

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ХАОСА

С. П. Кузнецов*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук
410019, Саратов, Россия

Поступила в редакцию 16 мая 2007 г.

Рассмотрена схема генератора хаоса, построенная из двух подсистем, каждая из которых представляет собой пару параметрически связанных осцилляторов с различающимися вдвое собственными частотами. Обе подсистемы возбуждаются по очереди благодаря попеременному включению накачки на третьей гармонике основной частоты и передают возбуждение друг другу через квадратичный нелинейный элемент связи. На основании качественных рассуждений и результатов численных расчетов высказывается предположение, что в системе реализуется гиперболический странный аттрактор.

PACS: 05.45.-a

1. ВВЕДЕНИЕ

В математической теории динамических систем вводится в рассмотрение класс однородно-гиперболических хаотических аттракторов [1–11]. Будучи составленными исключительно из фазовых траекторий седлового типа, они обладают свойством структурной устойчивости («грубости»), которое заключается в нечувствительности структуры аттрактора к вариациям функций и параметров в определяющих уравнениях. Это странные аттракторы с сильными хаотическими свойствами, допускающие далеко идущий математический анализ. К сожалению, однородно-гиперболические аттракторы не характерны для подавляющего большинства реальных систем со сложной динамикой. В учебниках и монографиях по нелинейной динамике гиперболические хаотические аттракторы представлены математическими конструкциями, такими как аттрактор Плыкина и соленоид Смейла–Вильямса [1–11].

Недавно предложена физически реализуемая система, составленная из двух связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля [12–14], в которой имеет место аттрактор Смейла–Вильямса (при описании в терминах отображения Пуанкаре). В работах [15, 16] для этой системы выполнена компьютерная проверка известных из математической литера-

туры достаточных условий присутствия гиперболического аттрактора [1, 6].

Другие варианты подобных схем на основе неавтономных и автономных осцилляторов обсуждаются в работах [16–19]. Общий принцип, положенный в основу функционирования этих систем, состоит в манипуляции фазами колебаний при передаче возбуждения между парциальными осцилляторами, которые становятся активными попеременно, с тем чтобы трансформация фаз отвечала итерациям отображения с хаотической динамикой.

С точки зрения реализации данного принципа, весьма подходящим и удобным представляется известный в теории колебаний и приложениях класс систем с параметрическим возбуждением [20–23]. Такого рода системы могут быть построены на различной физической основе, например, в электронике, механике, акустике, нелинейной оптике.

Одна из распространенных схем параметрического генератора основана на использовании двух парциальных осцилляторов, связь между которыми осуществляется посредством реактивного (бездиссипативного) элемента, характеризуемого изменяющимся во времени параметром. При этом собственные частоты осцилляторов ω_1 , ω_2 и частота изменения параметра, или частота накачки ω_3 связаны соотношением $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$, выражающим условие параметрического резонанса. В такой системе в обоих парциальных осцилляторах возникает одновремен-

*E-mail: spkuz@rambler.ru

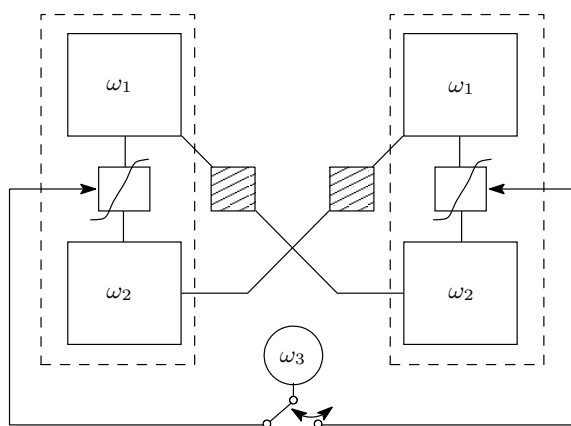


Рис. 1. Блок-схема параметрического генератора хаоса. Блоки с пометками ω_1 и ω_2 обозначают осцилляторы с соответствующей собственной частотой, квадратики с волнообразной чертой — бездиссипативные элементы связи с параметром, осциллирующим с частотой накачки ω_3 , заштрихованные квадраты — элементы связи, характеризующиеся квадратичной нелинейностью

ная раскачка колебаний, стабилизация амплитуды которых может быть достигнута, если ввести, например, нелинейную диссипацию.

Рассмотрим систему, составленную из двух таких подсистем, А и В, — параметрических генераторов, каждый из которых представляет собой пару параметрически связанных осцилляторов (рис. 1). При этом частоты выбраны так, что $\omega_2 = 2\omega_1$ и $\omega_3 = 3\omega_1$. (Условие параметрического резонанса, очевидно, выполняется.) Принадлежащий каждой подсистеме осциллятор частоты ω_1 полагаем связанным через квадратичный нелинейный элемент с осциллятором частоты ω_2 , относящимся к подсистеме-партнеру. В силу принятого соотношения частот воздействие на второй гармонике одного осциллятора на другой будет эффективным, т. е. резонансным.

Пусть накачка включается по очереди в одной и другой подсистемах, так что функционирование устройства состоит в попеременном параметрическом возбуждении подсистем и затухании колебаний в промежутках времени между активными стадиями. В начале очередной стадии возбуждения каждой подсистемы «затравкой» для возникающих колебаний служит сигнал на второй гармонике от системы-партнера, так что передача возбуждения сопровождается каждый раз удвоением фазы колебаний. За полный период модуляции накачки фаза колебаний претерпевает умножение на 4, что обеспечивает хаос в поведении последовательности значений фа-

зы. Таким образом, система выдает сигнал в виде импульсов, следующих друг за другом с периодом модуляции накачки, но при этом фаза высокочастотного заполнения хаотически меняется от импульса к импульсу.

