

# ОДНОНАПРАВЛЕННЫЕ ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ИМПУЛЬСЫ В ИЗОТРОПНОЙ ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ С ПОСТОЯННЫМ ДИПОЛЬНЫМ МОМЕНТОМ

А. А. Заболотский\*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 27 ноября 2007 г.

С помощью метода обратной задачи рассеяния найдено решение изотропного предела общей интегрируемой модели взаимодействия двухкомпонентного электромагнитного поля с двухуровневым переходом. Модель описывает эволюцию импульсов электромагнитного поля вне рамок приближения медленных огибающих и учитывает вклад постоянного дипольного момента.

PACS: 02.30.Ik, 42.55.Ye, 42.65.Re, 42.65.Ky

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Генерация и эволюция фемтосекундных оптических импульсов и других импульсов электромагнитного и акустического полей с характерной длительностью, близкой к периоду осцилляций  $2\pi/\omega_0$  (где  $\omega_0$  — частота энергетического перехода), привлекают постоянное внимание в связи с приложениями в разных областях физики (см., например, обзоры [1–4]).

В настоящее время в экспериментах генерируются оптические импульсы длительностью в несколько периодов осцилляций и даже менее одного периода [5–8]. Развитие методов теоретического анализа динамики оптических фемтосекундных импульсов диктуется необходимостью анализа результатов экспериментальных исследований в этой области. Для анализа динамики таких импульсов рядом авторов применяется приближение медленных огибающих с учетом некоторых малых поправок, связанных с отклонением от этого приближения [4], а также численные методы [9], которые, однако, не позволяют достаточно детально проанализировать динамику и выявить особенности поведения сложных нелинейно-оптических систем. При исследовании оптического фемтосекундного диапазона во многих случаях приближение медленно меняющихся амплитуд и

фаз световых полей не применимы даже в качестве нулевого приближения теории возмущений. В то же время длительность этих импульсов не достаточно мала, чтобы применять приближение  $\tau_p \ll \pi/\omega_0$ , отвечающее предельно коротким импульсам, которое использовалось в ряде теоретических работ, например, в [10–13].

Нередко описание эволюции импульсов полей возможно в рамках двухуровневых моделей сред. Условия применимости этих моделей описаны, например, в работах [8–25]. Исследование систем уравнений Максвелла–Блоха, описывающих динамику электромагнитных квазимонохроматических импульсов в двухуровневых средах, в том числе с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [26], имеет давнюю историю (см. обзор [1] и работу [27]).

Для описания эволюции импульсов, занимающих интервал от квазимонохроматических до предельно коротких, вместо применения указанных выше приближений рядом авторов, начиная с работы [14], используется приближение однонаправленного распространения световых импульсов, которое, наряду с другими условиями, приводит к интегрируемым системам уравнений — редуцированным уравнениям Максвелла–Блоха (РУМБ). Эволюция локализованных решений этих эволюционных уравнений, которые будем называть однонаправленными импульсами, изучалась в рамках интегрируемых РУМБ так-

\*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

же в работах [15–22]. Первоначально в рамках интегрируемых моделей рассматривался случай линейно поляризованного поля [14–16]. Солитонные решения, описывающие поляризационные эффекты, возникающие в среде с переходами с изменением проекции момента на единицу и круговой поляризации однонаправленных импульсов в рамках ряда серии новых интегрируемых моделей, найдены в работах автора [18, 19, 22]. Как показано в этих работах, применение МОЗР требует существенной модификации техники обратной задачи по сравнению со случаем линейной поляризации однонаправленных импульсов. Несолитонные решения начально-краевой задачи для соответствующей системы уравнений, описывающие динамику однонаправленных импульсов с эллиптической поляризацией, представляют не меньший интерес, чем солитонные. Динамика лазерной генерации, ассоциируемая с радиационной, несолитонной частью спектра, исследовалась в работе [28].

Известно, что во многих физических средах с энергетическими переходами наряду с дипольным моментом  $\mu_{12}$ , где

$$\mu_{ij} \propto \int \psi_i^* z \psi_j dz,$$

$\psi_{1,2}$  — волновые функции состояний уровней 1 и 2, возможен ненулевой «постоянный дипольный момент». Последний определяется разностью

$$\Delta\mu_{12} = \mu_{11} - \mu_{22} \neq 0.$$

Ненулевой постоянный дипольный момент возникает в полярных молекулах, в полупроводниковых квантовых ямах и в других средах. Вклад постоянного дипольного момента в нелинейное поглощение и дисперсию изучался многими авторами. Отметим, например, работу [29], где обнаружено, что постоянный дипольный момент может играть критическую роль в нелинейных многочастотных процессах. В работе [29] отмечено, что в случае квантовых ям роль постоянного дипольного момента в нелинейных оптических процессах растет с ростом длины волны. В этой же работе приводятся параметры полупроводниковой среды, для которой отношение  $\Delta\mu_{ij}/\mu_{ij}$  меняется в диапазоне приблизительно 0.15–7.1 для разных частот переходов.

Исследование влияния постоянного дипольного момента на форму и эволюцию однонаправленных импульсов длительностью, сравнимой с периодом осцилляций, в рамках интегрируемых моделей началось с работы [16], в которой показано, что в случае невырожденного двухуровневого перехода и ли-

нейной поляризации поля интегрируемые РУМБ могут быть обобщены на случай ненулевого постоянного дипольного момента. В этой работе с помощью преобразования Бэклунда найдено общее выражение для многосолитонного решения, а одно- и двухсолитонные решения приводятся в явном виде. Иная форма представления нулевой кривизны для этой же модели предложена в работах [23, 24]. Численный анализ особенностей распространения импульсов в среде с постоянным дипольным моментом проведен в работе [25]. Интегрируемая деформация этой модели двухуровневой среды с накачкой была представлена в работе [17], в которой исследовалось усиление однонаправленных импульсов.

Применение МОЗР основывается на существовании представления нулевой кривизны исследуемой системы эволюционных уравнений [26]. В настоящей работе приводится представление нулевой кривизны для интегрируемой модели общего положения, учитывающей не только анизотропию дипольного момента двухуровневых переходов в примесных молекулах, но и анизотропию постоянного дипольного момента. Поскольку дипольное взаимодействие является доминирующим, для сред с разрешенными дипольными переходами другие виды взаимодействия не учитываем. В двухосных кристаллах вследствие анизотропии взаимодействия поперечное в свободном пространстве электромагнитное поле приобретает третью, продольную компоненту. Известна оценка (см., например, [30]), показывающая, что продольная компонента поля пропорциональна отношению

$$E_z \sim \delta_z = \frac{\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}} E_x, \quad (1)$$

$\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}$  — продольная и поперечная компоненты диэлектрической проницаемости. В известных оптических средах  $\delta_z < 1-3\%$  [31]. В то же время анизотропия дипольного момента имеет порядок единицы. Поэтому в рамках использованных при выводе модели приближений учет  $E_z$  в двухосных кристаллах был бы превышением точности для решаемой ниже задачи. Тем не менее, предлагаемая ниже интегрируемая модель РУМБ является новой также для одноосных сред и для изотропного взаимодействия. В случае, когда все коэффициенты с индексом  $x$  равны соответствующим коэффициентам с индексом  $y$ , приведенный в этой работе интегрируемый симметричный предел модели является новой и информативной моделью, описывающей взаимодействие двухкомпонентного электромагнитного поля с двухуровневым переходом с ненулевым изотропным постоянным дипольным моментом.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 выводится интегрируемая система РУМБ общего положения, описывающая динамику циркулярно поляризованной волны в невырожденной анизотропной среде с постоянным дипольным моментом, и приводится ее представление нулевой кривизны. Затем в разд. 3 для изотропного предела общей модели выводятся уравнения аппарата МОЗР, необходимые для ее решения. В разд. 4 с помощью этих уравнений найдено солитонное решение задачи. В Заключении резюмируются полученные результаты.

