, -\cos \theta \cos \phi, \sin \theta\} \times \\ &\times \left[\frac{a\omega}{v\gamma} J_2(ka \sin \theta) K_1\left(\frac{\omega}{v\gamma} a\right) - \right. \\ &\left. - \frac{a\omega}{\beta v \gamma^2 \sin \theta} J_1(ka \sin \theta) K_2\left(\frac{\omega}{v\gamma} a\right) \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

Данную формулу можно также записать, понижая порядки цилиндрических функций [30]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{sc}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \frac{e}{\pi c} \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \times \\ &\times \{\cos \theta \sin \phi, \cos \theta \cos \phi, -\sin \theta\} \times \\ &\times \frac{a\omega}{v\gamma} \left[J_0(ka \sin \theta) K_1\left(\frac{\omega}{v\gamma} a\right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\beta \gamma \sin \theta} J_1(ka \sin \theta) K_0\left(\frac{\omega}{v\gamma} a\right) \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

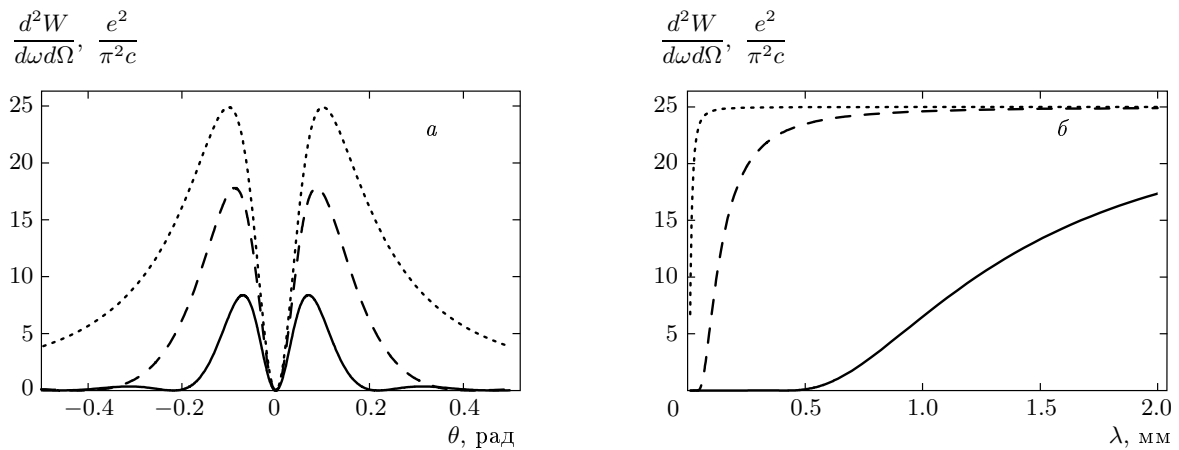


Рис. 3. Дифракционное излучение частицы с энергией $\gamma = 10$. *a* — Угловые распределения при $a = 0.2\gamma\lambda$ (сплошная кривая), $0.1\gamma\lambda$ (штриховая), $0.01\gamma\lambda$ (пунктирная). *б* — Спектр излучения под углом $\theta = \gamma^{-1}$ при $a = 2$ (сплошная кривая), 0.2 (штриховая), 0.02 (пунктирная) мм

Спектрально-угловая плотность излучения определяется квадратом модуля поля:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = cr_0^2 |\mathbf{E}_{sc}^R(\mathbf{r}_0, \omega)|^2 = \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \times \left(\frac{a\omega}{v\gamma} \right)^2 \left[J_0(ka \sin \theta) K_1 \left(\frac{\omega}{v\gamma} a \right) + \frac{1}{\beta\gamma \sin \theta} J_1(ka \sin \theta) K_0 \left(\frac{\omega}{v\gamma} a \right) \right]^2. \quad (27)$$

Используя известные асимптотические представления функций Бесселя [30], можно записать выражение для интенсивности при малых значениях радиуса отверстия $a \ll \gamma\lambda/2\pi$:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} (a \rightarrow 0) = \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \times \left[1 - \left(\frac{\pi a}{\beta\lambda} \right)^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \right]^2, \quad (28)$$

откуда в пределе сплошного экрана ($a = 0$) мы получаем обычную формулу Гинзбурга–Франка для переходного излучения [17]. В пределе же больших радиусов отверстия $a \gg \gamma\lambda/2\pi$ выражение в квадратных скобках (27) затухает по закону $e^{-2\omega a/v\gamma}/a$ и при увеличении радиуса интенсивность стремится к нулю, как и ожидалось.

Угловые распределения интенсивности излучения для различных радиусов отверстия приведены на рис. 3. Полученные здесь результаты для перпендикулярного пролета аналогичны приведенным в работе [6], где для расчета поля излучения использовался принцип Гюйгенса. Это вполне объяснимо,

так как при нормальном падении заряда на бесконечно тонкий идеально проводящий экран продольная (вдоль скорости) компонента электрического поля заряда не участвует в формировании излучения. Приведенные выше формулы также хорошо согласуются с результатами работы [27] для ультрарелятивистского случая. Поскольку при значениях $\theta \sim \gamma^{-1}$ второе слагаемое в (27) мало, данная формула с точностью до обозначений и других коэффициентов в интеграле Фурье переходит в выражение, полученное в работе [27]. Это неудивительно, поскольку авторами использовался тот же подход, основанный на векторной теореме Грина и тождествах (6), однако поверхность интегрирования в данных формулах выбиралась в виде поверхности экрана и полусферы бесконечного радиуса. О недостатках такого подхода мы уже упомянули выше в п. 2.2.

