

# ДИНАМИКА КВАНТОВОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ ТРЕХУРОВНЕВОГО АТОМА В ДВУХМОДОВОМ ПОЛЕ

*Н. К. Соловаров\**

*Казанский физико-технический институт им. Е. К. Завойского,  
Казанский научный центр Российской академии наук  
420029, Казань, Россия*

Поступила в редакцию 9 октября 2007 г.

Представлен расчет коррелированной динамики атома и электромагнитного поля в модели трехуровневых атомов (резонансные модели  $\Lambda$ -,  $V$ - и  $L$ -атомов). Предложено наглядное диаграммное описание квантовой динамики таких моделей. На примере динамики  $\Lambda$ -атома показано, как использование общепринятого алгоритма редукции фон Неймана приводит к внутренней декогеренции (декогеренции распутывания) и отсутствию атомной когерентности при  $n$ -фотонном возбуждении. Расчетное отсутствие атомной когерентности не соответствует свойствам экспериментально наблюдавшегося запутанного состояния атома с фотоном. Показано, что предложенный ранее [18] алгоритм коррелированной редукции качественно описывает существование и динамику атомной когерентности при  $n$ -фотонном возбуждении, если в процедуре коррелированного распутывания составной квантовой системы вводить затравочную квантовую когерентность в любой из подсистем (атом, моды поля).

PACS: 03.65.Ca, 03.65.Ta, 03.65.Ud

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Модель трехуровневого атома, взаимодействующего с двухмодовым электромагнитным полем ( $\Lambda$ -,  $V$ -,  $L$ -атом [1] или среда [2–5]), используется во многих задачах квантовой оптики и квантовой информатики. Принципиально квантовым информационным ресурсом в модели служит запутанность атома и мод поля в результате их взаимодействия. Запутанность проявляется в квантовой коррелированности энергий атома и мод поля и коррелированности фаз моментов перехода атома и фаз мод поля. Оператор фазы определен для квантового гармонического осциллятора (одномодового квантованного поля) [6]. Корреляция фаз поля и моментов перехода атома легко прослеживается в стандартном решении уравнения Шредингера для двухуровневой модели Джейнса–Каммингса [7, 8]. В полуклассическом приближении (с классическим заданным резонансным полем) такая корреляция наглядно представляется для модели двухуровневого атома в форме динамики энергетического спина на сфере Бло-

ха [7, 9]. Квантовая природа поля добавляет к полуклассической картине динамики атома свойства, обусловленные спонтанными переходами, дискретностью энергии поля и взаимообменом энергий между атомом и полем. В модели Джейнса–Каммингса квантовая природа поля проявилась в существовании квантовых осцилляций Раби [7, 10], а квантовая когерентность поля — в явлении коллапса и возрождения (revival) [11, 12]. В моделях  $\Lambda$ -,  $V$ - и  $L$ -атомов с двумя резонансными модами в динамику атома добавляются двухквантовые переходы. Исторически, по-видимому, впервые коррелированность фаз моментов перехода атома и мод поля в двухквантовой (многоквантовой) динамике атомов обсуждалась (в полуклассическом приближении) и экспериментально наблюдалась в ядерном спиновом эхо [13, 14]. В оптическом диапазоне предлагаются и реализуются предельно квантовые экспериментальные ситуации с использованием одиночных атомов и одиночных фотонов [2–5, 10, 12, 15–17]. Именно в таких случаях максимально проявляются квантовые свойства поля.

В настоящей работе представлен теоретический анализ динамики квантовой когерентности атома и

\*E-mail: solovar@kfti.knc.ru

резонансных мод поля в модели трехуровневых атомов. Предложено диаграммное описание квантовой динамики, позволяющее дать наглядное представление переноса квантовой когерентности между резонансными модами поля и атомом.

На примере динамики  $\Lambda$ -атома показано, что спонтанный вклад в двухквантовую динамику приводит к эффектам, которые могут быть существенными во многих экспериментальных ситуациях.

Продемонстрировано физическое содержание алгоритма редукции фон Неймана при выделении одной из квантовых подсистем (атома или моды поля) из запутанной взаимодействием составной системы «атом + резонансные моды поля», а также показана невозможность его использования в описании динамики квантовой когерентности подсистем. На такую невозможность указано в статье [15], где впервые наблюдалось запутанное состояние одиночного атома с фотоном. Обосновывается необходимость введения в общем случае дополнительных (к аксиоме фон Неймана) предположений для описания динамики подсистем составных квантовых систем.

Структура работы следующая. В разд. 2 проведен расчет оператора эволюции для квантовых моделей трехуровневых атомов, взаимодействующих с двухмодовым резонансным полем. В разд. 3 на примере  $\Lambda$ -атома показан аналитический расчет динамики запутанной замкнутой системы «атом + три резонансные квантованные моды поля» и предложено его наглядное диаграммное представление. В разд. 4 анализируется динамика населенности уровней  $\Lambda$ -атома, атомной квантовой когерентности и коррелированной с атомом динамики мод поля. Показывается физическое содержание декогеренции распутывания и демонстрируется невозможность использования алгоритма фон Неймана для описания динамики атомной когерентности. Показывается роль спонтанных переходов в динамике квантовой когерентности. В разд. 5 на примере динамики когерентности  $\Lambda$ -атома показано, что предложенный ранее [18] алгоритм коррелированного распутывания составной квантовой системы позволяет качественно согласовать расчетную динамику атомной когерентности со свойствами экспериментально наблюдаемого запутанного состояния атома с фотоном [15], если дополнительно вводить затравочную квантовую когерентность в состоянии мод поля. В Заключение суммируются результаты работы. Приложение содержит выражения экспоненциальных операторов, необходимые при расчете операторов эволюции моделей  $\Lambda$ -,  $V$ -,  $L$ -атомов.

## 2. ОПЕРАТОР УНИТАРНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ТРЕХУРОВНЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Модель резонансных  $\Lambda$ -,  $V$ - и  $L$ -атомов соответствует физическому предположению, что атом находится в трехмодовом идеальном резонаторе, причем частоты собственных мод резонатора совпадают с частотами переходов в спектре атома (часто используется термин «резонаторная квантовая электродинамика» [10]). Предполагается, что взаимодействие с полем, резонансным одному из трех возможных переходов, относительно слабо и его вкладом в динамику атома и мод поля можно пренебречь. Расчет квантовой динамики атома (или мод поля) разбивается на три последовательных этапа.

1. Вычисление оператора эволюции замкнутой составной модельной системы «атом + три моды электромагнитного поля, резонансные переходам в спектре атома + взаимодействие атома с двумя модами».

2. Вычисление оператора плотности составной замкнутой системы в произвольный момент времени при заданных начальных состояниях подсистем атома и мод поля.

3. Вычисление оператора плотности атома (или моды поля), являющегося подсистемой замкнутой квантовой системы, путем проведения неунитарной операции редукции, соответствующей принятой процедуре выделения подсистемы составной квантовой системы.

Расчет оператора эволюции для резонансных [1, 19, 20] и рамановских [2–5, 21]  $\Lambda$ -,  $V$ - и  $L$ -моделей в приложении к конкретным задачам делался неоднократно разными способами. Здесь изложен прямой алгоритм расчета, а в Приложении приведены выражения компонент операторов эволюции для трех резонансных моделей в компактной, удобной для использования форме.

Гамильтониан модели в приближении вращающейся волны для трех возможных резонансных переходов имеет вид [1, 19, 20]

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{AF}, \\ \hat{H}_A &= \varepsilon_1 \hat{P}_{11} + \varepsilon_2 \hat{P}_{22} + \varepsilon_3 \hat{P}_{33},\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_F &= \frac{\hbar\omega_{13}}{2} (\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) + \frac{\hbar\omega_{23}}{2} (\hat{b}^+\hat{b} + \hat{b}\hat{b}^+) + \\ &\quad + \frac{\hbar\omega_{12}}{2} (\hat{c}\hat{c}^+ + \hat{c}^+\hat{c}), \\ \hat{H}_{AF} &= \frac{i\hbar\Omega_{13}}{2} (\hat{P}_{31}\hat{a} - \hat{P}_{13}\hat{a}^+) + \\ &\quad + \frac{i\hbar\Omega_{23}}{2} (\hat{P}_{32}\hat{b} - \hat{P}_{23}\hat{b}^+) + \\ &\quad + \frac{i\hbar\Omega_{12}}{2} (\hat{P}_{21}\hat{c} - \hat{P}_{12}\hat{c}^+). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\hat{H}_A$ ,  $\hat{H}_F$ ,  $\hat{H}_{AF}$  — гамильтонианы соответственно атома, поля и их взаимодействия,  $\varepsilon_i$  — энергия  $i$ -го уровня атома,  $\omega_{ij} = \hbar^{-1}(\varepsilon_j - \varepsilon_i)$  — частота перехода между уровнями  $j \leftrightarrow i$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , нумерация соответствует возрастанию энергии,  $\hat{P}_{ij} = |i\rangle\langle j|$  — атомные операторы в представлении вторичного квантования, для которых справедливо равенство  $\hat{P}_{ij}\hat{P}_{lm} = \delta_{jl}\hat{P}_{im}$ ,  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^+$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}^+$ ,  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}^+$  — понижающие и повышающие фотонные операторы мод электромагнитного поля, резонансных переходам соответственно  $1 \leftrightarrow 3$ ,  $2 \leftrightarrow 3$ ,  $1 \leftrightarrow 2$ ,  $\Omega_{ij}$  — квантовая частота Раби на переходе  $i \leftrightarrow j$ . Гамильтониан определен в пространстве, являющимся прямым произведением пространств атома и пространств мод поля. Для записи гамильтониана взаимодействия каждой из двухмодовых моделей квантовую частоту Раби  $\Omega_{ij}$ , характеризующую эффективность взаимодействия атома с модой поля на переходе, где взаимодействие полагается слабым, считаем равной нулю. Например, для  $\Lambda$ -модели в формуле (1) полагаем  $\Omega_{12} = 0$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{AF}(\Lambda) &= \frac{i\hbar\Omega_{13}}{2} (\hat{P}_{31}\hat{a} - \hat{P}_{13}\hat{a}^+) + \\ &\quad + \frac{i\hbar\Omega_{23}}{2} (\hat{P}_{32}\hat{b} - \hat{P}_{23}\hat{b}^+). \end{aligned}$$

Схемы моделей с принятыми обозначениями представлены на рис. 1.