## 2. ВЫВОД ОБЩЕЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Мы рассматриваем одномерную протяженную двухуровневую среду без потерь и дисперсии. Наиболее общий гамильтониан, описывающий дипольное взаимодействие двухкомпонентного электромагнитного поля с двухуровневым переходом в анизотропной среде, может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = & \hat{\sigma}_3 \hbar \omega_0 - \left[ \hat{\sigma}_{11} \left( d_{zx}^{(1)} E'_x + d_{zy}^{(1)} E'_y \right) + \right. \\ & + \hat{\sigma}_{22} \left( d_{zx}^{(2)} E'_x + d_{zy}^{(2)} E'_y \right) + \\ & \left. + \hat{\sigma}_1 \left( d_{xx} E'_x + d_{xy} E'_y \right) + \hat{\sigma}_2 \left( d_{yx} E'_x + d_{yy} E'_y \right) \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{\sigma}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , — матрицы Паули;  $\hat{\sigma}_{11} = \text{diag}(1, 0)$ ;  $\hat{\sigma}_{22} = \text{diag}(0, 1)$ ;  $E'_x, E'_y$  — поперечные компоненты поляризации электромагнитного поля;  $\omega_0$  — частота энергетического перехода;  $d_{zs}^{(l)}$ ,  $l = 1, 2$ ,  $s = x, y$ , — действительные компоненты постоянного дипольного момента,  $d_{sp}$ ,  $s, p = x, y$ , — действительные компоненты тензора дипольного момента перехода между уровнями  $l = 1, 2$ . Гамильтониан (2) учитывает анизотропию дипольного момента и постоянного дипольного момента.

Преобразуем компоненты электромагнитного поля:

$$\begin{pmatrix} \delta_x E_x \\ \delta_y E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} \quad (3)$$

или

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \frac{1}{P_0} \begin{pmatrix} \delta_x d_{yy} & -\delta_y d_{xy} \\ -\delta_x d_{yx} & \delta_y d_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (4)$$

вводя следующие компоненты эффективного дипольного момента:

$$\begin{aligned} \delta_x &= \sqrt{d_{xx}^2 + d_{xy}^2}, \quad \delta_y = \sqrt{d_{yx}^2 + d_{yy}^2}, \\ p_x^{(l)} &= \frac{\delta_x}{P_0} \left( d_{zx}^{(l)} d_{yy} - d_{zy}^{(l)} d_{yx} \right), \\ p_y^{(l)} &= \frac{\delta_y}{P_0} \left( d_{zy}^{(l)} d_{xx} - d_{zx}^{(l)} d_{xy} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$P_0 = d_{xx} d_{yy} - d_{xy} d_{yx} \neq 0, \quad l = 1, 2.$$

Случай  $P = 0$  относительно прост, хотя и требует отдельного рассмотрения. После соответствующих преобразований он может быть сведен к модели, исследованной ранее автором.

После преобразований (4) получаем эффективный гамильтониан

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hat{\sigma}_3 \hbar \omega_0 - \left[ \hat{\sigma}_{11} \left( p_x^{(1)} E_x + p_y^{(1)} E_y \right) + \right. \\ & \left. + \hat{\sigma}_{22} \left( p_x^{(2)} E_x + p_y^{(2)} E_y \right) + \hat{\sigma}_1 \delta_x E_x + \hat{\sigma}_2 \delta_y E_y \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Приведем поляризационные компоненты электромагнитного поля к безразмерному виду  $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$  следующим образом:

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y) = E_0 (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y), \quad (7)$$

где

$$G_0 = \frac{d_0 E_0}{\omega_0 \hbar}$$

— произвольная безразмерная константа,

$$d_0 = \left[ 4\delta_x^2 + 4\delta_y^2 + \left( p_x^{(1)} - p_x^{(2)} \right)^2 + \left( p_y^{(1)} - p_y^{(2)} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Выберем для определенности  $G_0 = 1$ .

Введем новые константы

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{2\delta_x}{d_0}, \quad \mu_y = \frac{2\delta_y}{d_0}, \\ m_x &= \frac{p_x^{(1)} - p_x^{(2)}}{d_0}, \quad m_y = \frac{p_y^{(1)} - p_y^{(2)}}{d_0} \end{aligned} \quad (8)$$

и обозначим стандартные компоненты вектора Блоха как

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\rho_{12} + \rho_{21}}{2}, \quad S_y = \frac{\rho_{12} - \rho_{21}}{2i}, \\ S_z &= \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\rho_{ij}$  — элементы матрицы плотности двухуровневой среды. Тогда уравнения Блоха

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (10)$$

принимают вид

$$\frac{\partial S_x}{\partial \tau} = (1 - m_x \mathcal{E}_x - m_y \mathcal{E}_y) S_y + \mu_y \mathcal{E}_y S_z, \quad (11)$$

$$\frac{\partial S_y}{\partial \tau} = (m_x \mathcal{E}_x + m_y \mathcal{E}_y - 1) S_x - \mu_x \mathcal{E}_x S_z, \quad (12)$$

$$\frac{\partial S_z}{\partial \tau} = \mu_x \mathcal{E}_x S_y - \mu_y \mathcal{E}_y S_x, \quad (13)$$

где  $\tau = \omega_0 t$ .

Как уже отмечено выше, используя результаты работы [27], можно показать, что достаточно ограничиться рассмотрением переходов между уровнями 1 и 2. Для связи с известными моделями заметим, что в рассматриваемой здесь модели электромагнитное поле с круговой поляризацией  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x - i\mathcal{E}_y$  вызывает переходы между подуровнями, описываемые компонентой матрицы  $\rho_{12}$ .

Уравнения Максвелла для компонент поля получаем проекцией на соответствующие оси:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial P_x}{\partial \mathcal{E}_x}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_y}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial P_y}{\partial \mathcal{E}_y}. \quad (15)$$

Здесь  $c$  — скорость света в среде с плотностью  $N$ . Проекции поляризации среды  $P_{x,y}$  определены стандартным способом:

$$P_{x,y} = -N \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \frac{\partial \hat{H}}{\partial E_{x,y}} \right\}. \quad (16)$$

Приближение однонаправленного распространения импульсов поля основано на предположении об относительно малой плотности двухуровневой среды. Как показывает детальный масштабный анализ, приведенный в работе [16], в этом случае с достаточной точностью справедливы условия

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{x,y}}{\partial z} \approx -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_{x,y}}{\partial t}. \quad (17)$$

Редуцированные уравнения Максвелла для однонаправленного распространения импульсов электромагнитного поля вдоль оси  $z$ , которые, следуя работам [14–22], нетрудно найти из уравнений Максвелла (14), (15) и уравнений (11)–(13), имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \chi} = R_z \mathcal{E}_y - \mu_x S_y, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial \chi} = -R_z \mathcal{E}_x + \mu_y S_x, \quad (19)$$

где

$$\chi = \left( z + \frac{c}{n} t \right) \frac{4\pi N d_0^2}{\omega_0 n c \hbar},$$

$n$  — диэлектрическая проницаемость среды и

$$R_z = m_x \mu_y S_x + m_y \mu_x S_y - \mu_x \mu_y S_z. \quad (20)$$

Используя структуру матриц, входящих в представление нулевой кривизны, найденного в работе [18] для системы (11)–(13), (18), (19) в случае  $m_x = m_y = 0$ , прямой проверкой нетрудно показать, что эта система для входящих в нее произвольных действительных констант представляет собой условие совместности следующих двух систем линейных уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \left( \lambda^2 - \frac{r^2}{\lambda^2} \right) & \lambda \mathcal{E} + \frac{\tilde{r}}{\lambda} \bar{\mathcal{E}} \\ \lambda \bar{\mathcal{E}} + \frac{\tilde{r}}{\lambda} \mathcal{E} & \frac{i}{2} \left( \lambda^2 - \frac{r^2}{\lambda^2} \right) \end{pmatrix} \Phi, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = \frac{1}{2} \left( \lambda^2 + \frac{r^2}{\lambda^2} + \frac{\Omega_x + \Omega_y}{2} \right)^{-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} i \left( \lambda^2 - \frac{r^2}{\lambda^2} \right) R_z & \lambda \mathcal{R} + \frac{\tilde{r}}{\lambda} \bar{\mathcal{R}} \\ \lambda \bar{\mathcal{R}} + \frac{\tilde{r}}{\lambda} \mathcal{R} & -i \left( \lambda^2 - \frac{r^2}{\lambda^2} \right) R_z \end{pmatrix} \Phi, \quad (22)$$