Как можно предположить, в области параметров, где реализуется описанное преобразование фаз, хаотический аттрактор является однородно-гиперболическим. Более конкретно, аттрактор отображения, определяющего изменение состояния системы за период модуляции накачки, относится к семейству соленоидов Смейла–Вильямса.

В предлагаемой системе манипуляция фазами колебаний осуществляется в ситуации, когда передача колебательного возбуждения от одного осциллятора к другому сопровождается обменом запасенной энергией. В этом состоит существенное отличие от ранее обсуждавшихся схем [12–19], где в принятых за основу автоколебательных элементах определяющее значение имеет не обмен энергией, а компенсация потерь в каждом из осцилляторов за счет внешнего неколебательного источника.

2. ИССЛЕДУЕМАЯ МОДЕЛЬ, ПРИНЦИП ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть система характеризуется функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 - \omega_1^2 x_1^2 - \omega_2^2 x_2^2 - \omega_1^2 y_1^2 - \omega_2^2 y_2^2) + \kappa [x_1 x_2 f(t) + y_1 y_2 g(t)] \times \sin \omega_3 t + \varepsilon (x_1^2 y_2 + y_1^2 x_2). \quad (1)$$

Здесь $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$ — обобщенные координаты, а $\dot{x}_{1,2}$ и $\dot{y}_{1,2}$ — обобщенные скорости двух пар осцилляторов, имеющих собственные частоты ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$. Параметр κ определяет интенсивность накачки на частоте $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$, а функции $f(t)$ и $g(t)$ задают медленную зависимость амплитуды накачки от времени для двух пар осцилляторов. Параметр ε отвечает за нелинейную связь между осцилляторами, относящимися к разным парам.

Для введения нелинейной диссипации, призванной обеспечить насыщение параметрической неустойчивости и возможность существования аттрактора, зададим диссипативную функцию Рэлея [24] следующим образом:

$$R = \frac{1}{2} (\alpha_1 \dot{x}_1^2 + \alpha_2 \dot{x}_2^2 + \alpha_1 \dot{y}_1^2 + \alpha_1 \dot{y}_2^2) + \frac{1}{4} (\beta_1 \dot{x}_1^4 + \beta_2 \dot{x}_2^4 + \beta_1 \dot{y}_1^4 + \beta_1 \dot{y}_2^4), \quad (2)$$

где $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$ — положительные константы. Динамические уравнения системы [24]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_i}, \quad i = 1, 2,$$

представляются тогда в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \kappa x_2 f(t) \sin \omega_3 t + \\ &+ 2\varepsilon x_1 y_2 - \alpha_1 \dot{x}_1 - \beta_1 \dot{x}_1^3, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \kappa x_1 f(t) \sin \omega_3 t + \\ &+ \varepsilon y_1^2 - \alpha_2 \dot{x}_2 - \beta_2 \dot{x}_2^3, \\ \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 &= \kappa y_2 g(t) \sin \omega_3 t + \\ &+ 2\varepsilon y_1 x_2 - \alpha_1 \dot{y}_1 - \beta_1 \dot{y}_1^3, \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 &= \kappa y_1 g(t) \sin \omega_3 t + \\ &+ \varepsilon x_1^2 - \alpha_2 \dot{y}_2 - \beta_2 \dot{y}_2^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Выберем функции $f(t)$ и $g(t)$ так, чтобы для двух пар осцилляторов амплитуда накачки совершала медленные периодические колебания в противофазе:

$$f(t) = \sin^2(\pi t/T), \quad g(t) = \cos^2(\pi t/T). \quad (5)$$

Период модуляции будем считать кратным периоду основной частоты накачки, т. е. $T = 2\pi N/\omega_3$, где N — целое¹⁾.

При $N \gg 1$, следуя стандартному подходу, для описания динамики можно воспользоваться методом медленных амплитуд [21–23]. Положим

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_1^* \exp(-i\omega_1 t), \\ x_2 &= A_2 \exp(i\omega_2 t) + A_2^* \exp(-i\omega_2 t), \\ y_1 &= B_1 \exp(i\omega_1 t) + B_1^* \exp(-i\omega_1 t), \\ y_2 &= B_2 \exp(i\omega_2 t) + B_2^* \exp(-i\omega_2 t), \end{aligned} \quad (6)$$

¹⁾ Данное условие означает, что система уравнений (4) характеризуется периодической зависимостью коэффициентов от времени с периодом T и для нее применимо описание динамики посредством отображения Пуанкаре, или стробоскопического отображения, в традиционной форме (с использованием секущих плоскостей, расположенных с шагом T по временной оси в расширенном фазовом пространстве). В рамках подхода, основанного на методе медленных амплитуд, т. е. для уравнения (8), указанное условие не принципиально и его можно игнорировать.

