

# ОЦЕНКА КРИТИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ ИЗ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЙ РЕНОРМГРУППЫ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ «СТАНДАРТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ»

*А. А. Погорелов, И. М. Суслов\**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 26 декабря 2007 г.

Представлена новая оценка критических индексов из теоретико-полевого ренормгруппы на основе нового метода суммирования расходящихся рядов. Результаты практически совпадают с центральными значениями Ле Гийо и Зинн-Жюстена (так называемыми стандартными значениями), но имеют меньшую неопределенность. Показано, что обычные теоретико-полевые оценки неявно предполагают предельную гладкость коэффициентных функций. Последнее предположение открыто для обсуждения ввиду существования осциллирующего вклада в коэффициентные функции. Правильная интерпретация последнего необходима как для оценки систематических погрешностей стандартных значений, так и для дальнейшего увеличения точности.

PACS: 11.10.Kk, 11.15.Pg, 11.15.Me, 64.60.F-, 75.10.Nk

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее обоснованным теоретическим подходом к вычислению критических индексов является метод теоретико-полевого ренормгруппы [1]. Он основан на том, что фазовые переходы описываются эффективной теорией  $\varphi^4$  с действием

$$S\{\varphi\} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{4}g\varphi^4 \right\}, \quad (1)$$

где  $\varphi$  —  $n$ -компонентный вектор поля,  $d$  — размерность пространства,  $g$  — константа связи. Условие перенормируемости теории выражается уравнением Каллана – Симанчика

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln m} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \left( L - \frac{N}{2} \right) \eta(g) - L\eta_2(g) \right] \times \\ \times \Gamma^{L,N} = 0 \quad (2)$$

( $\Gamma^{L,N}$  — вершина с  $N$  внешними линиями поля  $\varphi$  и  $L$  внешними линиями взаимодействия), в которое входят ренормгрупповые функции  $\beta(g)$ ,  $\eta(g)$  и  $\eta_2(g)$ . Неподвижная точка  $g^*$  ренормгруппы определяется как нетривиальный корень уравнения  $\beta(g) = 0$ , после чего критические индексы  $\eta$  и  $\nu$ , а также индекс

$\omega$  поправки к скейлингу определяются выражениями

$$\eta = \eta(g^*), \quad \nu^{-1} = 2 - \eta(g^*) + \eta_2(g^*), \\ \omega = \beta'(g^*), \quad (3)$$

а остальные получаются из них с помощью известных соотношений [2]. Ренормгрупповые функции  $\beta(g)$ ,  $\eta(g)$ ,  $\eta_2(g)$  определяются степенными рядами по  $g$ , для которых известны несколько первых коэффициентов разложения и асимптотика высоких порядков, вычисляемая методом Липатова [3, 4]. Ввиду факториальной расходимости рядов для их суммирования требуется использование специальных методов.

Настоящее исследование планировалось с целью существенного повышения точности критических индексов по сравнению с классическими работами [5–7] на основе нового метода суммирования расходящихся рядов [8]. Действительно, удалось уменьшить в несколько раз погрешность результатов, а главное — сделать совершенно прозрачной ее оценку. Тем не менее оптимистические прогнозы [8, 9] по повышению точности не оправдались — обнаружались принципиальные трудности, которые обсуждаются ниже.

\*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Работа построена следующим образом. В разд. 2 дается сравнительный анализ существующих методов суммирования расходящихся рядов и обосновывается принципиальная возможность повышения точности. В разд. 3 приводятся результаты «естественного» суммирования, которые практически совпадают с центральными значениями работы [6] (так называемыми стандартными значениями), но имеют меньшую погрешность. В разд. 4 проводится сопоставление с другими источниками информации о критических индексах. В разд. 5 обсуждается проблема осциллирующего вклада в коэффициентные функции, которая препятствует дальнейшему повышению точности и может являться источником систематических ошибок, присущих стандартным значениям.

## 2. МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ДЛЯ РЕНОРМГРУППОВЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть дан степенной ряд

$$W(g) = \sum_{N=N_0}^{\infty} W_N(-g)^N, \quad (4)$$

коэффициенты которого имеют факториальную асимптотику вида  $c a^N \Gamma(N + b)$ , которая является обычным результатом применения метода Липатова [9]. После преобразования Бореля

$$\begin{aligned} W(g) &= \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{b_0-1} B(gx), \\ B(z) &= \sum_{N=N_0}^{\infty} B_N(-z)^N, \\ B_N &= \frac{W_N}{\Gamma(N + b_0)} \end{aligned} \quad (5)$$

( $b_0$  — произвольный параметр) задача сводится к нахождению борелевского образа  $B(z)$ , который аналитичен в комплексной плоскости  $z$  с разрезом от  $-1/a$  до  $-\infty$  [10] (рис. 1а). Ряд для  $B(z)$  сходится в круге  $|z| < 1/a$  и для проведения интегрирования в (5) требуется его аналитическое продолжение за пределы круга. Способ решения этой проблемы определяет основное различие обсуждаемых ниже методов.

### 2.1. Метод Паде – Бореля

Простейший способ аналитического продолжения основан на построении паде-аппроксимант [5]:

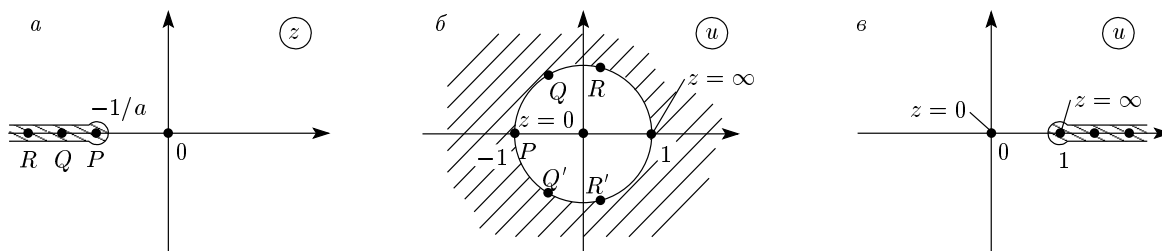
функция  $B(z)$  аппроксимируется отношением полиномов  $P_M(z)/Q_L(z)$  степеней  $M$  и  $L$ , коэффициенты которых подобраны так, чтобы воспроизводить известные первые члены разложения (5). Известно, что для широкого класса функций диагональные ( $M = L$ ) и квазидиагональные ( $M \approx L$ ) аппроксиманты сходятся к искомой функции при  $M \rightarrow \infty$ , что и является основой для применения метода. Однако для конечных значений  $M$  и  $L$  он сводится к произвольной экстраполяции в области сильной связи. Действительно, использование паде-аппроксимации навязывает борелевскому образу вполне определенное (и в общем неправильное) поведение на бесконечности,  $B(z) \sim z^{M-L}$ . Аналогичное поведение  $W(g) \sim g^{M-L}$  получается для функции  $W(g)$  при  $g \rightarrow \infty$ , что по непрерывности индуцирует существенную ошибку при  $g \sim 1$ . Практические результаты применения метода не так плохи: дело в том, что реальный параметр разложения  $ag$  в окрестности неподвижной точки оказывается довольно малым,

$$ag^* \approx 0.2 \quad (d = 3), \quad ag^* \approx 0.4 \quad (d = 2), \quad (6)$$

так что функция  $W(g)$  в этой области достаточно надежно определяется первыми членами разложения. Тем не менее результаты, получаемые при различном выборе паде-аппроксимант, существенно различаются, и применение метода связано с известной долей субъективизма.

