

СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА S -УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ ИОНА МЮОННОГО ГЕЛИЯ

*А. П. Мартыненко**

*Самарский государственный университет
443011, Самара, Россия*

Поступила в редакцию 16 октября 2007 г.

Вычислены поправки порядка α^5 , α^6 к спектрам энергии сверхтонкого расщепления $1S$ -, $2S$ -уровней иона мюонного гелия. Учтены эффекты электронной поляризации вакуума, поправки на структуру ядра и эффекты отдачи. Полученные численные значения сверхтонких расщеплений $\Delta E^{hfs}(1S) = -1334.56$ мэВ и $\Delta E^{hfs}(2S) = -166.62$ мэВ могут рассматриваться как надежная оценка для сравнения с экспериментальными данными, а интервал сверхтонкой структуры $\Delta_{12} = 8\Delta E^{hfs}(2S) - \Delta E^{hfs}(1S) = 1.64$ мэВ можно использовать для проверки предсказаний квантовой электродинамики.

PACS: 36.10.Dr, 12.20.Ds, 32.10.Fn

1. ВВЕДЕНИЕ

Ион мюонного гелия $(\mu^3\text{He})^+$ представляет собой связанное состояние отрицательного мюона и гелиона (^3He). Время жизни этого простейшего атома определяется временем распада мюона $\tau_\mu = 2.19703(4) \cdot 10^{-6}$ с. Увеличение массы лептона при переходе от электронных водородоподобных атомов к мюонным (отношение масс мюона и электрона $m_1/m_e = 206.7682838(54)$ [1]) приводит к росту трех эффектов в спектрах энергии: электронной поляризации вакуума, структуры и поляризуемости ядра, отдачи ядра. Первый из названных эффектов важен для мюонного гелия $(\mu^3\text{He})^+$, поскольку отношение комптоновской длины волны электрона к радиусу боровской орбиты этого атома, $\mu Z\alpha/m_e \approx 1.45415$ ($Z = 2$ — заряд ядра гелия, α — постоянная тонкой структуры, μ — приведенная масса двух частиц), близко к единице. Второй эффект — структура ядра ^3He — имеет существенное значение, так как волновая функция мюона сильно перекрывается с областью распределения заряда ядра. Наконец рост эффектов отдачи связан с тем, что отношение масс мюона и ядра, $m_1/m_2 \approx 0.0376$ [1], хотя и является малой величиной, но превосходит значение постоянной

тонкой структуры α . Кроме того, некоторые эффекты отдачи содержат характерные значения логарифма отношения масс ядер гелия и мюона $\ln(m_2/m_1) \approx 3.28$, что приводит к численному росту вклада.

Высокая чувствительность характеристик связанного мюона к распределениям плотности заряда и магнитного момента ядра в легких мюонных атомах (мюонный водород, ионы мюонного гелия) может быть использована для более точного определения зарядовых радиусов протона, дейтрона, гелиона, α -частицы [2–4]. Измерение сверхтонкой структуры уровней энергии мюонных атомов позволит получить более точные значения радиусов Земаха для этих ядер и улучшить точность теоретических расчетов сверхтонкой структуры соответствующих электронных атомов.

Теоретические исследования уровней энергии легких мюонных атомов ($Z = 1, 2$) были выполнены много лет тому назад в работах [5–9] на основе уравнения Дирака. В этих расчетах энергетических интервалов ($2P_{3/2}-2S_{1/2}$), ($2P_{1/2}-2S_{1/2}$) в ионах мюонного гелия (^4He , ^3He) учитывались различные поправки с точностью 0.01 мэВ. Энергии перехода ($2S-2P$) в ионе мюонного гелия $(\mu^3\text{He})$ с учетом сверхтонкой структуры уровней были вычислены в [10, 11] в рамках уравнения Дирака с точностью 0.1 мэВ.

*E-mail: mart@ssu.samara.ru

Несмотря на то, что мюонные атомы $\mu_1^1\text{H}$, $\mu_1^2\text{H}$, $(\mu_2^3\text{He})^+$, $(\mu_2^4\text{He})^+$ можно было бы использовать для еще одной проверки квантовой электродинамики, экспериментальное изучение уровней энергии этих атомов сильно отстает от теории. Здесь следует упомянуть эксперимент по измерению лэмбовского сдвига ($2P-2S$) в мюонном водороде, который проводится в PSI (Paul Scherrer Institut) уже много лет [12, 13], но пока не привел к измерению сдвига с необходимой точностью 30 ppm. Единственный результативный эксперимент был выполнен на мюонном пучке в CERN [14, 15] с мюонным гелием $(\mu_2^4\text{He})^+$. В нем наблюдались два резонансных перехода с длинами волн 811.68(15) нм и 897.6(3) нм, которые соответствуют интервалам ($2P_{3/2}-2S_{1/2}$) и ($2P_{1/2}-2S_{1/2}$) тонкой структуры. В более поздних экспериментах [16] обнаружить резонансный переход в области $811.4 \leq \lambda \leq 812.0$ нм не удалось. Поэтому в настоящее время необходимо выполнить новое измерение как лэмбовского сдвига, так и сверхтонкой структуры атомов $(\mu_2^3\text{He})^+$, $(\mu_2^4\text{He})^+$.

Необходимо отметить, что в последние годы точность теоретических исследований спектров энергии простейших атомов существенно возросла [3]. Были вычислены новые квантовоэлектродинамические поправки порядка α^6 и α^7 к спектрам энергии позитрония, мюония, атома водорода, ионов электронного гелия [4]. Для ряда водородоподобных атомов (атом водорода, ионы гелия и др.) сравнение теоретических расчетов в рамках квантовой электродинамики с экспериментом затруднено, поскольку теоретическая ошибка при вычислении вкладов структуры и поляризуемости ядер в лэмбовский сдвиг и в сверхтонкую структуру остается еще очень большой и значительно превосходит ошибки эксперимента. Прогресс в этой области может быть достигнут как за счет новых экспериментальных исследований структуры и поляризуемости протона и других ядер, позволяющих измерить электромагнитные формфакторы протона, структурные функции неупругого электрон-протонного рассеяния, так и за счет использования новых атомов, включая легкие мюонные системы.