где $A_{1,2}(t) = A'_{1,2} + iA''_{1,2}, B_{1,2}(t) = B'_{1,2} + iB''_{1,2}$ — медленно меняющиеся комплексные функции времени, на которые наложены дополнительные условия

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 \exp(i\omega_1 t) + \dot{A}_1^* \exp(-i\omega_1 t) &= 0, \\ \dot{A}_2 \exp(i\omega_2 t) + \dot{A}_2^* \exp(-i\omega_2 t) &= 0, \\ \dot{B}_1 \exp(i\omega_1 t) + \dot{B}_1^* \exp(-i\omega_1 t) &= 0, \\ \dot{B}_2 \exp(i\omega_2 t) + \dot{B}_2^* \exp(-i\omega_2 t) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

После подстановки этих выражений в соотношения (4), умножения уравнений для A_1, B_1 на $\exp(-i\omega_1 t)$ и для A_2, B_2 на $\exp(-i\omega_2 t)$ и усреднения по периоду быстрых колебаний с учетом принятого соотношения частот $\omega_{1,2,3}$ получаем:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= -\frac{\kappa}{4\omega_1} f(t) A_2^* - i\frac{\varepsilon}{\omega_1} A_1^* B_2 - \\ &- \frac{1}{2} \alpha_1 A_1 - \frac{3}{2} \omega_1^2 \beta_1 A_1 |A_1|^2, \\ \dot{A}_2 &= -\frac{\kappa}{4\omega_2} f(t) A_1^* - i\frac{\varepsilon}{2\omega_2} B_1^* - \\ &- \frac{1}{2} \alpha_2 A_2 - \frac{3}{2} \omega_2^2 \beta_2 A_2 |A_2|^2, \\ \dot{B}_1 &= -\frac{\kappa}{4\omega_1} g(t) B_2^* - i\frac{\varepsilon}{\omega_1} B_1^* A_2 - \\ &- \frac{1}{2} \alpha_1 B_1 - \frac{3}{2} \omega_1^2 \beta_1 B_1 |B_1|^2, \\ \dot{B}_2 &= -\frac{\kappa}{4\omega_2} g(t) B_1^* - i\frac{\varepsilon}{2\omega_2} A_1^2 - \\ &- \frac{1}{2} \alpha_2 B_2 - \frac{3}{2} \omega_2^2 \beta_2 B_2 |B_2|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Если $\varepsilon = 0$, то система распадается на две изолированные подсистемы, А и В, каждая из которых образована двумя осцилляторами с параметрической связью. Рассмотрим одну из подсистем, например А. (Для второй подсистемы рассуждения аналогичны.) Без диссипации и при постоянной амплитуде накачки $f(t) \equiv 1$ подсистема описывается в терминах комплексных амплитуд уравнениями

$$\dot{A}_1 = -\frac{\kappa}{4\omega_1} A_2^*, \quad \dot{A}_2 = -\frac{\kappa}{4\omega_2} A_1^*.$$

Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= C_+ \exp\left(\frac{\kappa t}{4\sqrt{\omega_1 \omega_2}}\right) + C_- \exp\left(-\frac{\kappa t}{4\sqrt{\omega_1 \omega_2}}\right), \\ A_2 &= -\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \left[C_+^* \exp\left(\frac{\kappa t}{4\sqrt{\omega_1 \omega_2}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + C_-^* \exp\left(-\frac{\kappa t}{4\sqrt{\omega_1 \omega_2}}\right) \right], \end{aligned}$$

где $C_+ = R \exp(i\varphi)$ и C_- — комплексные постоянные, определяемые начальными условиями. Второй член затухает, и на больших временах получаем

$$A_1 \approx C_+ \exp\left(\frac{\kappa t}{4\sqrt{\omega_1\omega_2}}\right),$$

$$A_2 \approx -\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} C_+^* \exp\left(\frac{\kappa t}{4\sqrt{\omega_1\omega_2}}\right),$$

что соответствует

$$x_1 \approx 2R \exp\left(\frac{\kappa t}{4\sqrt{\omega_1\omega_2}}\right) \cos(\omega_1 t + \varphi),$$

$$x_2 \approx -2R \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \exp\left(\frac{\kappa t}{4\sqrt{\omega_1\omega_2}}\right) \cos(\omega_2 t - \varphi).$$

Таким образом, возникшие в результате развития параметрической неустойчивости колебания на первой и второй гармониках основной частоты ω_1 имеют фазовый сдвиг, задаваемый одной и той же константой φ , которая зависит от начальных условий. При учете нелинейной диссипации амплитуда колебаний будет претерпевать насыщение, но указанное фазовое соотношение сохранится.

Перейдем к ситуации, когда имеет место попеременное действие накачки на обе подсистемы, А и В, при наличии связи между ними, определяемой отличным от нуля параметром ε .

Возбуждение каждой подсистемы при включении накачки будет происходить в присутствии воздействия на ее парциальный осциллятор со стороны подсистемы-партнера. Воздействие на осциллятор, имеющий собственную частоту $\omega_2 = 2\omega_1$, осуществляется посредством порождаемой на нелинейном элементе второй гармоники сигнала от осциллятора, совершающего колебания на частоте ω_1 . Эта вторая гармоника имеет удвоенную фазу²⁾, и ее же унаследуют колебания возбуждаемого осциллятора, стимулированные этим воздействием. На следующем полупериоде модуляции накачки подсистемы А и В меняются ролями и фаза передаваемого возбуждения претерпевает еще одно удвоение. Поэтому за полный период модуляции накачки трансформация фазы будет приближенно определяться отображением $\varphi_{new} = 4\varphi_{old} + \text{const} \pmod{2\pi}$. Оно относится к семейству отображений Бернулли [25], его динамика хаотическая и характеризуется показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 4 \approx 1.386$.