Ситуация меняется, если для асимптотики функции  $W(g)$  в области сильной связи можно получить хотя бы грубую оценку: тогда поведение паде-аппроксимант на бесконечности может быть согласовано с асимптотикой функции  $B(z)$ , что позволяет получить равномерную по  $g$  точность (так, если  $W(g) \sim g^\alpha$ , то нужно использовать аппроксиманты с  $M - L \approx \alpha$ ). При наличии достаточно длинного разложения асимптотика сильной связи может быть «прощупана» по скорости сходимости, как это сделано в классической работе Бейкера и др. [5].

Метод Паде – Бореля позволяет учесть аналитические свойства функции  $B(z)$ , если выбор паде-аппроксимант подчинить требованию, чтобы все их полюсы располагались на отрицательной полуоси. Другим достоинством метода является возможность прямого использования информации о высоких порядках: если преобразование (5) проводится с  $b_0 = b$ , то сингулярность в точке  $-1/a$  является простым полюсом, вычет в котором определяется параметром  $c$  асимптотики Липатова, что можно исполь-



**Рис. 1.** Борелевский образ  $B(z)$  аналитичен в комплексной плоскости с разрезом  $(-\infty, -1/a)$  (а), и его область аналитичности можно конформно отобразить на единичный круг (б). Для аналитического продолжения на положительную полуось можно использовать модифицированное конформное преобразование на плоскость с разрезом  $(1, \infty)$  (в)

зовать при построении паде-аппроксимант<sup>1)</sup>. В последнем случае паде-аппроксимация автоматически производит интерполяцию коэффициентных функций (по-видимому, довольно гладкую); ее характер никогда не контролировался, но, в принципе, это возможно.

Характерные свойства метода Паде–Бореля можно резюмировать следующим образом:

- а) произвольный характер экстраполяции в область сильной связи;
- б) возможность прямого учета асимптотики Липатова;
- в) возможность учета аналитических свойств функции  $B(z)$ ;
- г) автоматическая интерполяция коэффициентной функции в случае выполнения пункта б).

### 2.2. Конформ-борель

Реальное аналитическое продолжение борелевского образа  $B(z)$  при коэффициентах  $W_N$ , заданных численно, представляет некоторую проблему. Ее элегантное решение, предложенное Ле Гийо и Зинн-Жюстенем [6], состоит в использовании конформного преобразования  $z = f(u)$ , отображающего плоскость с разрезом на единичный круг  $|u| < 1$  (рис. 1б): тогда переразложение функции  $B(z)$  в ряд по  $u$ ,

$$B(z) = \sum_{N=N_0}^{\infty} B_N(-z)^N \Big|_{z=f(u)} \rightarrow B(u) = \sum_{N=N_0}^{\infty} U_N u^N, \quad (7)$$

при любых  $z$  дает сходящийся ряд. Действительно, все возможные особые точки  $P, Q, R, \dots$  функции  $B(z)$  лежат на разрезе, а их образы  $P, Q, Q', R, R', \dots$  — на границе круга  $|u| = 1$ , так что второй ряд в (7) сходится при всех  $|u| < 1$ ; но внутренность круга,  $|u| < 1$ , находится во взаимно однозначном соответствии с областью аналитичности в плоскости  $z$ .

Нетрудно видеть, что в этом подходе преодолевается главный недостаток метода Паде–Бореля — процедура аналитического продолжения является вполне объективной и не связана ни с каким произволом. Однако имеются трудности с использованием всей доступной информации. Знание  $L$  первых коэффициентов ряда (4) позволяет определить столько же первых коэффициентов  $U_N$  второго ряда в (7); асимптотика Липатова в явном виде не используется, и только ее параметр  $a$  задействован при построении конформного преобразования  $z = f(u)$ . Фактически не используется даже параметр  $a$  (!). Действительно, разрез в борелевской плоскости можно провести от  $-\infty$  до произвольной точки  $z^*$ , такой, что  $-1/a < z^* < 0$ . При этом все сингулярности борелевского образа по-прежнему окажутся на границе единичного круга в плоскости  $u$  и пересуммированный ряд будет сходиться для всех точек борелевской плоскости  $z$ , лежащих вне разреза. При указанном условии результаты не будут зависеть от  $z^*$ , что было эмпирически обнаружено в работе [11]. Но это означает, что знания точного значения  $a$  не требуется — оно используется лишь на уровне грубой оценки, определяя границу допустимого интервала для  $z^*$ . Таким образом, непосредственное использование

<sup>1)</sup> В полной мере эта программа, по-видимому, никогда не была реализована — в работе [5] учитывались лишь положение сингулярности и ее характер (т.е. параметры  $a$  и  $b$ ), но не значение вычета в ней (параметр  $c$ ).

асимптотики Липатова оказывается невозможным.

Ее косвенный учет в работе [6] состоял в интерполяции коэффициентной функции, что позволяло предсказать и использовать один-два неизвестных коэффициента  $W_N$ . Использование большего количества коэффициентов невозможно из-за катастрофического роста ошибок. Если  $\delta$  — относительная точность вычисления  $W_N$ , то ошибка в коэффициентах  $U_N$  пересуммированного ряда растет по закону [8]<sup>2)</sup>

$$\delta U_N \sim 5.8^N \delta, \quad (8)$$

и при точности интерполяции около 1% уже третий предсказанный коэффициент  $W_N$  оказывается неэффективным. Невозможность контроля промежуточных коэффициентов разложения приводит к сильной зависимости результатов от изменения процедуры суммирования. Эта неопределенность практически не поддается анализу, и ее приходится ограничивать на основе полуэмпирических рецептов.

Подытожим характерные свойства конформ-бореля:

- а) строго обоснованный способ аналитического продолжения;
- б) автоматический учет аналитических свойств функции  $B(z)$ ;
- в) невозможность прямого использования асимптотики Липатова;
- г) ограниченная эффективность интерполяции коэффициентных функций.

### 2.3. Вариационная теория возмущений

Несколько в стороне от описанных методов находится вариационная теория возмущений, наиболее эффективный вариант которой сформулирован Клейнертом [12]. Вместо разложения в ряд для  $\beta$ -функции используется эквивалентное разложение перенормированного заряда  $g$  по степеням затравочного заряда  $g_0$  (при несколько специфическом их определении). Тогда для областей слабой и сильной связи имеем соответственно  $g \approx g_0$ ,  $g_0 \rightarrow 0$  и  $g \rightarrow g^*$ ,  $g_0 \rightarrow \infty$ . Аналогичные соотношения справедливы для ренормгрупповых функций, например,  $\eta(g) \sim g_0^2$ ,  $g_0 \rightarrow 0$  и  $\eta(g) \rightarrow \eta(g^*)$ ,  $g_0 \rightarrow \infty$ . Интерполяция между этими областями аналогична использованию метода Паде–Бореля с известной (постоянной) асимптотикой сильной связи: если постро-

<sup>2)</sup> Строго говоря, этот результат получен в работе [8] для случайных ошибок. Однако в случае, когда ошибки являются гладкими функциями, результат оказывается примерно таким же.

ить диагональные аппроксиманты  $P_M(g_0)/Q_M(g_0)$  по первым членам ряда, то они будут хорошо сходиться при увеличении  $M$ , предсказывая значения  $g^*$ ,  $\eta(g^*)$  и т. д. В варианте Клейнерта применяется другой набор аппроксимирующих функций, учитывающий характер приближения  $g$  к неподвижной точке,  $g - g^* \sim g_0^{-\omega/(4-d)}$ .

