

ЭЛЕКТРОННЫЙ ПЕРЕНОС И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ В ПЛАЗМЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАРЯДОМ ИОНОВ

А. В. Брантов^{a,}, В. Ю. Быченков^a, В. Розмус^{b,**}*

*^a Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

*^b Институт теоретической физики, Университет Альберты
Альберта, Эдмонтон, T6G 2G7, Канада*

Поступила в редакцию 24 октября 2007 г.

На основе решения линеаризованного кинетического уравнения для электронов с интегралом столкновений в форме Ландау развита теория электронного переноса для малых возмущений в полностью ионизованной плазме с произвольным зарядом ионов, свободная от каких-либо ограничений на характерные временные и пространственные масштабы возмущений. Вычислены потенциальные и вихревые электронные потоки для произвольной частоты электронных столкновений, позволяющие описывать пространственно-временной нелокальный перенос. Получены также выражения для продольной и поперечной электронной диэлектрической проницаемости столкновительной плазмы с произвольным зарядом ионов, пригодные для описания отклика плазмы на малые возмущения с произвольной частотой и волновым вектором. На примере поперечной диэлектрической проницаемости, позволяющей описывать поглощение электромагнитной волны во всем диапазоне параметров плазмы, от сильностолкновительного до бесстолкновительного, дается детальное сопоставление с известными ранее моделями.

PACS: 52.25.Dg, 52.25.Fi, 52.25.Mq, 52.38.-r, 52.38.Dx

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о величине теплового потока является одним из ключевых для успешного осуществления лазерного термоядерного синтеза (ЛТС), поскольку основная часть энергии падающего лазерного излучения поглощается достаточно далеко от области горения — вблизи области критической плотности, а затем переносится в глубь плазмы тепловым потоком электронов, от величины которого зависят скорость нагрева, температура и сжатие мишени. Наиболее простое, сильностолкновительное классическое описание электронного переноса [1, 2], требующее плавности пространственных неоднородностей плазмы, в условиях ЛТС оказывается непри-

менимым, поскольку типичные длины пробега электронов в области критической плотности достигают значений от сотых до десятых долей характерного пространственного масштаба изменения электронной температуры. При этом существенную роль в переносе играют эффекты пространственной нелокальности. К настоящему времени накоплен целый ряд экспериментальных данных, подтверждающих представления о нелокальном характере теплопереноса в лазерной плазме. Убедительным примером служит, например, наиболее показательный эксперимент [3].

Несмотря на более чем двадцатилетнюю историю разработки теории нелокального переноса начиная с первых теоретических моделей работ [4–6] и значительные усилия, направленные на построение теории нелокальной гидродинамики [7–10], следует признать, что адекватной теории нелокального пе-

*E-mail: brantov@sci.lebedev.ru

**W. Rozmus

переноса все еще нет, и до сих пор предпринимаются попытки создания теории, количественно объясняющей экспериментальные данные и способной прогнозировать характер переноса в реальных условиях термоядерного синтеза [11]. Существенное упрощение теории нелокального переноса можно получить методом малых возмущений. Хотя такая упрощенная теория не может объяснить все результаты эксперимента, вытекающие из нее выводы в ряде случаев допускают экстраполяцию на параметры плазмы, выходящие за рамки формальной применимости теории возмущений, и позволяют качественно верно описывать экспериментальные факты [3]. Наиболее значительный прогресс в развитии теории нелокального переноса был получен методом малых возмущений, когда с помощью решения кинетического уравнения с точными интегралами столкновений удалось вычислить коэффициенты электронного переноса для полностью ионизованной плазмы [12–17].

Характерной чертой большинства моделей нелокального переноса является предположение о его квазистационарности. Однако учет нелокальности во времени (нестационарности) может в некоторых случаях существенно менять характер переноса [18–20]. Обобщение теории переноса для описания нестационарных эффектов в плазме было сделано только для плазмы с высокой степенью ионизации ионов, $Z \gg 1$ [16, 17]. Такое ограничение весьма сужает круг проблем, интересных с практической точки зрения, поскольку не позволяет количественно описать свойства плазмы с зарядом ионов $Z < 10$, встречающейся в большинстве практических приложений. В этой работе мы формулируем теорию электронного переноса в плазме с произвольным зарядом ионов, свободную от каких-либо ограничений на характерные временные, ω^{-1} , и пространственные, k , масштабы возмущений. Тем самым мы формулируем полную теорию нелокального электронного переноса для малых возмущений в полностью ионизованной плазме, подводя итог многолетним построениям ее отдельных элементов [4, 7, 8, 13–17].

Теория малых возмущений идеально подходит для вычисления диэлектрической проницаемости, являющейся фундаментальной характеристикой плазмы и позволяющей описать различные волновые явления. Диэлектрическая проницаемость плазмы хорошо изучена в асимптотических пределах, отвечающих бесстолкновительному случаю, описываемому на основе решения кинетического уравнения Власова [21], и гидродинамическому пределу, описываемому с помощью системы сильностолкновительных гидродинамических урав-

нений [22]. Естественно, что соответствующие выражения для диэлектрической проницаемости для диэлектрической проницаемости столкновительной плазмы имеют весьма ограниченные области применимости и не могут быть использованы для конечных значений ω/ν_{ei}^T и $k\lambda_{ei}$, где ν_{ei}^T — частота электрон-ионных столкновений, λ_{ei} — длина свободного пробега электронов по отношению к столкновениям с ионами. Существенным шагом явилась слабостолкновительная теория [12], позволившая несколько расширить область аналитического описания диэлектрической проницаемости плазмы с кулоновскими столкновениями по сравнению с бесстолкновительным случаем. Вместе с тем, наиболее распространенной моделью, претендующей на описание диэлектрической проницаемости столкновительной плазмы во всей области параметров, все еще является давно предложенная качественная модель, основанная на использовании упрощенного интеграла столкновений Батнагара–Гросса–Крука (БГК) в кинетическом уравнении для электронов [23–25]. Однако модельная диэлектрическая проницаемость для БГК-приближения и следующая из нее модель Друде для поперечной диэлектрической проницаемости [23–25], будучи использованными для полностью ионизованной плазмы, приводят к значительным погрешностям в области умеренных и сильных столкновений [17, 19, 26]. Например, хорошо известно, что использование этой модели не позволяет с приемлемой точностью воспроизвести диэлектрическую проницаемость плазмы в гидродинамическом сильностолкновительном пределе [22]. Значительное улучшение теории достигнуто в рамках лоренцевой модели плазмы [19, 27, 28]. Однако пренебрежение электрон-электронными столкновениями не позволяет точно описать диэлектрическую проницаемость даже для плазмы с высокой степенью ионизации. Для случая плазмы с большим зарядом ионов, когда электрон-электронный интеграл столкновений учитывается только в уравнении для симметричной части функции распределения электронов, продольная диэлектрическая проницаемость была получена в работе [16], а для поперечной диэлектрической проницаемости такая задача была решена в статье [26]. Обобщение этих результатов на случай произвольного заряда ионов подразумевает учет интеграла электрон-электронных столкновений также и для анизотропной части функции распределения. Построение соответствующей процедуры вычисления диэлектрической проницаемости плазмы без каких-либо ограничений на рассматриваемые параметры имеет важное фундаментальное

и практическое значение, решению этой задачи отводится существенное место в данной работе.

Таким образом, наряду с формулировкой полной теории нелокального нестационарного электронного переноса для малых возмущений, в данной работе развита теория диэлектрической проницаемости плазмы. Это достигается с помощью решения начальной задачи для линеаризованного кинетического уравнения [14]. Несмотря на то что подобная линейная теория была развита нами ранее для плазмы с большим зарядом ионов [16, 17], ее обобщение на случай плазмы с произвольным зарядом ионов представляет собой важный и нетривиальный шаг. Значительное усложнение теории связано с необходимостью учета электрон-электронного интеграла столкновений в уравнениях для анизотропной части функции распределения, что фактически меняет метод получения решения кинетического уравнения по сравнению со случаем плазмы с большим зарядом ионов $Z \gg 1$. Подобный шаг был сделан только для вычисления продольных коэффициентов переноса в статическом приближении [15]. В данной работе впервые получена диэлектрическая проницаемость плазмы и найдены все коэффициенты электронного переноса (продольные и поперечные) в плазме с произвольным зарядом ионов.

Развита теория основана на решении линеаризованного кинетического уравнения для электронов с интегралом столкновений в форме Ландау. Предложенный метод решения кинетического уравнения справедлив для произвольного заряда ионов Z , для произвольного соотношения между характерным масштабом неоднородности возмущений $L = k^{-1}$ и длиной свободного пробега электронов, а также для произвольного соотношения между характерным временным масштабом $\tau = \omega^{-1}$, временем электронных столкновений и характерным временем бесстолкновительного движения электронов, $1/kv_{Te}$, где v_{Te} — тепловая скорость электронов. Разложение функции распределения по сферическим гармоникам и использование процедуры суммирования всех угловых гармоник позволяют описать последовательный переход от столкновительного гидродинамического предела к бесстолкновительному случаю. Хотя наша теория и не определяет коэффициенты переноса и диэлектрическую проницаемость в явном виде через параметры плазмы, она устанавливает четко определенную процедуру, следуя которой эти величины могут быть вычислены для произвольных параметров плазмы и произвольных пространственно-временных масштабов.

2. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим малые возмущения однородной равновесной плазмы с максвелловским распределением частиц по скоростям f_M^a ($a = e, i$) с плотностью n_a и температурой T_a . Линеаризованное кинетическое уравнение для пространственных фурье-компонент возмущений функции распределения $\delta f^a = f^a - f_M^a$ имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}\right) \delta f_{\mathbf{k}}^a + \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_M^a}{\partial \mathbf{v}} = \sum_b (C_{ab}[\delta f_{\mathbf{k}}^a, f_M^b] + C_{ab}[f_M^b, \delta f_{\mathbf{k}}^a]), \quad (1)$$

где C_{aa} и C_{ab} — интегралы столкновений частиц соответственно одного сорта и разных сортов с зарядом e_a и массой m_a .