Для вычисления оператора эволюции

$$\begin{Bmatrix} \hat{U}(t) \\ \hat{U}^\dagger(t) \end{Bmatrix} = \exp\left(\mp \frac{it\hat{H}}{\hbar}\right)$$

с гамильтонианом (1) заметим, что гамильтониан представляет собой сумму двух коммутирующих слагаемых,  $[\hat{H}_A + \hat{H}_F, \hat{H}_{AF}] = 0$ . Поэтому оператор эволюции представляется в виде произведения соответствующих операторов эволюции слагаемых [22]:

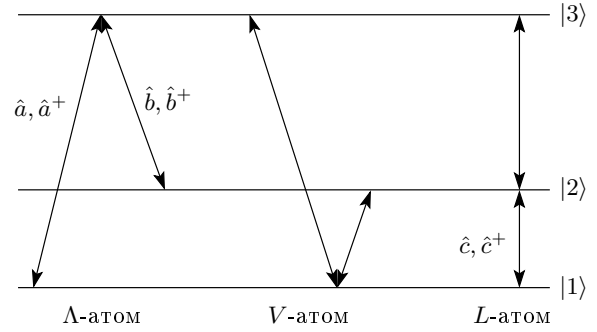


Рис. 1. Схема модельных трехуровневых систем

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{U}(t) \\ \hat{U}^\dagger(t) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \hat{U}_{A+F}(t)\hat{U}_{AF}(t) \\ \hat{U}_{A+F}^\dagger(t)\hat{U}_{AF}^\dagger(t) \end{Bmatrix} = \\ &= \exp\left(\mp \frac{it\hat{H}_{A+F}}{\hbar}\right) \exp\left(\mp \frac{it\hat{H}_{AF}}{\hbar}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогично, вследствие коммутации атомных операторов и операторов различных мод, принадлежащих разным подпространствам, первый сомножитель в правой части (2) представляет собой произведение экспоненциальных операторов подпространств, он легко вычисляется и имеет вид

$$\begin{aligned} \exp\left\{\mp \frac{it}{\hbar}\hat{H}_{A+F}\right\} &= \begin{Bmatrix} \hat{U}_{A+F} \\ \hat{U}_{A+F}^\dagger \end{Bmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^3 \hat{P}_{jj} \begin{Bmatrix} \hat{U}_F \\ \hat{U}_F^\dagger \end{Bmatrix} \exp\left\{\mp \frac{i\varepsilon_j t}{\hbar}\right\}, \\ \begin{Bmatrix} \hat{U}_F \\ \hat{U}_F^\dagger \end{Bmatrix} &= \exp\left\{\mp \frac{i\omega_{13}t}{2} (\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+)\right\} \otimes \\ &\otimes \exp\left\{\mp \frac{i\omega_{23}t}{2} (\hat{b}^+\hat{b} + \hat{b}\hat{b}^+)\right\} \otimes \\ &\otimes \exp\left\{\mp \frac{i\omega_{12}t}{2} (\hat{c}^+\hat{c} + \hat{c}\hat{c}^+)\right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

В формуле (3) знаки прямых произведений подпространств поставлены для наглядности. В дальнейшем будем их записывать только в случаях, когда нужно прояснить смысл выражений.

Вторые экспоненциальные сомножители в правой части (2), описывающие вклад в оператор эволюции от взаимодействия между атомом и резонансными модами, вычисляются методом математической индукции сборанием рядов операторов мод поля, являющихся сомножителями одинаковых атомных операторов. Они приведены в Приложении.

### 3. ДИНАМИКА ЗАМКНУТОЙ Л-СИСТЕМЫ

Динамика замкнутой модельной системы представляется решением уравнения Шредингера в форме временной эволюции оператора плотности

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}_A(0)\hat{\rho}_F(0)\hat{U}^\dagger(t),$$

где начальные состояния подсистем (операторы плотности  $\hat{\rho}_A(0)$ ,  $\hat{\rho}_F(0)$ ) атома и поля предполагаются независимыми и заданными [22–24].

Общие выражения труднообозримы. Для представления процессов, происходящих в системе, проиллюстрируем расчет на примере наиболее часто обсуждаемой в квантовой информатике [2–5] модели Л-атома.

Пусть моды  $a$ ,  $b$  находятся в начальный момент времени в состояниях с определенными числами фотонов ( $a, b = 0, 1, 2, \dots$ ), мода  $c$  — в вакуумном состоянии, атом — в основном состоянии, т. е.  $\hat{\rho}(\Lambda, 0) = \hat{P}_{11}\hat{\rho}_F(0)$  (где  $\hat{\rho}_F(0) = |a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b| \otimes |c=0\rangle\langle c=0|$ ). Оператор плотности замкнутой системы в произвольный момент времени находится с использованием выражений (2), (3) и (A.1):

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\Lambda, t) &= \\ &= \hat{U}_F \left\{ \sum_{i,j=1}^3 \exp(i\omega_{ij}t) \hat{P}_{ij} \hat{U}_{i1}(\Lambda, t) \hat{\rho}_F(0) \hat{U}_{1j}^\dagger(\Lambda, t) \right\} \hat{U}_F^\dagger \\ &= \hat{U}_F \left\{ \hat{P}_{33} S(\hat{\Lambda}) \hat{A} \hat{\rho}_F(0) \hat{A}^+ S(\hat{\Lambda}) + \hat{P}_{22} \hat{B}^+ \times \right. \\ &\quad \times C(\hat{\Lambda}) \hat{A} \hat{\rho}_F(0) \hat{A}^+ C(\hat{\Lambda}) \hat{B} + \\ &+ \hat{P}_{11} [\hat{A}^+ C(\hat{\Lambda}) \hat{A} + \hat{1}_F] \hat{\rho}_F(0) [\hat{A}^+ C(\hat{\Lambda}) \hat{A} + \hat{1}_F] - \\ &- \hat{P}_{31} \exp(-i\omega_{13}t) S(\hat{\Lambda}) \hat{A} \hat{\rho}_F(0) [\hat{A}^+ C(\hat{\Lambda}) \hat{A} + \hat{1}_F] - \\ &- \hat{P}_{13} \exp(+i\omega_{13}t) [\hat{A}^+ C(\hat{\Lambda}) \hat{A} + \hat{1}_F] \hat{\rho}_F(0) \hat{A}^+ S(\hat{\Lambda}) - \\ &- \hat{P}_{32} \exp(-i\omega_{23}t) S(\hat{\Lambda}) \hat{A} \hat{\rho}_F(0) [\hat{A}^+ C(\hat{\Lambda}) \hat{B}] - \\ &- \hat{P}_{23} \exp(+i\omega_{23}t) [\hat{B}^+ C(\hat{\Lambda}) \hat{A}] \hat{\rho}_F(0) \hat{A}^+ S(\hat{\Lambda}) + \\ &\quad + \hat{P}_{21} \exp(-i\omega_{12}t) [\hat{B}^+ C(\hat{\Lambda}) \hat{A}] \times \\ &\quad \times \hat{\rho}_F(0) [\hat{A}^+ C(\hat{\Lambda}) \hat{A} + \hat{1}_F] + \\ &\quad + \hat{P}_{12} \exp(+i\omega_{12}t) [\hat{A}^+ C(\hat{\Lambda}) \hat{A} + \hat{1}_F] \hat{\rho}_F(0) \times \\ &\quad \times [\hat{A}^+ C(\hat{\Lambda}) \hat{B}] \left. \right\} \hat{U}_F^\dagger. \end{aligned} \quad (4)$$

При вычислении (4) проведено умножение атомных операторов, входящих в выражения для  $\hat{U}_{AF}(\Lambda, t)$ ,  $\hat{\rho}(\Lambda, 0)$ ,  $\hat{U}_{AF}^\dagger(\Lambda, t)$ . Обозначения перенормированных (для сокращения записи) операторов поля  $\hat{A}$ ,  $\hat{A}^+$ ,