где

$$r = |\tilde{r}|, \quad \text{Re } \tilde{r} = \frac{\Omega_x - \Omega_y}{4}, \quad \text{Im } \tilde{r} = -\frac{M_{xy}}{2D}, \quad (23)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu_x \mu_y D} (\mathcal{E}_y + i\mathcal{E}_x) + q_0, \quad (24)$$

$$q_0 = -\frac{1}{2\sqrt{\mu_x \mu_y D}} \left( \frac{m_y \mu_x}{\mu_y} + i \frac{m_x \mu_y}{\mu_x} \right), \quad (25)$$

$$\mathcal{R} = \frac{\sqrt{\mu_x \mu_y}}{\sqrt{D}} \left\{ [\mu_x M_{xy} - i\mu_y (1 + M_{yy})] S_x + [i\mu_y M_{xy} - \mu_x (1 + M_{xx})] S_y - \left( \frac{m_y \mu_x}{\mu_y} + i \frac{m_x \mu_y}{\mu_x} \right) S_z \right\}, \quad (26)$$

$$\Omega_x = \frac{\mu_x}{\mu_y D} (1 + M_{xx}), \quad \Omega_y = \frac{\mu_y}{\mu_x D} (1 + M_{yy}), \quad (27)$$

$$D = 1 + M_{xx} + M_{yy}, \\ M_{ij} = \frac{m_i m_j}{\mu_i \mu_j}, \quad i, j = x, y. \quad (28)$$

**3. СЛУЧАЙ СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ РУМБ**

**3.1. Представление нулевой кривизны**

Собственные значения  $\tilde{\Lambda}$  системы (21) для  $\mathcal{E} = q_0$  при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  определяются уравнением

$$\tilde{\Lambda}^2(\lambda) = \frac{1}{4} \left( \lambda^2 - \frac{r^2}{\lambda^2} \right)^2 - \left( \lambda q_0 + \frac{\tilde{r}}{\lambda} \bar{q}_0 \right) \left( \lambda \bar{q}_0 + \frac{\tilde{r}}{\lambda} q_0 \right). \quad (29)$$

В общем случае зависимость  $\tilde{\Lambda}(\lambda)$  приводит к сложным аналитическим свойствам фундаментальных решений. Из-за этого обобщение аппарата, развитого в работах [21, 22], приводит к громоздким выкладкам. В настоящей работе мы рассматриваем редукцию общей модели — симметричный вариант модели, отвечающий пределам

$$\mu_x - \mu_y \rightarrow 0, \quad m_x - m_y \rightarrow 0. \quad (30)$$

Переходя к симметричному пределу (30), находим

$$\tilde{\Lambda}(\lambda) \rightarrow \Lambda(\lambda) = \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2, \quad (31)$$

$$\tilde{r} \rightarrow im^2, \quad r \rightarrow m^2, \quad (32)$$

$$q_0 \rightarrow q = -\frac{(1+i)m_x}{2\sqrt{\mu_x^2 + 2m_x^2}} = -me^{i\pi/4}, \quad (33)$$

где

$$m = \frac{m_x}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_x^2 + 2m_x^2}}. \quad (34)$$

Считаем для определенности, что  $m > 0$ .

Спектральная проблема (21) после перенормировки  $\lambda \rightarrow \sqrt{r}\lambda$  с точностью до фазовых множителей  $e^{\pm i\pi/4}$  совпадает со спектральной проблемой, исследованной в работах [21, 22]. Однако применение аппарата МОЗР к системе уравнений (40), (41) имеет принципиальное отличие, связанное с тем, что при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  недиагональные части матриц, стоящие в правых частях (21), (22), не стремятся к нулю при  $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y \rightarrow 0$ .

В симметричном случае (30) система уравнений (11)–(13), (18), (19) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial S_x}{\partial \tau} = [1 - m_x(\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y)] S_y + \mu_x \mathcal{E}_y S_z, \quad (35)$$

$$\frac{\partial S_y}{\partial \tau} = [m_x(\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y) - 1] S_x - \mu_x \mathcal{E}_x S_z, \quad (36)$$

$$\frac{\partial S_z}{\partial \tau} = \mu_x(\mathcal{E}_x S_y - \mathcal{E}_y S_x), \quad (37)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \chi} = R_z \mathcal{E}_y - \mu_x S_y, \quad (38)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial \chi} = -R_z \mathcal{E}_x + \mu_x S_x. \quad (39)$$

Представление нулевой кривизны (21), (22) для системы уравнений (35)–(39) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \left( \lambda^2 - \frac{m^4}{\lambda^2} \right) & e^{i\pi/4} \left( \lambda E - \frac{m^2}{\lambda} \bar{E} \right) \\ -e^{-i\pi/4} \left( \lambda \bar{E} - \frac{m^2}{\lambda} E \right) & \frac{i}{2} \left( \lambda^2 - \frac{m^4}{\lambda^2} \right) \end{pmatrix} \Phi, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = \frac{1}{2(2\Lambda(\lambda) + 1)} \begin{pmatrix} i \left( \lambda^2 - \frac{m^4}{\lambda^2} \right) R_z & e^{i\pi/4} \left( \lambda R - \frac{m^2}{\lambda} \bar{R} \right) \\ -e^{i\pi/4} \left( \lambda \bar{R} - \frac{m^2}{\lambda} R \right) & -i \left( \lambda^2 - \frac{m^4}{\lambda^2} \right) R_z \end{pmatrix} \Phi, \quad (41)$$

где сделана замена  $\mathcal{E} = Ee^{i\pi/4}$  и

$$E = \frac{1}{2} \sqrt{\mu_x^2 + m_x^2} (\mathcal{E}_y + i\mathcal{E}_x) e^{-i\pi/4} + qe^{-i\pi/4}, \quad (42)$$

$$R = -2m\mu_x [\mu_x S_x + im_x(S_x - S_y)] - \frac{\mu_x^2 e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\mu_x^2 + 2m_x^2}} (S_y + iS_x), \quad (43)$$

$$R_z = m_x \mu_x (S_x + S_y) - \mu_x^2 S_z. \quad (44)$$

Мы рассматриваем случай эволюции импульсов конечной длины, т. е.

$$\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y \rightarrow 0, \quad S_x, S_y \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \pm\infty. \quad (45)$$

Введем матрично-значные функции

$$\Phi'_- = (\phi', \tilde{\phi}'), \quad \Phi'_+ = (\tilde{\psi}', \psi'), \quad (46)$$

где  $\phi' = \phi'(\chi, \tau; \lambda)$ ,  $\tilde{\phi}' = \tilde{\phi}'(\chi, \tau; \lambda), \dots$  — столбцы функций с асимптотиками

$$\begin{aligned} \Phi'_\pm(\tau; \lambda) &\rightarrow \mathbf{F}_\pm(\tau; \lambda) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{\lambda} e^{3i\pi/4} \\ \frac{m}{\lambda} e^{-3i\pi/4} & 1 \end{pmatrix} e^{-i\Lambda(\lambda)\tau\hat{\sigma}_3}, \\ \tau &\rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (47)$$

Применение аппарата МОЗР к системе (40), (41) нецелесообразно, поскольку ее фундаментальные решения не имеют нужной для непосредственного применения решения проблемы Римана – Гильберта асимптотики, см. ниже. Поэтому сделаем калибровочное преобразование этой системы, выбрав для этого функции Йоста — фундаментальные решения (40) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi^- &= \left( \exp [(-i\alpha_- + i\alpha_0)\hat{\sigma}_3] \phi', \right. \\ &\quad \left. \exp [(i\alpha_- - i\alpha_0)\hat{\sigma}_3] \tilde{\phi}' \right) := (\phi, \tilde{\phi}), \\ \Phi^+ &= \left( \exp [-i\alpha_+\hat{\sigma}_3] \tilde{\psi}', \right. \\ &\quad \left. \exp [i\alpha_+\hat{\sigma}_3] \psi' \right) := (\tilde{\psi}, \psi), \end{aligned} \quad (48)$$

где  $\alpha_\pm$  — действительные функции от  $\tau, \chi$  с асимптотиками

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \alpha_-(\tau, \chi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \alpha_+(\tau, \chi) = 0, \quad (49)$$

$\alpha_0$  — действительная константа.