Важно подчеркнуть, что для легких мюонных атомов все вклады в спектр энергии можно разделить на две группы. В первую входят поправки, полученные в аналитическом виде при изучении спектров мюония и атома водорода. Вторую группу образуют многочисленные вклады электронной поляризации вакуума, структуры ядра, эффекты отдачи, которые являются специфическими для каждого мюонного атома. Цель настоящей работы со-

стоит в аналитическом и численном расчетах поправок порядка α^5 и α^6 к сверхтонкой структуре S -состояний иона мюонного гелия $(\mu_2^3\text{He})^+$ в рамках квазипотенциального метода в квантовой электродинамике [17, 18]. Мы рассматриваем такие эффекты электронной поляризации вакуума, отдачи, структуры ядра ^3He , которые имеют принципиальное значение для достижения высокой точности расчета. Численные значения поправок получены с точностью 0.001 мэВ. Таким образом, цель данного исследования состояла в улучшении ранее проведенных вычислений [6–9] сверхтонкой структуры иона мюонного гелия и получении надежной оценки сверхтонкого расщепления $1S$ - и $2S$ -уровней энергии, которые могли бы служить надежным ориентиром при постановке соответствующих экспериментов при измерениях сверхтонкой структуры этого атома и интервалов $2S-2P$ -перехода. Современные численные значения фундаментальных физических констант взяты из работы [1]: масса электрона $m_e = 0.510998918(44) \cdot 10^{-3}$ ГэВ, масса мюона $m_\mu = 0.1056583692(94)$ ГэВ, постоянная тонкой структуры $\alpha^{-1} = 137.03599911(46)$, масса гелиона $m_2 = 2.80839142(24)$ ГэВ, магнитный момент гелиона $\mu_h = -2.127497723(25)$ в ядерных магнетонах, аномальный магнитный момент мюона $a_\mu = 1.16591981(62) \cdot 10^{-3}$.

2. ЭФФЕКТЫ ОДНОПЕТЛЕВОЙ И ДВУХПЕТЛЕВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В ОДНОФОТОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Наш подход к исследованию сверхтонкой структуры иона мюонного гелия основан на квазипотенциальном методе в квантовой электродинамике [19–21], в котором двухчастичное связанное состояние описывается уравнением Шредингера. Основной вклад в оператор взаимодействия мюона и гелиона в S -состоянии определяется брейтовским гамильтонианом [22]

$$H_B = H_0 + \Delta V_B^{fs} + \Delta V_B^{hfs}, \quad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{Z\alpha}{r}, \quad (1)$$

$$\Delta V_B^{fs} = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m_1^3} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m_2^3} + \frac{\pi Z\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}) - \frac{Z\alpha}{2m_1 m_2 r} \left(\mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p}}{r^2} \right), \quad (2)$$

$$\Delta V_B^{hfs} = \frac{8\pi\alpha\mu_h}{3m_1 m_p} \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{4} \delta(\mathbf{r}), \quad (3)$$

\mathbf{p} — относительный импульс частиц, образующих ион мюонного гелия, σ_1 и σ_2 — спиновые матрицы соответственно мюона и ядра, m_p — масса протона, μ_h — магнитный момент гелиона. Потенциал спин-спинового взаимодействия (3) дает основной вклад в энергию сверхтонкого расщепления S -уровней (энергия Ферми). Усредняя выражение (3) по кулоновским волновым функциям $1S$ - и $2S$ -состояний,

$$\psi_{100}(r) = \frac{W^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Wr}, \quad W = \mu Z\alpha, \quad (4)$$

$$\psi_{200}(r) = \frac{W^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi} e^{-Wr/2} \left(1 - \frac{Wr}{2}\right), \quad (5)$$

получим следующий результат (разность энергий триплетного и синглетного состояний):

$$\begin{aligned} \Delta E_F^{hfs}(nS) &= \frac{8\mu^3 Z^3 \alpha^4 \mu_h}{3m_1 m_p n^3} = \\ &= \begin{cases} 1S : -1370.725 \text{ мэВ}, \\ 2S : -171.341 \text{ мэВ} \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

(n — главное квантовое число). В выражении (6) не учитывается аномальный магнитный момент a_μ мюона. Удобно представить поправку на a_μ к сверхтонкому расщеплению отдельно, взяв экспериментальное значение $a_\mu = 1.16591981(62) \cdot 10^{-3}$ [1]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{a_\mu}^{hfs}(nS) &= a_\mu \Delta E_F^{hfs}(nS) = \\ &= \begin{cases} 1S : -1.598 \text{ мэВ}, \\ 2S : -0.200 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (7) \end{aligned}$$

В аналитическом виде известен также вклад релятивистских эффектов порядка α^6 в сверхтонкую структуру спектра [3]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{rel}^{hfs}(nS) &= \\ &= \left[1 + \frac{11n^2 + 9n - 11}{6n^2} (Z\alpha)^2 + \dots\right] \Delta E_F^{hfs}(nS) = \\ &= \begin{cases} 1S : -0.438 \text{ мэВ}, \\ 2S : -0.078 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

Вклад однопетлевой электронной поляризации вакуума в потенциал взаимодействия частиц определяется следующим выражением в координатном представлении [22]:

$$\begin{aligned} \Delta V_{1\gamma,VP}^{hfs}(r) &= \frac{8\alpha\mu_h}{3m_1 m_2} \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{4} \frac{\alpha}{3\pi} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left[\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2 \xi^2}{r} \exp(-2m_e \xi r) \right], \quad (9) \end{aligned}$$

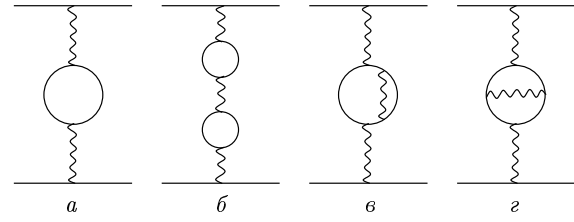


Рис. 1. Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии

где $\rho(\xi) = \sqrt{\xi^2 - 1} (2\xi^2 + 1) / \xi^4$. При его получении использована следующая замена в фотонном пропагаторе:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \frac{\rho(\xi) d\xi}{k^2 + 4m_e^2 \xi^2}. \quad (10)$$

После усреднения по волновым функциям (4), (5) получим поправки порядка α^5 к энергии сверхтонкого расщепления:

