

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФфуЗИОННОГО КВАЗИМУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

*А. И. Саичев\**, *В. А. Филимонов\*\**

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 8 февраля 2008 г.

Обсуждаются свойства диффузионного квазимультифрактального процесса. Строится дискретная модель процесса и предлагается метод расчета квазимультифрактального спектра при помощи статистической обработки реализаций процесса. Анализ мультифрактальных свойств, проведенный на основе численного изучения квазимультифрактального спектра, качественно подтверждается видом реализаций моделируемого процесса. На основании результатов численных экспериментов выделяются три существенно различные области параметров. Особое внимание уделено сравнительному анализу результатов численного моделирования и аналитических расчетов, а также сравнению реализаций предложенного процесса и хорошо известного процесса мультифрактальных случайных блужданий.

PACS: 05.45.Df, 47.53.+n, 02.50.-r, 02.50.Ey, 05.40.-a

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Первоначально теория мультифрактальных процессов появилась как обобщение каскадных моделей Ричардсона [1] и Колмогорова [2]. Основное развитие данная область теории случайных процессов получила в рамках исследования турбулентности, и в настоящее время, после того как было показано, что приращения скорости в развитой турбулентности имеют мультифрактальный характер [3], интерес к изучению мультифрактальных свойств турбулентности возрастает (см., например, работы [4–9]).

Ключевым вопросом теории мультифрактальности является разработка адекватной модели, описывающей подобные процессы. Первые попытки (1990–1997 гг.) создать такую модель основывались на так называемом каскадном правиле [4, 10] для приращений рассматриваемого процесса, что привело к лог-нормальной модели мультифрактальности [11]. Данный подход имел ряд существенных недостатков, таких как нестационарность приращений и отсутствие явной зависимости от времени, и был применим лишь для дискретного набора масштабов.

Более удачной стала предложенная в 2000 г. модель мультифрактальных случайных блужданий [12, 13]. В ней мультифрактальный процесс представлялся в виде предела конечной суммы отсчетов некоторого случайного процесса, получаемого путем комбинации двух независимых гауссовых процессов. Данная модель, хотя и лишена недостатков предыдущих, несет в себе существенное внутреннее противоречие, которое заключается, в частности, в том, что модель теряет физический смысл при рассмотрении моментов приращений высоких порядков.

На наш взгляд, наиболее адекватно отражающей свойства мультифрактальных процессов стала модель, предложенная в 2006 г. в работе [14]. Являясь развитием модели случайных блужданий, она вводит в употребление несколько дополнительных существенных параметров, что позволяет избежать указанного противоречия предыдущей модели. Следующим шагом стало введение понятий квазимультифрактального процесса и квазимультифрактального спектра [15]. В указанной работе был рассмотрен процесс диффузионного типа, более адекватный турбулентным пульсациям, нежели предложенный в [14] монотонно растущий процесс, и аналитически исследован его квазимультифрактальный спектр.

Настоящая работа продолжает обсуждение свойств диффузионных квазимультифрактальных

\*E-mail: saichev@hotmail.ru

\*\*E-mail: vladimir.a.filimonov@gmail.com

процессов. В работе строится дискретная модель процесса и приводятся результаты численных экспериментов. При этом, в отличие от работы [15], квазимультифрактальный спектр рассчитывается при помощи статистической обработки непосредственных реализаций процесса. Анализ мультифрактальных свойств, проведенный на основе изучения квазимультифрактального спектра, качественно подтверждается видом реализаций моделируемого процесса. Особое внимание в статье уделено сравнительному анализу результатов численного моделирования и аналитических расчетов, приведенных ранее [15], а также сравнению реализаций квазимультифрактального процесса и процесса мультифрактальных случайных блужданий [12].

## 2. ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ КВАЗИМУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Прежде чем начать описание дискретной модели и результатов численных экспериментов, необходимо ввести понятие квазимультифрактального процесса и привести краткое описание непрерывной модели, изученной ранее [15].

Рассмотрим случайный процесс со стационарными приращениями  $X(t)$  и  $q$ -й момент его приращений:

$$M_q(l) = \langle (\delta_l X(t))^q \rangle = \langle (X(t+l) - X(t))^q \rangle, \quad (1)$$

где  $\delta_l X(t) = X(t+l) - X(t)$  означает приращение процесса,  $M_q(l)$  —  $q$ -й момент приращений, а угловые скобки — статистическое усреднение. Выражение для данного момента представимо в виде

$$M_q(l) = K_q l^{\zeta_q(l)}, \quad (2)$$

где  $K_q$  — некоторая постоянная,  $\zeta_q(l)$  — локальный масштабный показатель — некоторая функция, параметром которой служит порядок момента  $q$ , а аргументом — масштаб  $l$ . Если данная функция не зависит от масштаба и определяется только порядком момента,

$$M_q(l) = K_q l^{\zeta_q}, \quad (3)$$

то говорят, что процесс  $X(t)$  обладает масштабной инвариантностью. При этом величина  $\zeta_q$  носит название масштабного показателя, а зависимость данного показателя  $\zeta_q$  от порядка момента  $q$  — спектра

процесса. Если спектр линеен,  $\zeta_q = qH$ , где  $H$  — некоторая постоянная, то исходный процесс монофрактален, если же  $\zeta_q$  — нелинейная функция порядка момента приращений  $q$ , то говорят о мультифрактальном процессе.