В этом подходе не используются явно ни факт расходимости ряда, ни его асимптотика Липатова. Информация о последней может быть учтена лишь косвенно путем интерполяции коэффициентной функции (аналогично п. 2.2) и не очень эффективна. Такой подход не обладает ни одним из бесспорных достоинств, отмеченных в предыдущих двух методах, и полагается лишь на качество интерполяционной схемы, которое действительно является высоким. Тем не менее эта схема не имеет глубокого смысла и допускает субъективные вариации.

### 2.4. Модифицированный конформ-борель

Теперь обратимся к алгоритму, который будет использоваться ниже. Он основан на той же идее, что и в п. 2.2, но использует конформное преобразование не на единичный круг, а на плоскость с разрезом  $(1, \infty)$  (рис. 1 в),

$$z = \frac{u}{a(1-u)}, \quad (9)$$

для которого легко найти связь  $U_N$  и  $B_N$ :

$$U_0 = B_0, \quad U_N = \sum_{K=1}^N \frac{B_K}{a^K} (-1)^K C_{N-1}^{K-1} \quad (N \geq 1), \quad (10)$$

где  $C_N^K$  — биномиальные коэффициенты. Ряд для  $B(u)$  в (7) сходится при  $|u| < 1$  и, в частности, на интервале  $0 < u < 1$ , который является образом положительной полуоси: этого достаточно для проведения интегрирования в (5). Конформное преобразование (9) удобно для исследования функции  $W(g)$  в области сильной связи [8], так как расходимость переразложенного ряда в (7) определяется ближайшей особой точкой  $u = 1$ , связанной с особенностью функции  $W(g)$  при  $g \rightarrow \infty$ . Поэтому асимптотика  $U_N$  при больших  $N$ ,

$$U_N = U_\infty N^{\alpha-1}, \quad U_\infty = \frac{W_\infty}{a^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(b_0 + \alpha)}, \quad (11)$$

связана с поведением функции  $W(g)$  в области больших  $g$ :

$$W(g) = W_\infty g^\alpha, \quad g \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Такой алгоритм характеризуется значительно более медленным ростом случайных ошибок (ошибок вычисления или округления):

$$\delta U_N \sim \delta \cdot 2^N \quad (13)$$

(ср. с (8)). При вычислениях с двойной компьютерной точностью ( $\delta \sim 10^{-14}$ ) величина  $\delta U_N$  становится порядка единицы при  $N \approx 45$ , что позволяет восстановить асимптотику (12) на уровне примерно 1%. Далее коэффициенты  $U_N$  продолжают в область больших  $N$  по найденному степенному закону (11); тем самым известны все коэффициенты сходящегося ряда (7), и он может быть просуммирован при произвольных  $g$ .

Влияние гладких ошибок является еще более интересным, и можно говорить о своеобразной суперустойчивости алгоритма. Линейное преобразование (10) обладает замечательным свойством,

$$\sum_{K=1}^N K^m (-1)^K C_{N-1}^{K-1} = 0$$

для  $m = 0, 1, \dots, N-2$ , (14)

и добавление к величине  $B_K/a^K$  (имеющей степенное поведение по  $K$ ) произвольного полинома  $P_m(K)$  вообще не влияет на поведение  $U_N$  в области больших  $N$ . Аналогичное свойство имеет место для широкого класса гладких функций, которые хорошо аппроксимируются полиномами. Так, замена  $B_K/a^K \rightarrow B_K/a^K + f(K)$ , где  $f(K)$  — целая функция с быстроубывающими коэффициентами ряда Тейлора, дает изменение  $U_N$ , быстро убывающее с ростом  $N$ . Для ренормгрупповых функций известно несколько первых коэффициентов  $W_N$  и их асимптотики, а промежуточные коэффициенты могут быть найдены интерполяцией. Ошибки интерполяции являются гладкими и оказываются несущественными даже при их большой величине.

В результате становится возможным провести интерполяцию коэффициентной функции, однозначно просуммировать полученный ряд и исследовать неопределенность результатов, изменяя характер интерполяции. Тем самым полностью снимается проблема зависимости результатов от изменения процедуры суммирования: остается лишь их зависимость от способа интерполяции, которая имеет прямой физический смысл и связана с неполнотой исходной информации.

В отличие от метода Паде–Бореля (п. 2.1) описанный алгоритм содержит явную оценку асимптотики сильной связи. В отличие от стандартного кон-

форм-бореля (п. 2.2) и вариационной теории возмущений (п. 2.3) он позволяет полностью учесть доступную информацию. Тем самым становится понятной возможность повышения точности уже в рамках имеющейся информации.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ СУММИРОВАНИЯ

Применение метода начинается с интерполяции коэффициентной функции по формуле<sup>3)</sup>

$$F_N = \frac{W_N}{W_N^{as}} = 1 + \frac{A_1}{N - \tilde{N}} + \frac{A_2}{(N - \tilde{N})^2} + \dots + \frac{A_K}{(N - \tilde{N})^K} + \dots \quad (15)$$

путем обрыва ряда и выбора коэффициентов  $A_K$  из соответствия с известными значениями коэффициентов  $W_{L_0}, W_{L_0+1}, \dots, W_L$ ; принимается оптимальная форма для асимптотики Липатова  $W_N^{as} = ca^N N^{b-1/2} \Gamma(N+1/2)$  [8], а параметр  $\tilde{N}$  используется для анализа неопределенности результатов. Значение  $L_0$  не всегда совпадает с  $N_0$  в (4). Дело в том, что коэффициентная функция  $W_N$ , продолженная в комплексную плоскость, имеет особенность в точке  $N = \alpha$ , где  $\alpha$  — показатель асимптотики сильной связи (12) [8]. Если  $\alpha$  оказывается больше, чем  $N_0$ , то интерполяция с использованием всех коэффициентов оказывается незаконной: нужно полагать

$$W(g) = W_{N_0} g^{N_0} + \dots + W_{N_1} g^{N_1} + \tilde{W}(g), \quad (16)$$

$$N_1 = [\alpha]$$

и суммировать ряд для  $\tilde{W}(g)$ , после чего добавить вклад выделенных членов; тем самым для  $L_0$  выбирается значение  $[\alpha]+1$ , где  $[\dots]$  — целая часть числа. Как показал анализ двумерного случая [13], величина  $\alpha$  оказывается больше, чем  $N_0$ , практически для всех функций.

В соответствии с установившейся традицией кроме рядов для функций  $\beta(g), \eta(g), \eta_2(g)$  мы суммировали также ряды для

$$\nu^{-1}(g) = 2 + \eta_2(g) - \eta(g), \quad \gamma^{-1}(g) = 1 - \frac{\eta_2(g)}{2 - \eta(g)}$$

с целью проверки результатов на самосогласованность. Следуя работе [13], мы считали допустимыми

<sup>3)</sup> Поправки к асимптотике Липатова имеют вид регулярно разложения по  $1/N$ , что после переразложения приводится к формуле (15).

те интерполяционные кривые, которые гладко проходили через известные точки, не имея существенных выбросов при нецелых  $N$ , а при больших  $N$  достаточно быстро выходили на асимптотику и имели немонотонность, не превышающую отличия последнего известного коэффициента от асимптотики.