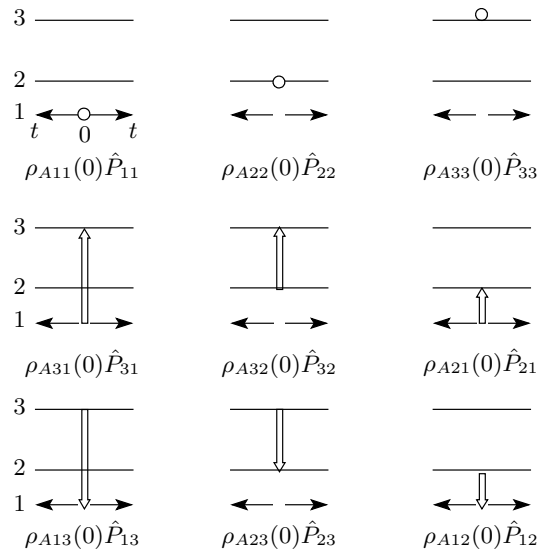


Рис. 2. Диаграммное представление начального оператора плотности атома. Противоположно направленными стрелками на нижнем уровне обозначена ось времени, выходящая из точки 0 (начало отсчета времени)

$\hat{B}$ ,  $\hat{B}^+$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{C}^+$  и полевых операторных функций  $C(\hat{M})$ ,  $S(\hat{M})$ , где  $\hat{M} = \hat{\Lambda}$ ,  $\hat{V}$ ,  $\hat{L}$ ,  $\hat{\Lambda} = \hat{A}\hat{A}^+ + \hat{B}\hat{B}^+$ ,  $\hat{V} = \hat{A}^+\hat{A} + \hat{C}^+\hat{C}$ ,  $\hat{L} = \hat{B}^+\hat{B} + \hat{C}\hat{C}^+$  указаны в Приложении,  $\hat{1}_F = \hat{1}_a \otimes \hat{1}_b \otimes \hat{1}_c$  — единичный оператор в полевым подпространстве.

Выражение (4) описывает процессы, происходящие в замкнутой системе. Запутанность атома с полем проявляется в том, что полевые операторные множители в слагаемых суммы (4) представляют собой линейно независимые операторные функции. Следовательно, выражение (4) нельзя представить в виде прямого произведения атомного и полевого операторов плотности (невозможно точное распутывание (disentangling) подсистем рассматриваемой замкнутой системы [25]).

Каждое слагаемое в правой части (4) описывает определенный физический процесс динамики атома и мод поля, смысл которого определен структурой полевых операторных множителей  $\hat{U}_{i1}(\Lambda, t)$ ,  $\hat{U}_{1j}^\dagger(\Lambda, t)$ , окаймляющих  $\hat{\rho}_F(\Lambda, 0)$ . Представим их в виде диаграмм, аналогичных ранее использованным нами для полуклассических расчетов характеристик сигналов эха в многоуровневых системах [26, 27]. Смысл элементов диаграмм и порядок их построения показан на рис. 2, 3. Ось времени представлена двумя противоположно направленными лучами, изображенными на основном уровне атома. Такое

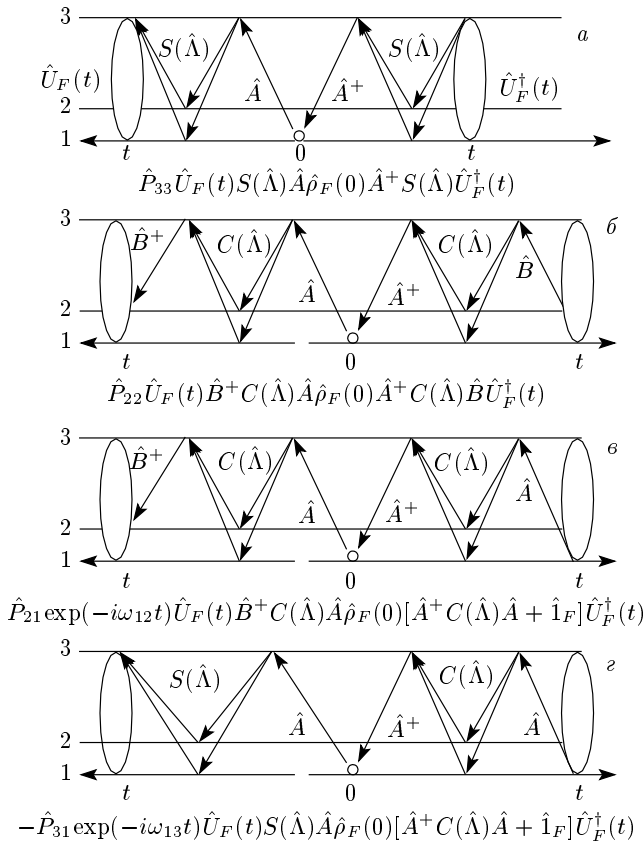


Рис. 3. Диаграммы квантовой динамики  $\Lambda$ -атома:  
 $\hat{\rho}(\Lambda, t) = \hat{U}(t) \hat{P}_{11} \hat{\rho}_F(0) \hat{U}^\dagger(t)$

представление оси времени обусловлено стремлением к близости графического построения соответствующим аналитическим выражениям. В точке начала отсчета времени расположены элементы диаграмм, изображающие начальное состояние атома. Слева расположены элементы диаграмм, соответствующие элементам оператора  $\hat{U}_{i1}(\Lambda, t)$ , а справа — оператора  $\hat{U}_{1j}^\dagger(\Lambda, t)$ . Направленная вниз наклонная стрелка соответствует процессу рождения фотона резонансной моды с одновременным переходом атома с уровня, на котором начинается стрелка, на уровень, где она заканчивается. Наклонные стрелки, направленные вверх, изображают процессы поглощения атомом соответствующих резонансных фотонов. Аргументами функций  $C(\hat{\Lambda})$ ,  $S(\hat{\Lambda})$  являются диагональные операторы числа фотонов мод поля (см. Приложение). Эти функции описывают процессы кратного излучения и поглощения фотонов атомом из обеих мод, в результате которых атом не изменяет свое состояние. Они изображены на диаграммах последовательностями двух двойных стрелок, начинающихся и за-

канчивающихся на одном уровне. Овалами на рис. 3 обозначены диагональные по операторам мод поля экспоненциальные операторы  $\hat{U}_F(t)$ ,  $\hat{U}_F^\dagger(t)$  (см. (3)).

Непрерывная последовательность стрелок, направленных влево от начала отсчета времени на диаграмме рис. 3, указывает последовательность процессов, происходящих в системе. В правой части диаграммы направленность последовательности стрелок противоположна направлению оси времени, что отражает «обратный» ход времени для элементов  $\hat{U}^\dagger(t)$ . Слагаемым суммы (4) соответствуют отдельные диаграммы, примеры которых представлены на рис. 3.

Первые три слагаемых в правой части (4) представляются симметричными относительно нуля времени диаграммами  $\hat{U}_{i1}(\Lambda, t) \hat{\rho}_{AF}(0) \hat{U}_{1i}^\dagger(\Lambda, t)$ , начинающимися и заканчивающимися на одном уровне атома. Например, левая часть диаграммы, изображающей второе слагаемое (рис. 3б), описывает амплитуду следующего последовательного процесса: атом поглощает фотон моды  $a$ , переходит с уровня 1 на уровень 3,кратно излучает и поглощает фотоны мод  $a$ ,  $b$ , в каждом элементарном акте возвращаясь на уровень 3, а затем излучает фотон моды  $b$ , переходя в итоге на уровень 2. Правая часть диаграммы описывает сопряженное (с обратными недиагональными полевыми операторами) выражение амплитуды того же процесса. Вся диаграмма содержит одинаковое число операторов рождения и уничтожения (наклонных стрелок вверх–вниз) для каждой моды, т. е. изображает диагональные атомный и полевой операторы. Такие диагональные слагаемые характеризуют динамику населенности уровней атома и, соответственно, чисел фотонов мод поля.

Последним шести слагаемым (4) соответствуют три пары сопряженных несимметричных диаграмм, недиагональных по атомным и полевым операторам. Такие диаграммы описывают динамику суперпозиционных состояний атома (атомной когерентности) и суперпозиционных состояний мод поля, соответствующих нахождению атома и моды в переходном состоянии, в процессе излучения или поглощения фотона атомом в гейзенберговской модели квантовых переходов [9]. В отличие от симметричных диаграмм здесь левые и правые части отражают амплитуды разных процессов. Так, например, восьмое слагаемое (4) описывает динамику атомной квантовой когерентности на переходе  $2 \leftarrow 1$ . Левая часть соответствующей диаграммы (рис. 3в) описывает тот же процесс, что и рассмотренный ранее на рис. 3б, характеризующий амплитуду перехода атома из состояния 1 в состояние 2. Но правая часть описывает

амплитуду сохранения атома в исходном состоянии 1 с участием поглощения и излучения атомом фотонов мод  $a, b$ .

