

БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ДИПОЛЬНЫХ ЭКСИТОНОВ: МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАНТОВЫМ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Ю. Е. Лозовик^{a*}, И. Л. Курбаков^a, Г. Е. Астрахарчик^b, М. Вилландер^{c**}

^a Институт спектроскопии Российской академии наук
142190 Троицк, Московская обл., Россия

^b Polytechnic University of Catalonia
E-08034, Barcelona, Spain

^c Institute of Science and Technology (ITN), Linköping University
SE-581 83, Linköping, Tjärnan 6177, Sweden

Поступила в редакцию 13 июля 2007 г.

С помощью моделирования диффузионным методом Монте-Карло изучена бозе-конденсация двумерных дипольных экситонов в квантовых ямах. Рассчитаны корреляционные, микроскопические, термодинамические и спектральные характеристики. Показано, что в структурах связанных квантовых ям, в которых в настоящее время наблюдаются низкотемпературные особенности экситонной люминесценции, дипольные экситоны представляют собой сильнокоррелированную систему.

PACS: 71.35.Lk, 03.75.Nh, 02.70.Ss, 73.21.Fg

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерные дипольные экситоны (ДДЭ), в которых электроны e и дырки h пространственно разделены, могут быть созданы в структурах связанных квантовых ям (КЯ) [1] и одиночных КЯ в сильном внешнем поперечном электрическом поле [2]. В этих системах при низких температурах e и h находятся в наименее энергичных состояниях поперечного (к плоскости КЯ) квантования. При этом дипольные моменты экситонов (в основном аксиально-симметричном состоянии) имеют одно и то же направление, перпендикулярное этой плоскости. В связанных КЯ имеются два типа экситонов: прямой, в котором электрон и дырка находятся в одной и той же КЯ, и пространственно-непрямой дипольный экситон с электроном и дыркой в разных КЯ (см. подробности в экспериментальных работах [3–13]). Во втором случае дипольный момент экситона равен $d = eD$, где величина D определяется геометрией и равна характерному расстоянию между ямами (см. ниже формулу (3)). В одиночных КЯ дипольный экситон может существовать благодаря сильному поперечному

электрическому полю, индуцирующему дипольный момент [2, 14]. При этом в обоих случаях два ДДЭ не могут пройти «друг над другом» в плоскости КЯ в отличие от системы квазидвумерных атомных газов [15].

При низких экситонных плотностях, когда ДДЭ далеки друг от друга, обменные эффекты между электронами (дырками) соседних ДДЭ экспоненциально подавлены дипольным барьером, связанным с диполь-дипольным отталкиванием экситонов,

$$P \propto \exp \left[- \int_{a_{ex}}^{a_{cl}} \sqrt{m \left(V(r) - \frac{2E_0}{N} \right)} dr \right].$$

Здесь P — вероятность туннелирования ДДЭ через дипольный барьер, m — масса ДДЭ, E_0 — энергия основного состояния ДДЭ (их кинетическая энергия и энергия столкновений), N — число ДДЭ, $V(r)$ — их дипольный потенциал взаимодействия, a_{ex} — диаметр ДДЭ (имеющий порядок среднего расстояния a_{eh} между e и h в экситоне), a_{cl} — классическая точка поворота для потенциала $V(r)$ ($V(a_{cl}) = 2E_0/N$). В этом случае ДДЭ могут рассматриваться как (композиционные) бозоны. Но при высоких плотностях ДДЭ, когда расстояние между соседними ДДЭ меньше или по-

*E-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

**Magnus Willander.

рядка радиуса экситона, становятся существенными фермиевские свойства внутренней структуры экситонов. Это приводит к превращению газа ДДЭ в $e-h$ -систему [16] (хотя в изотропной системе при $T = 0$ происходит кроссовер от бозе-конденсата экситонов к БКШ-состоянию со щелью, убывающей с ростом плотности [1]).