Найдем теперь интенсивность излучения с помощью интеграла по поверхности отверстия (формулы (23)). Как уже говорилось, в оптике эти представления совершенно равнозначны. Однако в теории ДИ наблюдается иная ситуация. Проводя интегрирование по радиусу отверстия с помощью формулы

$$\int_0^a \rho J_1(b_1\rho) K_1(b_2\rho) d\rho = \frac{b_1}{b_2} \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} - \frac{a}{b_1^2 + b_2^2} \times (b_2 J_1(b_1 a) K_2(b_2 a) - b_1 J_2(b_1 a) K_1(b_2 a)), \quad (29)$$

приходим к следующему выражению для поля излучения:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ap}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \frac{e}{\pi c} \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \times \\ &\times \{-\cos \theta \sin \phi, -\cos \theta \cos \phi, \sin \theta\} \times \\ &\times \beta \cos \theta \left[1 + \frac{a\omega}{v\gamma} J_2(ka \sin \theta) K_1\left(\frac{\omega}{v\gamma} a\right) - \right. \\ &\left. - \frac{a\omega}{\beta v \gamma^2 \sin \theta} J_1(ka \sin \theta) K_2\left(\frac{\omega}{v\gamma} a\right) \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

Это выражение отличается от (25) наличием «лишнего» множителя $\beta \cos \theta$, а также неприятной особенностью: при стремлении радиуса a отверстия к бесконечности излучение не исчезает:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ap}^R(\mathbf{r}_0, \omega)(a \rightarrow \infty) &= \frac{e}{\pi c} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \frac{\beta^2 \sin \theta \cos \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \times \\ &\times \{-\cos \theta \sin \phi, -\cos \theta \cos \phi, \sin \theta\}, \quad (31) \end{aligned}$$

а при стремлении радиуса a к нулю, наоборот, обращается в нуль. После возведения в квадрат выражение (31) приводит к интенсивности «излучения», полностью идентичной найденной в методе токов (5).

Этот результат свидетельствует о существенном различии между классической теорией дифракции и теорией дифракционного излучения. В оптике полные поля в обоих полупространствах (см. рис. 1) удовлетворяют однородным уравнениям, поскольку сторонние токи и заряды отсутствуют. В нашем случае оба полупространства «неравнозначны», поскольку источником падающего на экран поля является точечный заряд, движущийся в области 1 из ∞ вдоль оси z . Наложение дополнительных условий (7), (8) на границе раздела полупространств сделано в предположении о их независимом рассмотрении, что возможно только в случае, если равномерно движущийся заряд внезапно останавливается на границе в точке $z = 0$. Поле, создаваемое таким зарядом и удовлетворяющее нулевому граничному условию, дается на больших расстояниях выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= -\frac{i}{\omega} \times \\ &\times \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \int \mathbf{j}^0(\mathbf{r}, \omega) (e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{r}}}) dV. \quad (32) \end{aligned}$$

Здесь точка, определяемая радиус-вектором $\tilde{\mathbf{r}}$, является зеркальным отображением точки интегрирования \mathbf{r} относительно плоскости $z = 0$, а плотность тока заряда определяется как

$$\mathbf{j}^0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e\mathbf{v}}{2\pi v} \delta(x)\delta(y)e^{-iz\omega/v}.$$

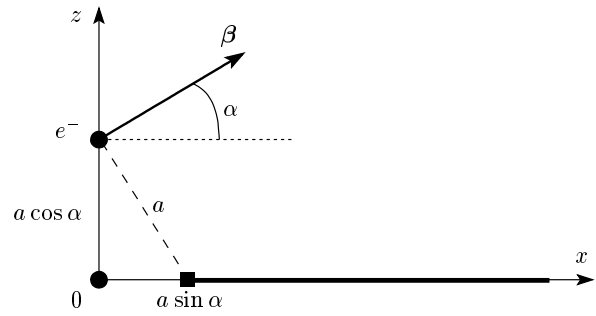


Рис. 4. Схема генерации дифракционного излучения при пролете частицы вблизи идеально проводящей полуплоскости

Непосредственным интегрированием выражения (32) можно убедиться, что данное поле в точности совпадает с найденным в формуле (31). В действительности же при пересечении равномерно движущимся в вакууме зарядом границы раздела полупространств при отсутствии экрана никакого излучения не возникает. Поэтому использование в теории дифракционного излучения интегралов по поверхности отверстия приводит, в отличие от оптики, вообще говоря, к неверным результатам. Причина данного различия с классической теорией дифракции также заключается в том факте, что рассеиваемое поле является полем движущегося заряда, удовлетворяющим неоднородным уравнениям Максвелла.

Выражения (25)–(27) позволяют рассчитать поле дифракционного излучения, возникающего при пересечении зарядом отверстия в экране. Однако с помощью данных формул можно получить и решение задачи о переходном излучении на экране конечного радиуса (так называемый дополнительный экран). Действительно, если распространить интегрирование в формуле (24) на весь экран, мы получим поле переходного излучения, которое можно представить в виде суммы полей: дифракционного излучения от отверстия (интеграл от a до бесконечности) и переходного излучения от экрана радиуса a (интеграл от 0 до a). Таким образом, решив задачу о дифракционном излучении на отверстии, мы можем сразу же записать и поле переходного излучения на дополнительном экране: различие между полями заключается в поле переходного излучения на бесконечной границе раздела. Данное утверждение можно рассматривать как векторный аналог теоремы Бабинне для дополнительных экранов (см. также [4, 31, 32] и др.). Заметим, что подобная теорема в скалярной теории ДИ была сформулирована Боловским и Галстьяном [18].

4. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ПРОЛЕТЕ ВБЛИЗИ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассмотрим применение развиваемого метода двойного слоя к задаче о дифракционном излучении, возникающем при пролете заряженной частицы вблизи идеально проводящей полуплоскости. В работе [7] для нахождения поля излучения в такой геометрии использовался метод поверхностных токов. Плотность тока определялась из граничного условия

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^R(\mathbf{j}_s^e)) = 0$$

с помощью метода Винера – Хопфа – Фока. Из приведенного выше анализа следует, что методы классической теории дифракции в случае, когда падающей волной является решение неоднородных уравнений Максвелла, имеют определенные границы применимости. Это означает, что решение, полученное в работе [7], строго говоря, является приближенным. В пользу данного утверждения также свидетельствует и тот факт, что точного соответствия между формулами для ПИ работы [11] и для ДИ работы [7] в задаче о ДИ частицы, пролетающей через бесконечно узкую щель в наклонном экране, не наблюдается. Данный переход выполняется лишь в ультрарелятивистском случае [33], что вполне согласуется с полученными в п. 2.1 границами применимости метода токов.

Пусть заряженная частица пролетает на расстоянии a от ребра идеально проводящего экрана, расположенного в полуплоскости $z = 0$, $x > 0$ (рис. 4). Проекция вектора скорости частицы на плоскость экрана перпендикулярна его краю, а угол между

вектором скорости и осью x обозначим α . Для нахождения поля излучения следует использовать формулу (22). Ширину полуплоскости вдоль оси y предполагаем бесконечной, что дает возможность перейти к фурье-представлению:

$$\mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega) = -\frac{2\pi i}{c} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \times \mathbf{k} \times \int_{a \sin \alpha}^{\infty} \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(x, k_y, z=0, \omega) e^{-ik_x x} dx. \quad (33)$$

Компоненту поля частицы $\mathbf{E}^0(x, k_y, z=0, \omega)$ можно получить преобразованием от полного фурье-образа:

$$\mathbf{E}^0(x, k_y, z=0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \mathbf{E}^0(\mathbf{q}, \omega) e^{iq_x x}. \quad (34)$$

Поле частицы находится из уравнений Максвелла:

$$\mathbf{E}^0(\mathbf{q}, \omega) = \frac{4\pi i}{\omega} \frac{\mathbf{j}^0(\mathbf{q}, \omega) \omega^2 / c^2 - \mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{j}^0(\mathbf{q}, \omega))}{q^2 - \omega^2 / c^2}, \quad (35)$$

где ток, создаваемый зарядом, имеет вид

$$\mathbf{j}^0(\mathbf{q}, \omega) = \frac{e\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) e^{-iq_z a \cos \alpha}. \quad (36)$$

Подстановка выражений (35) и (36) в формулу (34) позволяет получить фурье-компоненту поля частицы:

$$\mathbf{E}^0(x, k_y, z=0, \omega) = -\frac{ie}{2\pi v} \left\{ \frac{\gamma^{-1} \cos \alpha}{\sqrt{1 + (\beta\gamma e_y)^2}} + i \sin \alpha, \frac{\beta\gamma e_y}{\sqrt{1 + (\beta\gamma e_y)^2}}, \frac{\gamma^{-1} \sin \alpha}{\sqrt{1 + (\beta\gamma e_y)^2}} - i \cos \alpha \right\} \times \exp \left\{ x \frac{\omega}{v} \left(i \cos \alpha - \gamma^{-1} \sin \alpha \sqrt{1 + (\beta\gamma e_y)^2} \right) \right\} \exp \left\{ -a \frac{\omega}{v} \cos \alpha \left(i \sin \alpha + \gamma^{-1} \cos \alpha \sqrt{1 + (\beta\gamma e_y)^2} \right) \right\}. \quad (37)$$

Подстановка данной формулы в (33) приводит к следующему выражению для поля излучения:

$$\mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega) = \frac{e}{\pi c} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \left\{ 2 \left(\sin \alpha \sqrt{\frac{1}{(\beta\gamma)^2} + e_y^2} - i \left(\frac{\cos \alpha}{\beta} - e_x \right) \right) \sqrt{\frac{1}{(\beta\gamma)^2} + e_y^2} \right\}^{-1} \times \left\{ e_z \left(\frac{\cos \alpha}{(\beta\gamma)^2} + i \frac{\sin \alpha}{\beta^2 \gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma e_y)^2} \right), \frac{e_y e_z}{\beta}, -e_x \left(\frac{\cos \alpha}{(\beta\gamma)^2} + i \frac{\sin \alpha}{\beta^2 \gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma e_y)^2} \right) - \frac{e_y^2}{\beta} \right\} \times \exp \left\{ -iak_x \sin \alpha \right\} \exp \left\{ -\frac{a\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma e_y)^2} \right\}. \quad (38)$$

Спектрально-угловая плотность излучения определяется квадратом модуля поля и имеет вид

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = cr_0^2 |\mathbf{E}^R|^2 = \frac{e^2}{\pi^2 c} \left\{ 4(1 + (\beta\gamma e_y)^2) \left[\left(\frac{\cos \alpha}{\beta} - e_x \right)^2 + \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{(\beta\gamma)^2} + e_y^2 \right) \right] \right\}^{-1} \times$$

$$\times \left[(e_x^2 + e_z^2) \left(\frac{\cos^2 \alpha}{(\beta\gamma)^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\beta^2} (1 + (\beta\gamma e_y)^2) \right) + \gamma^2 e_y^2 (e_y^2 + e_z^2) + \frac{2}{\beta} e_x e_y^2 \cos \alpha \right] \times$$

$$\times \exp \left(-a \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + (\beta\gamma e_y)^2} \right). \quad (39)$$

Заметим, что данная формула при $a = 0$ описывает дифракционное излучение, которое можно назвать и переходным излучением на крае полуплоскости. Подробнее вопрос о переходе между ПИ и ДИ мы разберем в следующем разделе, посвященном ДИ от щели в идеально проводящем экране.