²⁾ В самом деле, согласно известной тригонометрической формуле имеем $\cos^2(\omega_1 t + \varphi) = \frac{1}{2} \cos(2\omega_1 t + 2\varphi) + \text{нерезонансный член}$.

Для более аккуратного описания динамики системы в дискретном времени следует обратиться к отображению Пуанкаре. Рассмотрим последовательность моментов времени $t_n = nT$. Пусть в момент t_n состояние системы задано набором переменных — восьмимерным вектором \mathbf{X}_n . Решая уравнения (4) или (8) на интервале времени T с начальными условиями \mathbf{X}_n , получим набор переменных, отвечающий новому состоянию \mathbf{X}_{n+1} . Введем функцию, отображающую восьмимерное пространство в себя:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{X}_n). \quad (9)$$

Это и есть отображение Пуанкаре. Оно определяется эволюцией, описываемой дифференциальными уравнениями с гладкими и ограниченными в конечной области переменных правыми частями. В соответствии с теоремами существования, единственности, непрерывности и дифференцируемости решения системы дифференциальных уравнений, отображение \mathbf{T} представляет собой диффеоморфизм — взаимно однозначное и взаимно дифференцируемое отображение [26]. Для определения фазовой переменной φ используем осциллятор на частоте ω_1 , относящийся к той подсистеме, которая активна в моменты времени t_n . Тогда в восьмимерном пространстве состояний направление, связанное с фазой φ , отвечает растяжению (приблизительно в соответствии с отображением $\varphi_{n+1} = 4\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}$), а семь остальных направлений — сжатию (см. ниже).

3. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Обратимся к результатам численного моделирования динамики системы. Удобно принять $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\omega_3 = 6\pi$, что соответствует выбору периода собственных колебаний первого осциллятора в одной и другой подсистемах за единицу времени.

На рис. 2 приводятся типичные образцы временных зависимостей в установившемся режиме параметрической генерации для динамических переменных x и y на протяжении одного периода модуляции накачки, которая задается в двух подсистемах функциями (5), представленными на рис. 2а. Решение уравнений (4) на компьютере проводилось методом Рунге–Кутты четвертого порядка при

$$T = 40, \quad \varepsilon = 0.5, \quad \kappa = 35, \quad (10)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.6, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0.01.$$

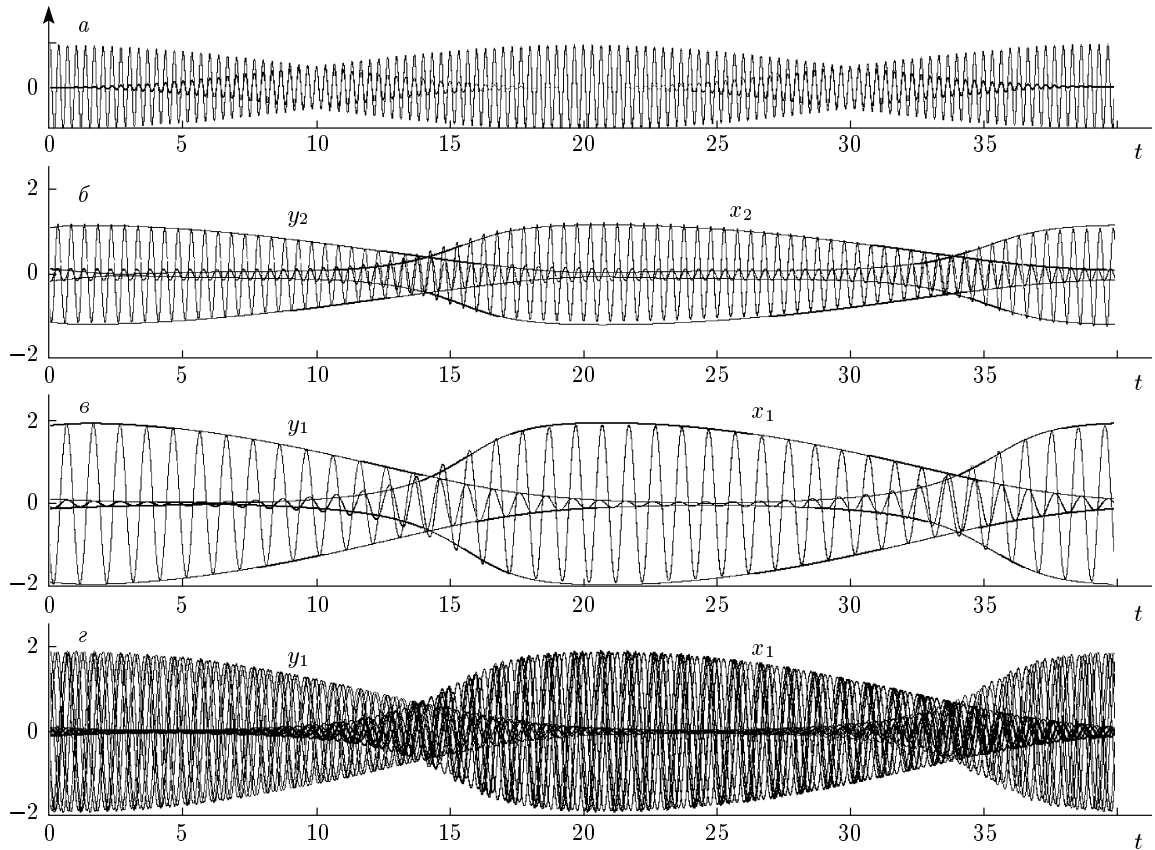


Рис. 2. Типичные образцы временной зависимости для динамических переменных, полученной из численного решения уравнений (4) при выборе параметров в соответствии с (10): *a* — накачка; на диаграммах *б* и *в* показана одна реализация, а на диаграмме *г* — восемь наложенных друг на друга реализаций — участков одного и того же сигнала, что иллюстрирует неперiodический (фактически, хаотический) характер динамики. Огибающие на рис. *б* и *в* построены на основе численного решения уравнений (8) для комплексных амплитуд