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma,VP}^{hfs}(1S) &= \frac{8\mu^3 Z^3 \alpha^5 \mu_h}{9m_1 m_p \pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \left[1 - \frac{4m_e^2 \xi^2}{W^2} \int_0^\infty x \exp\left[-x \left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)\right] dx \right] = \\ &= -4.203 \text{ мэВ}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma,VP}^{hfs}(2S) &= \frac{\mu^3 Z^3 \alpha^5 \mu_h}{9m_1 m_p \pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \left[1 - \frac{4m_e^2 \xi^2}{W^2} \int_0^\infty x \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \times \right. \\ &\times \left. \exp\left[-x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right] dx \right] = -0.540 \text{ мэВ}. \quad (12) \end{aligned}$$

Заменяя массу электрона m_e на массу мюона m_1 в выражениях (10), (11), можно найти вклад мюонной поляризации вакуума в сверхтонкую структуру. Он будет иметь более высокий порядок α^6 , поскольку отношение $W/m_1 \ll 1$. Его численное значение включено в таблицу. Вклад такого же порядка α^6

Сверхтонкая структура $1S$ - и $2S$ -состояний в ионе мюонного гелия ($\mu \text{ }^3\text{He}^+$), $\Delta_{12} = 8\Delta E^{hfs}(2S) - \Delta E^{hfs}(1S)$

Вклад в СТС	$1S$, мэВ	$2S$, мэВ	Δ_{12}	Ссылка
Энергия Ферми	-1370.725	-171.341	0	(6), [3, 4]
АММ мюона ($\sim \alpha^5, \alpha^6$)	-1.598	-0.200	0	(7), [3, 4]
Релятивистская поправка ($\sim \alpha^6$)	-0.438	-0.078	-0.183	(8), [3]
Однопетлевая ПВ в однофотонном взаимодействии ($\sim \alpha^5$)	-4.203	-0.540	-0.119	(11)–(12)
Двухпетлевая ПВ в однофотонном взаимодействии ($\sim \alpha^6$)	-0.050	-0.004	0.016	(14)–(16)
Однопетлевая мюонная ПВ в однофотонном взаимодействии ($\sim \alpha^6$)	-0.052	-0.007	0	(11)–(12)
Однопетлевая ПВ во втором порядке ТВ ($\sim \alpha^5$)	-9.260	-0.869	2.305	(23)–(24)
Двухпетлевая ПВ во втором порядке ТВ ($\sim \alpha^6$)	-0.105	-0.010	0.022	(27)–(30)
Структура ядра ($\sim \alpha^5$)	48.376	6.047	0	(33), (34)
ПВ и структура ядра ($\sim \alpha^6$)	0.760	0.095	0	(38)
Структура ядра ($\sim \alpha^6$)	2.553	0.272	-0.377	(41)–(42), (45)
Структура ядра и СЭ мюона ($\sim \alpha^6$)	-0.145	-0.018	0	(46), [31]
Отдача ядра ($\sim \alpha^6$)	0.330	0.038	-0.026	(47)–(48), [34]
Суммарный вклад	-1334.560	-166.615	1.638	

Примечания: СТС — сверхтонкая структура, АММ — аномальный магнитный момент, ПВ — поляризация вакуума, ТВ — теория возмущений, СЭ — собственная энергия.

дают диаграммы двухпетлевой электронной поляризации вакуума (рис. 1б–г). Чтобы получить оператор взаимодействия частиц, отвечающий амплитуде с двумя последовательными петлями (рис. 1б), необходимо дважды использовать замену (10). В координатном представлении результат имеет вид

$$\Delta V_{1\gamma,VP-VP}^{hfs}(r) = \frac{8\pi\alpha\mu_h}{3m_1m_p} \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{4} \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^2 \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left\{ \delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{\pi r(\eta^2 - \xi^2)} \times [\eta^4 \exp(-2m_e\eta r) - \xi^4 \exp(-2m_e\xi r)] \right\}. \quad (13)$$

Соответствующую поправку к сверхтонкой структуре уровней $1S$ и $2S$ можно представить в виде ин-

теграла по r и параметрам ξ, η . Далее интеграл по r вычислялся аналитически, а по ξ, η численно. В результате получаем

$$\Delta E_{1\gamma,VP-VP}^{hfs}(r)(1S) = \frac{8\alpha^6\mu^3 Z^3 \mu_h}{27m_1m_p} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left\{ 1 - \frac{4m_e^2}{W^2(\eta^2 - \xi^2)} \times \int_0^\infty e^{-2x} x dx \left[\eta^4 \exp\left(-\frac{2m_e\eta x}{W}\right) - \xi^4 \exp\left(-\frac{2m_e\xi x}{W}\right) \right] \right\} = -0.017 \text{ мэВ}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma,VP-VP}^{hfs}(r)(2S) &= \frac{\alpha^6 \mu^3 Z^3 \mu_h}{27 m_1 m_p} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left\{ 1 - \frac{4m_e^2}{W^2(\eta^2 - \xi^2)} \times \right. \\ &\times \int_0^\infty e^{-x} dx \left[\eta^4 \exp\left(-\frac{2m_e \eta x}{W}\right) - \xi^4 \times \right. \\ &\left. \left. \times \exp\left(-\frac{2m_e \xi x}{W}\right) \right] \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \right\} = -0.002 \text{ мэВ}. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично можно вычислить вклад двухпетлевой поляризации вакуума порядка α^6 , показанной на рис. 1в,г. В этом случае потенциал взаимодействия мюона и ядра ${}^3\text{He}$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \Delta V_{1\gamma,2-loop VP}^{hfs}(r) &= \frac{8\alpha^3 \mu_h}{3\pi m_1 m_p} \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \times \\ &\times \left[\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{\pi r(1-v^2)} \exp\left(-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где функция

$$\begin{aligned} f(v) &= v \left\{ (3-v^2)(1+v^2) \left[\text{Li}_2\left(-\frac{1-v}{1+v}\right) + \right. \right. \\ &+ 2\text{Li}_2\left(\frac{1-v}{1+v}\right) + \frac{3}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \ln \frac{1+v}{2} - \ln \frac{1+v}{1-v} \ln v \left. \right] + \\ &+ \left[\frac{11}{16}(3-v^2)(1+v^2) + \frac{v^4}{4} \right] \ln \frac{1+v}{1-v} + \\ &+ \left[\frac{3}{2} v(3-v^2) \ln \frac{1-v^2}{4} - 2v(3-v^2) \ln v \right] + \\ &\left. + \frac{3}{8} v(5-3v^2) \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$\text{Li}_2(z)$ — дилогарифм Эйлера. Численные значения вклада оператора (16) в сверхтонкую структуру находятся так же, как в случае потенциала (13). Они включены в таблицу. Роль влияния поляризации вакуума на сверхтонкую структуру иона мюонного гелия этим не исчерпывается. Имеется также ряд вкладов, в которых электронная поляризация вакуума входит в потенциал вместе с эффектами структуры ядра, отдачи, релятивистскими поправками во втором порядке теории возмущений.