Сравним полученные характеристики дифракционного излучения от полуплоскости с результатами работы [7]. Для этого запишем соответствующие формулы для излучения в плоскости xz , перпендикулярной поверхности экрана. В этом случае выполняется равенство $\phi = \pi/2$ (компоненты единичного вектора излучения определены в п. 2.1) и вместо громоздкой формулы (39) для интенсивности излучения получаем следующее выражение (напомним, что угол θ отсчитывается от оси z)

$$\frac{d^2W_1}{d\omega d\Omega} \Big|_{\phi=\pi/2} = \frac{e^2}{\pi^2 c} \times$$

$$\times \frac{1 - \beta^2 \cos^2 \alpha}{4(1 + \beta^2 (\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha) - 2\beta \cos \alpha \sin \theta)} \times$$

$$\times \exp \left(-a \frac{2\omega}{v\gamma} \right). \quad (40)$$

Аналогичную формулу согласно результатам [7] можно получить, используя выражение, приведенное в статье [31]:

$$\frac{d^2W_2}{d\omega d\Omega} \Big|_{\phi=\pi/2} = \frac{e^2}{\pi^2 c} \times$$

$$\times \frac{(1 + \beta \cos \alpha)(\beta - \beta \sin \theta)}{4(1 + \beta^2 (\sin^2 \theta \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta) - 2\beta \cos \alpha \sin \theta)} \times$$

$$\times \exp \left(-a \frac{2\omega}{v\gamma} \right). \quad (41)$$

В общем случае обе формулы предсказывают два максимума интенсивности излучения: «вперед» по направлению скорости частицы и «назад» под углом зеркального отражения к поверхности экрана (рис. 5а). Для перпендикулярного пролета при

$\alpha = \pi/2$ формулы дают близкие результаты для случаев релятивистских энергий и малых углов наблюдения:

$$\frac{d^2W_2}{d\omega d\Omega} / \frac{d^2W_1}{d\omega d\Omega} = \beta(1 - \sin \theta), \quad (42)$$

однако выражение (40) предсказывает симметричные относительно направления $\theta = 0$ распределения, тогда как выражение (41) обращает интенсивность излучения в нуль в плоскости экрана ($\theta = \pi/2$). Для параллельного пролета (при $\alpha = 0$) различие результатов еще более заметно:

$$\frac{d^2W_2}{d\omega d\Omega} / \frac{d^2W_1}{d\omega d\Omega} = \frac{\beta(1 - \sin \theta)}{1 - \beta} \Big|_{\gamma \gg 1} \approx$$

$$\approx 2\gamma^2(1 - \sin \theta). \quad (43)$$

Как видно, в релятивистском случае формула (41) дает сильно завышенное значение интенсивности излучения для углов наблюдения $\theta \ll \pi/2$.

Сходства и различия моделей можно также проиллюстрировать, вводя используемые в работе [31] «проекционные» угловые переменные (рис. 5а). В релятивистском случае излучение «вперед» сосредоточено в узком конусе с раствором порядка γ^{-1} , что дает возможность использовать более простые выражения для угловых переменных:

$$\mathbf{e} = \{ \cos \theta_x \sin \theta_y, \sin \theta_x, \cos \theta_x \cos \theta_y \} \approx$$

$$\approx \left\{ \theta_y, \theta_x, 1 - \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2} \right\}. \quad (44)$$

В этом случае формулу (39) для перпендикулярной геометрии ($\alpha = \pi/2$) можно записать с точностью до величин порядка γ^{-2} :

$$\frac{d^2W_{\perp}}{d\omega d\Omega} \approx \frac{e^2}{\pi^2 c} \gamma^2 \times$$

$$\times \frac{1 + 2\gamma^2 \theta_x^2}{4(1 + \gamma^2 \theta_x^2)(1 + \gamma^2 \theta_x^2 + \gamma^2 \theta_y^2)} \times$$

$$\times \exp \left(-a \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta_x^2} \right). \quad (45)$$

Полученное выражение полностью аналогично результатам работы [7] (см. подробнее [31]), что, в частности, означает, что полные потери энергии на излучение в релятивистском случае также совпадают и равны

$$W_{\perp} \approx 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_x \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_y \int_0^{\infty} d\omega \frac{d^2 W_{\perp}}{d\omega d\Omega} = \frac{3}{8} \frac{e^2 \gamma}{a}. \quad (46)$$

Множитель 2 возникает за счет того, что потери энергии одинаковы в оба конуса излучения: по направлению движения заряда и под углом зеркального отражения.

Для параллельной геометрии, $\alpha = 0$, также естественно использовать «проекционные» переменные, отсчитываемые от вектора скорости заряда (рис. 5б):

$$\mathbf{e} = \{\cos \theta_x \cos \theta_y, \sin \theta_x, \cos \theta_x \sin \theta_y\} \approx \left\{ 1 - \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2}, \theta_x, \theta_y \right\}. \quad (47)$$

В этом случае для интенсивности излучения с точностью до величин высшего порядка малости имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_{\parallel}}{d\omega d\Omega} &\approx \frac{e^2}{\pi^2 c} \gamma^2 \times \\ &\times \frac{1 + 2\gamma^2 \theta_x^2}{(1 + \gamma^2 \theta_x^2)(1 + \gamma^2(\theta_x^2 + \theta_y^2))^2} \times \\ &\times \exp\left(-a \frac{2\omega}{v\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 \theta_x^2}\right). \quad (48) \end{aligned}$$

Поскольку мы рассматриваем макроскопическую теорию ДИ в приближении однократного отражения (излучение не взаимодействует с экраном), метод, используемый для нахождения полных потерь в перпендикулярной геометрии (формула (46)), здесь не применим. Результат (48) отличается от найденного по методу токов [7] (см. подробнее [34]). Заметим, что согласно формуле (38) для параллельного пролета излучение «вперед» является линейно поляризованным в плоскости, перпендикулярной экрану, так как отличной от нуля является лишь z -компонента поля.