### 3.1. Класс универсальности модели Изинга ( $n = 1$ )

Исходная информация дается разложениями [5, 7]

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -g + g^2 - 0.4224965707g^3 + \\ &+ 0.3510695978g^4 - 0.3765268283g^5 + \\ &+ 0.49554751g^6 - 0.749689g^7 + \dots + \\ &+ ca^N \Gamma(N+b)g^N + \dots, \\ \eta(g) &= (8/729)g^2 + 0.0009142223g^3 + \\ &+ 0.0017962229g^4 - 0.0006536980g^5 + \\ &+ 0.0013878101g^6 - 0.001697694g^7 + \dots + \\ &+ c'a^N \Gamma(N+b')g^N + \dots, \\ \eta_2(g) &= -(1/3)g + (2/27)g^2 - \\ &- 0.0443102531g^3 + 0.0395195688g^4 - \\ &- 0.0444003474g^5 + 0.0603634414g^6 - \\ &- 0.09324948g^7 + \dots + c''a^N \Gamma(N+b)g^N + \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} a &= 0.14777422, & b &= b' + 1 = 4.5, \\ c &= 0.039962, & & \\ c' &= 0.0017972, & c'' &= 0.0062991 \end{aligned} \quad (18)$$

для асимптотики высоких порядков [4]. Ниже обсудим некоторые технические детали процедуры суммирования.

**Функция  $\beta(g)$ .** Для функции  $\beta(g)$  все интерполяции с  $L_0 = 1$  оказались неудовлетворительными: интерполяционные кривые, имеющие быстрый выход на асимптотику, имели резкий выброс в интервале  $1 < N < 2$ , указывая на наличие в нем сингулярности. Оценка асимптотики сильной связи дает  $\alpha \approx 1$ , подтверждая наличие сингулярности при  $N \approx 1$  и указывая, что правильным является выбор  $L_0 = 2$ . В этом случае интерполяционные кривые с  $\tilde{N} < -1.0$  имели существенную немонотонность при больших  $N$ , а кривые с  $\tilde{N} > 1.2$  — выброс в интервале  $2 < N < 3$  (рис. 2); тем самым «естественные» интерполяции соответствуют интервалу  $-1.0 < \tilde{N} < 1.2$ . Результаты суммирования показаны на вставке к рис. 2; из них ясно, что

$$g^* = 1.416-1.421, \quad \omega = 0.777-0.787. \quad (19)$$

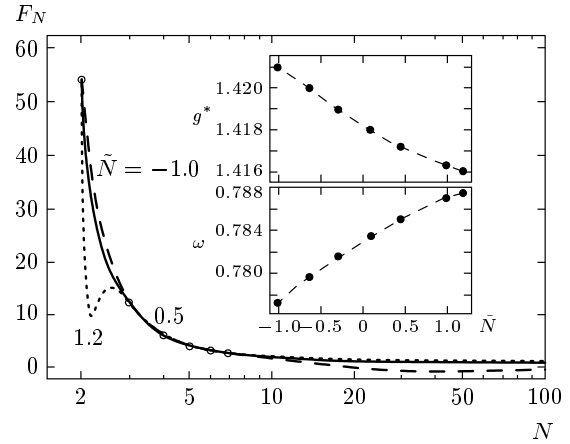


Рис. 2. Интерполяционные кривые для функции  $\beta(g)$  при  $L_0 = 2$ . На вставке — результаты для  $g^*$  и  $\omega$

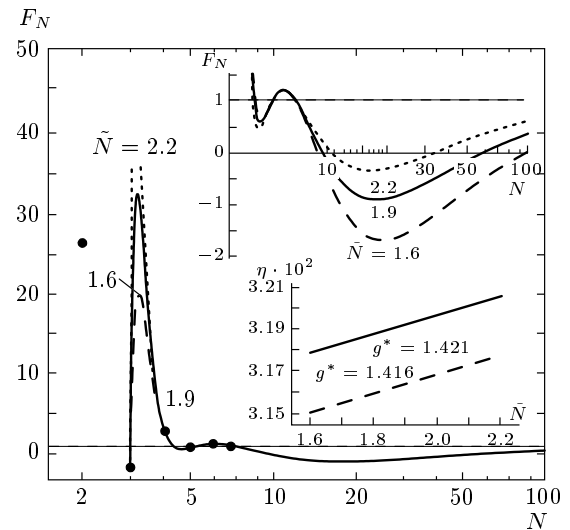


Рис. 3. Интерполяционные кривые для функций  $\eta(g)$  при  $L_0 = 3$ . На вставках — результаты суммирования при  $g = g^*$

Значение  $g^*$  согласуется с результатами  $g^* = 1.4160 \pm 0.0015$  [5],  $g^* = 1.416 \pm 0.005$  [6] и указывает на сомнительность более позднего пересмотра, проведенного в работе [7] ( $g^* = 1.411 \pm 0.004$ ).

**Функция  $\eta(g)$ .** Согласно (17), разложение для  $\eta(g)$  начинается с  $g^2$ . Удовлетворительных интерполяций с  $L_0 = 2$  найти не удалось: кривые с быстрым выходом на асимптотику имели выброс в интервале  $2 < N < 3$ , указывая, что значение показателя  $\alpha$  лежит в том же интервале. Оценка асимптотики сильной связи дает  $\alpha \approx 2$  и свидетельствует о необ-

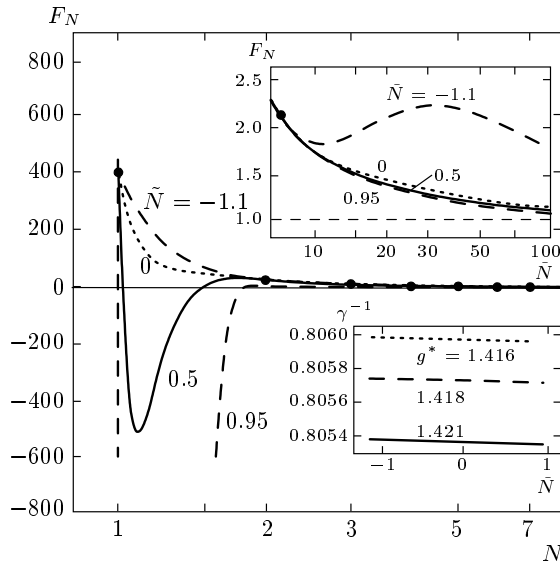


Рис. 4. То же, что на рис. 3 для функции  $\gamma^{-1}(g)$  при  $L_0 = 1$

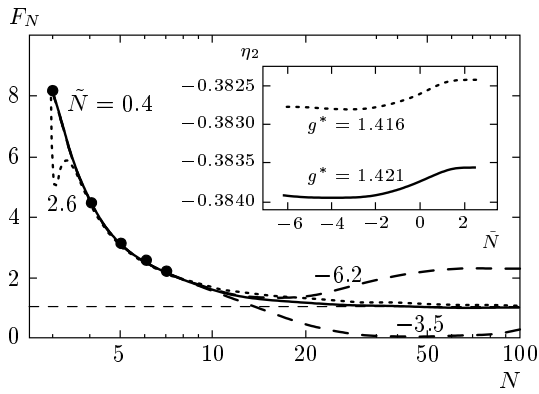


Рис. 5. То же, что на рис. 3 для функции  $\eta_2(g)$  при  $L_0 = 3$

ходимости выбора  $L_0 = 3$ . В этом случае удовлетворительные интерполяционные кривые получаются лишь в узком интервале  $1.6 < \tilde{N} < 2.2$  (рис. 3); их можно было бы считать дефектными из-за наличия выброса при  $3 < N < 4$ , однако в двумерном случае кривые именно такого вида обеспечивают точное значение  $\eta$  [13]. На наш взгляд, такие интерполяции являются вполне допустимыми, так как осцилляции коэффициентной функции имеют амплитуду того же масштаба, что и осцилляции известных коэффициентов. Результаты суммирования представлены на вставке к рис. 3.