Отметим, что мультифрактальные свойства процесса проявляются не для всех масштабов  $l$ , а лишь на некотором так называемом инерционном интервале [14, 15]

$$\tau \ll l \ll L, \quad (4)$$

где введены два обозначения: масштаб вязкости  $\tau$  и интегральный масштаб  $L \gg \tau$ . Будем называть процесс  $X(t)$  квазимультифрактальным, если зависимость момента приращений  $M_q(l)$  от масштаба  $l$  можно в некотором смысле (едином для всех порядков  $q$ ) аппроксимировать зависимостью

$$\tilde{M}_q(l) = K_q l^{\tilde{\zeta}_q} \quad (5)$$

на инерционном интервале (4) и при этом  $\tilde{\zeta}_q$  является нелинейной функцией аргумента  $q$ . Величины  $\tilde{\zeta}_q$  назовем эффективными масштабными показателями, а квазимультифрактальным спектром процесса будем называть зависимость  $\tilde{\zeta}_q$  от порядка момента  $q$ . Вопрос выбора аппроксимации отнюдь не тривиален, и после продолжительных исследований в аналитических расчетах наиболее адекватным был признан способ определения эффективного показателя по глобальному минимуму локального показателя на инерционном интервале [15]:

$$\tilde{\zeta}_q = \min_{\tau \ll l \ll L} \zeta_q(l). \quad (6)$$

В рамках предложенной нами модели [14, 15], квазимультифрактальный процесс  $X(t)$  представим в виде

$$X(t) = \int_0^t \xi(t') e^{\omega(t')} dt', \quad (7)$$

где  $\omega(t)$  — некоторый авторегрессионный процесс,

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^t \mu(t') h(t-t') dt', \quad (8)$$

а  $\xi(t)$  и  $\mu(t)$  — некоррелированные гауссовы шумы с корреляционными функциями

$$\langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = D_1 \delta(\tau), \quad \langle \mu(t) \mu(t+\tau) \rangle = D_2 \delta(\tau). \quad (9)$$

Не уменьшая общности, можно положить  $\langle \mu(t) \rangle = 0$ . Кроме того, ограничиваясь здесь рассмотрением только симметричных квазимультифрактальных процессов, положим  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ . В качестве ядра  $h(t)$  выбирается медленно убывающая функция:

$$h(t) = \frac{h_0}{(1 + t/\tau)^{\varphi+1/2}} \chi(t), \quad (10)$$

где  $\tau$  — введенный ранее масштаб вязкости, а  $\chi(t)$  — функция Хевисайда.

Как показано в работе [15], ключевыми параметрами такого квазимультифрактального процесса  $X(t)$  служат показатель степени  $\varphi$  и гибридный параметр  $\sigma^2$ :

$$\sigma^2 = 2D_2 \frac{h_0^2 \tau}{\varphi}. \quad (11)$$

Отметим, что обсуждаемая в работах [12, 13] модель соответствует предельному случаю  $\varphi = 0$ . При этом параметр  $\sigma^2$  оказывается бесконечным, что и приводит к бесконечной дисперсии процесса  $\omega(t)$  в модели мультифрактальных случайных блужданий и, как следствие, к противоречию с физическим смыслом. Введение малого параметра  $\varphi$  и, соответственно, ограничение дисперсии не только не разрушает мультифрактальных свойств моделируемого процесса, но, напротив, делает квазимультифрактальную модель более «богатой» и адекватной реальным свойствам развитой турбулентности.

Для проведения численного моделирования необходимо перейти от непрерывной модели (7) к дискретной. Вводя безразмерное время  $x = t/\tau$ , зададим на новой оси времени равномерную сетку:

$$x_i \equiv \frac{t_i}{\tau} = i = 0, 1, 2, \dots$$

Представляя интегралы в выражениях (7) и (8) в виде суммы интегралов по интервалам сетки  $[t_i, t_{i+1})$  и учитывая медленное изменение входящих в подынтегральные выражения функций  $h(t)$  и  $\omega(t)$ , заменим выражения (7) и (8) на

$$\begin{aligned} X(n\tau) &\approx \sum_{i=0}^{n-1} e^{\omega(i\tau)} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} \xi(t') dt', \\ \omega(i\tau) &\approx \sum_{j=0}^{i-1} h(\tau(i-j)) \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \mu(t') dt', \end{aligned} \quad (12)$$

где  $n = [t/\tau]$ , а квадратными скобками обозначена целая часть числа.