Выполняя одностороннее фурье-преобразование по времени, разлагаем функцию $\delta f_{\mathbf{k}\omega}^a$ по сферическим гармоникам $Y_{lm}(\theta, \phi)$,

$$\begin{aligned} \delta f_{\mathbf{k}\omega}^a &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm}^a(v) Y_{lm}(\theta, \phi), \\ C_{ab}[\delta f_{\mathbf{k}\omega}^a, f_M^b] + C_{ab}[f_M^b, \delta f_{\mathbf{k}\omega}^a] &= \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{ab}^{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (2)$$

где θ и ϕ — полярный и азимутальный углы скорости частиц по отношению к вектору \mathbf{k} . В результате, исходное кинетическое уравнение сводится к бесконечной системе уравнений для угловых гармоник функции распределения f_{lm}^a :

$$\begin{aligned} -i\omega f_{lm}^a + ikv \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}} f_{l-1, m}^a + \\ + ikv \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}} f_{l+1, m}^a - C_{aa}^{lm} - C_{ab}^{lm} = S_{lm}^a. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь оператор столкновений, C_{ab}^{lm} (как для $b = a$, так и для $b \neq a$), может быть представлен потенциалами Розенблюта в виде

$$\begin{aligned} \frac{C_{ab}^{lm}}{\nu_{ab}(v)} = & \frac{l(l+1)}{6} f_{lm}^a (I_2^0 - 3I_0^0 - 2J_{-1}^0) + \\ & + \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial f_{lm}^a}{\partial v} (I_2^0 + J_{-1}^0) \right) + \\ & + \frac{m_a}{m_b} v \frac{\partial}{\partial v} (f_{lm}^a I_0^0) + \frac{4\pi m_a}{n_e m_b} v^3 f_M^a f_{lm}^b + \\ & + v \frac{\partial f_M^a}{\partial v} \frac{l \delta J_{-l-1}^l - (l+1) \delta I_l^l}{2l+1} \left(1 - \frac{m_a}{m_b} \right) + \\ & + \frac{v^2}{2(2l+1)} \frac{\partial^2 f_M^a}{\partial v^2} \left(\frac{l(1-l)}{2l-1} (\delta I_l^{lm} + \delta J_{1-l}^{lm}) + \right. \\ & \left. + \frac{(1+l)(2+l)}{2l+3} (\delta I_{l+2}^{lm} + \delta J_{-1-l}^{lm}) \right) + \\ & + \frac{v}{2(2l+1)} \frac{\partial f_M^a}{\partial v} \left(\frac{(l^2+3l-2) \delta I_l^{lm} + l(l-1) \delta J_{1-l}^{lm}}{2l-1} - \right. \\ & \left. - \frac{(l+1)(l+2) \delta I_{l+2}^{lm} + (l^2-l-4) \delta J_{-1-l}^{lm}}{2l+3} \right), \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\nu_{ab}(v) = \frac{4\pi n_b (e_a e_b)^2 \Lambda_{ab}}{m_a^2 v^3}$$

представляет собой зависящую от скорости частоту столкновений частиц сорта a с частицами сорта b , Λ_{ab} — кулоновский логарифм, а потенциалы Розенблута (J_n^0) и их возмущения (δJ_n^{lm}) определены стандартным образом [22]:

$$\begin{aligned} \{I_n^0; \delta I_n^{lm}\} &= \frac{4\pi}{n_b v^n} \int_0^v \{f_M^b; f_{lm}^b\} v^{n+2} dv, \\ \{J_n^0; \delta J_n^{lm}\} &= \frac{4\pi}{n_b v^n} \int_v^\infty \{f_M^b; f_{lm}^b\} v^{n+2} dv. \end{aligned} \quad (5)$$

Предположим, что начальное возмущение функции распределения $\delta f_{\mathbf{k}}^a(t=0)$ отвечает возмущению максвелловской функции распределения (т. е. характеризуется начальными возмущениями плотности $\delta n_{\mathbf{k}}^a(0)$ и температуры $\delta T_{\mathbf{k}}^a(0)$),

$$\begin{aligned} \delta f_{\mathbf{k}}^a(v, t=0) = \\ = \left[\frac{\delta n_{\mathbf{k}}^a(0)}{n_a} + \frac{\delta T_{\mathbf{k}}^a(0)}{T_a} \left(\frac{v^2}{2v_{T_a}^2} - \frac{3}{2} \right) \right] f_M^a(v). \end{aligned} \quad (6)$$

Строго говоря, такое предположение справедливо в сильностолкновительном пределе и, в общем случае, могло бы сужать класс возможных электронных движений, что более подробно обсуждалось ранее [14]. Вместе с тем, такой подход получил широкое распространение [10, 18, 20] и в квазистационарном приближении был подтвержден хорошим совпадением коэффициентов переноса с результатами

численного моделирования [13, 14]. В соответствии с формулой (6), источники S_{lm}^a в уравнении (3) определяются начальными возмущениями плотности и температуры и фурье-компонентами электрического поля $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$:

$$\begin{aligned} S_{00}^a &= \sqrt{4\pi} \delta f_{\mathbf{k}}^a(t=0), \quad S_{10}^a = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{e_a (E_z)_{\mathbf{k}\omega}}{T_a} v f_M^a, \\ S_{1\pm 1}^a &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{e_a ((E_x)_{\mathbf{k}\omega} \pm (E_y)_{\mathbf{k}\omega})}{T_a} v f_M^a. \end{aligned}$$

Для определенности волновой вектор \mathbf{k} возмущений направлен вдоль оси z .

Ниже мы рассматриваем только движение электронов, т. е. ищем решение уравнения (3) только для функции распределения электронов. Следующее упрощение связано с разложением электрон-ионного интеграла столкновений по величине отношения характерной скорости ионов к характерной скорости электронов, когда можно пренебречь слагаемыми порядка m_e/m_i в выражении для C_{ei} , отвечающими за медленное перераспределение энергии между электронами и ионами. В этом приближении роль ионов сводится к появлению в интеграле столкновений фурье-компоненты средней скорости ионов, возникающей как момент функции распределения ионов

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}\omega}^i = \frac{4\pi}{n_i} \int d^3 v f_{\mathbf{k}\omega}^i \mathbf{v}.$$

Соответственно, упрощенный интеграл электрон-ионных столкновений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} C_{ei}^{lm} = & -\frac{l(l+1)}{2} \nu_{ei} f_l^e + \delta_{l1} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{\nu_{ei} v}{v_{T_e}^2} \times \\ & \times \left(\delta_{m0} \sqrt{2} (u_z^i)_{\mathbf{k}\omega} + \delta_{m1} ((u_x^i)_{\mathbf{k}\omega} - (u_y^i)_{\mathbf{k}\omega}) + \right. \\ & \left. + \delta_{m,-1} ((u_x^i)_{\mathbf{k}\omega} + (u_y^i)_{\mathbf{k}\omega}) \right) f_M^e, \quad (7) \end{aligned}$$

где слагаемое, пропорциональное фурье-компоненте средней скорости ионов $\mathbf{u}_{\mathbf{k}\omega}^i$, рассматривается в качестве дополнительного источника в уравнении (3). Отметим, что в общем случае оба вектора \mathbf{E} и \mathbf{u}^i имеют компоненты как вдоль, так и поперек волнового вектора \mathbf{k} , что обуславливает появление обсуждаемых ниже как продольных ($\parallel \mathbf{k}$), так и поперечных ($\perp \mathbf{k}$) компонент электронных потоков.

В дальнейшем для нахождения электронных потоков (электрического тока, теплового потока и силы трения между электронами и ионами) нам понадобится знание только первой угловой гармоники функции распределения. Для ее вычисления необходимо решение системы (3) лишь для двух первых

азимутальных гармоник ($m = 0$ и $m = 1$), так как уравнения с различными азимутальными числами входят в систему уравнений (3) независимо. Будем искать общее решение для этих двух азимутальных гармоник функции распределения электронов в виде

$$f_{l0}^e = \sqrt{4\pi} \times \left(i \frac{e(E_z)_{\mathbf{k}\omega}}{kT_e} \delta_{l0} + \left(\frac{\delta n_{\mathbf{k}}^e(0)}{n_e} - \omega \frac{e(E_z)_{\mathbf{k}\omega}}{kT_e} \right) \psi_{l0}^N + \frac{3}{2} \frac{\delta T_{\mathbf{k}}^e(0)}{T_e} \psi_{l0}^T - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}\omega}^i \psi_{l0}^R \right) f_M^e, \quad (8)$$

$$f_{l\pm 1}^e = \sqrt{2\pi} \left(- \frac{e((E_x)_{\mathbf{k}\omega} \mp (E_y)_{\mathbf{k}\omega})}{T_e} v_{Te} \psi_{l1}^E - ik((u_x^i)_{\mathbf{k}\omega} \mp (u_y^i)_{\mathbf{k}\omega}) \psi_{l1}^U \right) f_M^e, \quad (9)$$

где пять независимых базисных функций ψ_{lm}^A ($A = N, T, R, E, U$) удовлетворяют следующей системе уравнений с различными источниками \tilde{S}_{lm}^A :

$$-i\omega \psi_{lm}^A + ikv \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}} \psi_{l-1,m}^A + ikv \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}} \psi_{l+1,m}^A = - \frac{l(l+1)}{2} \nu_{ei} \psi_{lm}^A + \frac{1}{F_0} \tilde{C}_{ee}^{lm} + \tilde{S}_{lm}^A. \quad (10)$$

Здесь

$$\tilde{S}_{lm}^N = \delta_{l0} \delta_{m0}, \quad \tilde{S}_{lm}^T = \left(\frac{v^2}{3v_{Te}^2} - 1 \right) \delta_{l0} \delta_{m0},$$

$$\tilde{S}_{lm}^R = \frac{i\nu_{ei}v}{\sqrt{3}kv_{Te}^2} \delta_{l1} \delta_{m0},$$

$$\tilde{S}_{lm}^E = \frac{v}{\sqrt{3}v_{Te}} \delta_{l1} \delta_{m1}, \quad \tilde{S}_{lm}^U = \frac{i\nu_{ei}v}{\sqrt{3}kv_{Te}^2} \delta_{l1} \delta_{m1}$$

— источники, соответствующие возмущениям плотности и потенциальной компоненты электрического поля (N), температуры (T), поперечной компоненты электрического поля (E) и средней скорости ионов (R, U). Вклад в (10) электрон-электронного интеграла столкновений \tilde{C}_{ee}^{lm} определяется выражением (4) с заменой f_{lm}^e на $f_M^e \psi_{lm}^A$.