После указанного выше калибровочного преобразования, например, система (40) может быть перепирана в виде

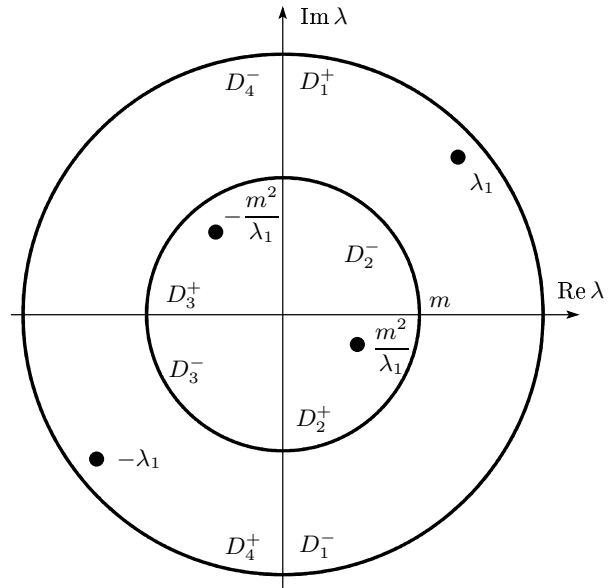
$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} &= -i \left[ \Lambda_-(\lambda) + \frac{\partial \alpha_+}{\partial \tau} \right] \phi_1 + \\ &+ \exp \left[ \frac{i\pi}{4} - 2i(i\alpha_- - i\alpha_0) \right] \left( \lambda E - \frac{m^2}{\lambda} \bar{E} \right) \phi_2, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} &= i \left[ \Lambda_-(\lambda) + \frac{\partial \alpha_+}{\partial \tau} \right] \phi_2 - \\ &- \exp \left[ -\frac{i\pi}{4} + 2i(i\alpha_- - i\alpha_0) \right] \left( \lambda \bar{E} - \frac{m^2}{\lambda} E \right) \phi_1, \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\Lambda_-(\lambda) = \frac{1}{2} \left( \lambda^2 - \frac{m^4}{\lambda^2} \right). \quad (52)$$

Аналогичным образом преобразуется система (41).



Домены  $D_j^+, j = 1-4, \text{Im } \Lambda(\lambda) > 0$  и  $D_j^-, j = 1-4, \text{Im } \Lambda(\lambda) < 0$  комплексной плоскости  $\lambda$ . Радиус внутреннего круга равен  $m$ , радиус внешнего круга  $l_0 \rightarrow \infty$ . Жирные точки показывают положения полюсов, связанных преобразованиями симметрии  $g_k, k = 1, 2, 3$

### 3.2. Свойства симметрии

Для применения аппарата МОЗР к калибровочно преобразованной системе уравнений (40), (41) необходимо выявить свойства симметрии ее решений, имеющие принципиальное значение для решения задачи.

Для системы уравнений (50), (51) и, соответственно, калибровочно неразработанной системы (41) можно показать, что преобразования комплексной плоскости

$$\lambda \rightarrow \bar{\lambda}, \quad \lambda \rightarrow m^2 \bar{\lambda}^{-1}$$

ассоциируются с преобразованиями симметрии, связывающими решения, аналитические в области комплексной плоскости, в которых  $\text{Im } \Lambda(\lambda) > 0$ , с решениями, аналитическими в области, в которой  $\text{Im } \Lambda(\lambda) < 0$ , см. рисунок. Для первого преобразования имеем

$$\overline{\mathbf{L}(\bar{\lambda})} = \hat{\sigma}_1 \mathbf{L}(\lambda) \hat{\sigma}_1, \quad \overline{\mathbf{A}(\bar{\lambda})} = \hat{\sigma}_1 \mathbf{A}(\lambda) \hat{\sigma}_1, \quad (53)$$

$$\overline{\mathbf{F}_\pm(\bar{\lambda})} = e^{i\hat{\sigma}_3 3\pi/4} \mathbf{F}_\pm(\lambda) e^{-i\hat{\sigma}_3 3\pi/4}. \quad (54)$$

Условия полноты и симметрии дают определение и вид матрицы рассеяния  $\mathbf{T}$ :

$$\Phi^- = \Phi^+ \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \overline{b(\lambda)} \\ b(\lambda) & \overline{a(\lambda)} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Здесь  $\lambda$  лежит на контуре

$$\Gamma = \{\Lambda(\lambda) : \text{Im } \Lambda(\lambda) = 0\},$$

см. рисунок. Структура матрицы  $\mathbf{T}$  следует из (53).

Определим группу преобразований комплексной плоскости  $\lambda$ , состоящую из идентичного преобразования  $I$  и элементов, не меняющих аналитических свойств фундаментальных решений и действующих следующим образом:

$$g_1(\lambda) = \frac{m^2}{\lambda}, \quad g_2(\lambda) = -\lambda, \quad g_3(\lambda) = -\frac{m^2}{\lambda}. \quad (56)$$

Преобразования  $\{I, g_1, g_2, g_3\}$ , где  $g_3 = g_1 g_2$ , образуют абелеву группу подстановок  $\mathcal{S}$ . Преобразования

фундаментальных решений  $\psi(\chi, \tau; \zeta)$  системы уравнений (40), (41) образуют группу  $\mathcal{G}$ , ассоциированную с группой подстановок  $\mathcal{S}$ . Группа  $\mathcal{G}$  является группой автоморфизмов

$$g : \psi(\chi, \tau; \lambda) \rightarrow \widehat{U}(g)\psi(\chi, \tau; g(\lambda)) \in \{\psi(\chi, \tau; \lambda)\}. \quad (57)$$

Перечислим свойства симметрии матриц  $\mathbf{L}(\lambda), \mathbf{A}(\lambda)$ , связанные с преобразованиями  $g_i, i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{L}(g_1(\lambda)) \mathbf{Q} &= \mathbf{L}(\lambda), \\ \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}(g_1(\lambda)) \mathbf{Q} &= \mathbf{A}(\lambda), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\mathbf{L}(g_2(\lambda)) = \widehat{\sigma}_3 \mathbf{L}(\lambda) \widehat{\sigma}_3, \quad \mathbf{A}(g_2(\lambda)) = \widehat{\sigma}_3 \mathbf{A}(\lambda) \widehat{\sigma}_3, \quad (59)$$

где

$$\mathbf{Q} = q_\infty \begin{pmatrix} 0 & \exp\left(\frac{i3\pi}{4} - i2\alpha_+\right) \\ \exp\left(-\frac{i3\pi}{4} + i2\alpha_+\right) & 0 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Преобразование (58), (60) определено с точностью до постоянного множителя  $q_\infty$ . Оператор

$$\widehat{U}(g_3) = \widehat{U}(g_1 g_2) = \widehat{U}(g_1) \widehat{U}(g_2)$$

находим, используя преобразования (59) и (58). Для того чтобы не выписывать свойства симметрии для каждого столбца фундаментальных решений, отметим, что выполнение свойства симметрии (58) для всех столбцов фундаментальных решений является следствием равенства

$$\alpha_+ = \alpha_- - \alpha_0,$$

доказанного ниже, см. формулу (98).

Нетрудно проверить, что система уравнений (50), (51), как и преобразованная соответствующим образом система уравнений (41), инвариантна относительно преобразований (59) и (58). Очевидно, что этим же свойствам симметрии удовлетворяют фундаментальные решения системы (50), (51). В частности, для столбцов функций  $\Phi_k, k = 1, 2$ , — фундаментальных решений системы (50), (51) получаем следующие свойства симметрии:

$$\Phi_k(g_1(\lambda)) = \mathbf{Q}^{-1} \Phi_k(\lambda), \quad (61)$$

$$\Phi_k(g_2(\lambda)) = \widehat{\sigma}_3 \Phi_k(\lambda), \quad (62)$$

$$\Phi_k(g_3(\lambda)) = \mathbf{Q}^{-1} \widehat{\sigma}_3 \Phi_k(\lambda). \quad (63)$$

В пределах  $\tau \rightarrow \pm\infty$  получаем

$$\widehat{U}(g_1) \mathbf{F}_\pm(g_1(\lambda)) \equiv \mathbf{Q}_\infty \mathbf{F}_\pm(g_1(\lambda)) = \mathbf{F}_\pm(\lambda), \quad (64)$$

$$\widehat{U}(g_2) \mathbf{F}_\pm(g_2(\lambda)) \equiv \widehat{\sigma}_3 \mathbf{F}_\pm(g_2(\lambda)) \widehat{\sigma}_3 = \mathbf{F}_\pm(\lambda), \quad (65)$$