#### 4. ДИНАМИКА $\Lambda$ -АТОМА И МОД ПОЛЯ В МОДЕЛИ ВЫДЕЛЕНИЯ ПОДСИСТЕМ ФОН НЕЙМАНА

Общепринятый алгоритм вычисления оператора плотности атома или одной из мод поля (приведенного или редуцированного оператора плотности «наблюдаемой» подсистемы), описывающих временную динамику подсистемы, состоит во взятии следа от оператора плотности замкнутой системы (4) по «ненаблюдаемым» подсистемам [22–24]:

$$\hat{\rho}_{AN}(\Lambda, t) = \text{Sp}_{a,b,c} \hat{\rho}(\Lambda, t) = \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \langle a | \langle b | \langle c | \hat{\rho}(\Lambda, t) | c \rangle | b \rangle | a \rangle, \quad (5)$$

$$\hat{\rho}_{aN}(\Lambda, t) = \text{Sp}_{a,b,c} \hat{\rho}(\Lambda, t) = \sum_{j=1}^3 \sum_{b,c=0}^{\infty} \langle j | \langle b | \langle c | \hat{\rho}(\Lambda, t) | c \rangle | b \rangle | j \rangle, \quad (6)$$

$$\hat{\rho}_{bN}(\Lambda, t) = \text{Sp}_{a,b,c} \hat{\rho}(\Lambda, t) = \sum_{j=1}^3 \sum_{a,c=0}^{\infty} \langle j | \langle a | \langle c | \hat{\rho}(\Lambda, t) | c \rangle | a \rangle | j \rangle. \quad (7)$$

Такая операция, отмеченная в (5)–(7) нижним индексом  $N$ , соответствует аксиоматической процедуре макроскопического (проеекционного) измерения фон Неймана [28, 29], и является специальным приближением при описании динамики подсистем составных квантовых систем, находящихся в запутанном состоянии [18, 30, 31]. Действительно, точное распутывание (4) невозможно, поэтому любой алгоритм вычисления  $\hat{\rho}_A(\Lambda, t)$ ,  $\hat{\rho}_a(\Lambda, t)$ ,  $\hat{\rho}_b(\Lambda, t)$  из  $\hat{\rho}(\Lambda, t)$  соответствует некоторому приближенному выделению подсистемы (атома или моды) из составной системы (распутыванию системы).

Проследим физический смысл и следствия сделанных приближений в общепринятом (неймановском) алгоритме, выделяя роль спонтанных переходов.

Сначала заметим, что взятие следа оператора некоторой наблюдаемой  $\hat{A}$  замкнутой квантовой системы в базисе ее собственных энергетических состояний с точностью до постоянного множителя  $N$ , равного размерности пространства (числу собственных

энергетических состояний), тождественно нахождению квантового среднего значения этой наблюдаемой для случая, когда квантовая система находится в состоянии с минимальной информацией:

$$\text{Sp} \hat{A} \equiv N \langle \hat{A} \rangle_{min} = N \text{Sp} \hat{\rho}_{min} \hat{A}, \quad (8)$$

где  $\hat{\rho}_{min} = (1/N)\hat{1}$  — оператор плотности квантовой системы, находящейся в состоянии с минимальной информацией о системе (тождественном состоянии с бесконечной температурой) [18, 23]. Состояние  $\hat{\rho}_{min}$  физически соответствует равновероятному (с вероятностью  $1/N$ ) нахождению квантовой системы в любом из собственных энергетических состояний и отсутствию квантовой когерентности (ненулевых недиагональных элементов матрицы плотности) в системе.

Оператор плотности  $\hat{\rho}(\Lambda, t)$  по определению работы [23] является оператором информации о замкнутой квантовой системе. Взятие следа по ненаблюдаемым подсистемам (5)–(7) математически тождественно частичному усреднению этого оператора для случая, когда ненаблюдаемые подсистемы находятся в состояниях с минимальной информацией (с точностью до нормировочного множителя). Так, для (5) имеем

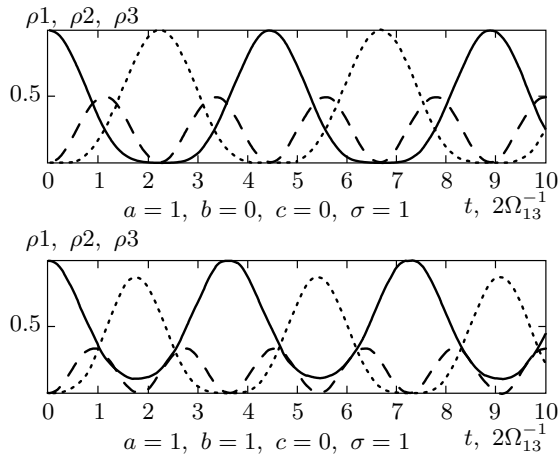
$$\hat{\rho}_{AN}(\Lambda, t) = \text{Sp}_{a,b,c} \hat{\rho}(\Lambda, t) = N_a N_b N_c \text{Sp}_{a,b,c} \hat{\rho}(\Lambda, t) \hat{\rho}'_{amin} \hat{\rho}'_{bmin} \hat{\rho}'_{cmin}, \quad (9)$$

где, например,  $\hat{\rho}'_{amin} = \hat{1}_A \otimes \hat{\rho}_{amin} \otimes \hat{1}_b \otimes \hat{1}_c$  — расширенный (на полное пространство системы) оператор плотности моды  $a$ , находящейся в состоянии с минимальной информацией (бесконечной температурой). Подчеркнем, что это приближение используется только при выделении подсистем (5)–(7) в соответствии с алгоритмом редукции фон Неймана, но не при расчете динамики замкнутой системы, описываемой оператором  $\hat{\rho}(\Lambda, t)$ .

Вследствие взятия следа в приведенном операторе плотности атома (5) ненулевыми остаются только диагональные операторы (первые три слагаемых в правой части (4)), описывающие динамику населенности уровней атома  $\rho_{jj}(a, b, t)$ :

$$\rho_{11}(a, b, t) = \left[ \frac{\Omega_{13}^2 a}{\Omega_{13}^2 a + \Omega_{23}^2 (b+1)} \times \left( \cos \left( \frac{t}{2} \sqrt{\Omega_{13}^2 a + \Omega_{23}^2 (b+1)} \right) - 1 \right) + 1 \right]^2, \quad (10)$$

$$\rho_{22}(a, b, t) = \frac{\Omega_{13}^2 \Omega_{23}^2 a (b+1)}{(\Omega_{13}^2 a + \Omega_{23}^2 (b+1))^2} \times \left( \cos \left( \frac{t}{2} \sqrt{\Omega_{13}^2 a + \Omega_{23}^2 (b+1)} \right) - 1 \right)^2, \quad (11)$$



**Рис. 4.** Расчетная динамика населенности уровней  $\Lambda$ -атома. Начальное состояние мод поля — определенные числа фотонов;  $\rho_i(t) = \rho_{ii}(t)$  — населенность уровня  $i$ ;  $\rho_1$  — сплошные линии,  $\rho_2$  — пунктирные,  $\rho_3$  — штриховые

$$\rho_{33}(a, b, t) = \frac{\Omega_{13}^2 a}{\Omega_{13}^2 a + \Omega_{23}^2 (b + 1)} \times \sin^2 \left( \frac{t}{2} \sqrt{\Omega_{13}^2 a + \Omega_{23}^2 (b + 1)} \right). \quad (12)$$

Обозначив  $\Omega_{23} = \sqrt{\sigma} \Omega_{13}$  (где параметр  $\sigma$  характеризует относительные величины квантовых частот Раби), получим

$$\begin{aligned} \rho_{11}(a, b, t) &= \left[ \frac{a}{a + \sigma(b + 1)} (\cos(\Omega t) - 1) + 1 \right]^2, \\ \rho_{22}(a, b, t) &= \frac{\sigma a (b + 1)}{[a + \sigma(b + 1)]^2} (\cos(\Omega t) - 1)^2, \\ \rho_{33}(a, b, t) &= \frac{a}{a + \sigma(b + 1)} \sin^2(\Omega t), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Omega = \Omega(a, b, \sigma) = \frac{\Omega_{13}}{2} \sqrt{a + \sigma(b + 1)}.$$

Пример временной динамики населенности уровней представлен на рис. 4. Отметим следующие ее характерные особенности.

1. В раби-осцилляциях населенностей уровней наблюдаются две характерные частоты. Населенность уровня 3 осциллирует с частотой  $2\Omega(a, b, \sigma)$ , зависящей от интенсивностей мод  $a, b$ . Поскольку такие осцилляции обусловлены одновременными переходами между парами уровней  $1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 3$  (см. диаграмму рис. 3а), их естественно называть двухквантовыми осцилляциями Раби. Вследствие спонтанных переходов  $3 \rightarrow 2$  двухквантовые осцилляции Ра-

би существуют и при  $b = 0$  (т. е. при начальном вакуумном состоянии моды  $b$ ). В результате имеет место спонтанный сдвиг частоты раби-осцилляций населенности уровня 3 ( $\Delta_{sp} \Omega_R$ ) относительно резонансной одноквантовой частоты Раби  $\Omega_{Ra} = \Omega(a, 0, 0)$  (в пренебрежении вкладом вакуумной моды  $b$ ). Относительную величину спонтанного сдвига частоты Раби  $\Delta_{sp} \Omega_R$  оценим в приближении  $\sigma = 1$ . Для возбуждающей моды в начальном состоянии с определенным числом фотонов  $|a\rangle\langle a|$  относительная величина спонтанного сдвига частоты Раби обратно пропорциональна интенсивности возбуждающей моды

$$\frac{\Delta_{sp} \Omega_R}{\Omega_{Ra}} = \frac{\sqrt{a + 2}}{\sqrt{a + 1}} - 1$$

и в пределе однофотонного возбуждения ( $a = 1$ ) равна 0.225.