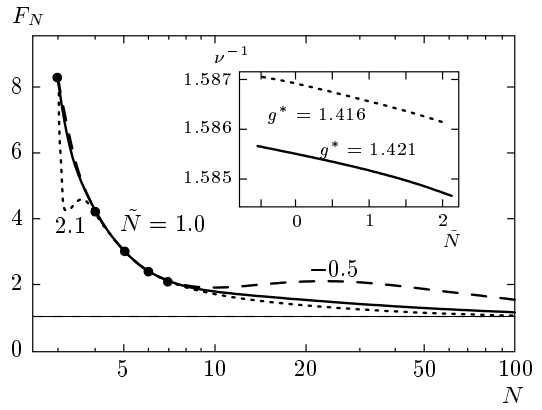


Рис. 6. То же, что на рис. 3 для функции  $\nu^{-1}(g)$  при  $L_0 = 3$

**Функции  $\eta_2(g)$ ,  $\nu^{-1}(g)$  и  $\gamma^{-1}(g)$ .** Грубые оценки асимптотики сильной связи для функций  $\nu^{-1}(g)$  и  $\eta_2(g)$  дают  $\alpha \approx 2$ , но в целом оказываются несогласованными, нарушая соотношения между функциями. Как показал анализ двумерного случая [13], это связано со специфическими свойствами функции  $\eta(g)$ : она мала в области  $g \lesssim 10$  ввиду малости коэффициентов разложения, но довольно быстро растет при больших  $g$ . В результате асимптотическое поведение функций  $\nu^{-1}(g)$  и  $\eta_2(g)$  содержит линейную комбинацию вкладов  $g$  и  $g^2$ , которую трудно анализировать численно. Поэтому суммирование рядов для  $\eta_2(g)$  и  $\nu^{-1}(g)$  проводилось<sup>4)</sup> при  $L_0 = 3$ , чтобы учесть возможную сингулярность при  $N \approx 2$ , тогда как ряд для  $\gamma^{-1}(g)$  суммируется при  $L_0 = 1$ , но без ограничения выбросов при нецелых  $N$  (ввиду соотношения  $\gamma^{-1}(g) = 1 + \eta_2(g) / [2 - \eta(g)]$  можно ожидать, что ее коэффициентная функция регулярна при  $N \geq 1$ , но содержит размытую сингулярность при  $N \approx 1$ ). На рис. 4–6 показаны допустимые интерполяционные кривые и результаты суммирования. Последние сведены в табл. 1 и сопоставляются с результатами, полученными в рамках методов Падэ–Бореля [5], стандартного конформ-бореля [6, 7] и вариационной теории возмущений [14, 15].

Данные для  $\nu$ , полученные в результате суммирования различных рядов (с использованием соотношений  $\gamma = \nu(2 - \eta)$ ,  $\nu^{-1} = 2 + \eta_2 - \eta$ ,  $\nu = (1 - \gamma) / \eta_2$ ), представлены в табл. 2. Последняя оценка оказывается довольно неточной и в дальнейшем не учитывается, тогда как первые три оценки очень близки: различие их центральных значений характеризует

<sup>4)</sup> Суммирование при  $L_0 = 2$  дает практически те же результаты, но с меньшей неопределенностью.

**Таблица 1.** Критические индексы для трехмерной модели Изинга ( $n = 1$ ), полученные из теоретико-полевой ренормгруппы

	[5]	[6]	[7]	[14]	[15]	Настоящая работа
$\gamma$	1.241(4)	1.2405(15)	1.2396(13)	1.241	1.2403(8)	1.2411(6)
$\nu$	0.630(2)	0.6300(15)	0.6304(13)	0.6305	0.6303(8)	0.6306(5)
$\eta$	0.031(11)	0.032(3)	0.0335(25)	0.0347(10)	0.0335(6)	0.0318(3)
$\eta_2$	-0.382(5)	-0.3825(30)	—	—	—	-0.3832(8)
$\omega$	0.788(3)	0.790(30)	0.799(11)	0.805	0.792(3)	0.782(5)
$g^*$	1.4160(15)	1.416(5)	1.411(4)	—	—	1.4185(25)

**Таблица 2.** Различные оценки для индекса  $\nu$

Ряд	Интервал изменения $\nu$	Среднее значение
$\nu^{-1}(g)$	0.6301–0.6311	0.6306
$\gamma^{-1}(g), \eta(g)$	0.6302–0.6310	0.6306
$\eta_2(g), \eta(g)$	0.6305–0.6313	0.6309
$\gamma^{-1}(g), \eta_2(g)$	0.6266–0.6320	0.6293

масштаб неконтролируемой систематической ошибки

$$\delta_{\text{sys}} \approx 0.0003, \quad (20)$$

связанной с тем, что «естественные» интерполяции для различных взаимозависимых функций не вполне согласованы. В двумерном случае [13] этот эффект является главным источником ошибки: аналогичная оценка дает  $\delta_{\text{sys}} \approx 0.05$ , что превышает естественную погрешность суммирования для большинства функций. В рассматриваемом случае величина  $\delta_{\text{sys}}$  довольно мала.

### 3.2. Класс универсальности XY-модели ( $n = 2$ )

Подробное обсуждение этого случая дается в работе [16]. Для полноты картины мы приводим здесь только окончательные результаты (табл. 3).

### 3.3. Класс универсальности модели Гейзенберга ( $n = 3$ )

Исходная информация дается разложениями [5, 7]

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -g + g^2 - 0.3832262015g^3 + \\ &+ 0.2829466813g^4 - 0.27033330g^5 + 0.3125559g^6 - \\ &- 0.414861g^7 + \dots + ca^N \Gamma(N + b)g^N + \dots, \\ \eta(g) &= (40/3267)g^2 + 0.0010200000g^3 + \\ &+ 0.0017919257g^4 - 0.0005040977g^5 + \\ &+ 0.0010883237g^6 - 0.001111499g^7 + \dots + \\ &+ c'a^N \Gamma(N + b')g^N + \dots, \\ \eta_2(g) &= -(5/11)g + (10/121)g^2 - \\ &- 0.0525519564g^3 + 0.0399640005g^4 - \\ &- 0.0413219917g^5 + 0.0490929344g^6 - \\ &- 0.06708630g^7 + \dots + c''a^N \Gamma(N + b)g^N + \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

с параметрами [4]

$$\begin{aligned} a &= 0.12090618, \quad b = b' + 1 = 5.5, \\ c &= 0.0059609, \\ c' &= 0.0003656, \quad c'' = 0.0012813. \end{aligned} \quad (22)$$

Ситуация качественно аналогична случаю  $n = 1$ . Используются те же значения параметра  $L_0$ , т. е.  $L_0 = 1$  для  $\gamma^{-1}(g)$ ,  $L_0 = 2$  для  $\beta(g)$  и  $L_0 = 3$  для остальных функций. Допустимые интерполяции соответствуют интервалам  $-1.0 < \tilde{N} < 1.6$  для  $\beta(g)$ ,  $1.6 < \tilde{N} < 2.3$  для  $\eta(g)$ ,  $0.4 < \tilde{N} < 2.0$  для  $\nu^{-1}(g)$ ,  $-0.6 < \tilde{N} < 2.2$  для  $\eta_2(g)$  и  $0.5 < \tilde{N} < 0.95$  для  $\gamma^{-1}(g)$ . Форма интерполяционных кривых визуально почти не отличима от кривых рис. 2–6. Результаты представлены в табл. 4.