Возможность бозе-конденсации трехмерных экситонов рассматривалась уже давно [17]. Но в одномерной бесконечной двумерной системе из-за ультрафиолетовой расходимости импульсного распределения экситонов бозе-конденсация возможна лишь при $T = 0$ [18]. В области конечных температур могут существовать лишь квазидальний (степенной) порядок [19] и сверхтекучая фаза, которые с ростом температуры разрушаются за счет диссоциации пар противоположно направленных вихрей и образования свободных вихрей в точке перехода Березинского–Костерлица–Таулеса (БКТ) [20–23]. Однако в конечных двумерных системах (ловушках) ультрафиолетовая расходимость импульсного распределения обрезается и бозе-конденсат может существовать [15, 24]. Этот факт открывает перспективы для исследования бозе-конденсации ДДЭ в реальных экспериментальных системах.

В настоящее время большое внимание экспериментаторов привлекают поиски бозе-конденсации ДДЭ в связанных КЯ [3–6] и одиночных КЯ. Интересные оптические эффекты, обнаруженные в измерениях люминесценции ДДЭ в связанных КЯ при низких температурах, говорят о существенном экспериментальном прогрессе в изучении коллективных свойств ДДЭ [7–13]. Наблюдения узконаправленной люминесценции бозе-конденсата ДДЭ вдоль нормали к плоскости КЯ, а также недиагонального дальнего порядка бозе-конденсированных ДДЭ в эксперименте по когерентности выполнены недавно Тимофеевым и Горбуновым в одиночных КЯ в поперечном электрическом поле [14].

Теоретически для коллективного состояния ДДЭ в КЯ были исследованы сверхтекучесть [25–27], бозе-конденсация [16, 27, 28] (в экситонном режиме), БКШ-подобное состояние [1, 29] (в $e-h$ -системе), сильные корреляции [2, 30], кристаллизация [2, 31–34] и суперсолид [35], кинетические и релаксационные процессы [36], вихревые [37] и квазиджозефсоновские [38] эффекты, оптические свойства [39, 40], сверхтекучий переход (кроссовер) в ловушках [41], а также влияние случайных полей [26, 42].

Сверхтекучесть бозе-конденсированных дипольных экситонов была изучена также в двухслойных

$e-e$ -системах в сильном магнитном поле с половинным заполнением уровней Ландау в каждом слое ($\nu = 1/2 + 1/2$; см., например, теорию в работах [43] и эксперименты в работах [44] и цитированную в них литературу).

Двумерные дипольные бозоны исследованы также в разреженных газах атомов [45] и полярных молекул [46].

Среди упомянутых выше работ по экситонному бозе-конденсату в качестве теоретических подходов преобладают модели идеального и слабокоррелированного экситонных газов. К сожалению, эти подходы имеют довольно ограниченную область применимости. В самом деле, при низких плотностях отталкивающий дипольный потенциал может быть описан одним параметром — длиной a_s изотропного s -рассеяния. Таким образом, свойства такого потенциала должны быть универсальными, т. е. одинаковыми для всех потенциалов взаимодействия, имеющих ту же самую длину рассеяния, в частности, такими же, как для системы твердых дисков диаметра a_s . Но последняя, как известно, является слабо коррелированной лишь в ультраразреженном случае [47]. Так что модель слабо коррелированных экситонов справедлива лишь для ультраразреженных систем, которым отвечает крайне низкая критическая температура. Для реальных экспериментальных плотностей эта модель может давать лишь качественное описание. Таким образом, для количественного теоретического исследования коллективного состояния ДДЭ в КЯ необходимы более аккуратная модель и более точные, желательно из первых принципов, вычисления.

Настоящая работа посвящена детальному микроскопическому исследованию ДДЭ с помощью численного моделирования диффузионным методом Монте-Карло. Основным результатом нашего моделирования является тот вывод, что ДДЭ в связанных КЯ в экспериментально наблюдаемом низкотемпературном режиме [5–9] представляют собой сильнокоррелированную систему¹⁾. Мы находим следующие свидетельства этого факта.