С учетом гауссовости подынтегральных процессов  $\xi(t)$  и  $\mu(t)$  интегралы, входящие в последнее выражение, представляют собой гауссовы случайные величины  $\xi_i$  и  $\mu_i$  с нулевыми средними и дисперсиями соответственно  $D_1\tau$  и  $D_2\tau$ . Однако при выполнении численных расчетов гораздо удобнее оперировать гауссовыми случайными величинами  $\tilde{\xi}_i$  и  $\tilde{\mu}_i$  с нулевыми средними и единичными дисперсиями, значения которых связаны с исходными при помощи следующих выражений:

$$\xi_i \sim \sqrt{D_1\tau} \tilde{\xi}_i, \quad \mu_i \sim \sqrt{D_2\tau} \tilde{\mu}_i, \quad (13)$$

где знак « $\sim$ » на строке обозначает эквивалентность процессов в статистическом смысле (равенство вероятностных распределений).

Подставляя соотношения (13) и (10) в (12), получим следующие окончательные выражения для дискретного квазимультифрактального процесса:

$$\begin{aligned} X_n &= \nu \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\xi}_i e^{\omega_i}, \\ \omega_i &= \rho \sum_{j=0}^{i-1} \tilde{\mu}_j (i-j+1)^{-\varphi-1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\nu = \sqrt{D_1\tau}, \quad \rho = h_0 \sqrt{D_2\tau}.$$

Очевидно, что множитель  $\nu$ , входящий в выражение для  $X_n$ , не влияет на статистические свойства дискретного процесса, поэтому, не уменьшая общности, можно положить  $\nu = 1$ . Параметр  $\rho$ , входящий мультипликативно в выражение для  $\omega_i$ , напротив, существен и при численном моделировании будет играть роль, аналогичную параметру  $\sigma^2$  непрерывной модели. Последние два параметра связаны очевидным равенством:

$$\rho^2 = \frac{1}{2} \varphi \sigma^2. \quad (15)$$

Таким образом, параметрами дискретной модели квазимультифрактального процесса являются  $\rho$  и  $\varphi$ .

Для получения некоррелированных гауссовых случайных величин, входящих в выражения (14), применялось преобразование Бокса–Мюллера в полярной форме [16] к последовательности равномерно распределенных величин. Очевидно, что при этом «качество» получаемых нормально распределенных случайных чисел напрямую зависит от «качества» генератора независимых равномерно распределенных случайных чисел. Для тестирования

генераторов псевдослучайных чисел использовались как традиционные критерии согласия Пирсона и Колмогорова–Смирнова, так и специализированные наборы тестов DIEHARD Test Battery [17] и NIST Statistical Test Suite [18]. Также большое внимание уделялось вычислительной сложности алгоритма и периоду псевдослучайной последовательности. По результатам тестирования наиболее приемлемым генератором был признан «Вихрь Мерсенна» [19], достоинствами которого кроме малого коэффициента корреляции и высокой степени равномерности распределения являются также высокая скорость работы и огромный период, равный  $2^{19937} - 1$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Прежде чем приступить непосредственно к изучению квазимультифрактальных спектров, рассмотрим реализации получаемого дискретного процесса. Очевидно, что при малых значениях параметра  $\rho$  процесс  $X_n$  будет практически монофрактальным (рис. 1а), а в пределе при  $\rho \rightarrow 0$  становится винеровским процессом. С ростом  $\rho$  мультифрактальные свойства процесса начинают проявляться сильнее. Внешне это проявляется в появлении большого числа быстрых «скачков» (рис. 1б). При еще большем увеличении  $\rho$  возрастает влияние экспоненты в выражении (14), а вместе с ним растет и амплитуда скачков (рис. 1в), и при больших значениях  $\rho$  процесс  $X_n$  можно рассматривать как некоторый обобщенный телеграфный процесс. В данной работе не ставится цель подробного изучения влияния параметров на режимы мультифрактальности, поэтому дальнейшее исследование моментов и спектров будет проводиться для значений параметров  $\rho$  и  $\varphi$ , отвечающих некоторому «умеренному» режиму (аналогичному приведенному на рис. 1б).

Интересным является вопрос согласия реализаций квазимультифрактального случайного процесса и процесса мультифрактальных случайных блужданий [12]. Для проведения сравнения рассмотрим чрезвычайно малое значение параметра  $\varphi = 10^{-25}$ , что, согласно выражению (11), соответствует  $\sigma^2 \sim 10^{25}$  и огромному значению дисперсии приращений квазимультифрактального процесса [15]  $\langle |\delta_t X(t)|^2 \rangle \sim \exp(10^{25})$ , которое даже с точки зрения аналитических расчетов может рассматриваться как бесконечно большое. Аналитические расчеты [15] позволяют найти связь между  $\sigma^2$  и параметром мультифрактальности  $\lambda^2$  модели мульт-