3. ЭФФЕКТЫ ОДНОПЕТЛЕВОЙ И ДВУХПЕТЛЕВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Поправки второго порядка теории возмущений к спектру энергии водородоподобного атома определя-

ются редуцированной кулоновской функцией Грина \tilde{G} [23], парциальное разложение которой имеет вид

$$\tilde{G}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \tilde{g}_{nl}(r, r') Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}'), \quad (18)$$

где \mathbf{n}, \mathbf{n}' — единичные векторы в направлении радиус-вектора. Радиальная функция $\tilde{g}_{nl}(r, r')$ была получена [23] в виде штурмовского разложения по полиномам Лагерра. Основной вклад электронной поляризации вакуума в сверхтонкую структуру во втором порядке теории возмущений (SOPT) имеет вид (рис. 2а)

$$\Delta E_{SOPT VP 1}^{hfs} = 2 \langle \psi | \Delta V_{VP}^C \times \tilde{G} \times \Delta V_B^{hfs} | \psi \rangle, \quad (19)$$

где

$$\Delta V_{VP}^C(r) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left(-\frac{Z\alpha}{r}\right) \exp(-2m_e \xi r) \quad (20)$$

— модифицированный кулоновский потенциал, а « \times » обозначает свертку редуцированной кулоновской функции Грина с потенциалом. Поскольку величина $\Delta V_B^{hfs}(r)$ пропорциональна $\delta(\mathbf{r})$, необходимо знать редуцированную кулоновскую функцию Грина с одним нулевым аргументом. В этом случае она была получена на основе представления Хостлера после вычитания полюсного члена и имеет вид [24, 25]

$$\tilde{G}_{1S}(\mathbf{r}, 0) = \frac{Z\alpha\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-x}}{x} g_{1S}(x), \quad (21)$$

где

$$g_{1S}(x) = [4x(\ln 2x + C) + 4x^2 - 10x - 2],$$

$$\tilde{G}_{2S}(\mathbf{r}, 0) = -\frac{Z\alpha\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-x/2}}{2x} g_{2S}(x), \quad (22)$$

$$g_{2S}(x) = [4x(x-2)(\ln x + C) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4],$$

$C = 0.5772\dots$ — постоянная Эйлера, $x = Wr$. В результате необходимые поправки к сверхтонкой структуре спектра энергии иона $(\mu^3\text{He})^+$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta E_{VP 1}^{hfs}(1S) &= -E_F^{hfs}(1S) \frac{2\alpha}{3\pi} (1+a_\mu) \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \int_0^\infty \exp\left[-2x\left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)\right] g_{1S}(x) dx = \\ &= -9.260 \text{ мэВ}, \end{aligned} \quad (23)$$

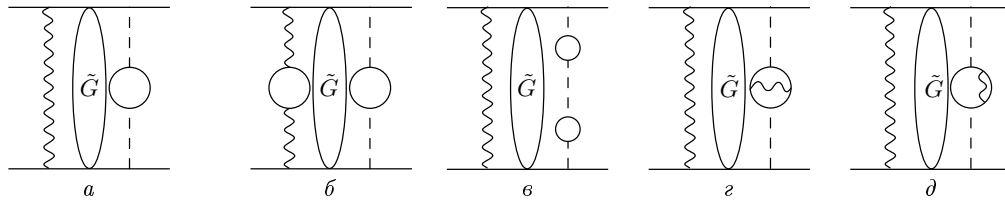


Рис. 2. Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений. Штриховой линией обозначен кулоновский фотон, \tilde{G} — редуцированная кулоновская функция Грина

$$\Delta E_{VP 1}^{hfs}(2S) = E_F^{hfs}(2S) \frac{\alpha}{3\pi} (1 + a_\mu) \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \int_0^\infty \exp\left[-x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right] g_{2S}(x) dx = -0.869 \text{ мэВ}. \quad (24)$$

$$\Delta E_{SOPT VP 21}^{hfs}(1S) = -\frac{16\alpha^6 Z^3 \mu^3 \mu_h (1 + a_\mu)}{27\pi^2 m_1 m_p} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_0^\infty dx \times \exp\left[-2x \left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)\right] g_{1S}(x), \quad (27)$$

Здесь включен множитель $1 + a_\mu$, так что эти выражения содержат поправки порядка α^5 и α^6 .

Двухпетлевые вклады на рис. 2б–д имеют порядок α^6 . Рассмотрим первый из этих вкладов, который определяется потенциалами (9), (20), редуцированной кулоновской функцией Грина (21), (22), а также редуцированной кулоновской функцией Грина с ненулевыми аргументами. Удобное представление для нее было получено в работах [24, 26]:

$$\tilde{G}_{1S}(r, r') = -\frac{Z\alpha\mu^2}{\pi} \exp[-(x_1 + x_2)] g_{1S}(x_1, x_2),$$

$$g_{1S}(x_1, x_2) = \frac{1}{2x_<} - \ln 2x_> - \ln 2x_< + \text{Ei}(2x_<) + \frac{7}{2} - 2C - (x_1 + x_2) + \frac{1 - \exp(2x_<)}{2x_<}, \quad (25)$$

и

$$\tilde{G}_{2S}(r, r') = -\frac{Z\alpha\mu^2}{16\pi x_1 x_2} \times \exp[-(x_1 + x_2)] g_{2S}(x_1, x_2),$$

$$g_{2S}(x_1, x_2) = 8x_< - 4x_<^2 + 8x_> + 12x_<x_> - 26x_<^2 x_> + 2x_<^3 x_> - 4x_>^2 - 26x_<x_>^2 + 23x_<^2 x_>^2 - x_<^3 x_>^2 + 2x_<x_>^3 - x_<^2 x_>^3 + 4e^x (1 - x_<) \times (x_> - 2)x_> + 4(x_< - 2)x_<(x_> - 2)x_> \times [-2C + \text{Ei}(x_<) - \ln(x_<) - \ln(x_>)], \quad (26)$$

где $x_< = \min(x_1, x_2)$, $x_> = \max(x_1, x_2)$, $C = 0.577216\dots$ — постоянная Эйлера, $\text{Ei}(x)$ — интегральная экспоненциальная функция.