Уравнение для первой азимутальной гармоники ($m = 1$) функции распределения (9) может быть непосредственно использовано для вычисления поперечных электронных потоков и соответствующих коэффициентов переноса. Для вычисления продольных компонент электронных потоков

начальные возмущения плотности и температуры должны быть исключены из выражения для нулевой азимутальной гармоники ($m = 0$) функции распределения (8). Это достигается, если взять первые два момента функции распределения (8), получив для фурье-компонент возмущений плотности

$$\delta n_{\mathbf{k}\omega}^e = 4\pi \int_0^\infty dv v^2 f_0^e$$

и температуры

$$\delta T_{\mathbf{k}\omega}^e = \frac{4\pi m_e}{3n_e} \int_0^\infty dv v^2 (v^2 - 3v_{Te}^2) f_0^e, \quad f_0^e = \frac{f_{00}^e}{\sqrt{4\pi}}$$

следующую систему уравнений:

$$\frac{\delta n_{\mathbf{k}\omega}^e}{n_e} = i \frac{e(E_z)_{\mathbf{k}\omega}}{kT_e} + \left(\frac{\delta n_{\mathbf{k}e}(0)}{n_e} - \omega \frac{e(E_z)_{\mathbf{k}\omega}}{kT_e} \right) J_N^N + \frac{3}{2} \frac{\delta T_{\mathbf{k}e}(0)}{T_e} J_N^T - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}\omega}^i J_N^R, \quad (11)$$

$$\frac{\delta T_{\mathbf{k}\omega}^e}{T_e} = \left(\frac{\delta n_{\mathbf{k}e}(0)}{n_e} - \omega \frac{e(E_z)_{\mathbf{k}\omega}}{kT_e} \right) J_T^N + \frac{3}{2} \frac{\delta T_{\mathbf{k}e}(0)}{T_e} J_T^T - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}\omega}^i J_T^R,$$

где использованы моменты базисных функций:

$$J_B^A = \frac{4\pi}{n_e} \int_0^\infty v^2 dv \psi_{lm}^A f_M^e \tilde{S}_{lm}^B. \quad (12)$$

После разрешения двух алгебраических уравнений (11) относительно начальных пространственных фурье-компонент возмущений плотности и температуры имеем следующее выражение для изотропной части функции распределения f_{l0}^e :

$$\frac{f_{l0}^e}{\sqrt{4\pi}} = i \frac{e(E_z)_{\mathbf{k}\omega}}{kT_e} \delta_{l0} f_M^e + \left(\frac{\delta n_{\mathbf{k}\omega}^e}{n_e} - i \frac{e(E_z)_{\mathbf{k}\omega}}{kT_e} \right) \times \left[\frac{J_T^T \psi_{l0}^N - J_T^N \psi_{l0}^T}{D_{NT}^{NT}} f_M^e + \frac{\delta T_{\mathbf{k}\omega}^e}{T_e} \frac{J_N^N \psi_{l0}^T - J_N^T \psi_{l0}^N}{D_{NT}^{NT}} f_M^e - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}\omega}^i \left(\psi_{l0}^R - \frac{D_{NT}^{RT}}{D_{NT}^{NT}} \psi_{l0}^N - \frac{D_{NT}^{NR}}{D_{NT}^{NT}} \psi_{l0}^T \right) \right] f_M^e, \quad (13)$$

где

$$D_{AB}^{CD} = J_A^C J_B^D - J_A^D J_B^C.$$

С использованием этого выражения можно вычислить все продольные электронные потоки через моменты базисных функций (12).

2.1. Решение кинетического уравнения. Нелокальная электронная гидродинамика

Кинетические уравнения для базисных функций (10) представляют собой бесконечную систему уравнений. Процедура решения этой системы допускает удобную для практического применения формулировку исходя из того, что первое слагаемое в правой части выражения для l -й гармоники электрон-электронного интеграла столкновений (4) значительно превосходит все остальные слагаемые при $l \gg 1$ [19]. По этой причине, начиная с некоторого большого значения l_{max} , система уравнений для всех базисных функций принимает следующий вид:

$$-i\omega\psi_{lm}^A + ikv\sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}}\psi_{l-1,m}^A + ikv\sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}}\psi_{l+1,m}^A = -\frac{l(l+1)}{2}\nu^*\psi_{lm}^A, \quad (14)$$

где

$$\nu^* = \nu_{ei} + \nu_{ee} \left(I_0^0 + \frac{2J_{-1}^0}{3} - \frac{I_2^0}{3} \right).$$

Эта система может быть решена, следуя методу суммирования, описанному в работах [5, 13, 14], с помощью введения эффективных частот ν_{lm} столкновений:

$$\psi_{lm}^A = -i\sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}} \frac{kv}{\nu_{lm}} \psi_{l-1,m}^A, \quad \nu_{lm} = -i\omega + \frac{1}{2}l(l+1)\nu^* + ikv\sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}} \frac{\psi_{l+1,m}^A}{\psi_{lm}^A}, \quad (15)$$

для которых получаем рекуррентное соотношение

$$\nu_{lm} = -i\omega + \frac{1}{2}l(l+1)\nu^* + \frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1} \frac{k^2 v^2}{\nu_{l+1,m}}. \quad (16)$$

Уравнение (16) дает представление ν_{lm} в виде бесконечной дроби. Для достаточно точного вычисления функций $\nu_{l_{max},1}$ и $\nu_{l_{max},0}$ обычно необходимо учитывать порядка 20–30 членов в рекуррентном соотношении (16).

Таким образом, чтобы найти базисные функции, остается решить конечную систему уравнений (10), получающуюся после подстановки соотношения

$$\psi_{l_{max}+1,m}^A = -i\sqrt{\frac{(l_{max}+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}} \frac{kv}{\nu_{l_{max}+1,m}} \psi_{l_{max},m}^A$$

в последнее уравнение этой системы. Такая система уравнений (10) решается с помощью разложения базисных функций ψ_{lm}^A по полиномам Сонина – Лаггера:

$$\psi_{lm}^A = \frac{\lambda_{ei}}{v_{Te}} \sum_{n=0}^{\infty} c_{lmn}^A L_n^{1/2} \left(\frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right). \quad (17)$$

Здесь

$$\lambda_{ei} = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v_{Te}}{\nu_{ei}(v_{Te})} \equiv \frac{v_{Te}}{\nu_{ei}^T}$$

— длина свободного пробега электронов [2]. Подстановка разложения (17) в систему уравнений для базисных функций приводит к линейной системе алгебраических уравнений для коэффициентов разложения c_{lmn}^A . Эта система может быть легко решена численно. Например, мы решали ее с помощью хорошо известного пакета программ «Математика». Вычисления проводились для $l_{max} = 10$, при этом ошибка, связанная с таким «замыканием» бесконечной системы уравнений, не превышала 1–2 %.

Первые три момента кинетического уравнения (1) дают квазигидродинамические уравнения непрерывности, движения и баланса энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n_{\mathbf{k}}^e}{\partial t} + n_e i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^e &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^e}{\partial t} &= -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^* + \frac{1}{m_e n_e} i \mathbf{k} \cdot \hat{\Pi}_{\mathbf{k}}^e - \frac{1}{m_e n_e} \mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{ie}, \\ \frac{\partial \delta T_{\mathbf{k}}^e}{\partial t} + \frac{2}{3n_e} i \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{k}} + \frac{2}{3} T_e i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^e &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^i - \mathbf{j}/en_e$ — средняя скорость электронов и введены также электрический ток и тепловой поток:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= -e \int d^3v \mathbf{v} f^e, \\ \mathbf{q} &= \frac{m_e}{2} \int d^3v \mathbf{v} (v^2 - 5v_{Te}^2) f^e. \end{aligned} \quad (19)$$

Эффективное электрическое поле \mathbf{E}^* определено стандартным образом [2],

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^* = \mathbf{E}_{\mathbf{k}} + i \mathbf{k} \frac{T_e}{e} \left(\frac{\delta n_{\mathbf{k}}^e}{n_e} + \frac{\delta T_{\mathbf{k}}^e}{T_e} \right), \quad (20)$$

а эффективная сила трения

$$\mathbf{R}^{ie} = \mathcal{R}^{ie} - m_e n_e \nu_{ei}^T \mathbf{u}^i$$

и тензор напряжений $\hat{\Pi}^e$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{ie} &= m_e \int d^3v \mathbf{v} \nu_{ei} f^e, \\ \hat{\Pi}^e &= m_e \int d^3v (\hat{\mathbf{I}}/3 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) f^e, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\hat{\mathbf{I}}$ — единичный тензор, введены, следуя работам [14, 16]. Ниже электронные потоки будут рассматриваться в фурье-пространстве k, ω . При этом для упрощения записи индексы k, ω будем опускать, $A_{\mathbf{k}, \omega} \equiv A$. Отметим, что уравнение движения электронов может быть использовано для определения тензора напряжений,

$$i\mathbf{k}\hat{\Pi}^e = \mathbf{R}^{ei} + en_e\mathbf{E}^* - i\omega m_e n_e \mathbf{u}^e,$$

а два оставшихся уравнения системы (18), содержащие только продольные составляющие электронных потоков, полностью эквивалентны системе (11).

Поскольку функция распределения электронов зависит от компонент электрического поля \mathbf{E} и скорости ионов \mathbf{u}^i , направленных как вдоль, так и поперек вектора \mathbf{k} , электронные потоки и сила трения содержат как продольные, так и поперечные компоненты:

$$\mathbf{A}_{\parallel} = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})}{k^2}, \quad \mathbf{A}_{\perp} = \frac{\mathbf{k} \times [\mathbf{A} \times \mathbf{k}]}{k^2}.$$

При этом продольные компоненты могут быть записаны в виде [14]

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\parallel} &= \sigma \mathbf{E}_{\parallel}^* + \alpha i \mathbf{k} \delta T^e + \beta_j en_e \mathbf{u}_{\parallel}^i, \\ \mathbf{q}_{\parallel} &= -\alpha T_e \mathbf{E}_{\parallel}^* - \chi i \mathbf{k} \delta T^e - \beta_q n_e T_e \mathbf{u}_{\parallel}^i, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\parallel}^{ie} &= -(1 - \beta_j) n_e e \mathbf{E}_{\parallel}^* + \beta_q n_e i \mathbf{k} \delta T^e - \\ &\quad - \nu_{ei}^T \beta_r m_e n_e \mathbf{u}_{\parallel}^i, \end{aligned} \quad (23)$$

где введены электрическая проводимость σ , коэффициент термотока α , коэффициент температуропроводности χ и коэффициенты ионного конвективного переноса $\beta_{j,q,r}$:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{e^2 n_e}{k^2 T_e} \left(\frac{J_T^T}{D_{NT}^{NT}} + i\omega \right), \\ \alpha &= -\frac{en_e}{k^2 T_e} \left(\frac{J_T^N + J_T^T}{D_{NT}^{NT}} + i\omega \right), \\ \beta_j &= 1 - \frac{D_{NT}^{RT}}{D_{NT}^{NT}}, \\ \chi &= \frac{n_e}{k^2} \left(\frac{2J_T^N + J_T^T + J_N^N}{D_{NT}^{NT}} + i \cdot \frac{5}{2} \omega \right), \\ \beta_q &= \frac{D_{NT}^{RT} + D_{NT}^{RN}}{D_{NT}^{NT}}, \\ \beta_r &= 1 + k^2 v_{Te} \lambda_{ei} \times \\ &\quad \times (J_R^R - (1 - \beta_j)(J_R^N + J_R^T) + \beta_q J_R^T). \end{aligned} \quad (24)$$

На первый взгляд коэффициенты переноса наряду с моментами J_A^B изотропной части базисных функций

ψ_{00}^A ($A = N, T$) должны также содержать моменты от первой анизотропной гармоники ψ_{10}^A как результат интегрирования в соотношениях (13). Однако эти моменты могут быть также выражены через J_A^B после интегрирования уравнения (10) для $l = 0$ и учета законов сохранения частиц и энергии в электрон-электронном интеграле столкновений:

$$\int_0^{\infty} d^3 v C_{ee} = 0, \quad \int_0^{\infty} d^3 v v^2 C_{ee} = 0. \quad (25)$$

Один и тот же коэффициент α входит как в выражение для электрического тока, так и в выражение для теплового потока, а в выражении для силы трения появляется только один дополнительный коэффициент β_r . Это является отражением симметрии Онсагера для коэффициентов переноса и проявляется в симметрии моментов базисных функций $J_A^B = J_B^A$ ($A, B = N, T, R$) для произвольных $k \lambda_{ei}$, ω / ν_{ei}^T и Z .