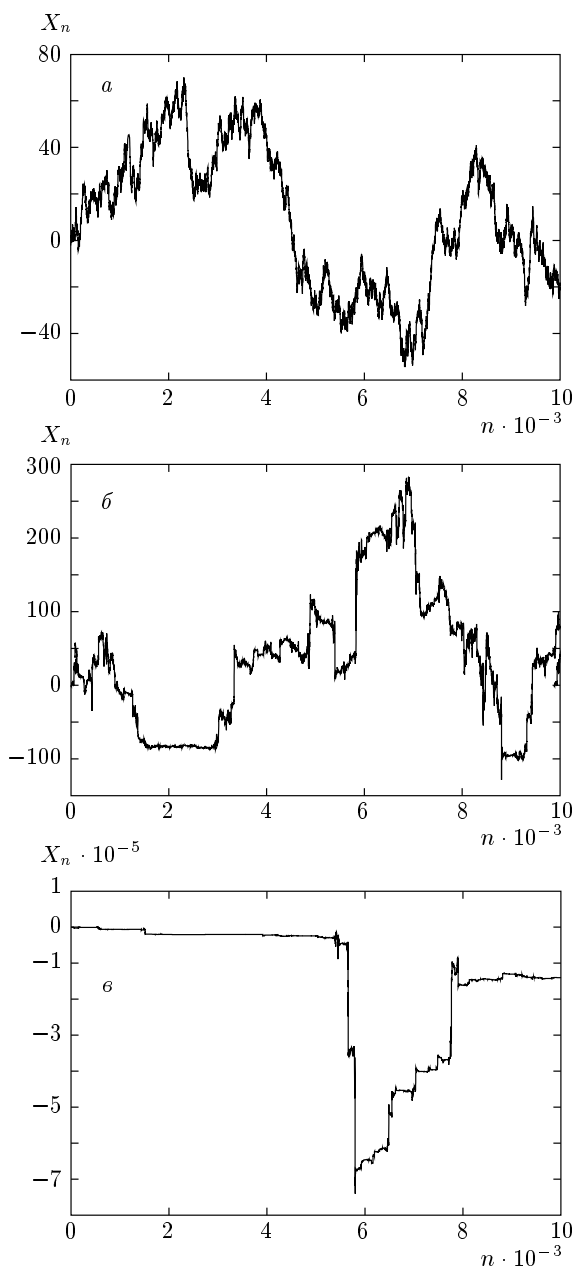
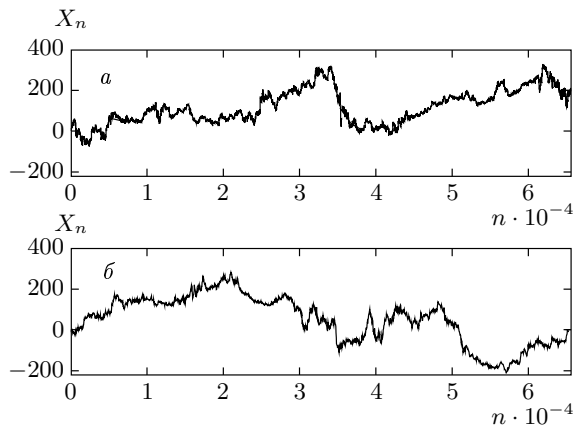


Рис. 1. Реализации дискретного процесса  $X_n$  при  $\varphi = 0.01$  и  $\rho = 0.1$  (а),  $0.5$  (б),  $0.9$  (в)

тифрактальных случайных блужданий [12], а соотношение (15) позволяет рассчитать значение  $\rho$ , которое, в отличие от  $\sigma^2$ , конечно и невелико. Так, для значения  $\lambda^2 = 0.03$  [12] и  $\varphi = 10^{-25}$  соответствующее значение параметра дискретной модели  $\rho \approx 0.21$ . Рисунок 2 показывает хорошее визуальное согласие реализаций квазимультифрактального случайного процесса (рис. 2а) и процесса мультифрактальных случайных блужданий (график, приведен-



**Рис. 2.** Реализации квазимультифрактального диффузионного процесса при  $\varphi = 10^{-25}$ ,  $\rho = 0.21$  (а) и процесса мультифрактальных случайных блужданий при  $\lambda^2 = 0.03$  [12] (б)

ный в работе [12], рис. 2б). Отметим также, что значения параметров, рассмотренные в работах [12, 13], соответствуют  $\rho \lesssim 0.4$ , т. е. области, в которой мультифрактальные свойства процесса выражены слабо.