Подставляя выражения (9), (20), (25) и (26) в (19), получим для каждого уровня $1S$ и $2S$ по два вклада:

$$\Delta E_{SOPT VP 22}^{hfs}(1S) = -\frac{256\alpha^6 Z^3 \mu^3 \mu_h (1 + a_\mu) m_e^2}{27\pi^2 m_1 m_p W^2} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) \eta^2 d\eta \int_0^\infty x_1 dx_1 \times \exp\left[-2x_1 \left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)\right] \times \int_0^\infty x_2 dx_2 \exp\left[-2x_2 \left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)\right] g_{1S}(x_1, x_2), \quad (28)$$

$$\Delta E_{SOPT VP 21}^{hfs}(2S) = \frac{\alpha^6 Z^3 \mu^3 \mu_h (1 + a_\mu)}{27\pi^2 m_1 m_p} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx \times \exp\left[-x \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right] g_{2S}(x), \quad (29)$$

$$\Delta E_{SOPT VP 22}^{hfs}(2S) = -\frac{2\alpha^6 Z^3 \mu^3 \mu_h (1 + a_\mu) m_e^2}{27\pi^2 m_1 m_p W^2} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) \eta^2 d\eta \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_1}{2}\right) dx_1 \times \exp\left[-x_1 \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right] \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_2}{2}\right) dx_2 \times \exp\left[-x_2 \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W}\right)\right] g_{2S}(x_1, x_2). \quad (30)$$

По отдельности вклады (27), (28) и (29), (30) расходятся, но их сумма является конечной. Соответствующие численные значения представлены выше в таблице. Вклады двух других диаграмм в сверхтонкую структуру могут быть получены по формулам (23) и (24), в которых необходимо заменить потенциал (20) последовательно на следующие потенциалы [21]:

$$\Delta V_{VP-VP}^C(r) = \left(\frac{\alpha}{3\pi}\right)^2 \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left(-\frac{Z\alpha}{r}\right) \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \times [\xi^2 \exp(-2m_e \xi r) - \eta^2 \exp(-2m_e \eta r)], \quad (31)$$

$$\Delta V_{2-loop VP}^C(r) = -\frac{2Z\alpha^3}{3\pi^2 r} \times \int_0^1 \frac{f(v) dv}{(1-v^2)} \exp\left(-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right). \quad (32)$$

Опуская дальнейшие промежуточные соотношения, структура которых аналогична (23), (24), мы включили в таблицу численные значения поправок от потенциалов (31), (32).

4. ЭФФЕКТЫ СТРУКТУРЫ И ОТДАЧИ ЯДРА

Основной вклад эффектов структуры ядра в сверхтонкое расщепление S -уровней, включающий поправку Земаха, определяется двухфотонными обменными диаграммами (рис. 3). Мы считаем, что заряд и магнитный момент ядра гелия распределены в пространстве с некоторыми плотностями. Вершинный оператор ядра ${}^3_2\text{He}$ включает электрический G_E

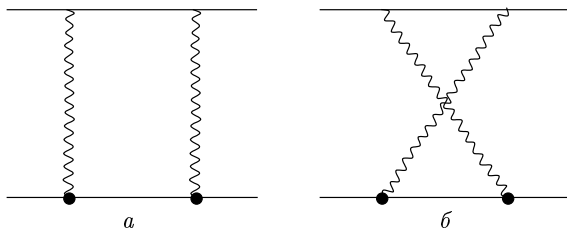


Рис. 3. Эффекты структуры ядра порядка α^5 . Приведены прямая (а) и перекрестная (б) двухфотонные диаграммы

и магнитный G_M формфакторы, которые определяют взаимодействие с электромагнитным полем. Для численного расчета поправки на структуру ядра воспользуемся полученным ранее [20] выражением (здесь и далее для обозначения поправки на структуру ядра использован индекс «str»):

$$\Delta E_{str}^{hfs} = -\frac{(Z\alpha)^5}{3\pi m_1 m_2 n^3} \delta_{l0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} V(k), \quad (33)$$

где δ_{l0} — символ Кронекера, а

$$V(k) = \frac{2F_2^2 k^2}{m_1 m_2} + \frac{\mu}{(m_1 - m_2)k(k + \sqrt{4m_1^2 + k^2})} \times \left[-128F_1^2 m_1^2 - 128F_1 F_2 m_1^2 + 16F_1^2 k^2 + 64F_1 F_2 k^2 + 16F_2^2 k^2 + \frac{32F_2^2 m_1^2 k^2}{m_2^2} + \frac{4F_2^2 k^4}{m_1^2} - \frac{4F_2^2 k^4}{m_2^2} \right] + \frac{\mu}{(m_1 - m_2)k(k + \sqrt{4m_2^2 + k^2})} \times [128F_1^2 m_2^2 + 128F_1 F_2 m_2^2 - 16F_1^2 k^2 - 64F_1 F_2 k^2 - 48F_2^2 k^2].$$

Чтобы устранить инфракрасную расходимость в выражении (33), необходимо учесть вклад итерационного слагаемого квазипотенциала в сверхтонкую структуру иона $(\mu^3\text{He})^+$:

$$\Delta E_{iter, str}^{hfs} = -\langle V_{1\gamma} \times G^f \times V_{1\gamma} \rangle_{str}^{hfs} = -\frac{64}{3} \frac{\mu^4 Z^4 \alpha^5 \mu_h}{m_1 m_p \pi n^3} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2}, \quad (34)$$

где угловые скобки обозначают усреднение оператора взаимодействия по кулоновской волновой функции, а индекс «hfs» указывает на выделение сверхтонкой части в итерационном слагаемом квазипотенциала, $V_{1\gamma}$ — квазипотенциал однофотонного взаимодействия, G^f — свободный двухчастичный пропагатор. При интегрировании в выражениях (33), (34) использовалась дипольная параметризация для паулиевского F_1 и дираковского F_2 формфакторов [27, 28]. Параметр Λ^2 этой параметризации может быть связан с зарядовым радиусом r_N ядра ${}^3_2\text{He}$: $\Lambda^2 = 12/r_N^2$. Численное значение $r_N = 1.844 \pm 0.045$ фм взято из работы [8]. Поскольку зависимость от главного квантового числа n в выражении (33) определяется множителем $1/n^3$, численные значения поправки на структуру ядра для уровней $1S$ и $2S$,