Поперечные электронные потоки определяются посредством первой гармоники функции распределения $f_{1,\pm 1}$ и выражаются через поперечные компоненты электрического поля и средней скорости ионов следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\perp} &= \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + en_e \beta_{\perp j} \mathbf{u}_{\perp}^i, \\ \mathbf{q}_{\perp} &= -\alpha_{\perp} T_e \mathbf{E}_{\perp} - n_e T_e \beta_{\perp q} \mathbf{u}_{\perp}^i, \\ \mathbf{R}_{\perp}^{ie} &= -(1 - \beta_{\perp j}) n_e e \mathbf{E}_{\perp} - \\ &\quad - \nu_{ei}^T m_e n_e \beta_{\perp r} \mathbf{u}_{\perp}^i. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь используются следующие поперечные коэффициенты электронного переноса:

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp} &= \frac{e^2 n_e}{m_e} J_E^E, \quad \beta_{\perp j} = 1 + ik v_{Te} J_E^U, \\ \beta_{\perp r} &= k^2 \lambda_{ei} v_{Te} J_E^U, \\ \alpha_{\perp} &= \frac{4\pi e v_{Te}}{\sqrt{3} T_e} \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} dv v^3 \left(\frac{v^2}{2v_{Te}^2} - \frac{5}{2} \right) \psi_{11}^E f_M^e, \\ \beta_{\perp q} &= -\frac{4\pi ik}{\sqrt{3} n_e} \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} dv v^3 \left(\frac{v^2}{2v_{Te}^2} - \frac{5}{2} \right) \psi_{11}^U f_M^e. \end{aligned} \quad (27)$$

В этих уравнениях симметрия Онсагера проявляется в том, что один и тот же коэффициент β_j входит как в определение электрического тока, так и в определение силы трения, что связано с симметрией: $J_U^E = J_E^U$. Отметим, что в пределе большого

заряда ионов ($Z \gg 1$) базисные функции ψ_{11}^A не зависят от частоты электрон-электронных столкновений и полностью определяются эффективной частотой столкновений ν_{11} , которая может быть получена из уравнения (16) путем замены ν^* на ν_{ei} :

$$\psi_{11}^E = \frac{v}{v_{Te}\nu_{11}\sqrt{3}}, \quad \psi_{11}^U = \frac{i\nu_{ei}v}{kv_{Te}^2\nu_{11}\sqrt{3}}. \quad (28)$$

Подставив эти выражения в соотношения (27), можно получить поперечные коэффициенты переноса [17] в плазме с большим зарядом ионов $Z \gg 1$, которые в этом пределе записываются в квадратурах. При вычислении продольных коэффициентов (в отличие от поперечных) переноса электрон-электронными соударениями нельзя пренебрегать даже в плазме с большим зарядом ионов. По этой причине для них невозможно написать подобные выражения даже в пределе $Z \gg 1$.

Все коэффициенты переноса являются комплексными функциями, которые, будучи приведены к безразмерному виду в классических сильностолкновительных выражениях [1, 2], могут быть параметризованы с помощью величин $k\lambda_{ei}$, ω/ν_{ei}^T и Z . В пределе больших Z нелокальные коэффициенты переноса (24) были вычислены в работах [16, 17], а для произвольного Z продольные коэффициенты переноса были получены только в квазистатическом пределе, $\omega = 0$, [15]. Подчеркнем, что уравнения (18), (22), (23), хотя и выглядят как уравнения гидродинамического типа, на самом деле дают полное кинетическое описание электронов.

3. НЕЛОКАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА

Наиболее полно коэффициенты электронного переноса были исследованы для достаточно медленных процессов в квазистатическом пределе, в котором теория нелокального переноса, предложенная впервые для плазмы с большим зарядом ионов, $Z \gg 1$ [14], была впоследствии распространена на случай произвольного заряда ионов для потенциальных возмущений [15]. Обобщение нелокальной теории переноса на случай быстропеременных процессов в плазме с большим зарядом ионов, $Z \gg 1$, позволило определить область применимости квазистатического приближения [16, 17]:

$$\omega \ll \begin{cases} \nu_{ei}^T, & k\lambda_{ei} < 0.06/\sqrt{Z}, \\ \nu_{ee}^T, \nu_{ei}^T \frac{(k\lambda_{ei})^{4/7}}{Z^{5/7}}, & \frac{0.06}{\sqrt{Z}} < k\lambda_{ei} < 6Z^{2/3}, \\ kv_{Te}, & k\lambda_{ei} > 6Z^{2/3}. \end{cases} \quad (29)$$

Развитая здесь теория для плазмы с произвольным зарядом ионов позволяет сделать вывод, что условия (29) остаются справедливыми для любого Z . Такая впервые сформулированная теория позволяет изучать нестационарные нелокальные процессы переноса для малых возмущений в плазме произвольной степени ионизации.

3.1. Потенциальные компоненты электронных потоков

В сильностолкновительном квазистатическом пределе ($k\lambda_{ei} \ll 1, \omega \ll \nu_{ei}^T$) коэффициенты переноса даются классическими выражениями [1, 2, 29]:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \gamma_\sigma(Z)\sigma_{SH}, & \alpha_0 &= \gamma_\alpha(Z)\alpha_{SH}, \\ \chi_0 &= \gamma_\chi(Z)\chi_{SH}, \end{aligned} \quad (30)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} \sigma_{SH} &= \frac{32n_e e^2}{3\pi m_e \nu_{ei}^T}, & \alpha_{SH} &= \frac{16n_e e}{\pi m_e \nu_{ei}^T}, \\ \chi_{SH} &= \frac{200n_e v_{Te} \lambda_{ei}}{3\pi} \end{aligned}$$

отвечают решению кинетического уравнения для электронов в пределе $k \rightarrow 0$ для лоренцевой плазмы ($Z \gg 1$) [1, 2], без учета электрон-электронных столкновений. Влияние последних описывается с помощью функций $\gamma_\sigma(Z)$, $\gamma_\alpha(Z)$ и $\gamma_\chi(Z)$, вычисленных в статьях [1, 2]. Результат таких вычислений может быть интерполирован с помощью простых выражений [29]

$$\begin{aligned} \gamma_\sigma(Z) &= \frac{0.87 + Z}{2.2 + Z}, & \gamma_\alpha(Z) &= \frac{0.25 + Z}{3.6 + Z}, \\ \gamma_\chi(Z) &= \frac{0.13 + Z}{4.7 + Z}, \end{aligned} \quad (31)$$

которые с точностью до нескольких процентов совпадают с точными значениями. Соотношения (30) естественным образом следуют из общих формул (24).

Коэффициенты ионного конвективного переноса, будучи пропорциональными k^2 , не возникают в классической теории переноса. В квазистатическом

длинноволновом пределе, $k\lambda_{ei} \ll 1$, они ведут себя как

$$\beta_j = 22(\gamma_{\beta j} k\lambda_{ei})^2, \quad \beta_q = 87(\gamma_{\beta q} k\lambda_{ei})^2, \quad (32)$$

$$\beta_r = 2.4(\gamma_{\beta r} k\lambda_{ei})^2,$$

где зависимость γ_β от Z может быть аппроксимирована следующими простыми выражениями [15]:

$$\gamma_{\beta j} = \frac{Z - 0.19}{Z + 4.9}, \quad \gamma_{\beta q} = \frac{Z - 0.5}{Z + 7}, \quad (33)$$

$$\gamma_{\beta r} = \frac{Z + 1.1}{Z + 2.3}.$$

В сильностолкновительном пределе $k\lambda_{ei} \ll 1$ зависимость коэффициентов переноса от частоты была рассмотрена в работе [22] и также естественным образом следует из нашей теории. С ростом ω действительная часть классических коэффициентов переноса σ , α , χ монотонно уменьшается, а мнимая часть — растет, достигает максимума при $\omega \sim 0.1\nu_{ei}^T$, затем уменьшается. В высокочастотном пределе, $\omega \gg \nu_{ei}^T$, коэффициенты переноса σ , α , χ становятся чисто мнимыми, коэффициенты β_j и β_r стремятся к единице, имея малые мнимые части, а коэффициент β_q мал по абсолютной величине, причем его действительная часть мала по сравнению с мнимой. При этом в высокочастотном пределе коэффициенты переноса не зависят от электрон-электронных столкновений (и, соответственно, от заряда ионов), в то время как частота электрон-ионных столкновений определяет коэффициент α и действительные части коэффициентов σ и χ . Отметим, что в плазме с большим зарядом ионов коэффициенты переноса в локальном пределе $k\lambda_{ei} \ll 1$ могут быть представлены в виде квадратур [16, 17]. В бесстолкновительном пределе, $k\lambda_{ei} \gg 1$, когда коэффициенты переноса вообще не зависят от заряда ионов Z , функции (24) были описаны в работах [16, 17].

С помощью соотношений (24) могут быть получены выражения для коэффициентов переноса в нестационарном случае для произвольного значения параметра столкновительности. С ростом $k\lambda_{ei}$ коэффициенты переноса отклоняются от своих классических значений и существует широкая область параметров $k\lambda_{ei}$, ω/ν_{ei}^T и Z , в которой процессы переноса в плазме не могут быть описаны с использованием известных предельных случаев, причем эта область тем шире, чем больше заряд ионов. В меньшей степени отклонение от известных предельных случаев возникает для электронной проводимости, для которой эта область может быть определена следующим образом: $0.2/\sqrt{Z} \lesssim k\lambda_{ei} \lesssim 5/\sqrt{Z}$, $\omega/\nu_{ei}^T \lesssim 3k\lambda_{ei}$.