где

$$\mathbf{Q}_\infty = \frac{m}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & e^{i3\pi/4} \\ e^{-i3\pi/4} & 0 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Константу  $q_\infty$  в правой части (60) найдем, переходя к пределу  $\tau \rightarrow \infty$ . Из уравнений (64), (66) находим

$$q_\infty = \frac{m}{\lambda}. \quad (67)$$

Применяя свойства симметрии к условию полноты (55), получаем следующие соотношения для данных рассеяния:

$$a(\chi; g_1(\lambda)) = a(\chi; \lambda), \quad b(\chi; g_1(\lambda)) = b(\chi; \lambda), \quad (68)$$

$$a(\chi; g_2(\lambda)) = a(\chi; \lambda), \quad b(\chi; g_2(\lambda)) = -b(\chi; \lambda), \quad (69)$$

$$a(\chi; g_3(\lambda)) = a(\chi; \lambda), \quad b(\chi; g_3(\lambda)) = -b(\chi; \lambda). \quad (70)$$

Преобразования коэффициента

$$c(\chi; \lambda_k) = b(\chi; \lambda_k) \left( \frac{\partial a(\chi; \lambda)}{\partial \lambda} \right)^{-1} \Big|_{\lambda=\lambda_k}$$

в невырожденных нулях  $a(\chi; \lambda_k) = 0$ , имеют вид

$$c(\chi; g_1(\lambda_k)) = -\frac{m^2}{\lambda_k^2} c(\chi; \lambda_k), \quad (71)$$

$$c(\chi; g_2(\lambda_k)) = c(\chi; \lambda_k), \quad (72)$$

$$c(\chi; g_3(\lambda_k)) = -\frac{m^2}{\lambda_k^2} c(\chi; \lambda_k). \quad (73)$$

Пусть нули  $\lambda_{0k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , коэффициента

$a(\chi; \lambda)$  невырождены,  $|\lambda_{0k}| \neq m^2, 0, \infty$ . Из свойств симметрии (56) следует, что нули

$$\lambda_{0k}, \lambda_{1k} = \frac{m^2}{\lambda_{0k}}, \quad \lambda_{2k} = -\lambda_{0k}, \quad \lambda_{3k} = -\frac{m^2}{\lambda_{0k}} \quad (74)$$

представляют собой эквивалентные точки, ср. [22]. Это означает, что полюсы, отвечающие солитонным решениям, всегда появляются в виде квартетов (74).

### 3.3. Решение проблемы Римана – Гильберта

Для сведения задачи к проблеме Римана – Гильберта преобразуем функции  $\Psi^\pm$  к виду  $\Upsilon^\pm$ , имеющей каноническую асимптотику при  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$\Upsilon^\pm = \mathbf{F}_\pm^g(\tau; \lambda)^{-1} \Phi^\pm. \quad (75)$$

Здесь с учетом калибровочного преобразования (48)

$$\mathbf{F}_-^g(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{\lambda} \exp \left[ \frac{3i\pi}{4} - 2i\alpha_-(\tau) + 2i\alpha_0 \right] \\ \frac{m}{\lambda} \exp \left[ -\frac{3i\pi}{4} + 2i\alpha_-(\tau) - 2i\alpha_0 \right] & 1 \end{pmatrix} \exp(-i\Lambda(\lambda)\tau\hat{\sigma}_3), \quad (76)$$

$$\mathbf{F}_+^g(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{\lambda} \exp \left[ \frac{3i\pi}{4} - 2i\alpha_+(\tau) \right] \\ \frac{m}{\lambda} \exp \left[ -\frac{3i\pi}{4} + 2i\alpha_+(\tau) \right] & 1 \end{pmatrix} \exp(-i\Lambda(\lambda)\tau\hat{\sigma}_3). \quad (77)$$

Функции  $\Upsilon^\pm$  удовлетворяют системам уравнений

$$\frac{\partial \Upsilon^\pm}{\partial \tau} = \mathbf{F}_\pm^g(\tau; \lambda)^{-1} \mathbf{L} \mathbf{F}_\pm^g(\tau; \lambda) \Upsilon^\pm. \quad (78)$$

Используя свойства симметрии функций  $\mathbf{F}_\pm^g$ , нетрудно показать, что уравнения (78) также обладают свойствами симметрии (58) и (59).

Обозначим столбцы матрично-значных функций как

$$\Upsilon^- := (v, \tilde{v}), \quad \Upsilon^+ := (\tilde{v}, \nu). \quad (79)$$

Запишем уравнения (75) для столбца

$$\Upsilon_1^- = (v_1, \nu_1)^T:$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (v_1 \exp(i\Lambda(\lambda)\tau))}{\partial \tau} = \\ & = \frac{-i}{d_0} \left[ \frac{\partial \alpha_-}{\partial \tau} + \delta(\lambda) + (q\bar{\mathcal{E}} + \bar{q}\mathcal{E}) \right] v_1 \exp(i\Lambda(\lambda)\tau) + \\ & + \frac{\exp[-2i\alpha_-(\tau) + 2i\alpha_0]}{d_0} \left( L_{12} - \frac{im^2}{\lambda^2} L_{21} \right) \times \\ & \times v_2 \exp(i\Lambda(\lambda)\tau), \quad (80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (v_2 \exp(-i\Lambda(\lambda)\tau))}{\partial \tau} = \\ & = \frac{i}{d_0} \left[ \frac{\partial \alpha_-}{\partial \tau} + \delta(\lambda) + (q\bar{\mathcal{E}} + \bar{q}\mathcal{E}) \right] v_2 \exp(-i\Lambda(\lambda)\tau) + \\ & + \frac{\exp[2i\alpha_+(\tau) - 2i\alpha_0]}{d_0} \left( \frac{im^2}{\lambda^2} L_{12} + L_{21} \right) \times \\ & \times v_2 \exp(-i\Lambda(\lambda)\tau), \quad (81) \end{aligned}$$



где

$$d_0 = 1 - m^2 \lambda^{-2}$$

и

$$\delta(\lambda) = \Lambda_-(\lambda) - d_0 \Lambda(\lambda), \quad (82)$$

$$L_{12}(\lambda; \tau) = e^{i\pi/4} \left( \lambda E - \frac{m^2}{\lambda} \bar{E} \right), \quad (83)$$

$$L_{21}(\lambda; \tau) = e^{-i\pi/4} \left( \lambda \bar{E} - \frac{m^2}{\lambda} E \right). \quad (84)$$

Введем матричные функции  $\mathbf{M}(\tau; \lambda)$  и  $\mathbf{N}(\tau; \lambda)$ :

$$\mathbf{M} := (v e^{i\Lambda\tau}, \tilde{v} e^{-i\Lambda\tau}), \quad \mathbf{N} := (\tilde{v} e^{i\Lambda\tau}, v e^{-i\Lambda\tau}). \quad (85)$$

Эти функции имеют единичную асимптотику при  $\tau \rightarrow \mp\infty$ , соответственно:

$$\tilde{v}(\lambda; \tau) = \overline{v(\bar{\lambda}; \tau)}, \quad \tilde{v}(\lambda; \tau) = \overline{v(\bar{\lambda}; \tau)}. \quad (86)$$

Подставив эти функции в систему (80), (81) и проинтегрировав ее, получаем

$$\mathbf{M}_1(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_+(\tau - s, \lambda) \times \\ \times \mathbf{Q}_-(s; \lambda) \mathbf{M}(s; \lambda) ds, \quad (87)$$

$$\mathbf{N}_2(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_-(\tau - s, \lambda) \times \\ \times \mathbf{Q}_+(s; \lambda) \mathbf{N}(s; \lambda) ds. \quad (88)$$