### 3.4. Разбавленные полимеры ( $n = 0$ )

Исходная информация дается разложениями [5, 7]



Таблица 3. Критические индексы для XY-модели ( $n = 2$ )

	[5]	[6]	[7]	[14]	[15]	Настоящая работа
$\gamma$	1.316(9)	1.3160(25)	1.3169(20)	1.318	1.3164(8)	1.3172(8)
$\nu$	0.669(3)	0.6695(20)	0.6703(15)	0.6710	0.6704(7)	0.6700(6)
$\eta$	0.032(15)	0.033(4)	0.0354(25)	0.0356(10)	0.0349(8)	0.0334(2)
$\eta_2$	-0.474(8)	-0.4740(25)	—	—	—	-0.4746(9)
$\omega$	0.780(10)	0.780(25)	0.789(11)	0.800	0.784(3)	0.778(4)
$g^*$	1.406(5)	1.406(4)	1.403(3)	—	—	1.408(2)

Таблица 4. Критические индексы для модели Гейзенберга ( $n = 3$ )

	[5]	[6]	[7]	[14]	[15]	Настоящая работа
$\gamma$	1.390(10)	1.386(4)	1.3895(50)	1.390	1.3882(10)	1.3876(9)
$\nu$	0.705(5)	0.705(3)	0.7073(35)	0.7075	0.7062(7)	0.7060(7)
$\eta$	0.031(22)	0.033(4)	0.0355(25)	0.0350(10)	0.0350(8)	0.0333(3)
$\eta_2$	-0.550(12)	-0.5490(35)	—	—	—	-0.5507(12)
$\omega$	0.780(20)	0.780(20)	0.782(13)	0.797	0.783(3)	0.778(4)
$g^*$	1.392(9)	1.391(4)	1.390(4)	—	—	1.393(2)

$$\begin{aligned}
 \beta(g) &= -g + g^2 - 0.4398148149g^3 + \\
 &+ 0.3899226895g^4 - 0.4473160967g^5 + \\
 &+ 0.63385550g^6 - 1.034928g^7 + \dots + \\
 &+ ca^N \Gamma(N + b)g^N + \dots, \\
 \eta(g) &= (1/108)g^2 + 0.0007713750g^3 + \\
 &+ 0.0015898706g^4 - 0.0006606149g^5 + \\
 &+ 0.0014103421g^6 - 0.001901867g^7 + \dots + \\
 &+ c'a^N \Gamma(N + b')g^N + \dots, \\
 \eta_2(g) &= -(1/4)g + (1/16)g^2 - 0.0357672729g^3 + \\
 &+ 0.0343748465g^4 - 0.0408958349g^5 + \\
 &+ 0.0597050472g^6 - 0.09928487g^7 + \dots + \\
 &+ c''a^N \Gamma(N + b)g^N + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

с параметрами [4]

$$\begin{aligned}
 a &= 0.16624600, \quad b = b' + 1 = 4, \\
 c &= 0.085489, \\
 c' &= 0.0028836, \quad c'' = 0.010107.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Использовались те же значения  $L_0$ , что и в предыдущих случаях. Допустимые интерполяции соответствуют интервалам  $-0.9 < \tilde{N} < 1.1$  для  $\beta(g)$ ,  $1.5 < \tilde{N} < 2.2$  для  $\eta(g)$ ,  $-0.7 < \tilde{N} < 2.2$  для  $\nu^{-1}(g)$ ,  $-1.5 < \tilde{N} < 2.5$  для  $\eta_2(g)$  и  $-0.7 < \tilde{N} < 0.95$  для  $\gamma^{-1}(g)$ . Результаты представлены в табл. 5.

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как можно видеть из табл. 1, 3–5, различные оценки в рамках теоретико-полевого подхода хорошо согласуются между собой. Удивительно хорошее соответствие имеется между результатами настоящей работы и оценками Ле Гийо и Зинн-Жюстена [6]: различие центральных значений, как правило меньше 0.0010, несмотря на довольно консервативную оценку точности в работе [6]. Такое совпадение не является случайным: авторы работы [6] использовали интерполяцию для предсказания одного-двух неизвестных коэффициентов разложения, позволявших дать своего рода экспертную оценку, однако не могли уменьшить неопределенность результатов из-за их сильной зависимости от вариации процедуры суммирования. Более поздний пересмотр, проведенный в работе [7], выглядит несколько искусственным и имеет тенденцию выводить результаты за пределы их естественной неопределенности. В частности, значения  $g^*$  всегда сдвигаются в сторону, противоположную нашей (табл. 1, 3–5)<sup>5)</sup>. Хорошее согласие имеется также с вариационной теорией возмущений [14]. Положительным фактом является и то, что

<sup>5)</sup> Подчеркнем, что в работах [6, 7] и в настоящей работе для вычисления  $\beta(g)$  используется одна и та же информация.

Таблица 5. Критические индексы для случая  $n = 0$

	[5]	[6]	[7]	[14]	[15]	Настоящая работа
$\gamma$	1.161(3)	1.1615(20)	1.1596(20)	1.161	1.1604(8)	1.1615(4)
$\nu$	0.588(1)	0.5880(15)	0.5882(11)	0.5883	0.5881(8)	0.5886(3)
$\eta$	0.026(14)	0.027(4)	0.0284(25)	0.0311(10)	0.0285(6)	0.0272(3)
$\eta_2$	-0.274(10)	-0.2745(35)	—	—	—	-0.2746(7)
$\omega$	0.794(6)	0.800(40)	0.812(16)	0.810	0.803(3)	0.790(6)
$g^*$	1.421(4)	1.421(8)	1.413(6)	—	—	1.423(3)

учет информации о высоких порядках и более accuratная оценка точности [15] приближает результаты для  $\eta$  и  $\omega$  к нашим значениям. Небольшое расхождение сохраняется для индекса  $\eta$ , но оно на том же уровне, что и нарушение соотношения  $\gamma = \nu(2 - \eta)$  для центральных значений [15].

Обсудим теперь соответствие наших результатов информации о критических индексах, полученной из физических экспериментов, численного моделирования методами Монте-Карло (МС) и высокотемпературных рядов (НТ) [17].

**Случай  $n = 3$ .** Совокупный разброс МС- и НТ-результатов довольно велик (рис. 7), и на этом уровне они согласуются с табл. 5. Имеется тенденция к небольшому расхождению наших значений с наиболее поздними из МС результатов [18], но они в той же мере отличаются от наиболее вероятных значений, следующих из физического эксперимента. Последние группируются вокруг значения 1.386 для  $\gamma$  и 0.365 для  $\beta$  (рис. 8), что хорошо согласуется с нашими результатами  $\gamma = 1.3876(9)$  и  $\beta = 0.3648(4)$ , следующими из табл. 5, и существенно хуже со значениями  $\gamma = 1.3960(10)$ ,  $\beta = 0.3689(3)$ , приведенными в работе [18].