Для коэффициентов температуропроводности и термотока область отклонения от классических пределов значительно шире: $0.06/\sqrt{Z} \lesssim k\lambda_{ei} \lesssim 15/\sqrt{Z}$, $\omega/\nu_{ei}^T \lesssim 10k\lambda_{ei}$. В этой области меняется и характер частотной зависимости коэффициентов переноса. Так, коэффициенты α и χ характеризуются существенно немонотонной зависимостью от частоты, что хорошо видно на рис. 1. Например, действительная часть коэффициента температуропроводности сначала увеличивается с ростом частоты ω по сравнению со статическим случаем, а затем при $\omega/\nu_{ei}^T > 1$ убывает. Соответственно, мнимая часть коэффициента температуропроводности сначала отрицательна, убывает до минимального значения, затем начинает расти, меняет знак, достигает максимума и снова убывает. При этом и мнимая, и действительная части коэффициента температуропроводности имеют максимум при $\omega/\nu_{ei}^T \sim 1$ для $k\lambda_{ei} \approx 1$ (см. рис. 1). Еще более сложная зависимость от частоты возникает для термотокавого коэффициента α , мнимая и действительная части которого имеют по три точки перегиба. При этом действительная часть α меняет знак с ростом ω . При $\omega < \nu_{ei}^T$ имеется существенная зависимость как действительных, так и мнимых частей коэффициентов переноса от степени ионизации Z . С ростом $k\lambda_{ei}$ зависимость от Z ослабевает и при $k\lambda_{ei} > 15\sqrt{Z}$ все коэффициенты переноса не зависят от заряда ионов Z и описываются бесстолкновительными асимптотиками [16, 17].

Выражение для продольной составляющей теплового потока удобно переписать через градиент температуры и электрический ток [2]. В соответствии с этим, исключая электрическое поле из уравнений (22), получаем

$$\mathbf{q}_{\parallel} = -\frac{\alpha T_e}{\sigma} \mathbf{j}_{\parallel} - \kappa i \mathbf{k} \delta T_e - n_e T_e \beta \mathbf{u}_{\parallel}^i, \quad (34)$$

$$\kappa = \chi - \frac{\alpha^2 T_e}{\sigma}, \quad \beta = \beta_q - \frac{e\alpha}{\sigma} \beta_j,$$

где введены коэффициент теплопроводности κ и коэффициент ионного конвективного переноса β . В сильностолкновительном пределе $k\lambda_{ei} \ll 1$, величина κ в квазистатическом пределе соответствует классическому выражению для коэффициента теплопроводности [1, 2]:

$$\kappa = \gamma_\kappa(Z) 128 n_e \nu_{Te} \lambda_{ei} / 3\pi,$$

где функция γ_κ хорошо аппроксимируется следующим выражением [13]:

$$\gamma_\kappa(Z) = (0.24 + Z)/(4.2 + Z).$$

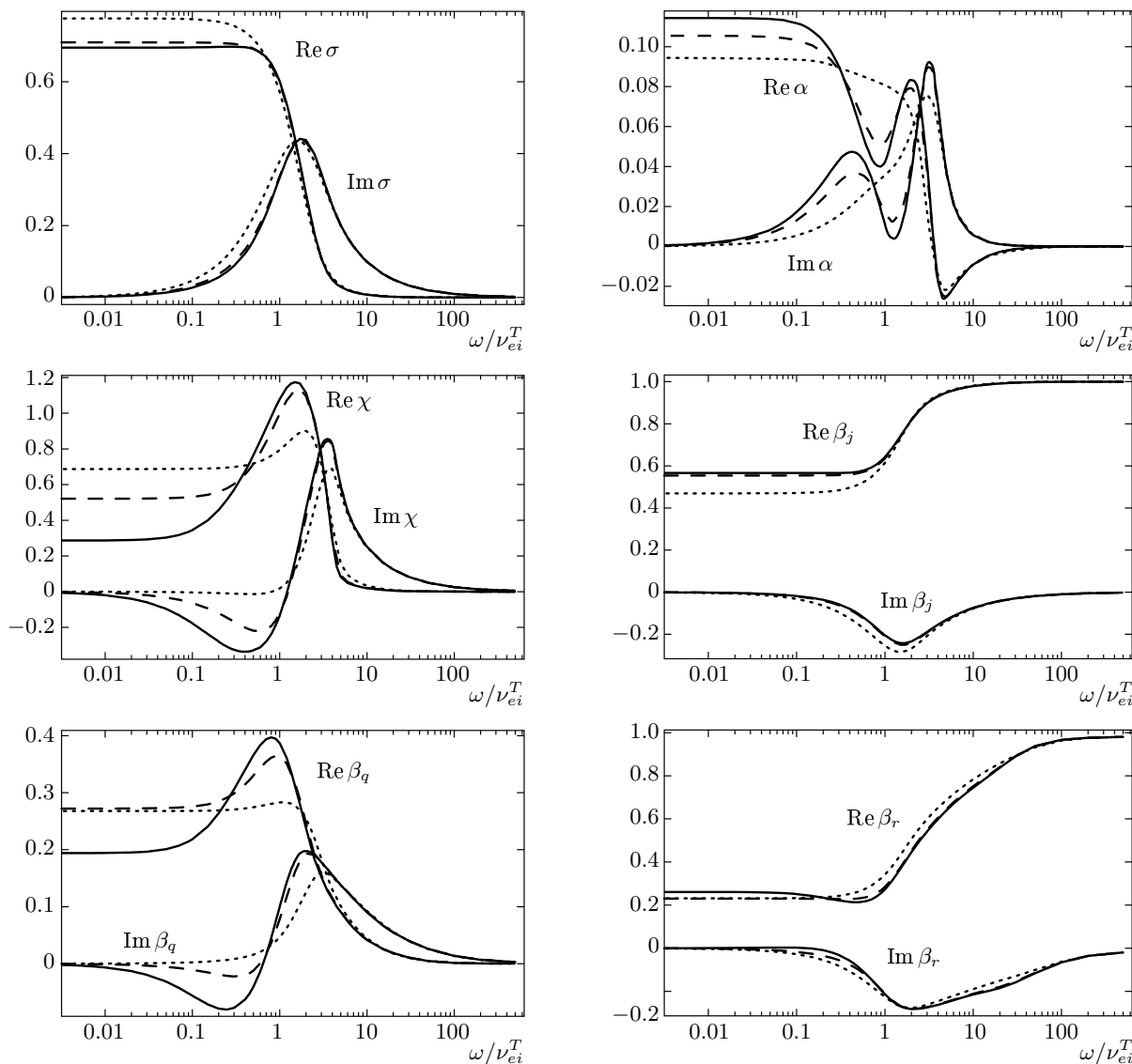


Рис. 1. Зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов переноса σ , α , χ , $\beta_{j,q,r}$ от ω/ν_{ei}^T для $Z = 1$ (пунктирные линии), 8 (штриховые), 64 (сплошные) при $k\lambda_{ei} = 1$

Зависимости коэффициента теплопроводности κ и коэффициента ионного конвективного переноса β от частоты приведены на рис. 2. Отметим сильную зависимость этих коэффициентов от заряда ионов.

Формулы (34) для $j = 0$ (бестоковая плазма) составляют основу описания переноса в плазме ЛТС. При этом соответствующие уравнения нелокальной гидродинамики (18) с нестационарными коэффициентами переноса позволяют описать перенос тепла в плазме с произвольным зарядом ионов для любых пространственных и временных масштабов возмущений.

3.2. Непотенциальные коэффициенты электронного переноса

Учет эффектов нелокальности приводит к тому, что в общем случае поперечные коэффициенты переноса не совпадают с продольными. Это связано с возникновением зависимости коэффициентов переноса от волнового числа k , которая возникает в области $k\lambda_{ei} > 0.06\sqrt{Z}$, $0.1\omega/\nu_{ei}^T$. В этой области непотенциальные коэффициенты электронного переноса требуют отдельного рассмотрения.

Для плазмы с высокой степенью ионизации, $Z \gg 1$, поперечные коэффициенты переноса не зави-

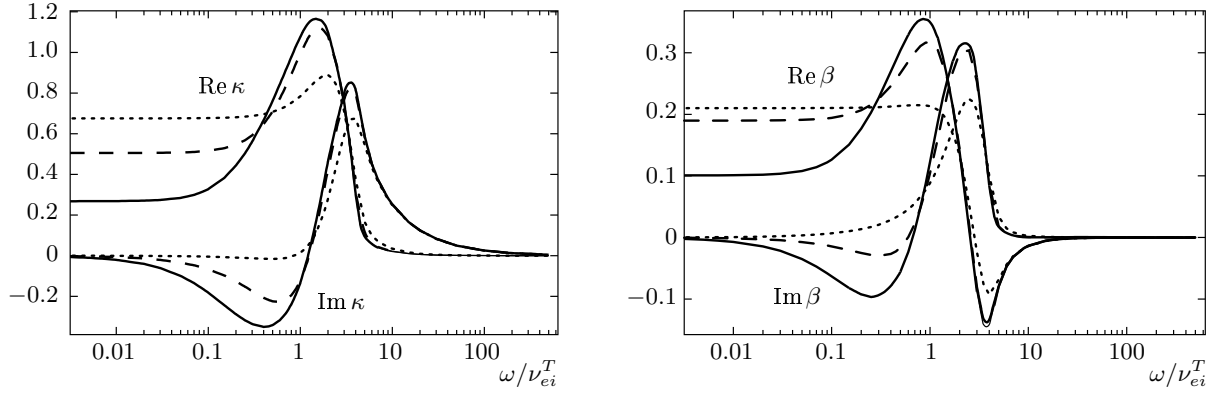


Рис. 2. Зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов переноса κ, β от ω/ν_{ei}^T для $Z = 1$ (пунктирные линии), 8 (штриховые), 64 (сплошные) при $k\lambda_{ei} = 1$

сят от электрон-электронных столкновений и могут быть представлены в виде [17]