2. Частота осцилляций населенности уровня 2 равна  $\Omega(a, b, \sigma)$ . Амплитуда спонтанных (при  $b = 0$ ) осцилляций обратно пропорциональна энергии (числу фотонов) возбуждающей моды  $a$ . Такие осцилляции становятся существенными при рассмотрении процессов с малой энергией возбуждения. В пределе однофотонного возбуждения ( $a = 1$ ) амплитуда спонтанных осцилляций населенности уровня 2 достигает единицы (в приближении  $\sigma = 1$ ).

3. Населенность основного состояния 1 осциллирует противофазно с населенностью уровня 3 с той же частотой  $2\Omega(a, b, \sigma)$ . Амплитуда осцилляций промодулирована с частотой  $\Omega(a, b, \sigma)$ . В пределе однофотонного возбуждения амплитуда модуляции достигает единицы (рис. 4). В этом предельном случае населенности уровней 1 и 2 выглядят осциллирующими противофазно с частотой  $\Omega(1, 0, 1)$ .

Подчеркнем, что операция взятия следа по состояниям поля (5) привела к отсутствию атомной когерентности (недиагональных элементов приведенного оператора плотности атома), т. е. декогеренции, атома. В обычно принимаемой интерпретации декогеренцию связывают с взаимодействием квантовой системы с макроскопическим окружением (или макроскопическим измерением) [28, 29]. Здесь же отсутствие квантовой когерентности стало следствием принятой неймановской модели приближенного выделения подсистемы (распутывания) [25] из составной квантовой системы (внутренняя [32] декогеренция или декогеренция распутывания).

В рассмотренном примере возбуждающая мода поля в начальный момент находилась в состоянии с определенным числом фотонов (определенной энергией)  $|a\rangle$ , т. е. квантовая когерентность в моде исходно отсутствовала. Чтобы прояснить смысл декоге-

ренции распутывания, рассмотрим квантовую динамику атома в двух качественно различных случаях:

1) когда возбуждающая мода  $a$  исходно была когерентной суперпозицией двух (для простоты) состояний с определенными числами фотонов:

$$\hat{\rho}_{sup a}(\kappa, 0) = [(\cos \kappa)|a_1\rangle + i(\sin \kappa)|a_2\rangle] \times [(\cos \kappa)\langle a_1| - i(\sin \kappa)\langle a_2|],$$

где  $0 \leq \kappa \leq 2\pi$ , т. е. имелась  $|a_1 - a_2|$ -квантовая когерентность моды;

2) когда мода находилась в состоянии статистической (некогерентной) смеси

$$\hat{\rho}_{mix a}(\kappa, 0) = (\cos^2 \kappa)|a_1\rangle\langle a_1| + (\sin^2 \kappa)|a_2\rangle\langle a_2|.$$

В обоих случаях при  $a_2 \neq a_1 \pm 1$  динамика населенности уровней оказывается одинаковой независимо от присутствия квантовой когерентности в начальном состоянии возбуждающей моды. В приближении  $\sigma = 1$ ,  $b = 0$  вместо выражений (13) имеем

$$\rho_{jj}(t) = \rho_{jj}(a_1, 0, t) \cos^2 \kappa + \rho_{jj}(a_2, 0, t) \sin^2 \kappa. \quad (14)$$

Динамика населенности уровней описывается взвешенными суммами раби-осцилляций с двумя разными частотами. Биения населенностей уровней (вследствие различия частот) представляют собой простейшее проявление эффекта квантового коллапса и возрождения (revival) [11, 12]. Атомная когерентность равна нулю.

Особый случай возникает, если  $a_2 = a_1 \pm 1$ . Только в этом случае может существовать атомная когерентность на переходе  $1 \leftrightarrow 3$ , т. е. остаются ненулевыми (после взятия следа по состояниям поля) недиагональные элементы приведенного оператора плотности атома  $\hat{\rho}_{13}(\Lambda, t)$ ,  $\hat{\rho}_{31}(\Lambda, t)$ . Если исходно существует одноквантовая когерентность моды  $a$ , т. е.

$$\hat{\rho}_a(0) = [(\cos \kappa)|a_1\rangle + i(\sin \kappa)|a_1 \pm 1\rangle] \times [(\cos \kappa)\langle a_1| - i(\sin \kappa)\langle a_1 \pm 1|], \quad (15)$$

то

$$\hat{\rho}_{31}(\Lambda, t) = \hat{P}_{31} \frac{1}{2} \sin(2\kappa) \exp \left[ -i \left( \omega_{13}t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \times \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1 + 1}} \sin(\Omega(a_1)t) \times \left[ \frac{a_1}{a_1 + 1} (\cos(\Omega(a_1)t) - 1) + 1 \right]. \quad (16)$$

Величину одноквантовой когерентности моды можно оценивать параметром  $q_a(\kappa) = 1 - |\cos(2\kappa)|$ . Из формулы (16) следует, что, если  $\kappa = n\pi/2$  (где  $n$  —

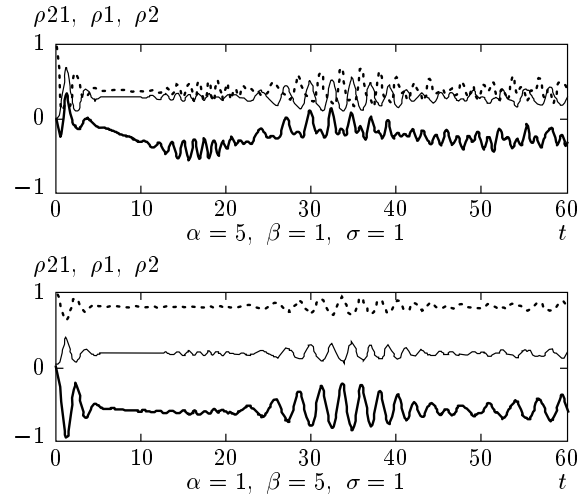


Рис. 5. Динамика огибающей атомной когерентности  $\Lambda$ -атома на переходе 2–1, возбуждаемая полями в когерентном состоянии;  $\alpha, \beta$  — средние числа фотонов соответственно в модах  $a, b$ ;  $\rho_{21}$  — сплошные линии,  $\rho_1$  — пунктирные,  $\rho_2$  — тонкие сплошные

целое), одноквантовая когерентность в начальном состоянии моды  $a$  равна нулю, мода находится в состоянии с определенным числом фотонов ( $|a_1\rangle\langle a_1|$  или  $|a_1 \pm 1\rangle\langle a_1 \pm 1|$ ), то атомная квантовая когерентность на переходе  $1 \leftrightarrow 3$  равна нулю. При  $q_a(\kappa) \neq 0$  атомная квантовая когерентность на этом переходе может существовать (зависит от времени, см. рис. 5). Физическая причина особой роли именно одноквантовой когерентности моды  $a$  в возникновении атомной квантовой когерентности на переходе  $1 \leftrightarrow 3$  состоит в одноатомности модели. Ее можно проследить на соответствующей диаграмме (рис. 3). Все диаграммы, изображающие динамику атомной когерентности (слагаемые с четвертого по девятое суммы (4)), содержат отличающиеся на единицу числа операторов рождений и уничтожений фотонов одной (на переходах  $1 \leftrightarrow 3$ ,  $2 \leftrightarrow 3$ ) или двух ( $1 \leftrightarrow 2$ ) мод в соответствующих элементах оператора эволюции  $\hat{U}_{i1}(\Lambda, t)$ ,  $\hat{U}_{1j}^\dagger(\Lambda, t)$ . Взятие следа по состояниям мод включает проецирование оператора плотности (4) на состояния мод с определенными числами фотонов, т. е. вычисление диагональных матричных элементов вида

$$\langle a, b, c | \hat{U}_{i1}(\Lambda, t) \hat{\rho}_F(0) \hat{U}_{1j}^\dagger(\Lambda, t) | a, b, c \rangle.$$

Такие диагональные элементы могут быть ненулевыми только если в начальном состоянии мод присутствовала одноквантовая когерентность, например, мода  $a$  исходно находилась в когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ .



Расчет динамики моды  $a$  согласно (6) приводит к аналогичному результату: если в начальном состоянии моды присутствовала одноквантовая когерентность (15), то она может в дальнейшем существовать, изменяясь во времени коррелированно с (16). Если же начальная одноквантовая когерентность отсутствовала, то состояние моды в любой момент времени представляет собой некогерентную смесь состояний с определенными числами фотонов.

Следует неожиданный вывод: атомная квантовая когерентность при возбуждении атома полем в состоянии с определенным числом фотонов (в том числе однофотонном) не возникает. (Аналогичный результат содержится и в известном решении для двухуровневой модели Джейнса–Каммингса.) Очевидное противоречие этого вывода экспериментам по наблюдению запутанности одиночного атома с фотоном [15–17] указывает на несоответствие каких-то положений теоретической модели реальной экспериментальной ситуации.