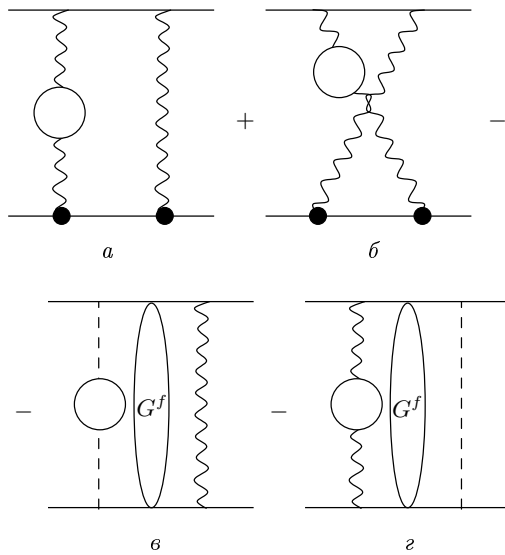


Рис. 4. Эффекты структуры ядра и поляризации вакуума порядка α^6 . Штриховой линией обозначен кулоновский фотон, G^f — свободный двухчастичный пропагатор

$$\Delta E_{str}^{hfs} = \begin{cases} 1S : 48.376 \text{ мЭВ}, \\ 2S : 6.047 \text{ мЭВ}, \end{cases} \quad (35)$$

в интервале $\Delta_{12} = 8\Delta E_{str}^{hfs}(2S) - \Delta E_{str}^{hfs}(1S)$ сокращаются. Поэтому теоретический расчет интервала Δ_{12} не содержит неопределенностей, связанных со структурой ядра по крайней мере в основном порядке. Величина поправки (33) зависит от формы распределений $G_{E,M}$. Так, замена дипольной параметризации на гауссову параметризацию приводит к изменению численного значения (33) приблизительно на 2%.

В шестом порядке по α имеется вклад в сверхтонкую структуру, показанный на рис. 4, который включает эффекты как структуры ядра, так и поляризации вакуума. Используя подстановку (10), а также выражение (33), его можно представить в виде

$$\Delta E_{str,VP}^{hfs} = -\frac{2\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3}{m_1 m_2 \pi^2 n^3} \int_0^\infty V_{VP}(k) dk \times \int_0^1 \frac{v^2(1-v^2/3) dv}{k^2(1-v^2) + 4m_e^2}, \quad (36)$$

где потенциал $V_{VP}(k)$ отличается от $V(k)$ в формуле (33) только дополнительным множителем k^2 . Амплитудный вклад (36) в спектр энергии необходимо

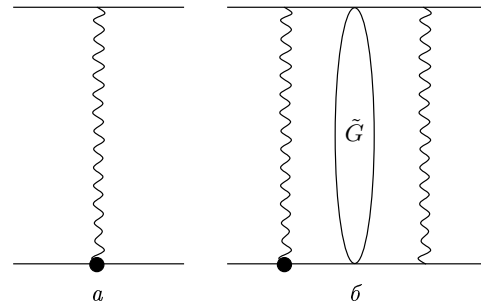


Рис. 5. Эффекты структуры ядра порядка α^6 в однофотонном взаимодействии и втором порядке теории возмущений (\tilde{G} — редуцированная кулоновская функция Грина)

дополнить двумя итерационными членами, которые показаны на диаграммах рис. 4в,г:

$$\begin{aligned} \Delta E_{iter,str VP}^{hfs} &= -2\langle V^C \times G^f \times \Delta V_{VP}^{hfs} \rangle^{hfs} = \\ &= -2\langle V_{VP}^C \times G^f \times \Delta V_B^{hfs} \rangle^{hfs} = \\ &= -E_F \frac{4\mu\alpha(Z\alpha)}{m_e \pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^1 \frac{v^2(1-v^2/3) dv}{k^2(1-v^2) + 1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Численные значения суммы поправок (36) и (37) равны

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,VP}^{hfs} + 2\Delta E_{iter,str VP}^{hfs} &= \\ &= \begin{cases} 1S : 0.760 \text{ мЭВ}, \\ 2S : 0.095 \text{ мЭВ}. \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

Во втором порядке теории возмущений имеется вклад эффектов структуры ядра, который определяется сверхтонкой частью брейтовского потенциала и оператором однофотонного взаимодействия (рис. 5б),

$$\Delta V_{str} = \frac{2\pi(Z\alpha)}{3} r_N^2 \delta(\mathbf{r}), \quad (39)$$

в котором влияние структуры ядра учитывается в терминах зарядового радиуса r_N . Этот вклад имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta E_{str SOPT}^{hfs}(nS) &= 2\langle \psi_n | \Delta V_B^{hfs} \times \tilde{G} \times \Delta V_{str} | \psi_n \rangle = \\ &= \frac{4\pi(Z\alpha)}{3} E_F(nS) r_N^2 \tilde{G}(0,0). \end{aligned} \quad (40)$$

Значение редуцированной кулоновской функции Грина при нулевых аргументах в координатном представлении $\tilde{G}(0,0)$ является расходящимся. Причина появившейся расходимости кроется в

использованном разложении потенциалов в выражении (40) при малых относительных импульсах и их последующем интегрировании по всем значениям импульсов. Для вычисления $\tilde{G}(0,0)$ можно использовать метод размерной регуляризации [29–31]. Вычитая из (40) вклад итерационного слагаемого $2\langle\psi_n|\Delta V_B^{hfs} \times G^f \times \Delta V_{str}|\psi_n\rangle$, получим следующие результаты:

$$\begin{aligned} \Delta E_{str\ SOPT}^{hfs}(1S) &= \\ &= \frac{4}{3}(Z\alpha)^2 m_1^2 r_N^2 E_F(1S) \left[\ln(Z\alpha) - \frac{3}{2} \right], \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{str\ SOPT}^{hfs}(2S) &= \\ &= \frac{4}{3}(Z\alpha)^2 m_1^2 r_N^2 E_F(2S) [\ln(Z\alpha) - \ln 2]. \end{aligned} \quad (42)$$