¹⁾ В некоторых работах по наблюдению структурированных колец люминесценции [48] экситоны являются слабокоррелированными. Однако, ввиду их низкой плотности, перехода в коллективное состояние не происходит. В самом деле, оценка показывает (см. [41], разд. 2 и пп. 3.1, 3.6), что при наблюдаемом в работе [48] голубом смещении люминесцентной линии (порядка 0.5 мэВ) плотность экситонов равна $n = 2.4 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$, а температура сверхтекучего кроссовера в ловушке размером $L = 10 \text{ мкм}$ равна $T_c^L = 0.219 \cdot 2\pi\hbar^2/m = 0.13 \text{ К}$, что ниже температуры экситонов $T = 1.6 \text{ К}$.

1) Безразмерные параметр $\zeta = m^3/2\pi\hbar^2\chi$ (χ — адиабатическая сжимаемость) и вклад $\zeta' = \mu_i m/2\pi\hbar^2 n$ в химический потенциал μ_i , связанный с взаимодействием экситонов, оказываются много большими единицы, $\zeta, \zeta' \gg 1$ (здесь n — полная плотность экситонов в g_{ex} спиновых степенях свободы; $g_{ex} = 4$ в GaAs). Для слабокоррелированных экситонов $\zeta, \zeta' \ll 1$.

2) Плотность n_0 экситонного бозе-конденсата (в g_{ex} спиновых степенях свободы) при $T = 0$ оказывается в два–четыре раза меньше полной плотности n (в режиме слабых корреляций $n_0 \approx n$).

3) И в парном распределении, и в структурном факторе имеется резко выраженный «горб», свидетельствующий о наличии ближнего порядка. Кроме того, при более высокой плотности экситонов, например при $n = 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$, обнаруживаются два горба в структурном факторе и три в парном распределении.

4) Спектр возбуждений весьма далек от боголюбовского вида (хотя даже на границе экситонного и e - h -режимов ротонный минимум в условиях экспериментов работ [5–9] еще не достигается).

5) Локальная сверхтекучая плотность экситонов на сверхтекучем переходе, $n_l(T_c)$, близка к их полной плотности n (тогда как для слабокоррелированных систем величина $n_l(T_c)$ логарифмически мала по сравнению с n [49]²⁾.

6) Температура сверхтекучего перехода в соответствующей бесконечной системе лишь немного меньше температуры вырождения T_{deg} , а температура квазиконденсации в 2–2.5 раза выше T_{deg} (для деполяризованного по спину экситонного газа в $g_{ex} = 4$ спиновых степенях свободы). Напротив, согласно теории слабокоррелированных экситонов эти температуры логарифмически малы по сравнению с T_{deg} [49].

7) Профиль бозе-конденсата экситонов в большой двумерной гармонической ловушке при $T = 0$ заметно отличается от томас-фермиевской перевернутой параболы.

²⁾ Локальная сверхтекучая плотность n_l (см. п. 3.6) на сверхтекучем переходе ($T = T_c$) мала ($n_l \ll n$) в трехмерных системах и в квазидвумерных системах с непространственным поперечным движением. В (квази)двумерных системах с пространственным поперечным движением неравенство $n_l \ll n$ при $T = T_c$ справедливо, если корреляции либо слабы, либо столь сильны, что ротонный минимум весьма глубок. Так что равенство $n_l \approx n$ при $T = T_c$ в двумерных системах с пространственным поперечным движением выполнено, лишь если корреляции являются довольно сильными. В случае промежуточных корреляций равенство $n_l \approx n$ при $T = T_c$ выполнено хуже.

В некоторых структурах связанных [10, 11] и одиночных [14] КЯ конденсированный газ ДДЭ представляет собой систему с промежуточными корреляциями ($\zeta, \zeta' \sim 1$). В этом случае упомянутые выше свидетельства ослабляются (свидетельство 3 исчезает). Однако в структурах связанных и одиночных КЯ с достаточно широкими КЯ при высоких плотностях экситонов их корреляции оказываются настолько сильными, что появляется ротонный минимум (и даже возможна кристаллизация экситонов; см., например, [33, 34]).