Согласовать результат расчета с экспериментальным фактом существования одноатомной квантовой когерентности при однофотонном возбуждении можно двумя путями.

1) Можно полагать, что однофотонное поле нужно описывать не состоянием с определенным числом фотонов  $|a=1\rangle$ , а некоторой суперпозицией, обладающей одноквантовой когерентностью (например, когерентным состоянием  $|\alpha\rangle$  с  $|\alpha|^2 \approx 1$ ). Заметим, что широко используемое в настоящее время представление однофотонного поля в виде нормированной суперпозиции многих мод вида  $\int_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ |0\rangle_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$  [33, 34] не приводит к ненулевой атомной когерентности, поскольку такое состояние не обладает одноквантовой когерентностью.

2) Можно принять, что распространенный алгоритм фон Неймана определения состояния (оператора плотности) подсистемы запутанной составной квантовой системы путем взятия следа от оператора плотности замкнутой системы по остальным («ненаблюдаемым») подсистемам неприменим к описанию динамики существенно квантовых подсистем [18, 25, 30, 31].

Эксперименты по схеме резонаторной квантовой электродинамики [10, 12] показывают, что одномодовое тепловое поле в резонаторе может обладать одноквантовой когерентностью и его следует описывать некоторой суперпозицией состояний с определенными числами фотонов (в пределе — когерентным состоянием). В описании таких экспериментов (даже с относительно слабыми полями) алгоритм фон Неймана дает качественно непротиворечивое описание

как динамики населенности уровней атома, так и динамики атомной когерентности.

При описании экспериментов с возбуждением атомной когерентности однофотонным полем (или полем в состоянии с определенным числом фотонов) в свободном пространстве [4, 15–17] нет экспериментальных оснований для предположения о существовании одноквантовой когерентности в начальном состоянии моды поля. Поэтому в этом случае представляется обоснованным отказаться от алгоритма фон Неймана выделения приведенного оператора плотности любой из подсистем.

Действительно, как отмечено выше, взятие следа от оператора плотности по модам поля математически эквивалентно предположению, что состояние каждой моды описывается стационарным диагональным оператором плотности, пропорциональным единичному, т. е. квантовая когерентность в модах отсутствует. Другими словами, моды поля в любой момент времени полагаются находящимися в состояниях с определенными стационарными числами фотонов. Тем самым использование алгоритма редукции фон Неймана соответствует принятию модели мгновенных квантовых скачков Шредингера в описании процесса излучения атомом фотона [9]. Напротив, само существование запутанного состояния атома с фотоном [15] соответствует модели протяженного во времени квантового перехода Гейзенберга [9], когда атом в процессе перехода находится в суперпозиционном состоянии с неравной нулю атомной когерентностью, но одновременно и фотонное поле находится в суперпозиционном состоянии с одноквантовой квантовой когерентностью.

Подчеркнем, что алгоритм фон Неймана хорошо соответствует модели выделения квантовой подсистемы из замкнутой системы, когда «ненаблюдаемая» подсистема (т. е. вся остальная часть замкнутой системы) является макроскопической и в ней отсутствует квантовая когерентность. Только в этом предельном случае неймановское выделение квантовой подсистемы из замкнутой системы эквивалентно измерению макроскопическим прибором.

## 5. ДИНАМИКА $\Lambda$ -АТОМА И МОД ПОЛЯ В МОДЕЛИ КОРРЕЛИРОВАННОГО РАСПУТЫВАНИЯ ПОДСИСТЕМ ЗАМКНУТОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ

Необходимым шагом приближенного выделения подсистем из запутанной составной квантовой системы (приближенного распутывания) является ответ на вопрос: следует ли представлять оператор

плотности составной системы в форме прямого произведения операторов плотности подсистем (tensor product structure [35]), или в форме линейной комбинации таких произведений (представление со скрытыми параметрами [36]). В квантовой информатике обычно первое представление постулируется. Однако в недавней работе [35] были сформулированы аргументы, показывающие, что именно такой выбор диктуется экспериментальным определением наблюдаемых взаимодействий между подсистемами. Идея работы [35] состоит в том, что определение составной квантовой системы подразумевает возможность проведения локальных (на подсистемах) операций и измерений. Такая составная система с экспериментальной точки зрения выглядит как набор квази-независимых коррелированных подсистем, чему соответствует ее математическое представление в форме прямого произведения локальных операторов плотности подсистем.

Принимая положения работы [35], приближенно представляем распутанный оператор плотности  $\hat{\rho}^d(\Lambda, t)$  в виде прямого произведения коррелированных операторов плотности подсистем:

$$\hat{\rho}(\Lambda, t) \approx \hat{\rho}_C^d(\Lambda, t) = \hat{\rho}_{AC}(\Lambda, t) \otimes \hat{\rho}_{FC}(\Lambda, t). \quad (17)$$

Приближенное равенство (17) математически выражает представление о коррелированном распутывании составной квантовой системы [18, 25, 30, 31]. Здесь нижний индекс  $C$  отличает коррелированные операторы плотности подсистем от общепринято используемых редуцированных (вычисленных согласно алгоритму фон Неймана). В общепринятом распутывании фон Неймана:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\Lambda, t) &\approx \hat{\rho}_N^d(\Lambda, t) = \hat{\rho}_{AN}(\Lambda, t) \otimes \hat{\rho}_{FN}(\Lambda, t) = \\ &= \hat{\rho}_{AN}(\Lambda, t) \otimes \hat{\rho}_{aN}(\Lambda, t) \otimes \\ &\quad \otimes \hat{\rho}_{bN}(\Lambda, t) \otimes \hat{\rho}_{cN}(\Lambda, t), \end{aligned} \quad (18)$$

выделение каждого из приведенных операторов плотности подсистем (5)–(7) физически отождествляется с проведением макроскопического измерения на всех остальных подсистемах с полной их декогеренцией [29]. Коррелированное распутывание (17) соответствует представлению о разделении (распутывании) подсистем путем проведения идеальных неразрушающих квантовых измерений, при которых (в пределе) не изменяется энтропия (т. е. оператор плотности) замкнутой системы [25].

Для определения коррелированных операторов плотности преобразуем выражение (17) методом, аналогичным методу, использованному фон Нейма-

ном для доказательства взаимной коррелированности средних значений наблюдаемых (см. гл. 6.2 [37]). Умножим (17) справа на  $\hat{\rho}'_{FC}(t) = \hat{1}_A \otimes \hat{\rho}'_{FC}(t)$  или  $\hat{\rho}'_{AC} = \hat{\rho}_{AC} \otimes \hat{1}_F$  и возьмем частичный след соответственно по полевой или атомной подсистеме (штрихами здесь и дальше отмечены расширенные на пространство замкнутой системы операторы плотности подсистем). Используя условие нормировки коррелированных операторов плотности подсистем, получим систему двух связанных уравнений [18, 25, 30, 31]:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AC}(\Lambda, t) &\approx \frac{\text{Sp}_F \hat{\rho}(\Lambda, t) \hat{\rho}'_{FC}(\Lambda, t)}{\text{Sp}_{AF} \hat{\rho}(\Lambda, t) \hat{\rho}'_{FC}(\Lambda, t)}, \\ \hat{\rho}_{FC}(\Lambda, t) &\approx \frac{\text{Sp}_A \hat{\rho}(\Lambda, t) \hat{\rho}'_{AC}(\Lambda, t)}{\text{Sp}_{AF} \hat{\rho}(\Lambda, t) \hat{\rho}'_{AC}(\Lambda, t)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Правые части (19) представляют собой нормированное квантовое усреднение оператора плотности замкнутой системы по одной из подсистем. Каждое уравнение определяет оператор плотности одной подсистемы как функционал от оператора плотности замкнутой системы и оператора плотности другой подсистемы. По существу, это просто более удобная запись выражения (17). Вследствие приближенного характера выражений (17), (19) для вычисления коррелированных операторов плотности подсистем  $\hat{\rho}_{AC}(\Lambda, t)$ ,  $\hat{\rho}_{FC}(\Lambda, t)$  используем метод последовательных приближений [18, 25, 30, 31]:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AC}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\rho}_{AC}^{(n+1)}(t) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Sp}_{abc} \hat{\rho}(t) \hat{\rho}'_{FC}^{(n)}(t)}{\text{Sp}_{abc} \hat{\rho}(t) \hat{\rho}'_{FC}^{(n)}(t)}, \\ \hat{\rho}_{FC}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\rho}_{FC}^{(n+1)}(t) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_j \langle j | \hat{\rho}(t) \hat{\rho}'_{AC}^{(n)}(t) | j \rangle}{\sum_j \langle j | \hat{\rho}(t) \hat{\rho}'_{AC}^{(n)}(t) | j \rangle}. \end{aligned} \quad (20)$$

Возникает вопрос, какие операторы плотности подсистем атома и мод поля следует брать в качестве нулевого приближения в серии последовательных приближений (20)? В работах [30, 31] в качестве нулевого приближения предлагалось использовать приведенные согласно алгоритму фон Неймана операторы плотности атома и поля (5)–(7). Однако такой подход не приводит к искомому возникновению атомной квантовой когерентности при одnofотонном возбуждении  $\Lambda$ -атома. Как и в модели Джейнса–Каммингса такое предположение приводит к дискретным по времени квантовым скачкам в населенности уровней [31].