Еще один вклад шестого порядка по α можно получить из амплитуды однофотонного взаимодействия (рис. 5а), разлагая магнитный формфактор ядра при малых относительных импульсах. Это приводит к тому, что потенциал сверхтонкого взаимодействия (3) в координатном представлении получает добавочное слагаемое

$$\Delta V_{1\gamma\ str}^{hfs}(r) = -\frac{4\pi\alpha(1+a_\mu)}{9m_1m_p} r_M^2 \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{4} \nabla^2 \delta(\mathbf{r}), \quad (43)$$

где r_M — магнитный радиус ядра. При вычислении среднего значения оператора (43) по кулоновским волновым функциям использовалось следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \int \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \nabla^2 \psi_n^2(\mathbf{r}) &= \\ &= 2 \left(\psi(0) \nabla^2 \psi(0) + \left(\frac{d\psi_n}{dr} \right)_{r=0}^2 \right), \end{aligned} \quad (44)$$

и значение [17, 32]

$$\nabla^2 \psi(0) = \psi(0) \mu^2 (Z\alpha)^2 \frac{3 + 2(n^2 - 1)}{n^2}.$$

В результате получаем, что поправка, пропорциональная магнитному радиусу ядра, имеет вид

$$\Delta E_{1\gamma, str}^{hfs}(nS) = -\frac{4}{3}(Z\alpha)^2 \mu^2 r_M^2 E_F(nS) \frac{1 - n^2}{4n^2}. \quad (45)$$

В приведенную выше таблицу включен полный вклад поправок на структуру ядра, который определяется выражениями (41), (42) и (45) для 1S- и 2S-уровней энергии при $r_M \approx r_N$. Приведем здесь также выражение для поправки, связанной

со структурой ядра и собственно-энергетическими (SE) вкладами в мюонную линию, которая также имеет порядок α^6 [31]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{str\ SE}^{hfs} &= \frac{5\alpha(Z\alpha)}{2\pi} m_1 R_Z E_F = \\ &= \begin{cases} 1S : -0.145 \text{ мэВ}, \\ 2S : -0.018 \text{ мэВ}, \end{cases} \end{aligned} \quad (46)$$

где R_Z — радиус Земаха.

Часть поправок на отдачу уже была учтена при вычислении диаграмм рис. 3, 4. Так, основной вклад от отдачи порядка $(Z\alpha)(m_1/m_2) \ln(m_1/m_2) E_F$ содержится в потенциале (34). Поправки на отдачу порядка $(Z\alpha)^2(m_1/m_2) E_F$ для основного состояния атома водорода были получены в работах [33, 31], а для сверхтонкого интервала Δ_{12} в [34]. Используя эти результаты, мы можем представить аналитические выражения для поправок на отдачу и их численные значения в сверхтонком расщеплении 1S- и 2S-состояний в виде

$$\begin{aligned} \Delta E_{rec}^{hfs}(1S) &= \\ &= (Z\alpha)^2 \frac{\mu^2}{m_1 m_2} E_F(1S) \left[-\frac{17}{12} + \frac{25}{3\zeta} + \frac{31\zeta}{72} + \right. \\ &+ \left. \ln 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{23}{2\zeta} - \frac{11\zeta}{8} \right) + \ln \left(\frac{1}{Z\alpha} \right) \left(-\frac{3}{2} + \frac{7}{2\zeta} + \frac{7\zeta}{8} \right) \right] = \\ &= 0.330 \text{ мэВ}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{rec}^{hfs}(2S) &= \\ &= (Z\alpha)^2 \frac{\mu^2}{m_1 m_2} E_F(2S) \left[-\frac{265}{96} + \frac{821}{96\zeta} - \frac{809\zeta}{1152} + \right. \\ &+ \left. \ln 2 \left(1 - \frac{12}{\zeta} - \frac{\zeta}{2} \right) + \ln \left(\frac{1}{Z\alpha} \right) \left(-\frac{3}{2} + \frac{7}{2\zeta} + \frac{7\zeta}{8} \right) \right] = \\ &= 0.038 \text{ мэВ}, \end{aligned} \quad (48)$$

где $\zeta = 2m_2\mu_h/m_p Z$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведен расчет квантовоэлектродинамических поправок, эффектов структуры и отдачи ядра порядка α^5 и α^6 в сверхтонком расщеплении 1S- и 2S-уровней энергии иона мюонного гелия $(\mu_2^3\text{He})^+$. Изучение 1S- и 2S-состояний данного атома имеет экспериментальную перспективу. В отличие от ранее проведенных исследований спектров энергии легких мюонных атомов [6–8], использовался трехмерный квазипотенциальный метод для описания связанного состояния мюона и гелиона. Все

рассмотренные поправки к сверхтонкой структуре иона мюонного гелия можно разбить на две группы. В первую группу входят вклады, специфические для данного мюонного атома. Они связаны прежде всего с эффектами электронной поляризации вакуума. В нашем исследовании эти вклады были представлены в интегральной форме и получены численно. Вторую группу составляют поправки, известные в аналитическом виде из вычислений сверхтонкой структуры спектра атома водорода и мюония [3]. Численные значения всех поправок представлены в таблице, которая содержит также ряд основных ссылок на работы, в которых рассматривалось прецизионное вычисление сверхтонкой структуры простейших атомов. Другие ссылки можно найти в обзорных работах [3, 4].

Как уже отмечалось выше, сверхтонкая структура легких экзотических атомов исследовалась на основе уравнения Дирака много лет назад в работах [10, 11]. В них были получены энергии $2S$ - $2P$ -переходов в мюонном водороде и в ионе мюонного гелия $(\mu^3\text{He})^+$. При этом учитывались лишь основные вклады в сверхтонкую структуру с точностью 0.1 мэВ. Из табл. 2 работы [11] следует, что энергии переходов $^1S_{1/2}$ - $^3P_{1/2}$ и $^3S_{1/2}$ - $^3P_{1/2}$ равны соответственно 1167.3 мэВ и 1334.1 мэВ, что для сверхтонкого расщепления $2S$ -уровня дает величину -166.8 мэВ. Как следует из нашей таблицы, величина -166.587 мэВ сверхтонкого расщепления $2S$ -уровня хорошо согласуется с результатом работы [11]. Таким образом, проведенные нами вычисления сверхтонкой структуры для иона мюонного гелия уточняют полученное ранее значение для уровня $2S$ за счет вычисления поправок порядка α^6 и дают новое значение для сверхтонкого расщепления уровня $1S$. Для основного вклада следующего порядка по α получена оценка

$$\alpha^3 \ln(1/\alpha) E_F^{hfs}(1S) \approx 0.003 \text{ мэВ.}$$

Несмотря на то, что все вклады представлены в таблице с точностью 0.001 мэВ, точность самого теоретического расчета сверхтонкой структуры уровней $1S$ и $2S$ пока не является столь высокой. Это следует из того, что поправка на структуру ядра порядка α^5 имеет наибольшую неопределенность, которая связана с погрешностями измерения электромагнитных формфакторов ядра ^3He . При использовании дипольной параметризации для формфакторов ядра ^3He величина теоретической ошибки определяется погрешностью определения зарядового радиуса ядра $r_N(^3\text{He}) = 1.844 \pm 0.045$ фм. В результате теоретические ошибки в сверхтонком