Здесь

$$\mathbf{Q}_-(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} -i \left[ \frac{\partial \alpha_-}{\partial \tau} + \delta(\lambda) + (q\bar{\mathcal{E}} + \bar{q}\mathcal{E}) \right] & \exp [2i\alpha_-(\tau) - 2i\alpha_0] \tilde{L}_{12}(\tau; \lambda) \\ \exp [-2i\alpha_-(\tau) + 2i\alpha_0] \tilde{L}_{21}(\tau; \lambda) & i \left[ \frac{\partial \alpha_-}{\partial \tau} + \delta(\lambda) + (q\bar{\mathcal{E}} + \bar{q}\mathcal{E}) \right] \end{pmatrix}, \quad (89)$$

$$\mathbf{Q}_+(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} -i \left[ \frac{\partial \alpha_+}{\partial \tau} + \delta(\lambda) + (q\bar{\mathcal{E}} + \bar{q}\mathcal{E}) \right] & \exp [2i\alpha_+(\tau)] \tilde{L}_{12}(\tau; \lambda) \\ \exp (-2i\alpha_+(\tau)) \tilde{L}_{21}(\tau; \lambda) & i \left[ \frac{\partial \alpha_+}{\partial \tau} + \delta(\lambda) + (q\bar{\mathcal{E}} + \bar{q}\mathcal{E}) \right] \end{pmatrix}, \quad (90)$$

$$\mathbf{G}_+(\tau; \lambda) = \frac{1}{d_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(2i\Lambda(\lambda)\tau) \end{pmatrix} \theta(\tau), \quad (91)$$

$$\mathbf{G}_-(\tau; \lambda) = \\ = -\frac{1}{d_0} \begin{pmatrix} \exp(-2i\Lambda(\lambda)\tau) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \theta(-\tau). \quad (92)$$

Здесь  $\theta(\tau)$  — тэта-функция и

$$\tilde{L}_{12}(\tau; \lambda) = L_{12}(\lambda; \tau) - \frac{i m^2}{\lambda^2} L_{21}(\lambda; \tau), \quad (93)$$

$$\tilde{L}_{21}(\tau; \lambda) = L_{21}(\lambda; \tau) + \frac{i m^2}{\lambda^2} L_{12}(\lambda; \tau). \quad (94)$$

Аналогичные уравнения нетрудно построить и для столбцов  $\mathbf{M}_2, \mathbf{N}_1$ .

Решая итерациями уравнения (87), (88) и сохра-

няя члены нулевой и первой степени  $\lambda$ , находим при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  для столбцов функций

$$\mathbf{M}_1(\tau; \lambda) = \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ i\lambda^{-1} \bar{\mathcal{E}} \exp(2i\alpha_- - 2i\alpha_0) \end{pmatrix} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad (95)$$

$$\mathbf{N}_2(\tau; \lambda) = \\ = \begin{pmatrix} -i\lambda^{-1} \mathcal{E} \exp(-2i\alpha_+) \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (96)$$

Используя выражения (95), (96) и преобразование симметрии  $g_1$  (58), нетрудно найти пределы этих функций и для  $|\lambda| \rightarrow 0$ .

Форма асимптотики (95), (96) и свойства симметрии функций Йоста (53), (54) требуют выполнения

соотношений

$$\alpha_{\pm}(\tau, \chi) = - \int_{\pm\infty}^{\tau} |\mathcal{E}(\tau', \chi) - q|^2 d\tau', \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0(\chi) &= \alpha_-(\tau, \chi) - \alpha_+(\tau, \chi) = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}(\tau', \chi) - q|^2 d\tau'. \end{aligned} \quad (98)$$

Строим следующие матрично-значные функции:

$$\begin{aligned} \Psi^+(\tau, \chi; \lambda) &= \left( \frac{\mathbf{M}_1(\tau, \chi; \lambda)}{a(\chi; \lambda)}, \mathbf{N}_2(\tau, \chi; \lambda) \right), \\ \Psi^-(\tau, \chi; \lambda) &= \left( \mathbf{N}_1(\tau, \chi; \lambda), \frac{\mathbf{M}_2(\tau, \chi; \lambda)}{a(\chi, \bar{\lambda})} \right), \end{aligned} \quad (99)$$

имеющие каноническую нормировку на бесконечности:

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \Psi^{\pm}(\tau, \chi; \lambda) = \mathbf{I}, \quad (100)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная  $2 \times 2$ -матрица. Коэффициенты  $\mathbf{G}_+(\mathbf{G}_-)$  и  $a(\chi; \lambda)$  ( $\overline{a(\chi; \bar{\lambda})}$ ) аналитичны в доменах  $D^+$  ( $D^-$ ) комплексной плоскости  $\lambda$ , см. рисунок. Поэтому функция  $\Psi^+$  аналитична в области  $D_k^+$ , а функция  $\Psi^-$  аналитична в области  $D_k^-$ . Эти области состоят из доменов:

$$\begin{aligned} D^+ &= D_1^+ \cup D_2^+ \cup D_3^+ \cup D_4^+, \\ D^- &= D_1^- \cup D_2^- \cup D_3^- \cup D_4^-. \end{aligned}$$

Домены  $D_j^{\pm}$ ,  $j = 1-4$ , комплексной плоскости  $\lambda$ , чьи границы изображены на рисунке, определены следующим образом:

$$D_1^+ = \{\text{Im } \lambda > 0 \cap \text{Re } \lambda > 0 \cap l_0 > |\lambda| > m\},$$

$$D_1^- = \{\text{Im } \lambda < 0 \cap \text{Re } \lambda > 0 \cap l_0 > |\lambda| > m\},$$

$$D_2^+ = \{\text{Im } \lambda < 0 \cap \text{Re } \lambda > 0 \cap |\lambda| < m\},$$

$$D_2^- = \{\text{Im } \lambda > 0 \cap \text{Re } \lambda > 0 \cap |\lambda| < m\},$$

$$D_3^+ = \{\text{Im } \lambda > 0 \cap \text{Re } \lambda < 0 \cap |\lambda| < m\},$$

$$D_3^- = \{\text{Im } \lambda < 0 \cap \text{Re } \lambda < 0 \cap |\lambda| < m\},$$

$$D_4^+ = \{\text{Im } \lambda < 0 \cap \text{Re } \lambda < 0 \cap l_0 > |\lambda| > m\},$$

$$D_4^- = \{\text{Im } \lambda > 0 \cap \text{Re } \lambda < 0 \cap l_0 > |\lambda| > m\}.$$

Группа  $\mathcal{S}$  является группой автоморфизмов каждой из двух областей комплексной плоскости  $D^+$  и  $D^-$ , а также соответствующих границ.

Далее необходимо сформулировать условие скачка для каждой пары доменов  $D_j^+ \cup D_k^-$ , имеющих общую границу. В частности, для  $D_1^+ \cup D_1^-$  и  $D_1^+ \cup D_4^-$  проблема Римана–Гильберта для функций  $\Psi^{\pm}$  формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi^+(\tau, \chi; \lambda) &= \Psi^-(\tau, \chi; \lambda) \mathbf{J}_+(\tau, \chi; \lambda), \\ &D_1^+ \cup D_1^-, \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \Psi^+(\tau, \chi; \lambda) &= \Psi^-(\tau, \chi; \lambda) \mathbf{J}_-(\tau, \chi; \lambda), \\ &D_1^+ \cup D_4^-, \end{aligned} \quad (102)$$

где  $\Psi = \Psi^+$  для  $\lambda \in D_1^+$  и  $\Psi = \Psi^-$  для  $\lambda \in D_1^-$  (101) или для  $\lambda \in D_4^-$  (102).

Здесь

$$\mathbf{J}_{\pm}(\tau, \chi; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \pm \rho(\chi; \lambda) \tilde{\rho}(\chi; \lambda) & \pm \tilde{\rho}(\chi; \lambda) e^{-2i\Lambda(\lambda)\tau} \\ \rho(\chi; \lambda) e^{2i\Lambda(\lambda)\tau} & 1 \end{pmatrix}, \quad (103)$$

$$\rho(\chi; \lambda) = \frac{b(\chi; \lambda)}{a(\chi; \lambda)}, \quad \tilde{\rho}(\chi; \lambda) = \frac{\overline{b(\chi; \bar{\lambda})}}{\overline{a(\chi; \bar{\lambda})}}. \quad (104)$$

Следуя результатам работы [22] и используя свойства симметрии фундаментальных решений, можно показать, что все остальные условия скачка могут быть получены из (101), (102) соответствующими преобразованиями симметрии.