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp} &= \frac{e^2 n_e}{m_e} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dx \frac{x^4 \exp[-x^2/2]}{3\nu_{11}(x)}, \\ \alpha_{\perp} &= \frac{en_e}{m_e} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dx (x^2 - 5) \frac{x^4 \exp[-x^2/2]}{6\nu_{11}(x)}, \\ \beta_{j\perp} &= 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dx \nu_{ei}(x) \frac{x^4 \exp[-x^2/2]}{3\nu_{11}(x)}, \\ \beta_{q\perp} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dx \nu_{ei}(x) (5 - x^2) \frac{x^4 \exp[-x^2/2]}{6\nu_{11}(x)}, \\ \beta_{r\perp} &= 1 - \int dx x \frac{\nu_{ei}(x) \exp[-x^2/2]}{3\nu_{11}(x)}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $x = v/v_{Te}$, а в уравнении (16) вместо величины ν^* надо использовать ν_{ei} . В сильностолкновительном пределе, получаемом из уравнений (35) при подстановке $\nu_{11} = \nu_{ei} - i\omega$, поперечные коэффициенты переноса совпадают с продольными [16]. В этом пределе анизотропия коэффициентов пропадает также и в плазме с произвольным зарядом ионов. В бесстолкновительном пределе поперечные коэффициенты переноса не зависят от частоты столкновений и, следовательно, от заряда ионов. В этом пределе коэффициенты ионного конвективного переноса $\beta_{\perp j}$ и $\beta_{\perp r}$ стремятся к единице, а коэффициент $\beta_{\perp q}$ — к нулю. При этом коэффициенты α_{\perp} и σ_{\perp} являются функциями одного параметра $p = \omega/kv_{Te}$ и могут быть представлены аналогично продольным коэффициентам (см. [16, 17]) с использованием подстановки $\nu_{11} = kv_{Te}h_1$ в уравнениях (35), где

$$h_{l-1} = -ip + \frac{x^2 l^2}{(4l^2 - 1)h_l},$$

или с помощью решения стандартной начальной задачи для бесстолкновительного уравнения Власова, что приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp} &= i \frac{e^2 n_e}{m_e \omega} J_+(p), \\ \alpha_{\perp} &= i \frac{en_e}{2m_e \omega} [(p^2 - 1)J_+(p) - p], \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$J_+(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_{i\infty}^x dt \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

— стандартная дисперсионная функция, возникающая в бесстолкновительной теории плазмы [23]. В квазистатическом пределе $\omega \ll kv_{Te}$ эти коэффициенты имеют асимптотики, отличные от асимптотик продольных коэффициентов,

$$\sigma_{\perp} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2 n_e}{m_e kv_{Te}}, \quad \alpha_{\perp} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{en_e}{m_e kv_{Te}}, \quad (37)$$

а в высокочастотном пределе $\omega \gg kv_{Te}$ их асимптотики совпадают с продольными.

На рис. 3 приведены зависимости поперечных коэффициентов переноса в квазистационарном пределе от параметра столкновительности $k\lambda_{ei}$, а на рис. 4 представлены их зависимости от ω/kv_{Te} для $k\lambda_{ei} = 1$. Отметим, что поперечные коэффициенты переноса имеют более плавную зависимость от частоты по сравнению с продольными коэффициентами.

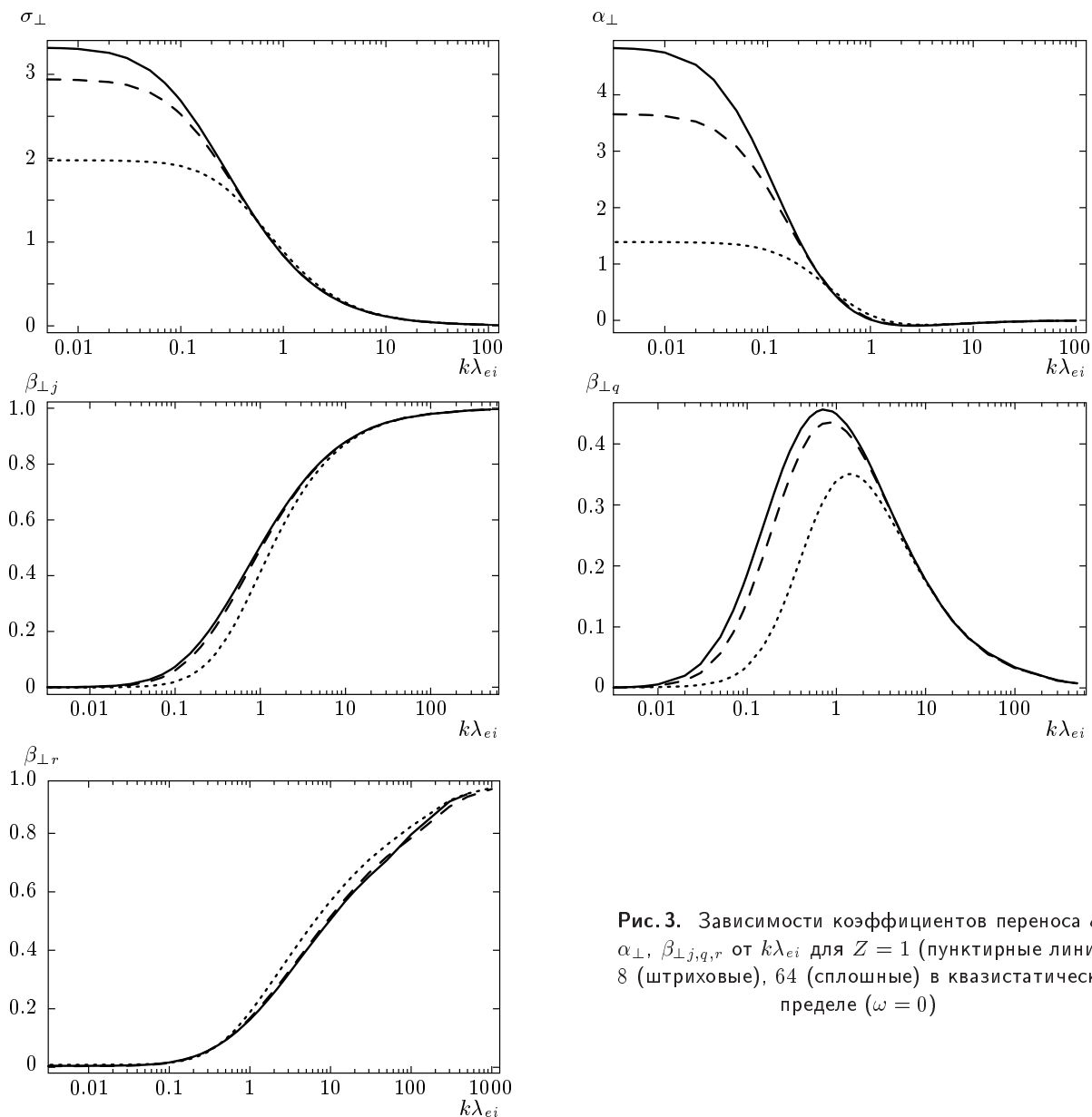


Рис. 3. Зависимости коэффициентов переноса σ_{\perp} , α_{\perp} , $\beta_{\perp j,q,r}$ от $k\lambda_{ei}$ для $Z = 1$ (пунктирные линии), 8 (штриховые), 64 (сплошные) в квазистатистическом пределе ($\omega = 0$)

4. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

В соответствии с общими положениями кинетической теории плазмы, электронная диэлектрическая проницаемость изотропной плазмы содержит как потенциальную (ϵ^l), так и непотенциальную (ϵ^t) части:

$$\epsilon_{ij} = \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon^l + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon^t. \quad (38)$$

Гидродинамические уравнения (18) полностью эквивалентны кинетическому описанию плазмы и определяют линейный отклик столкновительной полностью ионизованной плазмы на малые возмущения во всей области параметров (ω, k). Для вычисления продольной проницаемости

$$\epsilon^l = 1 + 4\pi i \frac{j_{\parallel}}{\omega E_{\parallel}} \quad (39)$$

исключаем возмущения плотности и температуры из выражения для электрического тока, разрешая систему (18), что дает

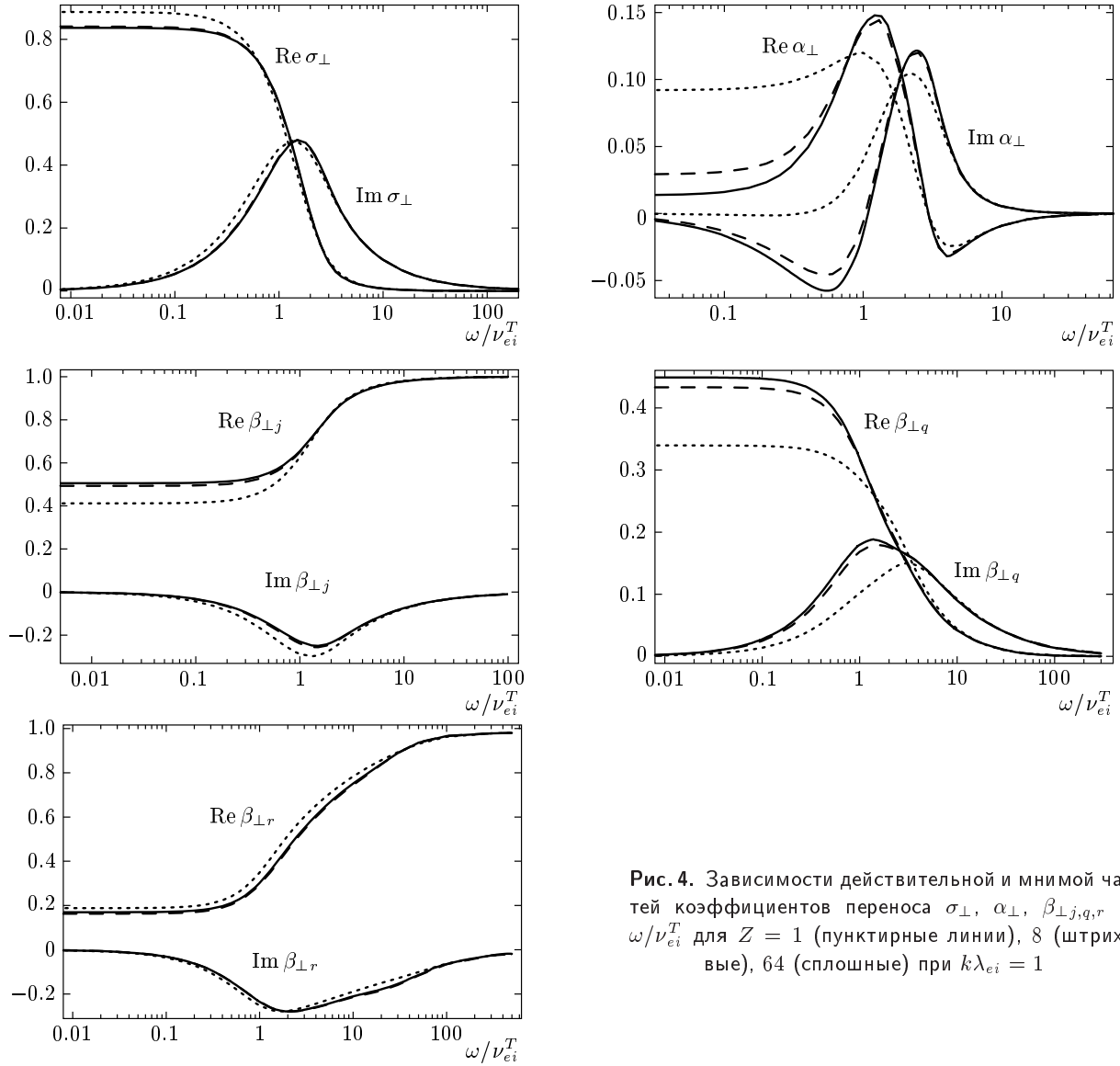


Рис. 4. Зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов переноса σ_{\perp} , α_{\perp} , $\beta_{\perp j,q,r}$ от ω/ν_{ei}^T для $Z = 1$ (пунктирные линии), 8 (штриховые), 64 (сплошные) при $k\lambda_{ei} = 1$