В заключение раздела заметим, что полные потери энергии по модели токов [7] одинаковы для любой геометрии и определяются формулой (46) [31]. Можно показать, что и в рамках развиваемого подхода полные потери энергии не зависят от угла пролета частицы α и для случая $\alpha \neq \pi/2$ также определяются формулой (46). Существенным различием моделей является тот факт, что согласно формуле (39)

излучение в плоскости экрана не обращается в нуль. Данная ситуация аналогична имеющей место для переходного излучения: в формуле (5), полученной с помощью метода поверхностных токов, возникает лишний множитель $\beta^2 \cos^2 \theta$, приводящий к тому, что интенсивность излучения в плоскости идеально проводящего экрана обращается в нуль, что, как мы знаем из решения Гинзбурга и Франка, неверно. Мы не касаемся здесь вопросов, связанных с самой возможностью макроскопического рассмотрения ДИ и ПИ под малыми углами к поверхности [35]. Наконец, отметим, что в релятивистском случае метод токов дает существенно завышенное значение интенсивности для параллельной геометрии (рис. 6), и для углов $\theta \ll \pi/2$ различие может достигать значений порядка γ^2 . Это означает, что методы классической теории дифракции в задаче о ДИ от полуплоскости применимы лишь для ультрарелятивистских энергий и направлений пролета, близких к направлению нормали к поверхности экрана:

$$\gamma \gg 1, \quad \alpha \approx \pi/2. \quad (49)$$

Нарушение хотя бы одного из данных условий приводит к тому, что методы теории дифракции электромагнитных волн становятся неприменимыми.

5. ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ПРОЛете ЧЕРЕЗ ЩЕЛЬ В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ЭКРАНЕ

Задачей, родственной к рассмотренным выше задачам о ДИ от круглого отверстия и ДИ от полуплоскости, является определение излучения, возникающего при пролете заряженной частицы через щель шириной b в идеально проводящем экране (рис. 7). Данная задача рассматривалась ранее лишь в релятивистском приближении (см. [3, 32, 33, 36] и др.). Однако для нулевой ширины щели и наклонного падения заряда результаты данных работ соответствовали известным формулам для переходного излучения (например, работы [11]) лишь в ультрарелятивистском случае. Детального анализа для случая малых энергий и больших углов наблюдения не проводилось. В то же время, результаты, получаемые для ДИ на щели с помощью развиваемого метода двойного слоя, в пределе $b \rightarrow 0$ в точности приводят к результатам Пафомова [11] для наклонного падения частицы произвольной энергии, а для ненулевой ширины щели совпадают с ранее найденными в ультрарелятивистском случае.

Предполагая, что экран имеет бесконечную ширину вдоль оси x , для поля излучения по аналогии с формулой (33) имеем

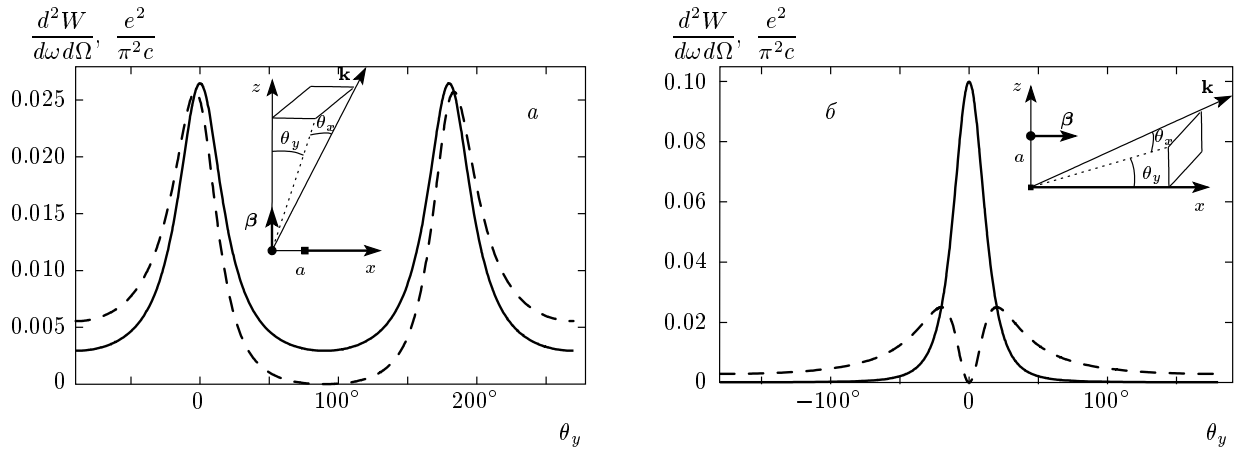


Рис. 5. Угловые распределения интенсивности дифракционного излучения по модели токов [7] (штриховая линия), по формуле (39) (сплошная линия) для перпендикулярной (а), $\alpha = \pi/2$, и параллельной (б), $\alpha = 0$, геометрии. Параметры: $\gamma = 3$, $\theta_x = 0$, $\lambda = 1$ мм, $a = 1$ мм