**Случай  $n = 2$ .** Ситуация аналогична предыдущему случаю. Совокупный разброс МС- и НТ-результатов довольно велик (см. рис. 1 в работе [16]), но последние результаты вступают в противоречие с табл. 4 ( $\gamma = 1.3178(2)$ ,  $\nu = 0.6717(1)$ ,  $\eta = 0.0381(2)$  [19]). Одновременно они противоречат экспериментам в жидком гелии, т. е. значению

$$\nu = 0.6705 \pm 0.0006, \tag{25}$$

полученному из измерений плотности сверхтекучей компоненты по скорости второго звука [20], и результатам

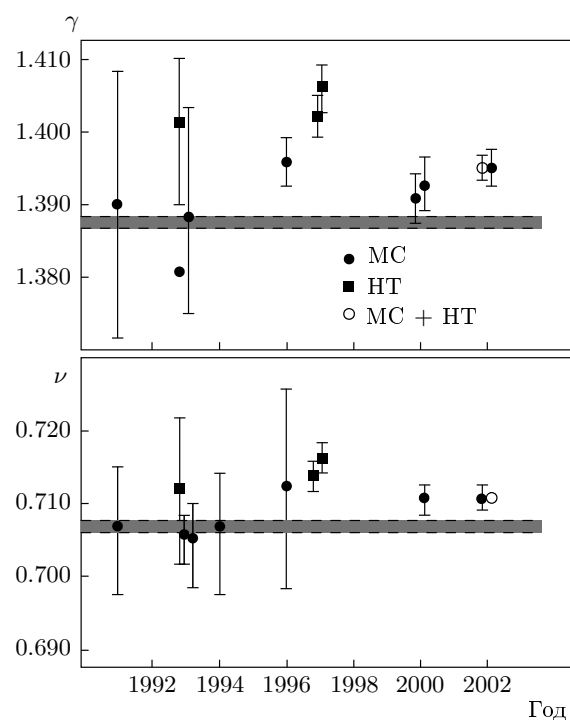


Рис. 7. Сравнение НТ- и МС-результатов для трехмерной модели Гейзенберга ( $n = 3$ ), взятых из табл. 23 обзора [17] (точки), с результатами настоящей работы (горизонтальная полоса)

$$\begin{aligned} \alpha &= -0.01285 \pm 0.00038, \quad \nu = 0.67095(13) \text{ [21]}, \\ \alpha &= -0.01056 \pm 0.00038, \quad \nu = 0.6702(1) \text{ [22]}, \\ \alpha &= -0.0127 \pm 0.0003, \quad \nu = 0.6709(1) \text{ [23]}, \end{aligned} \tag{26}$$

полученным из измерений теплоемкости гелия, проведенных в космосе (использовано соотношение  $\alpha = 2 - d\nu$ ).

**Случай  $n = 1$ .** В этом случае НТ- и МС-результаты многочисленны (рис. 9). Для индекса  $\nu$  имеется полный консенсус: наша оценка согласуется как с другими теоретико-полевыми результатами

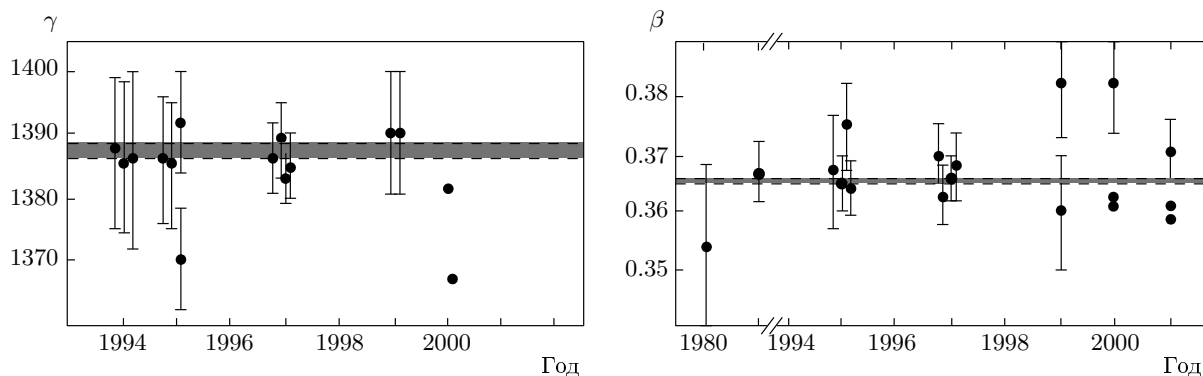


Рис. 8. Сравнение экспериментальных данных для трехмерной модели Гейзенберга ( $n = 3$ ) из табл. 24, 25 обзора [17] (точки) с результатами настоящей работы (горизонтальная полоса)

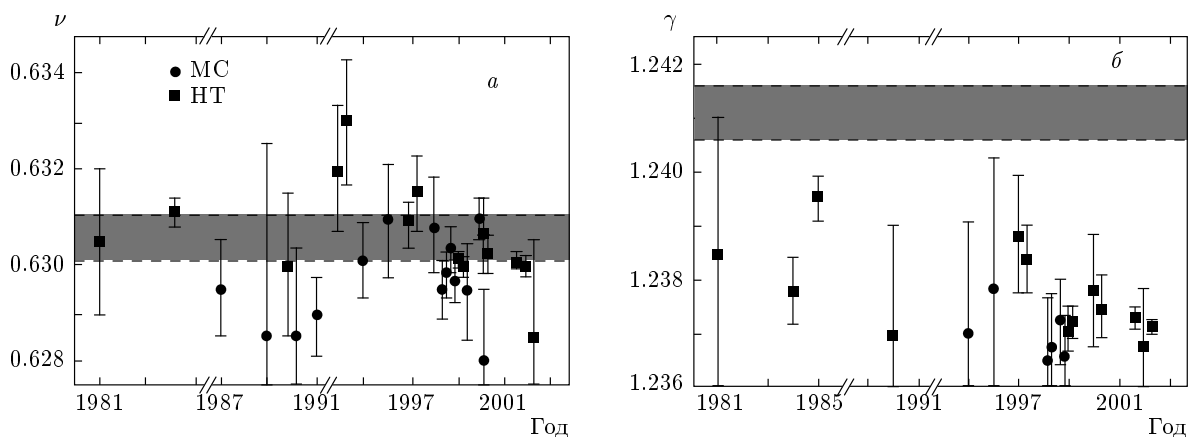


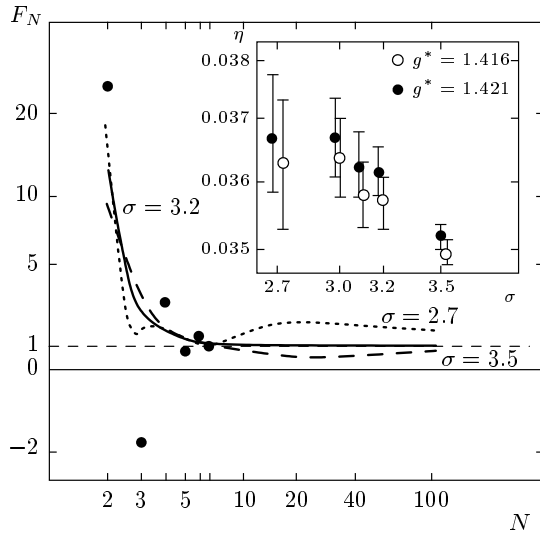
Рис. 9. Сравнение HT- и MC-данных для трехмерной модели Изинга ( $n = 1$ ) из табл. 3, 5 обзора [17] (точки) с результатами настоящей работы (горизонтальная полоса)

(табл. 3), так и практически со всеми HT- и MC-данными (рис. 9a). Однако наш результат для  $\gamma$  существенно отличается от значения 1.237–1.238, к которому тяготеют HT- и MC-данные (рис. 9б).