Статья построена следующим образом. В разд. 2 обсуждается модель и постановка задачи, а также связь с экспериментом. Приводятся детали моделирования. В разд. 3 мы исследуем однородную экситонную систему. С помощью численного моделирования на основе первых принципов проводится детальный анализ. В ходе нее вычисляются микроскопические параметры задачи. Используя эти результаты, в разд. 4 мы аналитически исследуем большую гармоническую ловушку в приближении локальной плотности. Возможности экспериментального наблюдения сильных корреляций в системе ДДЭ в связанных КЯ обсуждаются в разд. 5. В разд. 6 мы излагаем выводы работы.

2. МОДЕЛЬ И МЕТОД РАСЧЕТА

Два двумерных пространственно разделенных экситона отталкиваются, как диполи $V(r) \propto 1/r^3$, если расстояние r между ними много больше эффективного расстояния D между e - и h -слоями. В экситонном режиме расстояние между соседними экситонами в структурах, рассматриваемых в работах [5–14], по грубой оценке (подробности см. в работе [50]) превышает D . Поэтому для экспериментально исследованных систем модель дипольных экситонов является хорошей моделью. Подавление же обменного взаимодействия дипольным барьером в экситонном режиме позволяет рассматривать ДДЭ, как бесструктурные бозоны [16].

В результате при $r \gg D$ мы приходим к следующему гамильтониану однородной системы бесструктурных ДДЭ:

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{m x_0^2} \left(\sum_i \frac{\bar{\Delta}_i}{2} + \sum_{i < j} \frac{1}{\bar{r}_{ij}^3} \right). \quad (1)$$

Здесь

$$x_0 = \frac{m d^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} = \frac{m e^2 D^2}{\epsilon \hbar^2} > 0 \quad (2)$$

— параметр размерности длины для дипольного потенциала взаимодействия экситонов $V(r)$,

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{m} \frac{x_0}{r^3}, \quad \bar{r}_{ij} = \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{x_0},$$

$$\bar{\Delta}_i = x_0^2 \Delta_i, \quad \Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2},$$

$d = eD$ — дипольный момент экситона, $e > 0$ — заряд дырки, ε — диэлектрическая проницаемость структуры, $\varepsilon_0 = 1/4\pi$ — диэлектрическая проницаемость вакуума, а

$$D = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_e(z)|^2 - |\psi_h(z)|^2) z dz \right| \quad (3)$$

— эффективное расстояние между e - и h -слоями, в котором $\psi_e(z)$ и $\psi_h(z)$ — волновые функции электрона и дырки вдоль оси z .

Мы накладываем периодические граничные условия. Это, с одной стороны, делает систему конечной, а с другой, имитирует ее однородность. При этом импульс становится дискретным, но остается «хорошим» квантовым числом.

На первой стадии, при расчете вариационным методом Монте-Карло, мы используем пробную функцию основного состояния экситонов в виде функции Ястрова

$$\psi_T(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i < j} f(\bar{r}_{ij}). \quad (4)$$

Здесь

$$f(\bar{r}) = \begin{cases} AK_0(2/\sqrt{\bar{r}}), & \bar{r} < \bar{r}_c, \\ B \exp\left(-\frac{C}{\bar{r}} - \frac{C}{\bar{L} - \bar{r}}\right), & \bar{r}_c \leq \bar{r} < \frac{\bar{L}}{2}, \end{cases} \quad (5)$$

где $K_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) нулевого порядка, $\bar{r} = r/x_0$, $\bar{L} = L/x_0$ — безразмерный размер системы L , константы A , B и C выбираются из условия $f(\bar{L}/2) = 1$ и условий непрерывности нулевой и первой производных при $\bar{r} = \bar{r}_c$, а точка сшивки \bar{r}_c используется в качестве (единственного) вариационного параметра. Мы ожидаем, что пробная волновая функция (4) является хорошим приближением для волновой функции основного состояния. Когда два экситона подходят близко друг к другу, влияние остальных экситонных пар становится малым и функция $f(\bar{r})$ соответствует решению двухчастичной задачи рассеяния частиц на дипольном