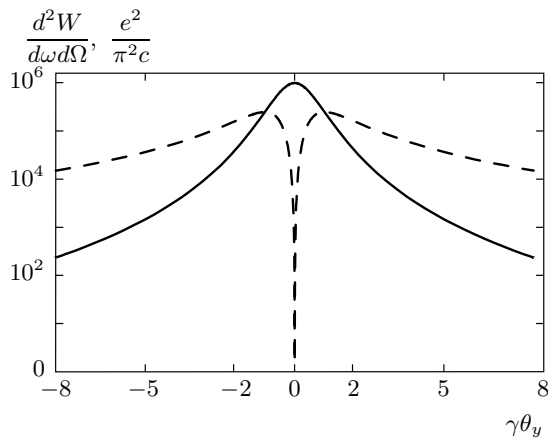


Рис. 6. Угловые распределения интенсивности дифракционного излучения для параллельной геометрии ($\alpha = 0$) в ультррелятивистском случае ($\gamma = 10^3$) по модели токов (штриховая линия), по формуле (39) (сплошная линия). Параметры: $\theta_x = 0$, $\lambda = 1$ мм, $a = 1$ мм

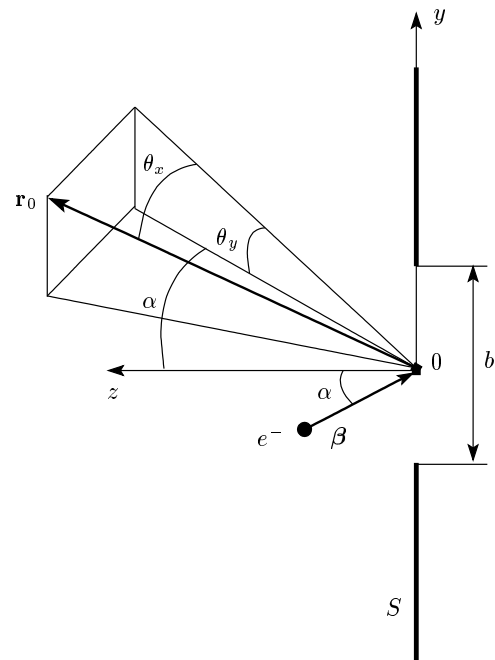


Рис. 7. Схема генерации дифракционного излучения «назад» при наклонном пролете частицы через прямоугольную щель в бесконечном экране

$$\mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega) = -\frac{2\pi i}{c} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \times \mathbf{k} \times \int \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(k_x, y, z=0, \omega) e^{-iky} dy. \quad (50)$$

Процедура нахождения фурье-образа поля частицы полностью аналогична использованной в предыдущем разделе. Результат имеет вид

$$\mathbf{E}^0(k_x, y, z=0, \omega) = \frac{ie}{2\pi v} \frac{1}{\sqrt{(\beta\gamma)^{-2} + e_x^2}} \left\{ -e_x, -\frac{\sin \alpha}{\beta\gamma^2} + i \operatorname{sign}[-y \operatorname{ctg} \alpha] \cos \alpha \sqrt{(\beta\gamma)^{-2} + e_x^2}, \frac{\cos \alpha}{\beta\gamma^2} + i \operatorname{sign}[-y \operatorname{ctg} \alpha] \sin \alpha \sqrt{(\beta\gamma)^{-2} + e_x^2} \right\} \times \exp \left\{ iy \frac{\omega}{v} \sin \alpha \right\} \times \exp \left\{ -|y| \frac{\omega}{v\gamma} \cos \alpha \sqrt{1 + (\beta\gamma e_x)^2} \right\}. \quad (51)$$

Различие с задачей о ДИ от полуплоскости заключается лишь в том, что интеграл в формуле (50) представляет собой сумму двух интегралов: от $b/2$ до ∞ и от $-b/2$ до $-\infty$. Соответственно и поле излучения будет представлять собой сумму двух слагаемых. После несложных вычислений, по аналогии с (38), находим

$$\mathbf{E}^R(\mathbf{r}_0, \omega) = \frac{e}{\pi c} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \frac{\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^*}{2\sqrt{1 - \beta^2(e_y^2 + e_z^2)}} \times \exp\left\{-\frac{b}{2} \frac{\omega}{v\gamma} \cos \alpha \sqrt{1 + (\beta\gamma e_x)^2}\right\}, \quad (52)$$

где вектор \mathfrak{E} имеет следующие компоненты:

$$\mathfrak{E} = \left\{ \beta\gamma e_x e_z, \quad e_z(\gamma^{-1} \sin \alpha - i \cos \alpha \sqrt{1 + (\beta\gamma e_x)^2}), \right. \\ \left. - \beta\gamma e_x^2 - e_y(\gamma^{-1} \sin \alpha - i \cos \alpha \sqrt{1 + (\beta\gamma e_x)^2}) \right\} \times \\ \times \frac{\exp\left\{-i \frac{b}{2} \frac{\omega}{c} (\beta^{-1} \sin \alpha - e_y)\right\}}{\cos \alpha \sqrt{1 + (\beta\gamma e_x)^2} + i\gamma(\sin \alpha - \beta e_y)}, \quad (53)$$

а звездочка означает комплексное сопряжение. Спектрально-угловая плотность излучения определяется квадратом модуля поля:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{|\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^*|^2}{4(1 - \beta^2(e_y^2 + e_z^2))} \times \exp\left\{-b \frac{\omega}{v\gamma} \cos \alpha \sqrt{1 + (\beta\gamma e_x)^2}\right\}. \quad (54)$$

Выражение для функции $|\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^*|^2$ в общем случае имеет довольно громоздкий вид, и мы не будем его выписывать. Для конкретных расчетов проще использовать формулу (53) и любой стандартный математический пакет. Для нас сейчас существенно, что полученная формула дает известные результаты для переходного излучения в случае нулевой ширины щели при произвольной энергии и произвольном угле падения заряда.