Принципиальный шаг дальнейшего рассмотрения состоит в предположении, что при распутывании составной системы декогеренция не происходит в каждой из подсистем — и у атома, и в модах поля. Математическим выражением такого предположения служит использование в качестве нулевого приближения в формуле (20) для операторов плотности мод поля нормированных унитарных операторов вида (приводим только для моды  $a$ )

$$\hat{\rho}_{aC}^{(0)} = \left[ \text{Sp}_a \left( \hat{1}_a + \frac{1}{2} (\exp [i\hat{\varphi}(a) + i\omega_{13}t] + \exp [-i\hat{\varphi}(a) - i\omega_{13}t]) \right) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left( \hat{1}_a + \frac{1}{2} (\exp [i\hat{\varphi}(a) + i\omega_{13}t] + \exp [-i\hat{\varphi}(a) - i\omega_{13}t]) \right), \quad (21)$$

где

$$\exp [i\hat{\varphi}(a)] = (\hat{a}\hat{a}^+)^{-1/2} \hat{a},$$

$$\exp [-i\hat{\varphi}(a)] = \hat{a}^+ (\hat{a}\hat{a}^+)^{-1/2}$$

— операторы фазы поля моды  $a$  [6]. Физическое содержание такого выбора наглядно из сравнения структуры матрицы плотности (21) со структурой матрицы плотности, соответствующей редукции фон Неймана  $\hat{\rho}_{aN}$ :

$$\hat{\rho}_{aN} \propto \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\hat{\rho}_{aC}^{(0)} \propto \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \frac{1}{2}e^{-i\omega_{13}t} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \frac{1}{2}e^{i\omega_{13}t} & 1 & \frac{1}{2}e^{-i\omega_{13}t} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{1}{2}e^{i\omega_{13}t} & 1 & \frac{1}{2}e^{-i\omega_{13}t} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{i\omega_{13}t} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (22)$$

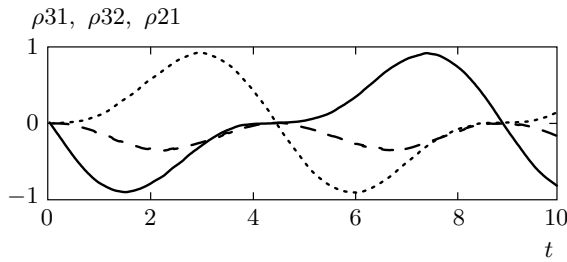
При редукции фон Неймана проводится квантовое усреднение оператора плотности запутанной системы по подсистеме  $a$  так, как будто подсистема с равной вероятностью находится в любом из ее собственных состояний. В предлагаемом нами варианте в добавление к усреднению фон Неймана в нулевом приближении добавляется равная возможность одноквантовой когерентности между любой парой собственных состояний моды.

Покажем, к чему приводит такое введение затронутой одноквантовой когерентности в состояние мод поля на простейшем примере динамики  $\Lambda$ -атома, возбуждаемого полем моды  $a$  в состоянии с определенным числом фотонов  $|a\rangle\langle a|$  с вакуумными на-

чальными состояниями двух других мод. Отличие от общепринятого расчета состоит в том, что в первом приближении оператор плотности атома будет вместо (5) определяться выражением

$$\hat{\rho}_{AC}^{(1)}(\Lambda, t) = \frac{\text{Sp}_{abc} \left[ \hat{\rho}(\Lambda, t) \hat{\rho}'_{aC}{}^{(0)} \hat{\rho}'_{bC}{}^{(0)} \hat{\rho}'_{cC}{}^{(0)} \right]}{\text{Sp}_{Aabc} \left[ \hat{\rho}(\Lambda, t) \hat{\rho}'_{aC}{}^{(0)} \hat{\rho}'_{bC}{}^{(0)} \hat{\rho}'_{cC}{}^{(0)} \right]}. \quad (23)$$

Заметим, что в выражении (23) возможность существования квантовой когерентности в нулевом приближении предположена для всех мод поля. Приведем выражения операторов атомной когерентности, полученные в первом приближении последовательности (20):



**Рис. 6.** Динамика огибающих атомной когерентности  $\Lambda$ -атома при однофотонном ( $a = 1$ ) возбуждении;  $\rho_{31}$  — сплошная линия,  $\rho_{32}$  — пунктирная,  $\rho_{21}$  — штриховая

$$\hat{\rho}_{31C}^{(1)}(\Lambda, t) = -\hat{P}_{31} \frac{1}{2} \exp(-i\omega_{13}t) \frac{\sqrt{a}}{(a+1)\sqrt{a+1}} \times \sin\left(\frac{\Omega_{13}t}{2} \sqrt{a+1}\right) \times \left[ a \cos\left(\frac{\Omega_{13}t}{2} \sqrt{a+1}\right) + 1 \right], \quad (24)$$

$$\hat{\rho}_{32C}^{(1)}(\Lambda, t) = -\hat{P}_{32} \frac{1}{2} \exp(-i\omega_{23}t) \frac{\sqrt{a}}{(a+1)\sqrt{a+1}} \times \sin\left(\frac{\Omega_{13}t}{2} \sqrt{a+1}\right) \times \left[ \cos\left(\frac{\Omega_{13}t}{2} \sqrt{a+1}\right) - 1 \right], \quad (25)$$

$$\hat{\rho}_{21C}^{(1)}(\Lambda, t) = \hat{P}_{21} \frac{1}{4} \exp(-i\omega_{12}t) \frac{\sqrt{a}}{(a+1)^2} \times \left[ \cos\left(\frac{\Omega_{13}t}{2} \sqrt{a+1}\right) - 1 \right] \times \left[ a \cos\left(\frac{\Omega_{13}t}{2} \sqrt{a+1}\right) + 1 \right]. \quad (26)$$

Таким образом, предположение о включении затравочной (в нулевом приближении) одноквантовой когерентности мод поля в задаче распутывания сразу приводит к искомому результату — в процессе излучения или поглощения атомом фотона существует атомная когерентность на всех переходах и динамика этой когерентности коррелирована с динамикой разностей населенностей соответствующих уровней. Для наглядности на рис. 6 представлена динамика атомной поляризации (24)–(26) при однофотонном возбуждении атома.

Аналогичным нулевым приближением в описании динамики квантовой когерентности мод поля может служить затравочная атомная когерентность на всех переходах вида

$$\hat{\rho}_{aC}^{(0)} \propto \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \exp(-i\omega_{23}t) & \frac{1}{2} \exp(-i\omega_{13}t) \\ \frac{1}{2} \exp(i\omega_{23}t) & 1 & \frac{1}{2} \exp(-i\omega_{12}t) \\ \frac{1}{2} \exp(i\omega_{13}t) & \frac{1}{2} \exp(i\omega_{12}t) & 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Тогда в первом приближении для коррелированных операторов плотности мод поля не равной нулю оказывается квантовая когерентность первого порядка для всех мод поля. Физически это соответствует представлению о гейзенберговской модели излучения (поглощения) атомом фотонов, когда в процессе излучения (поглощения) атом находится в запутанном с фотонами состоянии, причем каждая из мод находится в суперпозиционном состоянии.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены выражения операторов эволюции для квантовых моделей  $\Lambda$ -,  $V$ - и  $L$ -атомов. Предложено наглядное диаграммное представление расчета динамики таких моделей. Показано, что при слабых возбуждающих полях (несколько фотонов) вклад спонтанных переходов в квантовую динамику трехуровневых моделей становится существенным.

Показано, как использование общепринятого алгоритма редукции фон Неймана в расчете динамики атомной когерентности приводит к ее отсутствию при возбуждении системы  $n$ -фотонным полем. Также показано, что ненулевую атомную когерентность и коррелированную с ней квантовую когерентность фотонного поля, качественно соответствующие свойствам экспериментально наблюдаемого запутанного состояния атома с фотоном, можно рассчитать, если использовать алгоритм коррелированного распутывания и дополнительно включать затравочную квантовую когерентность в любой из подсистем.