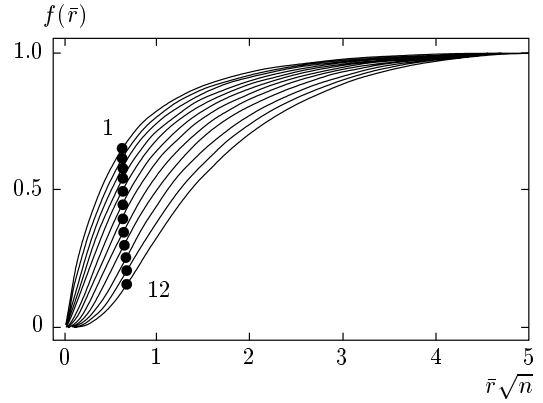


Рис. 1. Пробная волновая функция $f(\bar{r})$ при различных плотностях n экситонов. Кривая i ($i = 1, \dots, 12$) соответствует плотности $nx_0^2 = 2^{i-9}$. Кружки показывают точку \bar{r}_c сшивки двух асимптотик

потенциале. Функция (5) на малых расстояниях выбрана таким образом, что она соответствует точному решению задачи рассеяния при нулевой энергии. Мы также проверили, что использование численного решения задачи рассеяния при конечной энергии в качестве двухчастичного сомножителя $f(\bar{r})$ в функции Ястрова слабо меняет вариационную энергию системы и практически никак не влияет на диффузионное значение энергии. Длинноволновое поведение функции $f(\bar{r})$ определяется коллективными свойствами и соответствует распространению фононов в двумерной системе: $f(\bar{r}) \propto \exp(-\frac{\text{const}}{\bar{r}})$ [51]. Второе слагаемое добавлено в показатель экспоненты в (5) для того, чтобы удовлетворить условию нулевой производной $f'(L/2) = 0$ на границе ящика. Функция $f(\bar{r})$ изображена на рис. 1.

Как видно из выражений (1) и (4), (5), гамильтониан и пробная функция приводятся к безразмерному виду соответственно в линейных единицах x_0 и энергетических единицах \hbar^2/mx_0^2 . В результате безразмерная плотность экситонов $\bar{n} = nx_0^2$ является единственным безразмерным параметром задачи.

Величина $1/x_0^2$ дает размерную плотность экситонов n , соответствующую безразмерной плотности $\bar{n} \equiv nx_0^2 = 1$, и может быть рассчитана по формуле (2). Обсудим, в каком диапазоне изменяется безразмерная плотность \bar{n} в реальных экспериментальных системах:

1) $1/x_0^2 = 2.64 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ для структуры связанных КЯ GaAs/AlAs, исследованной группой Тимофеева [5, 7] ($D = 13.6 \text{ нм}$, $m = 0.22m_0$, $m_0 = 9.1083 \cdot 10^{-28} \text{ г}$ — масса свободного электрона и $\varepsilon = 12.5$);

2) $1/x_0^2 = 3.94 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ для структуры связанных КЯ GaAs/AlGaAs (Бутов и др. [6, 8]), $D = 12.3 \text{ нм}$, $m = 0.22m_0$, $\varepsilon = 12.5$);

3) $1/x_0^2 = 2.28 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ для структуры несимметричных связанных КЯ GaAs/AlGaAs (Москаленко и др. [9]), $D = 14.1 \text{ нм}$, $m = 0.22m_0$, $\varepsilon = 12.5$);

4) $1/x_0^2 = 1.83 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ для структуры связанных КЯ InGaAs/GaAs (Сноук и др. [10, 11]), $D = 10.5 \text{ нм}$, $m = 0.14m_0$, $\varepsilon = 12.5$);

5) $1/x_0^2 = 1.56 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ для структуры связанных КЯ GaAs/AlGaAs (Сноук и др. [12, 13]), $D = 15.5 \text{ нм}$, $m = 0.22m_0$, $\varepsilon = 12.5$);

6) $1/x_0^2 \approx 7 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ для структуры, состоящей из одиночных КЯ GaAs (Тимофеев и др. [14]), $D \approx 6 \text{ нм}$, $m = 0.22m_0$, $\varepsilon = 12.5$), что соответствует безразмерной плотности $\bar{n} = 1$.

Далее нам потребуется узнать, в каком диапазоне изменяется размерная плотность экситонов n в их экспериментально достижимом конденсированном состоянии.