Запишем решение задачи Коши для домена  $D_1^+$  в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1^-(\chi, \tau; \lambda) &= \mathbf{I} + \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{\Gamma_1^+} e^{2i\Lambda(\zeta)\tau} \Psi_2^+(\chi, \tau; \zeta) \frac{\rho(\chi; \zeta) d\zeta}{\zeta - \lambda}, \end{aligned} \quad (105)$$

где контур  $\Gamma_1^+$  обходит домен  $D_1^+$  против часовой стрелки. Введем оператор

$$\widehat{G} = [\mathbf{I} + (\mathbf{I} - P) \widehat{U}_1] [\mathbf{I} + (\mathbf{I} - P) \widehat{U}_2], \quad (106)$$

где проектор  $P$  действует на произвольную функцию  $f(\lambda)$ , имеющую предел на бесконечности, следующим образом:

$$Pf(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda). \quad (107)$$

Действуя оператором  $\widehat{G}$  на правую часть уравнения (105), получаем симметризованный интеграл Коши на домене  $D_1^+$ . Следуя работе [22], после соответствующей замены переменных интегрирования можно показать, что этот симметризованный интеграл эквивалентен обычному интегралу Коши по границам всех доменов  $D_k^+$ ,  $k = 1-4$ , с обходом против часовой стрелки. Таким образом, соответствующие области интегрирования в интеграле Коши для одной пары доменов преобразованиями симметрии распространяются на всю комплексную область.

В итоге решение проблемы Римана–Гильберта с учетом аналитического продолжения функций в соответствующие области плоскости  $\lambda$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1^-(\chi, \tau; \lambda) &= \\ &= \left( m\lambda^{-1} \exp\left(-\frac{i3\pi}{4} + 2i\alpha_+\right) \right) + \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{\Gamma} \rho(\chi; \zeta) \exp(2i\Lambda(\zeta)\tau) \Psi_2^+(\chi, \tau; \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda}, \quad (108) \end{aligned}$$

где  $\Psi_k^\pm$  —  $k$ -й столбец функции  $\Psi^\pm$ . Контур  $\Gamma$  обегает все домены  $D_j^+$ ,  $j = 1-4$ , против часовой стрелки. Солитонные и бризерные решения ассоциируются с конечным числом нулей  $a(\chi, \lambda_{nk}) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :  $\lambda_{nk} \in D^+$ . Первое слагаемое в правой части (108) удовлетворяет свойствам симметрии функции  $\Psi^\pm$  и совпадает при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  с канонической асимптотикой. Этот член включает асимптотики  $|\lambda| \rightarrow \infty$  и  $|\lambda| \rightarrow 0$  и получен действием оператора  $\widehat{G}$  на каноническую асимптотику.

Для определения связи между «потенциалом»  $\mathcal{E}$  и решением проблемы Римана–Гильберта перейдем в уравнениях (95), (108) к пределу  $\lambda \rightarrow \infty$  и, сравнивая коэффициенты при  $1/\lambda$ , найдем

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}(\chi, \tau)} \exp(2i\alpha_+(\chi, \tau)) &= \\ &= -m \exp\left(-\frac{i\pi}{4} + 2i\alpha_+\right) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \rho(\chi; \zeta) [\Psi^+(\chi, \tau; \zeta)]_{22} \times \\ &\times \exp(2i\Lambda(\zeta)\tau) d\zeta. \quad (109) \end{aligned}$$

Индекс после квадратной скобки означает, что берется соответствующий элемент матричной функции  $\Psi^+(\chi, \tau; \zeta)$ .

Зависимость данных рассеяния от  $\chi$  находим стандартным образом, используя уравнения (41) для  $S_x(0, \chi) = S_y(0, \chi) = 0$ :

$$b(\chi; \lambda) = b(0; \lambda) \exp[i2S_z(0, \chi)\Delta(\lambda)\chi], \quad (110)$$

$$c(\chi; \lambda_{0n}) = c(0; \lambda_{0n}) \exp[i2S_z(0, \chi)\Delta(\lambda_{0n})\chi], \quad (111)$$

где

$$\Delta(\lambda) = \frac{\mu_x^2 \Lambda(\lambda)}{2\Lambda(\lambda) + 1}, \quad (112)$$

$a(\lambda)$  и  $\lambda_{0n}$  не зависят от  $\chi$ .

Пусть нули  $\lambda_{0k} = \lambda_k$  лежат в фундаментальной области  $D_1^+$ . Учитывая вклад только дискретного спектра (74), находим из (109)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\chi, \tau) &= q + 2ie^{2i\alpha_+} \sum_{n=1}^N \overline{c_n(\chi)} \times \\ &\times \left[ \overline{\Psi_{22}^+(\lambda_n)} - \frac{m}{\lambda_n} \exp\left(\frac{i3\pi}{4} - 2i\alpha_+\right) \overline{\Psi_{21}^+(\lambda_n)} \right] \times \\ &\times \exp\left(-2i\overline{\Lambda(\lambda_n)}\tau\right), \quad (113) \end{aligned}$$

где  $n = 1, 2, \dots$ ,  $c_n(\chi) = c(\chi; \lambda_n)$  и функции  $\Psi_{21}^+, \Psi_{22}^+$  составляют столбец  $\Psi_2^+ = (\Psi_{21}^+, \Psi_{22}^+)^T$ ;  $m$  — действительное число.

#### 4. СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ

Найдем простейшее нетривиальное решение, учитывая вклад полюсов (74) только для  $k = 1$ . Пусть  $\lambda_{01} = \lambda_1 \in D_1^+$ .

Уравнение (108) с учетом свойств симметрии фундаментальных решений (59), (58) и свойств коэффициентов  $c_1 = c(\chi; \lambda_1)$  (71)–(73) приводится к виду

$$\tilde{\Phi}_2(\chi, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ m\lambda^{-1} \exp\left(-\frac{i3\pi}{4} + 2i\alpha_+\right) \end{pmatrix} + \frac{2c_1(\chi)}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Psi_2^+(\tau, \lambda_1) \exp(2i\Lambda_1\tau) - \\ - \frac{2m c_1(\chi)}{\lambda^2 \lambda_1^2 - m^4} \begin{pmatrix} 0 & m^2 \exp\left(\frac{i3\pi}{4} - 2i\alpha_+\right) \\ \lambda\lambda_1 \exp\left(-\frac{i3\pi}{4} + 2i\alpha_+\right) & 0 \end{pmatrix} \Psi_2^+(\tau, \lambda_1) \exp(2i\Lambda_1\tau), \quad (114)$$

где  $\Lambda_1 = \Lambda(\lambda_1)$  и столбец  $\tilde{\Phi}_2 = (\tilde{\Phi}_{21}, \tilde{\Phi}_{22})^T$  имеет компоненты

$$\tilde{\Phi}_{21}(\lambda) = \overline{\Psi_{22}^+(\bar{\lambda})}, \quad \tilde{\Phi}_{22}(\lambda) = -\overline{\Psi_{12}^+(\bar{\lambda})}.$$

Подставив  $\lambda = \bar{\lambda}_1$  в (114), получим замкнутую систему алгебраических уравнений, которая существенно упрощается, если искать решения для функций

$$\chi_1 = \overline{\Psi_{22}^+(\lambda_1)} - \frac{m}{\lambda_1} \exp\left(\frac{i3\pi}{4} - 2i\alpha_+\right) \overline{\Psi_{21}^+(\lambda_1)}, \quad (115)$$

$$\chi_2 = \Psi_{21}^+(\lambda_1) + \frac{m}{\lambda_1} \exp\left(\frac{i3\pi}{4} - 2i\alpha_+\right) \Psi_{22}^+(\lambda_1). \quad (116)$$

Отметим, что можно построить эквивалентную систему уравнений для одного полюса, лежащего в фундаментальном домене  $\lambda_1 \in D_1^+$ , следуя подходу, предложенному в работе [22], в котором строятся симметризованные интегралы Коши.

Обозначим

$$\lambda_1 = m e^{\eta+i\phi}, \quad (117)$$

где  $\eta > 0, \pi/2 > \phi > 0$ .