Как можно видеть, эволюция во времени состоит в том, что обе подсистемы становятся активными попеременно в соответствии с действием накачки. Каждая подсистема выдает сигнал, представляющий собой последовательность импульсов, имеющих высокочастотное заполнение и следующих с периодом модуляции накачки. Однако сигнал в целом неперiodический: фаза высокочастотного заполнения меняется от импульса к импульсу хаотически. На качественном уровне это хорошо видно из рис. 2*г*, где представлены на одном графике восемь реализаций — участков сигнала, относящихся к последовательным периодам модуляции накачки. На рис. 2*б,в* приводятся также зависимости от времени амплитуд осцилляторов, полученные численным решением уравнений для медленных амплитуд (8). Для получения соответствия начальные условия в момент времени, принятый за нуль, пересчитаны из соответ-

ствующего мгновенного состояния системы (4) на аттракторе с помощью соотношений (6), (7). Видно, что согласие между методом медленных амплитуд и точным решением хорошее.

На рис. 3 показаны диаграммы для фаз, отвечающих последовательным стадиям возбуждения одной из подсистем. По оси абсцисс отложена фаза колебаний в подсистеме В, относящаяся к моменту времени $t_n = nT$, а по оси ординат — к моменту времени t_{n+1} . График 3*а* построен на основании численного решения уравнений (4), а график 3*б* — амплитудных уравнений (8). При этом в первом случае фаза определяется по формуле

$$\varphi_n = \arg [y_1(t_n) + \dot{y}_1(t_n)/i\omega_1],$$

а во втором —

$$\varphi_n = \arg B_1(t_n).$$

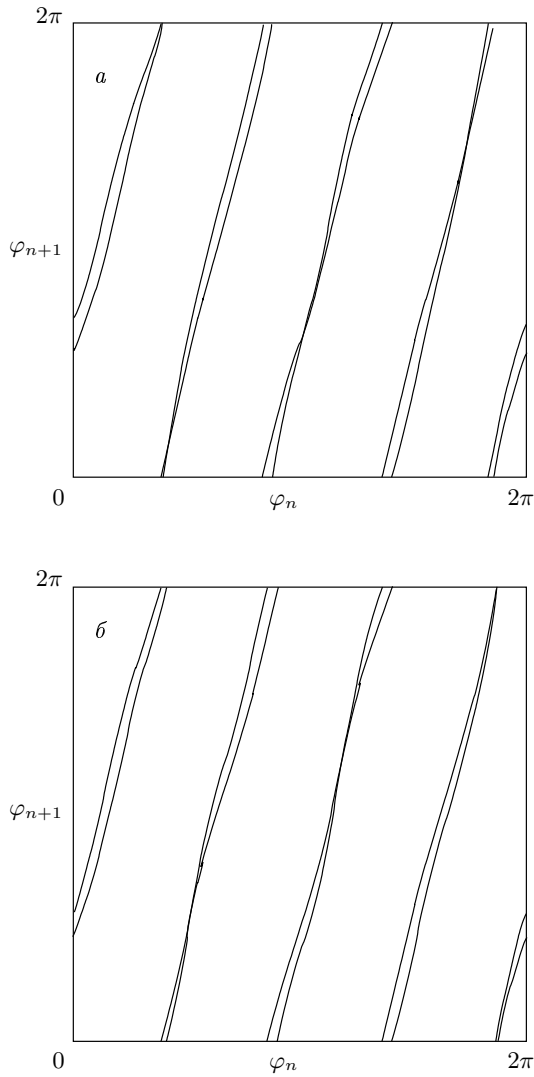


Рис. 3. Итерационные диаграммы для фазы на стадии активности одной из подсистем, построенные на основании численного решения исходных уравнений (4) (а) и уравнений (8) для комплексных амплитуд (б) при выборе параметров в соответствии с (10)

Подчеркнем, что определение фазы относится к активной стадии рассматриваемой подсистемы, когда амплитуда заведомо отлична от нуля³⁾. Как видно из рис. 3, однократный обход окружности для образа, т. е. вариация фазы φ_n от нуля до 2π , соот-

³⁾ Глобально определить фазу на всей временной оси нельзя, поскольку в промежутках времени между активными стадиями амплитуда колебаний в подсистеме становится близкой к нулю. Если бы такое определение было возможно, то нельзя было бы обеспечить принадлежность отображения для фазы к нужному топологическому классу.

ветствует четырехкратному обходу для образа φ_{n+1} . Это значит, что отображение для фазы относится к тому же топологическому классу, что и отображение Бернулли $\varphi_{new} = 4\varphi_{old}$. Слабое расщепление ветвей графика, по-видимому, несущественно, и им в определенном приближении можно пренебречь.

Поскольку вычисления показывают хорошее соответствие между решениями исходных и амплитудных уравнений, ограничимся в дальнейшем рассмотрением результатов, относящиеся только к амплитудным уравнениям.