**Случай  $n = 0$ .** В этом случае довольно точные результаты для индекса  $\nu$  могут быть получены прямым моделированием самоизбегающих случайных блужданий на решетке. Простота алгоритма позволяет набрать хорошую статистику. Наиболее поздние результаты ( $\nu = 0.5876(2)$  [24],  $\nu = 0.5874(2)$  [25],  $\nu = 0.58758(7)$  [26]) немного отклоняются от нашего значения, приведенного в табл. 5. Противоречие не очень существенно и может быть устранено расширением множества допустимых интерполяций, но это требует использования несколько «неестественных» интерполяционных кривых. Разброс результатов для индекса  $\gamma$  [17] существенно больше и они не могут конкурировать с приведенными в табл. 5.

### 5. СУЩЕСТВУЮТ ЛИ ПОПРАВКИ К СТАНДАРТНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ?

Проведенное исследование проясняет математический смысл стандартных значений (как принято называть центральные значения работы [6]) — они соответствуют наиболее гладким интерполяционным кривым для коэффициентных функций (рис. 2–6). Хорошее согласие с другими теоретико-полевыми оценками (см. табл. 1, 3–5) показывает, что предположение о предельной гладкости коэффициентных функций неявно делается и в других методах (см. разд. 2). Это предположение является вполне естественным: известные коэффициенты разложения довольно уверенно приближаются к асимптотике (см. рис. 2, 3) и можно ожидать, что эта тенденция продолжится и для последующих коэффициентов. Тем не менее никаких логических оснований для такого предположения нет: промежуточные ко-



**Рис. 10.** Поведение регулярной части  $F_N^{reg}$  (логарифмический масштаб для  $F_N + 5$ ), введенной согласно соотношениям (27), для функции  $\eta(g)$ . На вставке — результаты суммирования при  $g = g^*$

эффиценты разложения могут иметь произвольное и совершенно непредсказуемое поведение.

Основанием для того, чтобы задуматься над последней возможностью, является существенное отклонение нашего значения  $\gamma$  для  $n = 1$  от основного массива НТ- и МС-данных (рис. 9б). Фактически это противоречие существует для всех последних ренормгрупповых оценок (см. табл. 1). Наиболее подозрительным в этом плане является коэффициентная функция для  $\eta(g)$  (см. рис. 4), которая имеет осциллирующее поведение. Используемая нами гладкая интерполяция исходит из того, что такие осцилляции быстро затухают и не распространяются в область больших  $N$ . Но можно рассмотреть и возможность их убывания по сравнительно медленному закону. Положим, например,

$$F_N = F_N^{reg} + F_N^{sing}, \quad F_N^{sing} = B(-\sigma)^{-N}, \quad (27)$$

где  $F_N^{reg}$  описывается регулярным разложением (15), тогда как осциллирующий вклад  $F_N^{sing}$  имеет сингулярность при  $N = \infty$  и не может быть разложен в ряд по степеням  $1/N$ . Поскольку осциллирующая составляющая уже выделена, для  $F_N^{reg}$  следует ожидать предельно гладкого и монотонного поведения — оно реализуется в интервале  $\sigma = 2.7-3.5$  (рис. 10). Сингулярному вкладу соответствует знакопостоянный ряд

$$W^{sing}(g) = \sum_{N=N_0}^{\infty} W_N^{as} B(-\sigma)^{-N} (-g)^N = \sum_{N=N_0}^{\infty} cBN^{b-1/2} \Gamma\left(N + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{ag}{\sigma}\right)^N, \quad (28)$$

который не является суммируемым по Борелю: его борелевский образ  $B^{sing}(z)$  имеет особенность в точке  $z = \sigma/a$ , неоднозначность обхода которой порождает неопределенность порядка  $\exp(-\sigma/ag)$ . Последняя оказывается довольно малой ввиду того, что  $\sigma/ag^* \approx 15$ . С такой же точностью сумма ряда (28) может быть найдена путем суммирования до минимального члена, что и будет использовано ниже. Результаты суммирования показаны на вставке к рис. 10 и дают  $\eta \approx 0.036$ , что и требуется для согласования значений  $\nu = 0.630-0.631$  и  $\gamma = 1.237-1.238$  в силу соотношения  $\gamma = \nu(2 - \eta)$ .

Однако в теории  $\varphi^4$  все особенности борелевских образов лежат на отрицательной полуоси [10], а ряды теории возмущений суммируемы по Борелю [27]. Поэтому закон убывания осцилляций в выражении (27) является слишком медленным и проведенную оценку следует считать чисто иллюстративной. Тем не менее она показывает, что изменение интерпретации осциллирующего вклада может давать реальные поправки к стандартным значениям. В силу известных соотношений осциллирующий вклад неизбежно существует и для других ренормгрупповых функций, хотя и является относительно малым.

Ввиду сказанного, становится весьма актуальным проведение исследований общего характера, направленных на установление реального закона убывания осцилляций в коэффициентных функциях. Без этого невозможно ни проанализировать уже существующие систематические погрешности стандартных значений, ни ставить задачу о дальнейшем повышении точности предсказаний критических индексов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-17541).

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. VI, ed. by C. Domb and M. S. Green, Acad. Press, New York (1976).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1976).

3. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
4. E. Brezin and G. Parisi, J. Stat. Phys. **19**, 269 (1978).
5. G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, and D. I. Meiron, Phys. Rev. Lett. **36**, 1351 (1976); Phys. Rev. B **17**, 1365 (1978).
6. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. Lett. **39**, 95 (1977); Phys. Rev. B **21**, 3976 (1980).
7. R. Guida and J. Zinn-Justin, J. Phys. A **31**, 8103 (1998).
8. И. М. Суслов, ЖЭТФ **120**, 5 (2001).
9. И. М. Суслов, ЖЭТФ **127**, 1350 (2005).
10. И. М. Суслов, ЖЭТФ **116**, 369 (1999).
11. A. I. Mudrov and K. B. Varnashev, Phys. Rev. E **58**, 1 (1998).
12. H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of  $\phi^4$ -Theories*, World Sci., Singapore (2001).
13. А. А. Погорелов, И. М. Суслов, ЖЭТФ **132**, 406 (2007).
14. H. Kleinert, Phys. Rev. D **60**, 085001 (1999).
15. F. Jasch and H. Kleinert, J. Math. Phys. **42**, 52 (2001).
16. А. А. Погорелов, И. М. Суслов, Письма в ЖЭТФ **86**, 41 (2007).
17. A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rep. **368**, 549 (2002).
18. M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto et al., Phys. Rev. B **65**, 144520 (2002).
19. M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, and E. Vicari, Phys. Rev. B **74**, 144506 (2006).
20. L. S. Goldner, N. Mulders, and G. Ahlers, J. Low Temp. Phys. **93**, 131 (1993).
21. J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen et al., Phys. Rev. Lett. **76**, 944 (1996).
22. J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 4894 (2000), see footnote 15.
23. J. A. Lipa, J. A. Nissen, D. A. Stricker et al., Phys. Rev. B **68**, 174518 (2003).
24. A. Pelissetto and E. Vicari, E-print archives, cond-mat/0703114.
25. T. Prellberg, J. Phys. A **34**, L599 (2001).
26. P. Belohorec and B. G. Nickel, *Accurate Universal and Two-Parameter Model Results from a Monte Carlo Renormalization Group Study*, Guelph University report (1997).
27. J. P. Eckmann, J. Magnen, and R. Seneor, Comm. Math. Soc. **39**, 251 (1975); J. S. Feldman and K. Osterwalder, Ann. Phys. **97**, 80 (1976); J. Magnen and R. Seneor, Comm. Math. Soc. **56**, 237 (1977); J. P. Eckmann and H. Epstein, Commun. Math. Soc. **68**, 245 (1979).