расщеплении могут составлять не менее ± 1.5 мэВ для $1S$ -уровня и ± 0.20 мэВ для $2S$ -уровня. Ядерные поправки к сверхтонкой структуре водородоподобных атомов с ядрами ^2H , ^3H , $^3\text{He}^+$ исследовались в [35, 36], где учитывалось движение нуклонов, образующих ядро. Другой источник теоретической неопределенности связан с эффектом поляризуемости ядра [37–43], который необходимо исследовать дополнительно, имея экспериментальные данные по рассеянию поляризованных лептонов на ядрах ^3He . Величина вклада поляризуемости ядра ^3He в сверхтонкую структуру данного атома может достигать значения нескольких миллиэлектронвольт. Ядерные поправки и поправки на поляризуемость ядра следует рассматривать совместно, поскольку оба эти эффекта связаны со взаимодействием многонуклонной системы с электромагнитным полем. Интервал сверхтонкого расщепления Δ_{12} не содержит неопределенностей, связанных со структурой и поляризуемостью ядра. Поэтому впервые полученная в данной работе величина $\Delta_{12} = 1.638$ мэВ может быть использована для проверки предсказаний квантовой электродинамики для иона мюонного гелия с точностью 0.01 мэВ.

Автор благодарит Р. Н. Фаустова за полезные обсуждения, коллег из университета им. Гумбольдта (Берлин), где была выполнена заключительная часть работы, за гостеприимство и отличные условия для работы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-16821).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. J. Mohr and B. N. Taylor, Rev. Mod. Phys. **72**, 351 (2000).
2. Р. Энгфер, Х. Вальтер, Х. Шнойфли, ЭЧАЯ **5**, 382 (1974).
3. M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, Phys. Rep. **342**, 62 (2001).
4. S. G. Karshenboim, Phys. Rep. **422**, 1 (2005).
5. A. Di Giacomo, Nucl. Phys. B **11**, 411 (1969).
6. E. Borie, Z. Phys. A **275**, 347 (1975).
7. E. Borie and G. A. Rinker, Phys. Rev. A **18**, 324 (1978).
8. E. Borie and G. A. Rinker, Rev. Mod. Phys. **54**, 67 (1982).

9. G. W. F. Drake and L. L. Byer, Phys. Rev. A **32**, 713 (1985).
10. E. Borie, Z. Phys. A **278**, 127 (1976).
11. E. Borie, Z. Phys. A **297**, 17 (1980).
12. F. Kottmann, F. Biraben, C. A. N. Conde et al., AIP Conf. Proc. **564**, 13 (2001).
13. R. Pohl, A. Antognini, F. D. Amaro et al., Can. J. Phys. **83**, 339 (2005).
14. G. Carboni, G. Gorini, G. Torelli et al., Nucl. Phys. A **278**, 381 (1977).
15. K. Jungmann, Z. Phys. C **56**, S59 (1992).
16. P. Hauser, H. P. von Arb, A. Bianchetti et al., Phys. Rev. A **46**, 2363 (1992).
17. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, ЖЭТФ **125**, 48 (2004).
18. А. Р. Martynenko, Phys. Rev. A **71**, 022506 (2005).
19. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, ЖЭТФ **115**, 1221 (1999).
20. А. П. Мартыненко, ЖЭТФ **128**, 1169 (2005).
21. А. Р. Martynenko, Phys. Rev. A **76**, 012505 (2007).
22. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
23. С. А. Запрягаев, Н. Л. Манаков, В. Г. Пальчиков, *Теория многозарядных ионов с одним и двумя электронами*, Энергоатомиздат, Москва (1985).
24. S. D. Lakdawala and P. J. Mohr, Phys. Rev. A **22**, 1572 (1980).
25. В. Г. Иванов, С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **109**, 1219 (1996).
26. K. Pachucki, Phys. Rev. A **53**, 2092 (1996).
27. J. L. Friar, Lecture Notes in Phys. **627**, 285 (2003).
28. J. L. Friar and I. Sick, Phys. Lett. **579B**, 212 (2004).
29. A. H. Hoang, Phys. Rev. D **57**, 1615 (1998).
30. A. Czarnecki, K. Melnikov, and A. Yelkhovsky, Phys. Rev. A **59**, 4316 (1999).
31. S. G. Karshenboim, Phys. Lett. **225A**, 97 (1997).
32. I. B. Khriplovich and A. I. Milstein, E-print archives, hep-ph/9607374.
33. G. T. Bodwin and D. R. Yennie, Phys. Rev. D **37**, 498 (1988).
34. M. M. Sternheim, Phys. Rev. **130**, 211 (1963).
35. J. L. Friar and J. L. Payne, Phys. Rev. C **72**, 014002 (2005).
36. F. Low, Phys. Rev. **77**, 361 (1950).
37. А. И. Мильштейн, С. С. Петросян, И. Б. Хриплович, ЖЭТФ **109**, 1146 (1996).
38. R. N. Faustov and A. P. Martynenko, Eur. Phys. J. C **24**, 281 (2002).
39. E. V. Cherednikova, R. N. Faustov, and A. P. Martynenko, Nucl. Phys. A **703**, 365 (2002).
40. А. И. Мильштейн, И. Б. Хриплович, ЖЭТФ **125**, 205 (2004).
41. V. Nazaryan, C. E. Carlson, and K. A. Griffioen, Phys. Rev. Lett. **96**, 163001 (2006).
42. C. E. Carlson, E-print archives, physics/0610289.
43. K. Pachucki, Phys. Rev. A **76**, 022508 (2007).