Автор признателен А. А. Ахметову, Д. С. Егорову, А. М. Загидуллину за участие в численном моделировании квантовой динамики трехуровневых атомов и В. Н. Лисину за стимулирующую критику.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Сомножители операторов эволюции, обусловленные взаимодействием атома с полем для моделей $\Lambda$ -, $V$ - и $L$ -атомов

Обозначения перенормированных операторов мод поля и операторных функций:

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \left(\frac{\Omega_{13}t}{2}\right) \hat{a}, & \hat{A}^+ &= \left(\frac{\Omega_{13}t}{2}\right) \hat{a}^+, \\
\hat{B} &= \left(\frac{\Omega_{23}t}{2}\right) \hat{b}, & \hat{B}^+ &= \left(\frac{\Omega_{23}t}{2}\right) \hat{b}^+, \\
\hat{C} &= \left(\frac{\Omega_{12}t}{2}\right) \hat{c}, & \hat{C}^+ &= \left(\frac{\Omega_{12}t}{2}\right) \hat{c}^+, \\
S(\hat{M}) &= \frac{\sin \sqrt{\hat{M}}}{\sqrt{\hat{M}}}, & C(\hat{M}) &= \frac{\cos \sqrt{\hat{M}} - \hat{1}_F}{\hat{M}}, \\
\hat{M} &= \hat{\Lambda}, \hat{V}, \hat{L}, & \hat{\Lambda} &= \hat{A}\hat{A}^+ + \hat{B}\hat{B}^+, \\
\hat{V} &= \hat{A}^+\hat{A} + \hat{C}^+\hat{C}, & \hat{L} &= \hat{B}^+\hat{B} + \hat{C}\hat{C}^+.
\end{aligned}$$

Для модели  $\Lambda$ -атома

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{AF}(\Lambda) &= \frac{i\hbar}{t} \left( \hat{P}_{31}\hat{A} - \hat{P}_{13}\hat{A}^+ \right) + \frac{i\hbar}{t} \left( \hat{P}_{32}\hat{B} - \hat{P}_{23}\hat{B}^+ \right), \\
\exp \left( \mp \frac{it\hat{H}_{AF}(\Lambda)}{\hbar} \right) &= \sum_{i,j=1}^3 \hat{P}_{ij} \left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{ij}(\Lambda, t) \\ \hat{U}_{ij}^\dagger(\Lambda, t) \end{array} \right\} = \\
&= \hat{P}_{11} \left[ \hat{A}^+C(\hat{\Lambda})\hat{A} + \hat{1}_F \right] + \\
&+ \hat{P}_{22} \left[ \hat{B}^+C(\hat{\Lambda})\hat{B} + \hat{1}_F \right] + \hat{P}_{33} \cos \sqrt{\hat{\Lambda}} + \\
&+ \hat{P}_{12} \left[ \hat{A}^+C(\hat{\Lambda})\hat{B} \right] + \hat{P}_{21} \left[ \hat{B}^+C(\hat{\Lambda})\hat{A} \right] \pm \\
&\pm \hat{P}_{13}\hat{A}^+S(\hat{\Lambda}) \mp \hat{P}_{31}S(\hat{\Lambda})\hat{A} \pm \hat{P}_{23}\hat{B}^+S(\hat{\Lambda}) \mp \\
&\mp \hat{P}_{32}S(\hat{\Lambda})\hat{B}. \quad (\text{A.1})
\end{aligned}$$

Для модели  $V$ -атома

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{AF}(V) &= \frac{i\hbar}{t} \left( \hat{P}_{31}\hat{A} - \hat{P}_{13}\hat{A}^+ \right) + \frac{i\hbar}{t} \left( \hat{P}_{21}\hat{C} - \hat{P}_{12}\hat{C}^+ \right), \\
\exp \left( \mp \frac{it\hat{H}_{AF}(V)}{\hbar} \right) &= \sum_{i,j=1}^3 \hat{P}_{ij} \left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{ij}(V, t) \\ \hat{U}_{ij}^\dagger(V, t) \end{array} \right\} = \\
&= \hat{P}_{22} \left[ \hat{C}C(\hat{V})\hat{C}^+ + \hat{1}_F \right] + \\
&+ \hat{P}_{33} \left[ \hat{A}C(\hat{V})\hat{A}^+ + \hat{1}_F \right] + \hat{P}_{11} \cos \sqrt{\hat{V}} + \\
&+ \hat{P}_{23} \left[ \hat{C}C(\hat{V})\hat{A}^+ \right] + \hat{P}_{32} \left[ \hat{A}C(\hat{V})\hat{C}^+ \right] \mp \\
&\mp \hat{P}_{12}S(\hat{V})\hat{C}^+ \pm \hat{P}_{21}S(\hat{V})\hat{C} \mp \hat{P}_{13}S(\hat{V})\hat{A}^+ \pm \\
&\pm \hat{P}_{31}S(\hat{V})\hat{A}. \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

Для модели  $L$ -атома

$$\hat{H}_{AF}(L) = \frac{i\hbar}{t} \left( \hat{P}_{32}\hat{B} - \hat{P}_{23}\hat{B}^+ \right) + \frac{i\hbar}{t} \left( \hat{P}_{21}\hat{C} - \hat{P}_{12}\hat{C}^+ \right),$$

$$\begin{aligned}
\exp \left( \mp \frac{it\hat{H}_{AF}(L)}{\hbar} \right) &= \sum_{i,j=1}^3 \hat{P}_{ij} \left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_{ij}(L, t) \\ \hat{U}_{ij}^\dagger(L, t) \end{array} \right\} = \\
&= \hat{P}_{11} \left[ \hat{C}^+C(\hat{L})\hat{C} + \hat{1}_F \right] + \\
&+ \hat{P}_{33} \left[ \hat{B}C(\hat{L})\hat{B}^+ + \hat{1}_F \right] + \hat{P}_{22} \cos \sqrt{\hat{L}} - \\
&- \hat{P}_{13} \left[ \hat{C}^+C(\hat{L})\hat{B}^+ \right] - \hat{P}_{31} \left[ \hat{B}C(\hat{L})\hat{C} \right] \mp \\
&\mp \hat{P}_{12}\hat{C}^+S(\hat{L}) \pm \hat{P}_{21}S(\hat{L})\hat{C} \mp \hat{P}_{23}S(\hat{L})\hat{B}^+ \pm \\
&\pm \hat{P}_{32}S(\hat{L})\hat{B}. \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. H. I. Yoo and J. H. Eberly, Phys. Rep. **118**, 239 (1985).
2. A. V. Gorshkov, A. André, M. Fleischhauer et al., Phys. Rev. Lett. **98**, 123601 (2007); E-print archives, quant-ph/0604037.
3. A. V. Gorshkov, A. André, M. D. Lukin et al., Phys. Rev. A **76**, 033804 (2007); E-print archives, quant-ph/0612082.
4. A. V. Gorshkov, A. André, M. D. Lukin et al., Phys. Rev. A **76**, 033805 (2007); E-print archives, quant-ph/0612083.
5. A. V. Gorshkov, A. André, M. D. Lukin et al., Phys. Rev. A **76**, 033806 (2007); E-print archives, quant-ph/0612084.
6. Р. Лоудон, *Квантовая теория света*, Мир, Москва (1976).
7. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Двухуровневый атом во внешнем поле*, Мир, Москва (1978).
8. N. K. Solovarov, Optica Acta **27**, 393 (1980).
9. Дж. Д. Макомбер, *Динамика спектроскопических переходов*, Мир, Москва (1979).
10. J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
11. N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **23**, 236 (1981).
12. G. Rempl, H. Walter, and N. Klein, Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
13. G. K. Schoep, H. J. v.d. Valk, G. A. M. Frijters et al., Physica **77**, 449 (1974).
14. В. А. Голенищев-Кутузов, А. И. Сиразиев, Н. К. Соловаров и др., ЖЭТФ **71**, 1074 (1976).

15. J. Volz, M. Weber, D. Schlenk et al., Phys. Rev. Lett. **96**, 030404 (2006).
16. M. Oberst, F. Vewinger, and A. I. Lvovsky, E-print archives, quant-ph/0702002.
17. S. Gleyzes, S. Kuhr, Ch. Guerlin et al., Nature **446**, 297 (2007); E-print archives, quant-ph/0612031.
18. Н. К. Соловаров, Письма в ЖЭТФ **78**, 713 (2003).
19. Д. А. Демидов, Н. К. Соловаров, Опт. и спектр. **79**, 358 (1995).
20. D. A. Demidov and N. K. Solovarov, Proc. SPIE **3239**, 273 (1997).
21. G. K. Giorgadze and Z. G. Melikishvili, E-print archives, quant-ph/0604003.
22. W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney-Toronto (1973).
23. U. Fano, Rev. Mod. Phys. **29**, 74 (1957).
24. К. Блум, *Теория матрицы плотности и ее приложения*, Мир, Москва (1983).
25. Н. К. Соловаров, в сб. *Новейшие проблемы теории поля*, под ред. А. В. Аминовой, изд-во Казанского университета, Казань (2007), с. 212.
26. В. С. Кузьмин, Н. К. Соловаров, ДАН БССР **24**, 323 (1980).
27. А. И. Сиразиев, Н. К. Соловаров, Опт. и спектр. **67**, 269 (1989).
28. М. Б. Менский, *Квантовые измерения и декогеренция*, Физматлит, Москва (2001).
29. T. Dass, E-print archives, quant-ph/0505070.
30. Н. К. Соловаров, в *Ежегоднике 2001 Казанского физико-технического института им. Е. К. Завойского КазНЦ РАН*, под ред. К. М. Салихова, Физтехпресс, Казань (2002), с. 104.
31. N. K. Solovarov, E-print archives, quant-ph/0304142.
32. V. S. Batista and P. Brumer, Phys. Rev. Lett. **89**, 143201 (2002).
33. Д. Н. Клышко, УФН **168**, 975 (1998).
34. Д. Н. Клышко, УФН **164**, 1187 (1994).
35. P. Zanardi, D. A. Lidar, and S. Lloyd, Phys. Rev. Lett. **92**, 060402 (2004).
36. J. Batle-Vallespir, PhD Thesis, Department de Física, Universitat de les Balears (2006); E-print archives, quant-ph/0603124.
37. И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, Москва (1964).