Чтобы получить свидетельство присутствия хаоса на количественном уровне, обратимся к расчету показателей Ляпунова. Для этого используем стандартную процедуру, основанную на методе Бенеттина [27, 28]. Проводится совместное решение уравнений (8) и восьми комплектов уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \delta \dot{A}_1 &= -\frac{\kappa}{4\omega_1} f(t) \delta A_2^* - i \frac{\varepsilon}{\omega_1} (\delta A_1^* B_2 + A_1^* \delta B_2) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha_1 \delta A_1 - \frac{3}{2} \omega_1^2 \beta_1 A_1^2 \delta A_1^* - 3\omega_1^2 \beta_1 A_1^* A_1 \delta A_1, \\ \delta \dot{A}_2 &= -\frac{\kappa}{4\omega_2} f(t) \delta A_1^* - i \frac{\varepsilon}{\omega_2} B_1 \delta B_1 - \frac{1}{2} \alpha_2 \delta A_2 - \\ &\quad - \frac{3}{2} \omega_2^2 \beta_2 A_2^2 \delta A_2^* - 3\omega_2^2 \beta_2 A_2^* A_2 \delta A_2, \\ \delta \dot{B}_1 &= -\frac{\kappa}{4\omega_1} f(t) \delta B_2^* - i \frac{\varepsilon}{\omega_1} (A_2 \delta B_1^* + B_1^* \delta A_2) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha_1 \delta B_1 - \frac{3}{2} \omega_1^2 \beta_1 B_1^2 \delta B_1^* - 3\omega_1^2 \beta_1 B_1^* B_1 \delta B_1, \\ \delta \dot{B}_2 &= -\frac{\kappa}{4\omega_2} f(t) \delta B_1^* - i \frac{\varepsilon}{\omega_2} A_1 \delta A_1 - \frac{1}{2} \alpha_2 \delta B_2 - \\ &\quad - \frac{3}{2} \omega_2^2 \beta_2 B_2^2 \delta B_2^* - 3\omega_2^2 \beta_2 B_2^* B_2 \delta B_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Каждый раз после определенного числа шагов разностной схемы в процессе решения уравнений выполняется ортогонализация Грама–Шмидта и нормализация для векторов возмущения $\{\delta A_1', \delta A_1'', \delta A_2', \delta A_2'', \delta B_1', \delta B_1'', \delta B_2', \delta B_2''\}$.

Показатели Ляпунова определяются как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией). Полный спектр показателей Ляпунова для аттрактора, реализующегося при значениях параметров (10), согласно результатам расчетов, следующий:

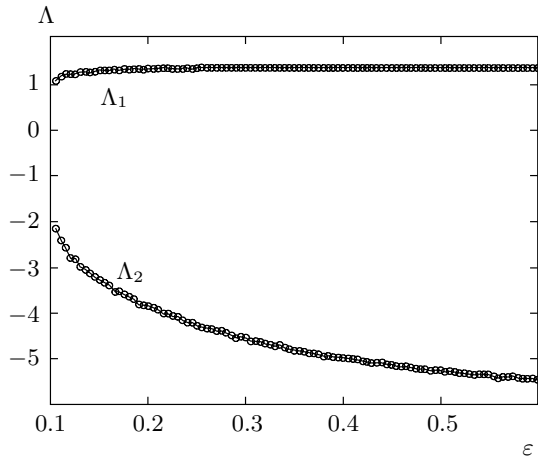


Рис. 4. Полученные в результате численного решения уравнений (8) и соответствующих уравнений в вариациях два наибольших показателя Ляпунова отображения Пуанкаре в зависимости от параметра ϵ при $\omega_1 = 2\pi, \omega_2 = 4\pi, \omega_3 = 6\pi, T = 40, \kappa = 35, \alpha_1 = \alpha_2 = 0.6, \beta_1 = \beta_2 = 0.01$

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 0.03456 \pm 0.00006, \\
 \lambda_2 &= -0.1320 \pm 0.0003, \\
 \lambda_3 &= -0.2247 \pm 0.0004, \\
 \lambda_4 &= -0.5220 \pm 0.0004, \\
 \lambda_5 &= -0.6826 \pm 0.0008, \\
 \lambda_6 &= -0.9012 \pm 0.0018, \\
 \lambda_7 &= -1.4189 \pm 0.0004, \\
 \lambda_8 &= -2.3248 \pm 0.0007.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Для отображения Пуанкаре показатели Ляпунова выражаются через величины (12) очевидным соотношением $\Lambda_k = \lambda_k T$. Отсюда можно найти $\Lambda_1 = 1.3823 \pm 0.0023$. Это хорошо согласуется с величиной $\ln 4 = 1.3862 \dots$, получаемой при приближенном описании эволюции фазовой переменной отображением Бернулли $\varphi_{n+1} = 4\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}$.

Наличие положительного показателя Λ_1 служит количественным подтверждением присутствия хаоса. Все остальные показатели, $\Lambda_2, \dots, \Lambda_8$, отрицательные. Отсюда следует, что элемент фазового объема претерпевает растяжение по одному направлению и сжатие по семи остальным направлениям в фазовом пространстве отображения Пуанкаре.