Действительно, при нулевой ширине щели ($b = 0$) выражение для функции $|\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^*|^2$ находится как

$$|\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^*|^2 = \frac{4\beta^2\gamma^2 \cos^2 \alpha (1 + (\beta\gamma e_x)^2)(e_x^2 + e_y^2 - 2\beta e_y \sin \alpha + \beta^2 \sin^2 \alpha (e_y^2 + e_z^2))}{[\gamma^2(\sin \alpha - \beta e_y)^2 + \cos^2 \alpha (1 + (\beta\gamma e_x)^2)]^2}. \quad (55)$$

После подстановки данного выражения в формулу для интенсивности (54) и несложных преобразований получим

$$\left. \frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \right|_{b=0} = \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^2 \cos^2 \alpha (e_x^2 + e_y^2 - 2\beta e_y \sin \alpha + \beta^2 \sin^2 \alpha (e_y^2 + e_z^2))}{[(\sin \alpha - \beta e_y)^2 + \cos^2 \alpha (1 - \beta^2(e_y^2 + e_z^2))]^2}. \quad (56)$$

Данная формула с точностью до обозначений есть не что иное как выражение для интенсивности переходного излучения при наклонном падении заряда из вакуума на идеально проводящий экран, полученное Пафомовым [11]. Действительно, используя отсчитываемые от направления зеркального отражения «проекционные» углы, $\mathbf{e} =$

$$= \{\sin \theta_x, \cos \theta_x \sin(\alpha + \theta_y), \cos \theta_x \cos(\alpha + \theta_y)\}, \quad (57)$$

выражение (56) можно записать в виде, аналогичном приведенному в работе [20] (там же приводится связь между переменными (57) и углами, используемыми в работе [11]). При нормальном падении, $\alpha = 0$, формула (56), конечно же, переходит в известное выражение Гинзбурга – Франка.

Таким образом, используемый подход при предельном переходе $b \rightarrow 0$ дает результаты точной теории переходного излучения при любой энергии. Можно также показать, что получаемые результаты для ДИ от щели в ультрарелятивистском случае совпадают с известными ранее [32, 33, 36]. В заклю-

чение раздела приведем угловые зависимости излучения для разных значений ширины щели b (рис. 8). Видно, что для $b = 0.01\gamma\lambda$ результат практически совпадает с результатом для переходного излучения.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Одна из широко распространенных физических интерпретаций дифракционного излучения в макроскопической теории заключается в дифракции собственного поля быстрого электрона на проводящей поверхности. Это обуславливает использование методов, известных в теории дифракции электромагнитных волн, например, метода поверхностных токов [7]. Вместе с тем, как показано выше, задача о дифракции поля, являющегося решением неоднородных уравнений Максвелла, имеет свою специфику, что позволяет использовать оптические методы лишь в ограниченной области. Для переходного излучения и дифракционного излучения область применимости методов классической теории дифракции определяется условиями

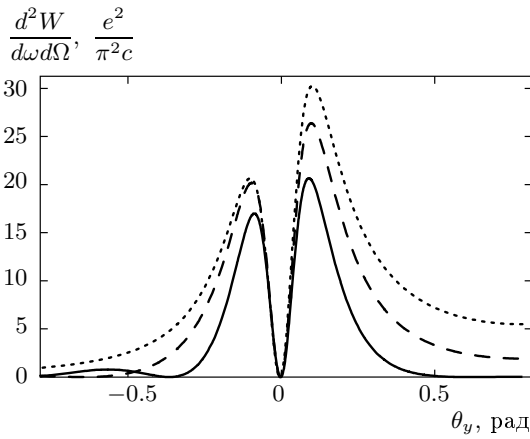


Рис. 8. Угловые распределения излучения частицы с энергией $\gamma = 10$ при наклонном падении $\alpha = \pi/4$, $\theta_x = 0$, $b = 0.2\gamma\lambda$ (сплошная кривая), $0.1\gamma\lambda$ (штриховая), $0.01\gamma\lambda$ (пунктирная)

$$\beta \cdot \mathbf{n} \approx 1, \quad \cos \Theta \approx 1, \quad (58)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности экрана, направленный в то же полупространство, что и вектор скорости заряда β .

Первое из данных условий отражает тот факт, что поле релятивистской частицы $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega)$ практически поперечно: $\gamma \gg 1$, а угол между вектором нормали и вектором скорости заряда α достаточно мал: $\alpha \ll 1$. Второе условие в (58) содержит полярный угол вылета фотона Θ , отсчитываемый для излучения «вперед» от направления движения заряда, а для излучения «назад» — от направления зеркального отражения. Данное условие отражает тот факт, что проекционные углы наблюдения в обоих случаях должны быть достаточно малыми: $\Theta_x, \Theta_y \ll 1$. Как показано выше, невыполнение хотя бы одного из соотношений (58) ведет к неправомерности использования методов классической теории дифракции в задачах о ПИ и ДИ.

В заключение заметим, что первые результаты по теории дифракционного излучения были получены более 40 лет назад (см. обзоры [37, 38]). Примерно в это же время Пафомов [11] и Корхмазян [39] разработали теорию ПИ для наклонного падения заряда на мишень. Однако, несмотря на общую физическую природу данных явлений, детального сравнения формул для полей ДИ и ПИ до последнего времени практически не проводилось [31]. Лишь в работе [14] автором были получены выражения для переходного излучения на краю полуплоскости, что, в принципе, давало возможность проверить предельные переходы между формулами ПИ для бесконеч-

ной границы раздела [17] и формулами ДИ для полуплоскости [7]. Однако данного сравнения автором проведено не было, возможно, по причине громоздкости получаемых выражений для поля излучения.