Реализации дискретного процесса  $X_n$  позволяют рассчитать приращения  $\delta_m X_n = X_{n+m} - X_n$ , а усреднение приращений  $\delta_m X_n$  по длине реализации позволяет найти соответствующие моменты:

$$M_q(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} |\delta_m X_n|^q \equiv \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m} |X_{n+m} - X_n|^q, \quad (16)$$

где  $N$  — длина полученной реализации, а  $q$  — произвольный порядок момента. Очевидно, что для выполнения «качественного» усреднения, сумма в последнем выражении должна содержать достаточно много слагаемых, поэтому при заданной длине  $N$  реализации (ограничиваемой объемом оперативной памяти компьютера) максимальный масштаб  $m$ , на котором результат усреднения (16) будет достоверным, удовлетворяет неравенству

$$m \ll N. \quad (17)$$

Расчеты показывают, что для достоверности усреднения достаточно выполнения неравенства  $N/m > 100-250$ .

Численный расчет моментов для «умеренной» мультифрактальности подтверждает наличие трех существенно различных областей масштабов. Первая непротяженная область, простирающаяся до

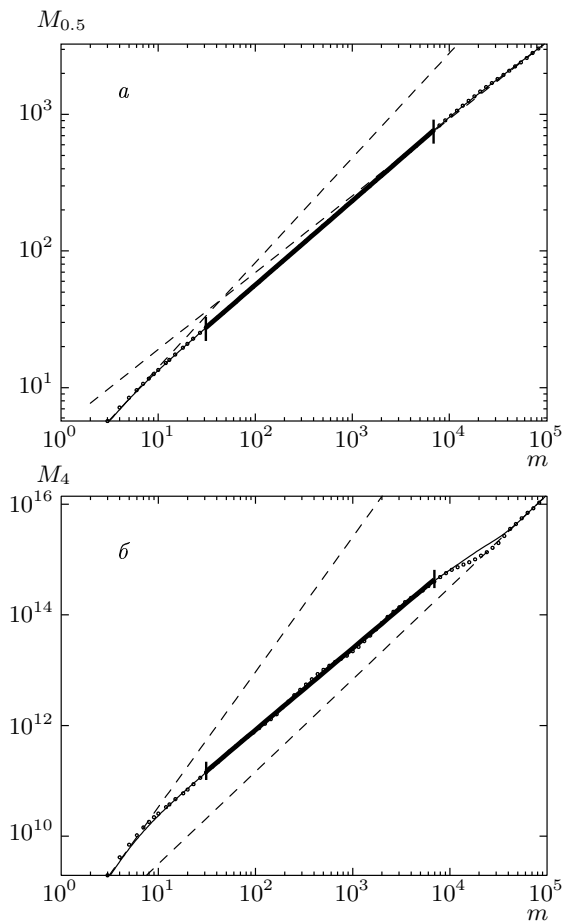
масштаба вязкости ( $l \sim \tau$ ), отвечает монофрактальной асимптоте, полученной аналитически в работах [14, 15]. На больших масштабах ( $l \gtrsim L$ ) графики моментов приращений также выходят на монофрактальные асимптоты. Отметим, что если масштаб вязкости  $\tau$  определен в самой модели квазимультифрактального процесса, то интегральному масштабу  $L$  не может быть дано однозначного определения [15]. Однако расчеты показывают, что при  $l > \tau$  имеется протяженная область масштабов (инерционный интервал), на которых аппроксимация графика момента приращений степенным законом (5) приводит к эффективному показателю  $\tilde{\zeta}_q$ , отличному от монофрактального. Масштаб, на порядок больший верхней границы этой области, и полагается в данной статье интегральным ( $L$ ). Отметим, что наличие описанных областей масштабов сохраняется как для младших ( $q \lesssim 1$ , рис. 3а), так и для старших ( $q \sim 4$ , рис. 3б) моментов.

Графики моментов имеют значительные флуктуации (рис. 3б), уменьшения которых можно добиться увеличением длины  $N$  реализации до некоторого максимального значения, определяемого величиной оперативной памяти компьютера. Так, на компьютере с оперативной памятью 1 Гбайт максимально возможная длина реализации  $N \approx 5 \cdot 10^7$ . Поэтому наряду с выбором достаточно длинных реализаций также применялось сглаживание кривой моментов приращений при помощи плавающего среднего.

Как уже отмечено, определение эффективных масштабных показателей, составляющих квазимультифрактальный спектр, по известным моментам приращений  $M_q(m)$  достаточно нетривиально. Нахождение эффективных показателей по глобальному минимуму (6), удобное для аналитических расчетов [14, 15], затруднено из-за необходимости применения численно некорректной операции дифференцирования для вычисления локальных показателей. Более адекватным в условиях численного эксперимента стал способ определения эффективных показателей  $\tilde{\zeta}_q$  при помощи аппроксимации графика  $M_q(m)$  чисто степенной зависимостью (5),

$$M_q(m) = K_q m^{\tilde{\zeta}_q},$$

на некотором заданном интервале  $[m_1, m_2]$  методом наименьших квадратов. При этом обнаружилось, что конкретные значения границ интервала ( $m_1$  и  $m_2$ ) аппроксимации слабо влияют на вид спектра при выполнении следующих условий: а) интервал достаточно протяженный и лежит внутри инерционного (4); б) для каждой точки интервала усреднение в выражении (16) достоверно; в) график момента