На рис. 4 показан график двух наибольших показателей Ляпунова отображения Пуанкаре в зависимости от величины связи ϵ между подсистемами при фиксированных остальных параметрах. Во всей рассматриваемой области один показатель положитель-

ный, а остальные отрицательные. Зависимость от параметра ϵ для положительного показателя, отвечающего за присутствие хаоса, гладкая, без каких-либо резких изменений («провалов»), обычно характерных для негиперболических аттракторов. Из рис. 4 видно, что в широкой области изменения параметра ϵ величина Λ_1 остается близкой к $\ln 4$.

Оценка фрактальной размерности аттрактора, имеющего показатели Ляпунова (12), по формуле Каплана–Йорке [6, 8, 21, 28] дает для аттрактора в отображении Пуанкаре

$$D = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.26 \tag{13}$$

(поскольку $\Lambda_1 > 0$ и $\Lambda_1 + \Lambda_2 < 0$). Соответственно для аттрактора исходной системы, вложенного в девятимерное расширенное фазовое пространство, размерность составляет $D' = D + 1 \approx 2.26$.

На рис. 5а показан фазовый портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость динамических переменных первого осциллятора второй подсистемы. На рис. 5б, представляющем фрагмент рис. 5а в увеличенном виде, можно видеть некоторые детали тонкой поперечной фрактальной структуры аттрактора. На рис. 5в приводится аналогичный портрет при выборе параметра связи вблизи порога существования хаотического аттрактора, где поперечная фрактальная структура становится все различимой.

4. ОБСУЖДЕНИЕ: ГИПОТЕЗА О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПРИРОДЕ АТТРАКТОРА

Природа механизма, заложенного в основу функционирования рассматриваемого параметрического генератора хаоса, а также численные результаты, подтверждающие реализацию этого механизма, позволяют высказать предположение, что наблюдаемый в системе хаотический аттрактор является однородно-гиперболическим.

Обратимся к рассуждениям, проведенным несколько в ином контексте Тураевым и Шильниковым [5, 29]. Введем координаты в фазовом пространстве так, что $\mathbf{X}_n = \{\mathbf{x}_n, \varphi_n\}$, где

$$\mathbf{x}_n = \{A'_1, A''_1, A'_2, A''_2, |B_1|, B'_2, B''_2\} \in \mathbb{R}^7,$$

$$\varphi_n = \arg B_1|_{t=nT} \in S,$$

\mathbb{R}^7 — евклидово пространство размерности семь,

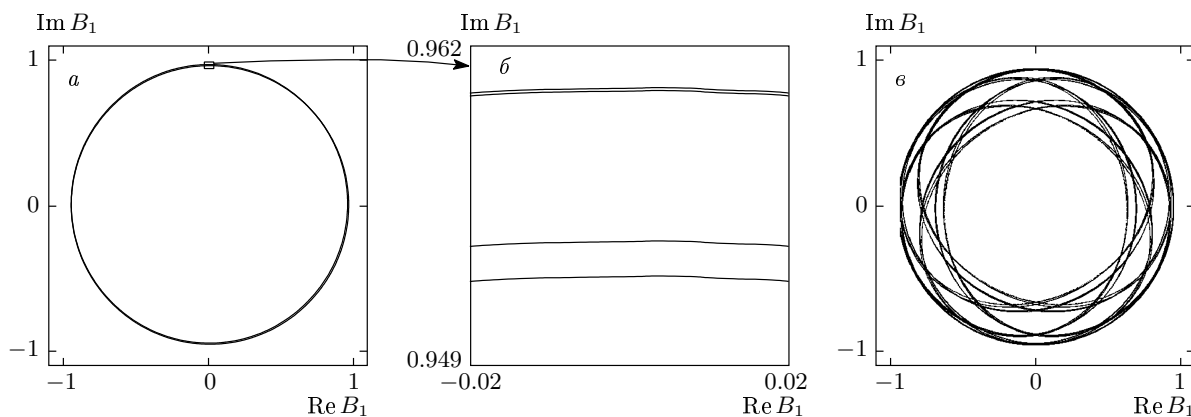


Рис. 5. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость комплексной переменной, отвечающей амплитуде первого осциллятора второй подсистемы при $\varepsilon = 0.5$ (а) и $\varepsilon = 0.125$ (в); б — увеличенный фрагмент исходной картинки

S — одномерная окружность. Тогда отображение Пуанкаре (9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \varphi_n), \\ \varphi_{n+1} &= m\varphi_n + g(\varphi_n) + \omega + h(\mathbf{x}_n, \varphi_n) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь m — целое число (в нашем случае $m = 4$), ω — некоторая константа, принадлежащая интервалу $[0, 2\pi)$. Функции \mathbf{f} , g и h гладкие и имеют период 2π по аргументу φ . Если предположить, что \mathbf{f} и h малы по норме, то отображение (14) близко к вырожденному отображению

$$\mathbf{x}_{n+1} = 0, \quad \varphi_{n+1} = m\varphi_n + g(\varphi_n) + \omega \pmod{2\pi}. \tag{15}$$

Согласно работам [5, 29], в случае $m \geq 2$ и при условии $|m + g'(\varphi)| > 1$ отображение (14) для достаточно малых по норме функций \mathbf{f} и h будет иметь аттрактор, топологически эквивалентный соленоиду Смейла–Вильямса (т. е. переходящий в него при непрерывной взаимно однозначной замене переменных). Соответственно, исходная потоковая система, порождающая данное отображение Пуанкаре, по принятой в математической литературе терминологии, будет иметь аттрактор топологически эквивалентный надстройке над соленоидом Смейла–Вильямса.