$$\begin{aligned}
 j_{\parallel} = & \left[1 - i\omega \left(\frac{e^2 n_e}{k^2 T_e \sigma} + \frac{2n_e(\sigma + e\alpha)^2}{\sigma^2(2k^2\kappa - 3i\omega n_e)} \right) \right]^{-1} \times \\
 & \times \left\{ -\frac{ie^2 n_e}{k^2 T_e} \omega E_{\parallel} + \right. \\
 & \left. + en_e u_{\parallel}^i \left[1 - i\omega \left(\frac{e^2 n_e \beta_j}{k^2 T_e \sigma} + \frac{2n_e(\sigma + e\alpha)(1 - \beta)}{\sigma(2k^2\kappa - 3i\omega n)} \right) \right] \right\} \equiv \\
 \equiv & -\frac{ie^2 n_e}{k^2 T_e} \omega(1 + i\omega J_N^N) E_{\parallel} + en_e u_{\parallel}^i (1 + i\omega J_N^R). \quad (40)
 \end{aligned}$$

Для вычисления поперечной диэлектрической проницаемости следует воспользоваться уравнениями (26). Ниже мы ограничимся анализом диэлектриче-

ской проницаемости плазмы в пределе бесконечно тяжелых ионов, когда $u^i = 0$.

4.1. Продольная восприимчивость плазмы

Будем характеризовать парциальный вклад $\delta\epsilon_e$ электронов в продольную диэлектрическую проницаемость ($\epsilon^l = 1 + \delta\epsilon_e$) величиной $\delta\epsilon \equiv k^2 \lambda_{De}^2 \delta\epsilon_e$, где λ_{De} — дебаевский радиус электронов. Из соотношения (40) получаем для $\delta\epsilon$ следующее выражение:

$$\delta\epsilon = \left[1 - i\omega \left(\frac{e^2 n_e}{k^2 T \sigma} + \frac{2n_e(\sigma + e\alpha)^2}{\sigma^2(2k^2\kappa - 3i\omega n_e)} \right) \right]^{-1} \equiv 1 + i\omega J_N^N, \quad (41)$$

позволяющее выразить диэлектрическую проницаемость через коэффициенты переноса и установить конкретный вклад от каждого из них. При этом диэлектрическая проницаемость фактически определяется единственным моментом J_N^N . В пределе больших Z продольная диэлектрическая проницаемость плазмы (41) была подробно исследована в работе [16]. Отметим, что в области частот, где можно пренебречь электрон-электронными столкновениями, из (41) мы восстанавливаем диэлектрическую проницаемость, полученную в работах [19, 27, 28], которая в бесстолкновительном кинетическом пределе $\nu_{ei} \rightarrow 0$ записывается как

$$\epsilon = 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{Te}} \right) \right]. \quad (42)$$

Для быстрых процессов, $\omega \gg \nu_{ei}^T$, диэлектрическая проницаемость определяется высокочастотной электрической проводимостью и не зависит от электрон-электронных столкновений, вклад которых мал (в $\nu_{ei}^T/Z\omega$ раз) по сравнению с вкладом в диэлектрическую проницаемость электрон-ионных столкновений [30]. В этом пределе ϵ описывается хорошо известным выражением [21]

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_{ei}^T}{\omega} \right), \quad (43)$$

где ω_{pe} — плазменная частота. Зависимости продольной диэлектрической проницаемости от параметра ω/kv_{Te} представлены на рис. 5 для $k\lambda_{ei} = 1$ и для разных значений Z . Изменение степени ионизации меняет асимптотику мнимой части диэлектрической проницаемости в пределе малых частот, а также поведение мнимой и действительной частей проницаемости в интервале частот $0.01 < \omega/kv_{Te} < 2$.

4.2. Поперечная восприимчивость плазмы

Поперечная диэлектрическая проницаемость полностью определяется поперечной электрической проводимостью (27):

$$\epsilon_{\perp} = 1 + \frac{4\pi i \sigma_{\perp}}{\omega} = 1 + i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} J_E^E. \quad (44)$$

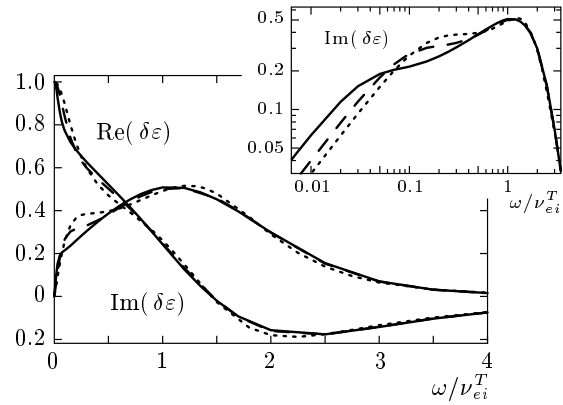


Рис. 5. Зависимости действительной и мнимой частей $\delta\epsilon(\omega, k)$ (41) от ω/ν_{ei}^T при $k\lambda_{ei} = 1$ для $Z = 1$ (пунктирные линии), 8 (штриховые), 64 (сплошные)

В пределе $Z \gg 1$ выражение для поперечной диэлектрической проницаемости следует из уравнения (35) [26]:

$$\epsilon_{\perp} = 1 + i\omega_{pe}^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx \frac{x^4 \exp(-x^2/2)}{3\nu_{11}\omega}. \quad (45)$$

Подстановка в это уравнение соотношения $\nu_{11} = \nu_{ei} - i\omega$, оправданное в пределе $k\lambda_{ei} \ll 1$, приводит к выражению для поперечной диэлектрической проницаемости, известному как плазменная модель Друда [24]:

$$\epsilon_{\perp} = 1 + i\omega_{pe}^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx \frac{x^4 \exp(-x^2/2)}{3(\nu_{ei} - i\omega)\omega}, \quad (46)$$

часто используемому и вне области его применимости.

В высокочастотном пределе $\omega \gg \nu_{ei}^T, kv_{Te}$ поперечная диэлектрическая проницаемость совпадает с продольной (43). Отметим, что соотношение (46) приводит к правильному высокочастотному пределу для плазмы с произвольным зарядом ионов, в котором высокочастотная диэлектрическая проницаемость не зависит от электрон-электронных столкновений [30]. В низкочастотном классическом пределе статическая поперечная диэлектрическая проницаемость определяется столкновениями электронов как с ионами, так и с электронами, $\epsilon_{\perp} = 1 + 4\pi i \sigma_0/\omega$, где величина σ_0 дается выражением (30). Такая статическая поперечная диэлектрическая проницаемость приводит к нормальному скин-эффекту в задаче о поглощении электромагнитного излучения. В бес-

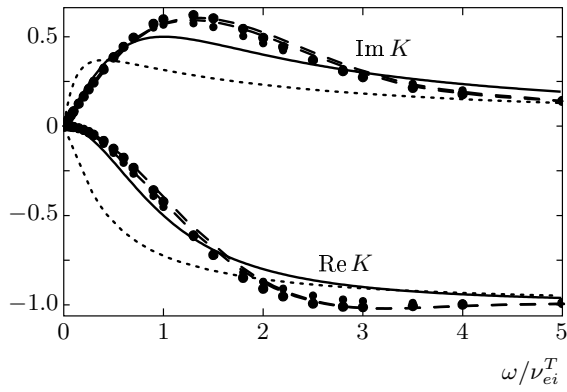


Рис. 6. Зависимости действительной и мнимой частей функции $K(\omega, k)$ для поперечной диэлектрической проницаемости (44) от ω/ν_{ei}^T при $k\lambda_{ei} = 1$ для $Z = 1$ (малые точки), 64 (большие точки) в сравнении с плазменной моделью Друда (46) (пунктирные линии), моделью Друда для металлов (48) (сплошные линии) и приближенной формулой (49) (штриховые линии)

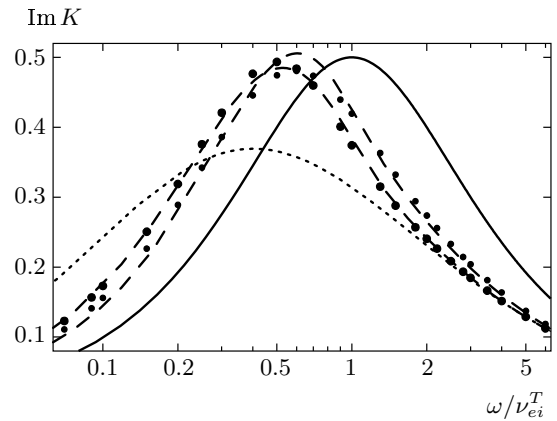


Рис. 7. Зависимости мнимой части функции $K(\omega, k)$ для поперечной диэлектрической проницаемости (44) от ω/ν_{ei}^T при $k\lambda_{ei} = 0.3$ для $Z = 1$ (малые точки), 64 (большие точки) в сравнении с плазменной моделью Друда (46) (пунктирная линия), моделью Друда для металлов (48) (сплошная линия) и приближенной формулой (49) (штриховые линии)

столкновительном пределе $k\lambda_{ei} \gg 1$ поперечная диэлектрическая проницаемость совпадает с выражением, полученным из бесстолкновительного уравнения Власова [23]:

$$\epsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{Te}} \right), \quad (47)$$

которое в низкочастотном пределе $\omega \ll kv_{Te}$ описывает аномальный скин-эффект:

$$\epsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2}{kv_{Te} \omega}.$$

Заметим также, что часто вместо (46) для поперечной диэлектрической проницаемости плазмы используется более простое феноменологическое выражение Друда

$$\epsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu_{ei}^T)}, \quad (48)$$

заимствованное из теории металлов и, так же как и (46), используемое в области параметров $k\lambda_{ei} \sim 1$, $\omega \sim \nu_{ei}^T$, в которой заведомо не существует аналитической формулы для ϵ_{\perp} .