**Рис. 3.** Зависимости моментов  $M_{0.5}$  (а) и  $M_4$  (б) приращений процесса  $X_n$  от  $m$  при  $\varphi = 0.01$ ,  $\rho = 0.5$ : точки — результаты расчетов моментов приращений при помощи статистической обработки реализаций квазимультифрактального процесса, сплошные тонкие линии — интерполяция данных результатов, пунктирные линии — монофрактальные асимптоты, а сплошные жирные линии — аппроксимация графика момента чисто степенной зависимостью на инерционном интервале

$M_q(m)$  достаточно плавный (т. е. на нем отсутствуют описанные выше флуктуации). Первые два условия приводят к следующему неравенству для границ интервала:

$$1 \ll m_1 \ll m_2 \ll \min\left(\frac{L}{\tau}, N\right),$$

а последнее условие на плавность реализации в наших экспериментах выполнялось для умеренных значений степени момента ( $q < 3$ ). В данной работе рассматривались квазимультифрактальные спектры  $\tilde{\zeta}_q$  для значений степени  $0 < q \leq 2.5$ , при этом

для отыскания эффективных показателей  $\tilde{\zeta}_q$  аппроксимация  $M_q(m)$  степенной зависимостью проводилась на интервале  $[50, 10^4]$  при длине рассчитываемой реализации  $N = 10^7$ .

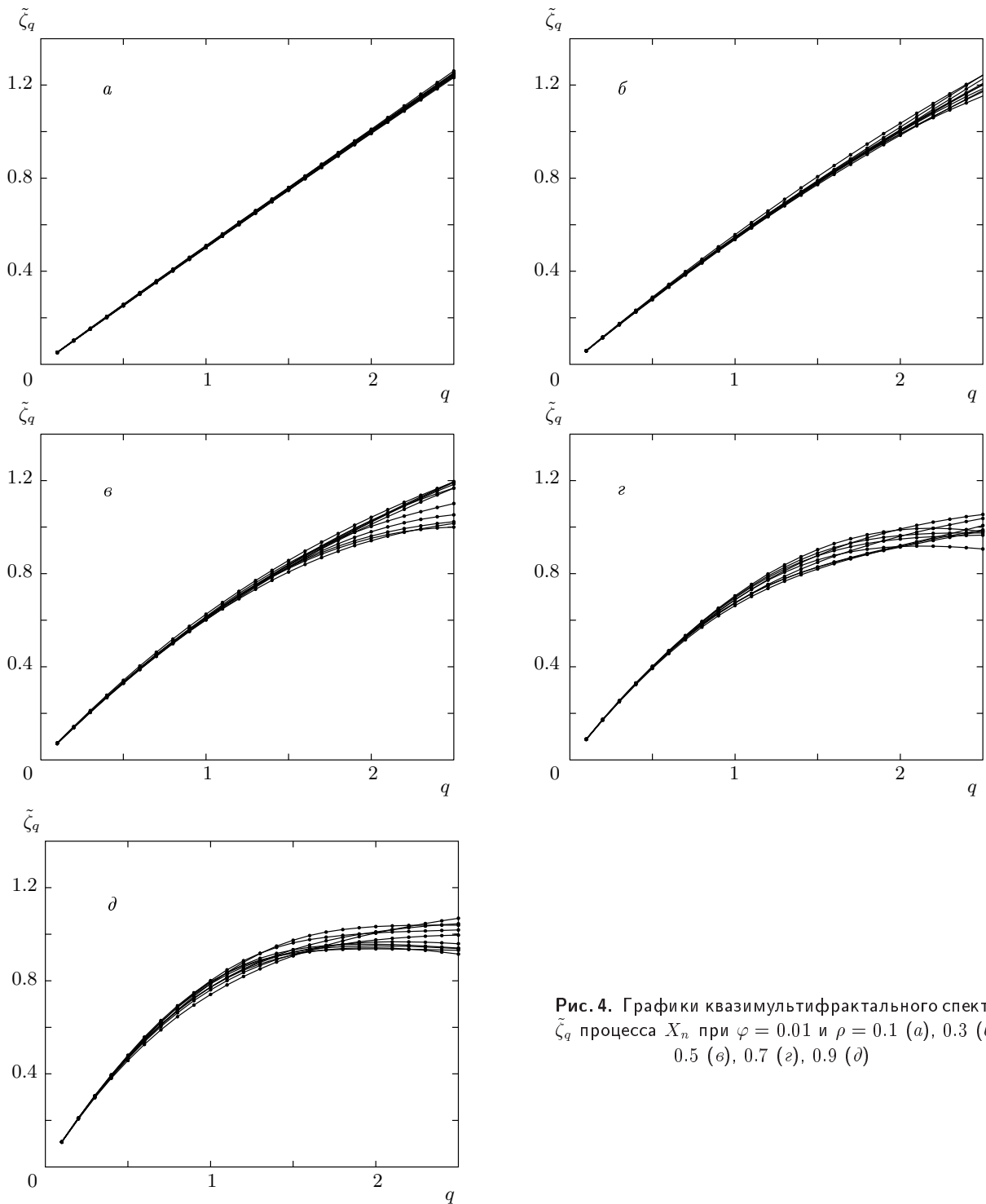
Следует отметить, что при аналитическом рассмотрении мультифрактального процесса [15], в силу чрезвычайной сложности возникающих интегралов, расчет моментов приращений  $M_q(l)$  возможен только для четных степеней, а значит, квазимультифрактальный спектр  $\tilde{\zeta}_q$  процесса аналитически известен лишь в дискретном наборе точек  $q = 2, 4, 6, \dots$ . Значение  $\tilde{\zeta}_q$  для промежуточных степеней может быть рассчитано исключительно при помощи интерполяции полученных значений. В то же время численное моделирование квазимультифрактального процесса  $X_n$  и нахождение моментов приращений процесса непосредственно из реализации последнего позволяет найти значение эффективного показателя  $\tilde{\zeta}_q$  для произвольного значения  $q$  (не ограничиваясь только целыми значениями) и, таким образом, получить практически непрерывный квазимультифрактальный спектр.