Принципиальный момент — наличие множителя $m = 4$ в уравнении для переменной φ , что определяет принадлежность отображения интересующему нас топологическому классу. Это обстоятельство очевидно из графиков, представленных на рис. 3.

Форма ветвей на графике, а также близость показателя Ляпунова для отображения Пуанкаре к величине $\Lambda_1 \approx \ln 4$ дают основание полагать выполненным условие $|m + g'(\varphi)| > 1$.

Тот факт, что показатели Ляпунова $\Lambda_2, \dots, \Lambda_8$ отрицательные и достаточно большие по абсолютной величине в сравнении с Λ_1 , говорит о малости функций \mathbf{f} и h , фигурирующих в записи отображения Пуанкаре (14).

Интерпретируя действие отображения Пуанкаре геометрически, мы можем вообразить вложенный в восьмимерное пространство тороид (прямое произведение одномерной окружности и семимерного шара) и связать одну итерацию отображения с продольным растяжением и поперечным сжатием этого объекта, вкладываемого затем в виде четырехкратно сложенной петли внутрь исходной области. На каждом шаге повторения этой процедуры количество витков увеличивается в четыре раза. В пределе получается аттрактор, содержащий бесконечное число витков и имеющий поперечную структуру, подобную множеству Кантора, — один из вариантов соленоида Смейла–Вильямса.

Возможное подтверждение принадлежности аттрактора к классу однородно-гиперболических могло бы основываться на использовании вычислительной процедуры [14, 15], содержание которой состоит в проверке условий надлежащего взаимного расположения растягивающихся и сжимающихся конусов в пространстве векторов малых возмущений в точках поглощающей области, содержащей аттрактор [1, 6]. В рассматриваемом случае, однако, непосредственное применение такой процедуры потребовало бы чрезмерных вычислительных ресурсов из-за относительно высокой размерности фазового пространства (размерность отображения Пуанкаре 8 в сравнении с 4 в работах [14, 15]).

Несмотря на гипотетический характер заключения о гиперболической природе хаотического аттрактора, рассмотренная схема параметрического генератора хаоса заведомо представляет интерес сама по себе, поскольку открывает возможность получения хаотических режимов, не чувствительных к выбору параметров и деталей конструкции, в системах радиотехники и электроники, механики, акустики, нелинейной оптики. Одним из возможных приложений может быть использование параметрических генераторов в схемах скрытой коммуникации на основе хаоса, активно обсуждаемых в последнее время [30].

Автор признателен Н. М. Рыскину за полезную дискуссию. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16773).

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Г. Синай, в сб. *Нелинейные волны*, Наука, Москва (1979), с. 192.
2. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники*, т. 2, под ред. Р. В. Гамкрелидзе, Изд-во ВИНТИ АН СССР, Москва (1985).
3. J.-P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985).
4. R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, New York (1989).
5. L. Shilnikov, *Int. J. Bifurcations and Chaos* **7**, 353 (1997).
6. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, Москва (1999).
7. V. Afraimovich and S.-B. Hsu, *Lectures on Chaotic Dynamical Systems*, AMS/IP Studies in Advanced Math., Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, Int. Press, Somerville, MA (2003).
8. Дж. Гукенхеймер, П. Холмс, *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*, Ин-т компьютерных исследований, Москва – Ижевск (2002).
9. В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова и др., *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*, Ин-т компьютерных исследований, Москва – Ижевск (2003).
10. V. Belykh, I. Belykh, and E. Mosekilde, *Int. J. Bifurcations and Chaos* **15**, 3567 (2005).
11. T. J. Hunt and R. S. MacKay, *Nonlinearity* **16**, 1499 (2003).
12. S. P. Kuznetsov, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 144101 (2005).
13. С. П. Кузнецов, Е. П. Селезнев, *ЖЭТФ* **129**, 400 (2006).
14. С. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев, *Изв. вузов, прикладная нелинейная динамика* **14**(5), 3 (2006).
15. S. P. Kuznetsov and I. R. Sataev, *Phys. Lett.* **365A**, 97 (2007).
16. О. В. Исаева, А. Ю. Jalnina, and S. P. Kuznetsov, *Phys. Rev. E* **74**, 046207 (2006).
17. П. В. Купцов, С. П. Кузнецов, *Нелинейная динамика* **2**, 307 (2006).
18. О. Б. Исаева, С. П. Кузнецов, А. Н. Осбалдестин, *Письма в ЖТФ* **33**(17), 69 (2007).
19. S. P. Kuznetsov and A. S. Pikovsky, *Physica D* **232**, 87 (2007).
20. Л. И. Мандельштам, *Лекции по колебаниям*, Изд-во АН СССР, Москва (1955).
21. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, Наука, Москва (1984).
22. У. Люиселл, *Связанные и параметрические колебания в электронике*, Изд-во иностр. лит., Москва (1963).
23. А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин, *Нелинейные колебания*, Физматлит, Москва (2005).
24. Ф. Р. Гантмахер, *Лекции по аналитической механике*, Наука, Москва (1966).
25. P. Gaspard, in *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Routledge, New York (2005), p. 548.
26. В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва (1975).
27. G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelсу, *Meccanica* **15**, 9 (1980).
28. С. П. Кузнецов, *Динамический хаос*, Физматлит, Москва (2001).
29. Л. П. Шильников, Д. В. Тураев, *ДАН* **342**, 596 (1995).
30. А. С. Дмитриев, А. И. Панас, *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*, Физматлит, Москва (2002).