Поведение полученной нами поперечной диэлектрической проницаемости иллюстрируется рис. 6 с помощью функции $K(k\lambda_{ei}, \omega/\nu_{ei}^T, Z)$, определенной соотношением $\epsilon_{\perp} = 1 + (\omega_{pe}^2/\omega^2)K$. Из рисунка видно, что наиболее существенная зависимость от Z наблюдается в области $\omega \sim \nu_{ei}^T$. С ростом параметра столкновительности, $k\lambda_{ei}$, явная зависимость от

Z быстро пропадает и в практическом плане при $k\lambda_{ei} > 1$ для описания поперечной диэлектрической проницаемости можно воспользоваться выражением для лоренцевой плазмы (45). Для иллюстрации отличия ϵ_{\perp} от выражений (48) и (46), отвечающих упрощенным моделям Друда, эти зависимости (48), (46) также представлены на рис. 6.

Остановимся более подробно на исследовании мнимой части поперечной диэлектрической проницаемости, определяющей, например, поглощение лазерного излучения в плотной плазме, в промежуточной области параметра столкновительности $k\lambda_{ei} \lesssim 1$ и частот $\omega \sim \nu_{ei}^T$. В этой области нет количественных оценок влияния электрон-электронных столкновений на диэлектрическую проницаемость, максимальный вклад которых имеет место в сильно-столкновительном низкочастотном пределе, что приводит к отличию мнимой части диэлектрической проницаемости для $Z = 1$ в 1.7 раза по сравнению с соответствующим выражением для лоренцевской плазмы [30]. С ростом $k\lambda_{ei}$ и ω влияние электрон-электронных соударений уменьшается. На рис. 7 приведено сравнение нашего точного результата с результатами часто используемой модели Друда для металлов (48) и плазменной модели Друда (46). Хорошо видно что уже для $k\lambda_{ei} = 0.3$ обе модели Друда, не учитывающие эффекты нелокальности, приводят к значительной (более чем в два раза)

ошибке при вычислении поперечной диэлектрической проницаемости. При этом в области $k\lambda_{ei} \sim 0.3$ электрон-электронные столкновения приводят к отличию мнимой части поперечной диэлектрической проницаемости для $Z = 1$ и $Z = 64$ не более чем на 15 % для одних и тех же значений параметров $k\lambda_{ei}$ и ω/ν_{ei}^T . С ростом $k\lambda_{ei}$ это отличие практически пропадает. Тем самым на основе строгой количественной теории мы доказываем, что с точностью, превышающей 15 %, для описания поглощения электромагнитной волны в плазме с малым Z можно использовать упрощенный подход, пренебрегающий электрон-электронными столкновениями, т.е. использовать результаты теории [17]. Результаты нашей теории хорошо (с точностью не менее 7 %) аппроксимируются выражением (45) с использованием интерполяционной формулы для модифицированной частоты столкновений ν_{11} :

$$\nu_{11} = \frac{4}{3\pi} \left(i\omega - 3\nu_{ei} + \sqrt{k^2 v^2 + (i\omega - 3\nu_{ei})^2} \right) - i\omega + \nu_{ei} G(k, \omega, Z), \quad (49)$$

где функция $G(k, \omega, Z)$ описывает эффект электрон-электронных столкновений (конечного Z),

$$G(k, \omega, Z) = \frac{\nu_{ei}^T / \gamma_\sigma(Z) + 3k\nu_{Te} + (1 - 2i)\omega}{\nu_{ei}^T + 3k\nu_{Te} + (1 - 2i)\omega}. \quad (50)$$

Выражение (49) приводит к правильным асимптотикам для диэлектрической проницаемости во всех пределах и может быть использовано в практических целях для вычисления поперечной диэлектрической проницаемости в плазме с произвольным зарядом ионов для любых значений частот и волнового числа.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе кинетического подхода нами предложена процедура вычисления коэффициентов переноса для малых возмущений в плазме с произвольным зарядом ионов в случае произвольных соотношений между характерными пространственными, временными и столкновительными масштабами плазмы. Полученные квазигидродинамические уравнения фактически заменяют описание плазмы с помощью кинетического уравнения, так как последовательно учитывают кинетические эффекты в условиях как пространственной, так и временной нелокальности. Развитая теория обобщает ранее представленные частные модели переноса на случай произвольных параметров (Z, ω, k) и описывает все предельные переходы к известным результатам.

Предложен удобный алгоритм вычисления диэлектрической проницаемости плазмы с любым Z в полностью ионизованной плазме для произвольных значений частоты и волнового числа. Полученная диэлектрическая проницаемость описывает плавный переход от гидродинамической области сильных столкновений до бесстолкновительной кинетической области и от статического до высокочастотного пределов. На основе развитой теории, например, открывается возможность исследовать отклик плазмы в такой промежуточной области волновых чисел и частот, в которой они оказываются соответственно порядка обратной длины свободного пробега и частоты столкновений электронов. Именно для таких параметров количественное описание отклика плазмы особенно затруднено в силу необходимости проведения численного моделирования. В качестве примера с использованием развитой теории детально проанализирован вклад электрон-электронных столкновений в мнимую часть поперечной диэлектрической проницаемости, определяющей поглощение лазерного излучения, и найдено приближенное выражение, описывающее поперечную диэлектрическую проницаемость для произвольных значений Z , ω и k .

Развитая нелокальная нестационарная теория электронного переноса в плазме, позволяющая учесть кинетические эффекты при вычислении теплового потока и диэлектрической проницаемости плазмы, особенно важна для ЛТС, где эффективность поглощения лазерной энергии и ее перенос в глубь мишени являются ключевыми моментами успешного осуществления термоядерного синтеза. В то время как классическое описание теплового потока и его эвристические модификации не позволяют достичь согласия с экспериментальными данными, нелокальные модели переноса, основанные даже на линейной теории, значительно лучше описывают эксперимент [3]. Развитая теория также актуальна в связи с идеей использования «спеклового» (speckle) лазерного пучка в экспериментах по ЛТС для управления неизбежными неоднородностями, присутствующими в лазерном излучении, достижения эффективного вклада лазерной энергии в термоядерную мишень и ее однородного сжатия. При этом уже продемонстрировано, что описание релаксации температуры в мелкомасштабных ($L \sim \lambda_{ei}$) горячих лазерных пятнах в плазме с большим зарядом ионов $Z \gg 1$ требует учета как эффектов нелокальности, так и нестационарности коэффициентов переноса [18, 31].

Представленная теория нелокального нестационарного переноса может быть непосредственно использована для изучения неустойчивостей лазерной плазмы. Необходимость учета нелокальности электронного переноса в квазистационарном пределе для филаментационной неустойчивости и неустойчивости Мандельштама–Бриллюэна была продемонстрирована в работах [32, 33]. Разработанный нами подход открывает перспективу разработки теории для сильно нестационарной лазерной плазмы с произвольным зарядом ионов. Еще одним важным направлением применения диэлектрической проницаемости являются расчеты сечения томсоновского рассеяния, широко используемого для диагностики плазмы [3].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-16103) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-5429.2006.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Spitzer and R. Härm, *Phys. Rev.* **89**, 977 (1953).
2. С. И. Брагинский, в сб. *Вопросы теории плазмы*, Атомиздат, Москва (1963), т. 1, с. 183.
3. G. Gregori, S. H. Glenzer, J. Knight et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 205006 (2004).
4. A. R. Bell, *Phys. Fluids* **26**, 279 (1983).
5. J. F. Luciani, P. Mora, and J. Virmont, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1664 (1983).
6. J. R. Albritton, E. A. Williams, I. B. Bernstein, and K. P. Swartz, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1887 (1986).
7. G. W. Hammett and F. W. Perkins, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 3019 (1990); G. W. Hammett, W. Dorland, and F. W. Perkins, *Phys. Fluids B* **4**, 2052 (1992).
8. Z. Chang and J. D. Callen, *Phys. Fluids B* **4**, 1167 (1992).
9. N. Mattor and S. E. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3419 (1997).
10. R. D. Hazeltine, *Phys. Plasmas* **5**, 3282 (1998).
11. G. Schurtz et al., *Phys. Rev. Lett.* **98**, 095002 (2007).
12. В. П. Силин, *УФН* **172**, 1021 (2002).
13. E. M. Epperlein, *Phys. Plasmas* **1**, 109 (1994).
14. V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, V. T. Tikhonchuk, and A. V. Brantov, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4405 (1995); A. V. Brantov, В. Ю. Быченко, В. Т. Тихончук, В. Розмус, *ЖЭТФ* **110**, 1301 (1996).
15. В. Ю. Быченко, В. Н. Новиков, В. Т. Тихончук, *ЖЭТФ* **114**, 1691 (1998).
16. A. V. Brantov, V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, and C. E. Capjack, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 125002 (2004); A. V. Brantov, В. Ю. Быченко, В. Розмус, К. Капчак, *ЖЭТФ* **127**, 1317 (2005).
17. A. V. Brantov, V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, and C. E. Capjack, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **34**, 738 (2006).
18. S. Brunner, E. Valeo, and J. A. Krommes, *Phys. Plasmas* **7**, 2810 (2000).
19. В. Ю. Быченко, *Физика плазмы* **24**, 862 (1998).
20. A. Bendib, G. Matthieussent, and F. Bouzid, *Phys. Plasmas* **9**, 35 (2002).
21. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Госатомиздат, Москва (1961), с. 110.
22. I. P. Shkarofsky, T. W. Johnston, and M. P. Bachynski, *The Particle Kinetics of Plasmas*, Addison-Wesley, Reading (1966).
23. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1988), с. 85.
24. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979), с. 217.
25. M. Opher, G. J. Morales, and J. N. Leboeuf, *Phys. Rev. E* **66**, 016407 (2002).
26. V. Yu. Bychenkov, V. T. Tikhonchuk, and W. Rozmus, *Phys. Plasmas* **4**, 4205 (1997).
27. R. A. Koch and W. Horton, Jr., *Phys. Fluids* **18**, 861 (1975).
28. J. R. Penano, G. J. Morales, and J. E. Maggs, *Phys. Plasmas* **4**, 555 (1997).
29. R. Balesku, *Phys. Fluids* **3**, 52 (1960).
30. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Физматлит, Москва (1960), с. 63–64.
31. А. В. Брантов, В. Ю. Быченко, В. Розмус, *Физика плазмы* **32**, 368 (2006).
32. E. M. Epperlein, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2145 (1990).
33. V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, A. V. Brantov, and V. T. Tikhonchuk, *Phys. Plasmas* **7**, 1511 (2000).