Решая полученную из (109) алгебраическую систему уравнений и подставив решение для (115) в равенство (113), находим

$$\mathcal{G}(\chi, \tau) = 2i \overline{c_1(\chi)} \exp[-i2\bar{\Lambda}_1\tau + 2i\alpha_+(\tau)] \times \left\{ \frac{1 + \exp(-2\eta + 2i\phi)}{1 + D} \right\}, \quad (118)$$

здесь

$$\mathcal{G}(\chi, \tau) = \mathcal{E}(\chi, \tau) - q$$

— нормированная амплитуда солитона и

$$\text{Re } D = |c_1(\chi)|^2 \exp[-2\eta + 2i(\Lambda_1 - \bar{\Lambda}_1)\tau] \times \left[ \frac{\cos(2\phi)}{\sin(2\phi)^2} - \frac{\text{ch}(2\eta)}{\text{sh}(2\eta)^2} \right], \quad (119)$$

$$\text{Im } D = |c_1(\chi)|^2 \exp[-2\eta + 2i(\Lambda_1 - \bar{\Lambda}_1)\tau] \times \frac{\text{ch}(2\eta) + \cos(2\phi)}{\text{sh}(2\eta) \sin(2\phi)}. \quad (120)$$

Вычисляя фазовый множитель  $e^{2i\alpha_+}$ , находим, что интеграл в показателе экспоненты равен

$$\int_{-\infty}^{\tau} |\mathcal{E} - q|^2 d\tau = -i \ln \left( \frac{1 + D(\tau)}{1 + \overline{D(\tau)}} \right). \quad (121)$$

Представим коэффициент  $c_1(0)$  в виде

$$c_1(0) = m \exp(\gamma_1 + i\gamma_2), \quad (122)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2$  — действительные константы. Решение (113), (109), отвечающее начальному условию  $S_z(-\infty, \chi) \equiv -1$ , с учетом зависимости (111) от переменной  $\chi$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{E}_x(\chi, \tau) - i\mathcal{E}_y(\chi, \tau) = 4 \exp(\gamma_1 - i\gamma_2 - \theta - i\vartheta) \frac{(1 + \exp(-2\eta + 2i\phi)) [1 + \exp(2\gamma_1 - 2\eta - 2\theta) (d_1 + id_2)]}{\sqrt{\mu_x^2 + 2m_x^2 [1 + \exp(2\gamma_1 - 2\eta - 2\theta) (d_1 - id_2)]^2}}. \quad (123)$$

Здесь

$$\theta = 2\Lambda' \left( \tau - \frac{\chi}{v_0} \right), \quad (124) \\ \vartheta = 2\Lambda'' \left( \tau - \frac{\chi}{v_1} \right),$$

$$v_0 = \frac{4\Lambda'' + 1 + 4|\Lambda|^2}{\mu_x^2}, \quad (125)$$

$$v_1 = \Lambda'' \frac{4\Lambda'' + 1 + 4|\Lambda|^2}{\mu_x^2 (2|\Lambda|^2 + 1)}, \quad (126)$$

$$|\Lambda| = m^2 [\operatorname{ch}(2\eta) - \cos(2\phi)], \quad (127)$$

$$\Lambda' = \operatorname{Im} \Lambda_1 = m^2 \operatorname{sh}(2\eta) \sin(2\phi), \quad (128)$$

$$\Lambda'' = \operatorname{Re} \Lambda_1 = m^2 [1 + \operatorname{ch}(2\eta) \cos(2\phi)], \quad (129)$$

$$d_1 = \frac{\cos(2\phi)}{\sin(2\phi)^2} - \frac{\operatorname{ch}(2\eta)}{\operatorname{sh}(2\eta)^2}, \quad (130)$$

$$d_2 = \frac{\operatorname{ch}(2\eta) + \cos(2\phi)}{\operatorname{sh}(2\eta) \sin(2\phi)}. \quad (131)$$

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе методом обратной задачи рассеяния найдено решение новой интегрируемой модели, являющейся симметричным пределом модели общего положения. Для последней модели, являющейся наиболее общей интегрируемой системой уравнений Максвелла–Блоха, описывающей эволюцию импульсов в одномерной бездисперсионной среде с невырожденным анизотропным дипольным переходом и с анизотропным постоянным дипольным моментом, приводится только представление нулевой кривизны. Подход, использованный в настоящей работе при применении метода обратной задачи рассеяния, наиболее эффективен в системах с нетривиальными свойствами симметрии и является развитием техники, предложенной в недавней работе [22].

Анализ решения (123) показал, что постоянный дипольный момент ( $m_x m_y \neq 0$ ) приводит к уширению формы импульса и вращению поляризации поля даже в изотропной среде. Приближение однонаправленных импульсов, которое применяется в настоящей работе к исходным уравнениям Максвелла–Блоха, в случае циркулярной поляризации поля приводит к эволюционным уравнениям, обладающим качественно новыми свойствами по сравнению с уравнениями, полученными после применения приближения медленных огибающих. Как отмечено еще в работе [2], это принципиально отличает рассматриваемую здесь задачу об эволюции импульсов в случае циркулярной поляризации поля от случая линейной поляризации поля. В работе [19] показано, что теория однонаправленных импульсов формально включает в себя теорию предельно коротких импульсов и теорию квазимонохроматических импульсов как частные случаи, поскольку условие однонаправленности эволюции импульсов поля, используемое при выводе интегрируемых РУМБ,

слабее условий квазимонохроматичности или существования предельно коротких импульсов. Для импульсов длительностью порядка периода осцилляций это критически важно в оптическом диапазоне. Поэтому полученное решение описывает не только эволюцию импульсов длительностью порядка периода пульсаций, но и, например, генерацию ИК-волн в пределе малоамплитудного квазимонохроматического поля, связанную с ненулевым постоянным дипольным моментом.

Работа выполнена по Госконтракту № 02.513.11.3167 и при поддержке программы Президиума РАН «Органические и гибридные наноструктурированные материалы для фотоники».

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
2. R. K. Bullough, P. M. Jack, P. W. Kitchenside, and R. Saunders, *Physica Scripta* **20**, 364 (1979).
3. A. I. Maimistov, A. M. Basharov, S. O. Elyutin, and Yu. S. Sklyarov, *Phys. Rep.* **191**, 1594 (1990).
4. T. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
5. D. You, D. R. Dykaar, and P. H. Bucksbaum, *Opt. Lett.* **18**, 290 (1993).
6. M. Wittmann, A. Nazarkin, and G. Korn, *Opt. Lett.* **26**, 5 (2001).
7. L. Xu, C. Spielmann, and F. Krausz, *Opt. Lett.* **21**, 1259 (1996).
8. A. Baltuska, Z. Wei, M. S. Pshenichnikov, and D. A. Wiersma, *Opt. Lett.* **22**, 102 (1997).
9. R. W. Ziolkowski, J. M. Arnold, and D. M. Gogny, *Phys. Rev. A* **52**, 3082 (1995); S. Hughes, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3363 (1998); S. Hughes, *Phys. Rev. A* **62**, 055401 (2000).
10. Е. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин и др., *Письма в ЖЭТФ* **47**, 523 (1988).
11. Е. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущуповский, *ЖЭТФ* **100**, 762 (1991).
12. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, L7 (1994).
13. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **114**, 1393 (1998).
14. J. C. Eilbeck, *J. Phys. A: Math. Gen.* **5**, 1355 (1972).

15. J. D. Gibbon, P. J. Coudrey, J. C. Eilbeck, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, 1237 (1973).
16. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, *Physica D* **138**, 134 (2000).
17. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **121**, 1012 (2002).
18. А. А. Заболотский, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 558 (2003).
19. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **125**, 1229 (2004).
20. H. Steudel, A. A. Zabolotskii, and R. Meinel, *Phys. Rev. E* **72**, 056608 (2005).
21. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **129**, 435 (2006).
22. А. А. Zabolotskii, *Phys. Rev. E* **75**, 036612 (2007).
23. А. И. Маймистов, Дж.-Г. Капуто, *Опт. и спектр.* **94**, 245 (2003).
24. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ТМФ* **151**, 228 (2007).
25. С. О. Елютин, *ЖЭТФ* **128**, 5 (2005).
26. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
27. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, *ЖЭТФ* **87**, 1594 (1984).
28. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **132**, 785 (2007).
29. S. Koćinac, Z. Ikonić, and V. Milanović, *Opt. Comm.* **140**, 89 (1997).
30. N. N. Rosanov and S. V. Fedorov, *Phys. Rev. E* **63**, 066601 (2001).
31. Р. Стойбер, С. Морзе, *Определение кристаллов под микроскопом*, Мир, Москва (1974).