На рис. 4 показаны квазимультифрактальные спектры, рассчитанные для десяти реализаций процесса  $X_n$  при  $\varphi = 0.01$  и  $\rho = 0.1-0.9$ . Из приведенных графиков видна существенная нелинейность спектров, что говорит о наличии значительных мультифрактальных свойств моделируемого процесса. Видно, что спектры процесса подтверждают выводы, сделанные по реализациям процесса  $X_n$ . Так, при малых значениях параметра  $\rho \lesssim 0.1$  спектр почти линейен, а процесс практически монофрактален (см. рис. 4а и 1а), с ростом  $\rho$  отличия спектра от линейного становятся все существеннее, и при больших значениях ( $\rho \gtrsim 0.5$ ) спектр становится сильно нелинейным, подтверждая мультифрактальность процесса  $X_n$  (см. рис. 4д и 1в). При этом в случае умеренной мультифрактальности ( $\rho \approx 0.5$ ) спектр довольно хорошо описывается квадратичной зависимостью

$$\tilde{\zeta}_q = \frac{1}{2}[q - q(q - 2)\lambda^2], \tag{18}$$

полученной в модели мультифрактальных случайных блужданий [12, 13]. В области же сильной мультифрактальности ( $\rho \gtrsim 0.9$ ) отличия спектра от квадратичного весьма существенны. Так, с ростом параметра  $\rho$  от 0.5 до 0.9 среднеквадратичное отклонение при аппроксимации спектра параболой (18) увеличивается в 200 раз.

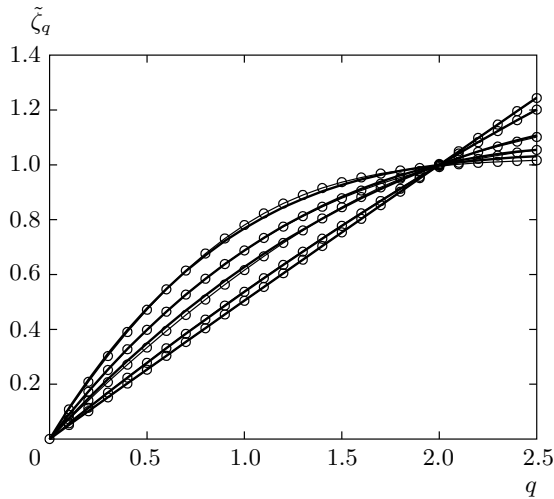
Несмотря на то что характер поведения спектров реализаций, соответствующих одним и тем же пара-



**Рис. 4.** Графики квазимультифрактального спектра  $\tilde{\zeta}_q$  процесса  $X_n$  при  $\varphi = 0.01$  и  $\rho = 0.1$  (а), 0.3 (б), 0.5 (в), 0.7 (г), 0.9 (д)

метрам, одинаков, на рис. 4 виден некоторый разброс получаемых кривых, причиной которого является специфика метода статистических испытаний. Очевидно, что наиболее приближенной к кривой, по-

лучаемой строгими аналитическими методами, будет некоторая средняя кривая, а количественной оценкой «ошибки», получаемой при моделировании, может служить следующая относительная разность:



**Рис. 5.** Результаты интерполяции рассчитанных спектров  $\tilde{\zeta}_q$  процесса  $X_n$  (жирные линии) и усредненный спектр  $\zeta_q^{av}$  (кружки) при  $\varphi = 0.01$  и  $\rho = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$  (кривые снизу вверх)

$$\varepsilon = \max_{0 < q \leq 2.5} \frac{\tilde{\zeta}_q - \zeta_q^{av}}{\zeta_q^{av}},$$

где  $\zeta_q^{av}$  — значение, полученное путем усреднения приведенных спектров для десяти различных реализаций. Для кривых, приведенных на рис. 4, ошибка  $\varepsilon$  изменяется от 3 % при  $\rho = 0.1$  до 9 % при  $\rho = 0.9$ .