Значительный интерес к дифракционному излучению возник в последнее десятилетие в связи с проблемой диагностики ультрарелятивистских пучков ускорителей (см., например, [1, 2]). Однако имеющийся набор экспериментальных данных, полученных для ультрарелятивистских энергий, не позволил провести детального анализа и сравнения формул для переходного и дифракционного излучения. В работах [4, 31, 33, 36] и др. проводилось сравнение теории и эксперимента для ультрарелятивистских электронов и было получено их разумное согласие. В некоторых работах на получаемые расхождения метода поверхностных токов с теорией ПИ просто не обращалось внимания. Например, в недавней работе [10] авторы приводят угловые распределения ПИ в предволновой зоне, возникающего при наклонном падении заряда на экран, с асимметрией излучения, характерной для точной теории переходного излучения (см. рис. 4 цитируемой работы). В действительности же, как говорилось в п. 2.1, метод токов не позволяет получить «правильную» асимметрию, поскольку в выражение для поля излучения не входит продольная (вдоль скорости) компонента поля заряда.

Результаты развитого здесь более строгого подхода, основанного на методе двойного слоя [16, 21, 23, 24], позволяют получить предельный переход между формулами для ПИ и ДИ при любой энергии частицы и геометрии задачи, а также обозначить границы применимости известных приближенных методов, в частности, метода поверхностных токов. Используемый нами метод по сути аналогичен недавно рассмотренному в теории ПИ методу Кирхгофа [20], поскольку исходные формулы (6) могут быть получены из соответствующего векторного интеграла (см. подробнее, например, [16]). Однако известное в оптике приближение Кирхгофа на границе раздела вакуума и идеального проводника здесь не используется (см. п. 2.2), что дает возможность получать более корректные результаты. Заметим, что в недавней работе [40] также были получены формулы вида (20) и была продемонстрирована возможность использования данного подхода в задачах о ПИ от плоских поверхностей. Однако критериев применимости данных результатов в задачах о дифракционном излучении авторами приведено не было. Укажем также, что развитый метод позволяет исследовать свойства

ПИ и ДИ в более сложных геометриях, например, если поверхность экрана представляет собой периодическую решетку (излучение Смита–Парселла).

Авторы выражают благодарность А. А. Тищенко и Л. Г. Сухих за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 гг.)» (грант № 2.1.1.889).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Castellano, Nucl. Instr. Meth. A **394**, 275 (1997).
2. J. Urakawa, H. Hayano, K. Kubo et al., Nucl. Instr. Meth. A **472**, 309 (2001).
3. М. Л. Тер-Микаелян, *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях*, Изд. АН Арм.ССР, Ереван (1969).
4. P. V. Karataev, PhD Thesis, Tokyo Metropolitan Univ. (2004).
5. P. V. Karataev, Phys. Lett. A **345**, 428 (2005).
6. D. Xiang, W.-H. Huang, Y.-Z. Lin et al., Phys. Rev. Spec. Topics — Acell. Beams **11**, 024001 (2008).
7. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, ДАН СССР **147**, 74 (1962).
8. М. И. Рязанов, И. С. Тилинин, ЖЭТФ **71**, 2079 (1976).
9. J. H. Brownell, J. Walsh, and G. Doucas, Phys. Rev. E **57**, 1075 (1998).
10. D. Sutterlin, D. Erni, M. Dehler et al., Nucl. Instr. Meth. B **264**, 361 (2007).
11. В. Е. Пафомов, Труды ФИАН **XLIV**, 28 (1969).
12. Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны, Радио и связь*, Москва (1988).
13. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*, Изд-во ЛКИ, Москва (2007).
14. Д. М. Седракан, Изв. АН Арм.ССР **XVII**, 113 (1964).
15. Л. А. Вайнштейн, *Теория дифракции и метод факторизации*, Советское радио, Москва (1966).
16. Дж. Джексон, *Классическая электродинамика*, Мир, Москва (1965).
17. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ **16**, 15 (1946).
18. Б. М. Болотовский, Е. А. Галстян, УФН **170**, 809 (2000).
19. A. P. Potylitsyn and R. O. Rezaev, Nucl. Instr. Meth. B **252**, 44 (2006).
20. Д. В. Карловец, А. П. Потылицын, ЖЭТФ **133**, 1197 (2008).
21. Дж. А. Стрэттон, *Теория электромагнетизма*, Гостехиздат, Москва–Ленинград (1948).
22. Б. В. Хачатрян, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ-мат. науки **18**, 133 (1965).
23. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, Изд-во иностр. лит., Москва (1954).
24. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973).
25. В. Бобринев, В. Брагинский, ДАН СССР **123**, 634 (1958).
26. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ДАН СССР **124**, 792 (1959).
27. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ДАН СССР **124**, 1026 (1959).
28. V. A. Verzilov, Phys. Lett. A **273**, 135 (2000).
29. S. N. Dobrovolsky and N. F. Shulga, Nucl. Instr. Meth. B **201**, 123 (2003).
30. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*, Наука, Москва (1971).
31. A. P. Potylitsyn, Nucl. Instr. Meth. B **145**, 169 (1998).
32. R. V. Fiorito and D. W. Rule, Nucl. Instr. Meth. B **173**, 67 (2001).
33. А. П. Потылицын, Н. А. Потылицына, Изв. Вузов. Физика **43**, 56 (2000).
34. G. A. Naumenko, A. P. Potylitsyn, and O. V. Chefonov, Nucl. Instr. Meth. B **173**, 88 (2001).
35. М. И. Рязанов, Письма в ЖЭТФ **39**, 569 (1984).
36. N. Potylitsyna-Kube and X. Artru, Nucl. Instr. Meth. B **201**, 172 (2003).
37. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН **88**, 209 (1966).
38. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН **94**, 378 (1968).
39. Н. А. Корхмазян, Изв. АН Арм.ССР **XV**, 115 (1962).
40. A. G. Shkvarunets and R. V. Fiorito, Phys. Rev. Spec. Topics — Acell. Beams **11**, 012801 (2008).