Важным вопросом численных экспериментов является вопрос согласия результатов численного моделирования и аналитических расчетов. Связь между параметром дискретной модели  $\rho$  и параметром  $\sigma^2$ , входящим в аналитические выражения для расчета спектра [15], устанавливает соотношение (15). Для используемых в статье значений  $\varphi = 0.01$  и  $\rho = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$  соответствующими значениями параметра непрерывной модели будут следующие:  $\sigma^2 = 2, 18, 50, 98, 162$ . Рассчитанный для дискретного набора  $q = 2, 4, 6, 8, 10$  аналитический спектр интерполировался в промежуточных точках. Для приведенных параметров  $\varphi, \rho$  и  $\sigma^2$  на рис. 5 показаны наложенные друг на друга результаты интерполяции аналитически рассчитанного спектра и усредненный по десяти реализациям спектр  $\zeta_q^{av}$ , полученный с помощью численного моделирования.

Отметим, что сравнение аналитических и численных расчетов показало хорошее согласие несмотря на существенное различие в методах определения эффективных показателей: в аналитическом расче-

те эффективный показатель был введен как глобальный минимум (6) локального, а в численном эксперименте — как результат аппроксимации момента приращений. Учитывая также описанный выше произвол в выборе интервала аппроксимации, можно достоверно говорить о том, что нелинейный спектр является следствием именно квазимультифрактальной природы процесса, а не статистической обработки моментов приращений.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен дискретный квазимультифрактальный процесс диффузионного типа. При этом рассмотрение мультифрактальных свойств проводилось не традиционными аналитическими методами, а при помощи статистического численного моделирования непосредственно реализаций процесса. Основным достоинством данного подхода является возможность получения значений квазимультифрактального спектра для произвольных, в том числе и нецелых, порядков.

Рассчитанные реализации и спектр подтвердили наличие мультифрактальных свойств моделируемого процесса, а также позволили выделить три существенно различные области параметров. Первая область, в которой спектр линеен, отвечает монофрактальным процессам. Вторая и третья области с параболическим и существенно отличным от параболического спектрами получили названия областей соответственно умеренной и сильной мультифрактальности. Отметим, что в отличие от большинства предыдущих работ, посвященных мультифрактальным процессам, анализ, проведенный в данной работе, не был ограничен только областью слабой мультифрактальности, а содержал в себе все три области параметров.

Отдельное внимание уделено сравнению реализаций квазимультифрактального случайного процесса и реализаций мультифрактальных случайных блужданий, а также сравнительному анализу результатов численного моделирования и аналитических расчетов. Обнаруженное хорошее согласие результатов позволяет использовать предложенный метод для детального изучения квазимультифрактальных свойств процессов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16414а), а также в рамках Программы по поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-1055.2008.2).



## ЛИТЕРАТУРА

1. L. F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*, Cambridge University Press (1922).
2. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **XXXI**, 99 (1941).
3. U. Frish, *Turbulence, the Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press (1995).
4. R. Friedrich and J. Peinke, Phys. Rev. Lett. **78**, 863 (1997).
5. M. Alber, S. Lueck, C. Renner, and J. Peinke, arXiv:nlin/0007014v1.
6. V. Yakhot and K. R. Sreenivasan, Physica A **343**, 147 (2004).
7. L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 064502-1 (2004).
8. U. Frisch, M. M. Afonso, A. Mazzino, and V. Yakhot, J. Fluid Mech. **542**, 97 (2005).
9. L. Chevillard, B. Castaing, E. Leveque, and A. Arneodo, Physica D **218**, 77 (2006).
10. E. A. Novikov, Phys. Fluids A **2**, 814 (1990).
11. B. Castaing, Y. Gagne, and E. Hopfinger, Physica D **46**, 177 (1990).
12. E. Bacry, J. Delour, and J.-F. Muzy, Phys. Rev. E **64**, 026103-1 (2001).
13. E. Bacry, J. Delour, and J.-F. Muzy, arXiv:cond-mat/0009260v1.
14. A. Saichev and D. Sornette, Phys. Rev. E **74**, 011111-1 (2006).
15. А. И. Саичев, В. А. Филимонов, ЖЭТФ **132**, 1235 (2007).
16. E. F. Carter, Forth Dimensions **16**, 67 (1994).
17. G. Marsaglia, Diehard Battery of Tests of Randomness (1995), <http://stat.fsu.edu/~geo/diehard.html>.
18. NIST Computer Security Division. Batteries of Statistical Tests for Random Number Generators (2001), [http://csrc.nist.gov/rng/rng6\\_3.html](http://csrc.nist.gov/rng/rng6_3.html).
19. M. Matsumoto and T. Nishimura, ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation **8**, 3 (1998).