Верхний предел плотности — граница режимов сильной и слабой связей (соответствующих конденсированному состоянию экситонов и БКШ-подобному состоянию электронов и дырок). Для структуры 1 [5, 7] (со средним расстоянием между электроном и дыркой равным $a_{eh} = 17 \text{ нм}$ [7]) соответствующая критическая плотность по грубой оценке равна [50]

$$n_{max} = \frac{0.117g_{ex}}{\pi a_{eh}^2} \approx 5.17 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}, \quad (6)$$

$$\bar{n}_{max} \approx 1.96$$

(здесь учтено, что в GaAs экситоны находятся в $g_{ex} = 4$ степенях свободы).

Так что характерные достижимые плотности в современных экспериментах в связанных КЯ, при которых наблюдаются низкотемпературные особенности экситонной люминесценции [5–9] лежат в диапазоне $1 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2} \leq n \leq 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$, т.е. $1/4 \lesssim \bar{n} \lesssim 4$.

Но в очень широких одиночных КЯ на основе GaAs (шириной более 100 нм) достижимы такие высокие безразмерные плотности ($\bar{n}_{max} > 290$ [34]), при которых наступает кристаллизация экситонов [33].

Мы провели моделирование в диапазоне безразмерных плотностей $1/256 \leq \bar{n} \leq 8$. В структуре 5 [12, 13] (в которой экситонные корреляции сильнее, чем в других структурах) при плотности $\bar{n} = 8$ размерная плотность экситонов велика: $n = 1.2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. А при плотности $\bar{n} = 1/256$ в

структуре 6 [14] (где корреляции экситонов слабее, чем в других структурах) при безразмерной плотности $\bar{n} = 1/256$ (и соответствующей размерной плотности $n \approx 2.7 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$) температура сверхтекучего кроссовера экситонов в ловушке размером порядка 100 мкм мала: 0.12 К (см. работу [41] и п. 3.6).

Надо сказать, что в одиночной КЯ в достаточно слабом электрическом поле могут быть реализованы очень малые дипольные моменты eD и очень малые безразмерные плотности $\bar{n} = nx_0^2 \propto D^4$ (см. формулу (2)). Но этот случай нам не интересен. В самом деле, при $D \rightarrow 0$ вклад ван-дер-ваальсового потенциала в длину рассеяния экситонов a_s ($a_s^{WDW} \sim a_{eh}$) существенно превышает вклад дипольного потенциала в a_s ($a_s^D = 3.17222x_0 \propto D^2 \rightarrow 0$). В результате экситоны эффективно теряют свойство дипольности.

Тем не менее в одиночной КЯ на основе GaAs ($m = 0.22m_0$, $\varepsilon = 12.5$, $a_{eh} \approx 12 \text{ нм}$) в достаточно слабом электрическом поле разреженный газ ДДЭ с температурой сверхтекучего кроссовера порядка 0.1 К и дипольной длиной рассеяния порядка a_{eh} может иметь довольно низкую безразмерную плотность: $\bar{n} \sim 2^{-11} = 1/2048$.

Мы выполнили моделирование квантовым методом Монте-Карло (МК) для двенадцати различных плотностей $\bar{n} = 2^{i-9}$, $i = 1, 2, \dots, 12$, лежащих в диапазоне $1/256 \leq \bar{n} \leq 8$. Число экситонов взято равным $N = 100$. Вначале мы провели вычисление вариационным методом МК (ВМК) с пробной функцией (4), (5) и оптимизировали параметр \bar{r}_c . На второй стадии был выполнен расчет из первых принципов диффузионным методом МК (ДМК) [52], в котором в качестве начальной функции (для ускорения сходимости) была взята пробная функция (4), (5) с уже оптимизированным параметром \bar{r}_c .

Как известно, неточность пробной функции вносит дополнительную погрешность в ДМК-вычисление корреляторов. Чтобы снизить эту погрешность, мы делаем линейную экстраполяцию ВМК-и ДМК-данных, которая устраняет первый порядок по малому различию между точной и пробной функциями основного состояния [53].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ. ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА

Здесь и ниже используются безразмерные величины в системе единиц $\hbar = x_0 = m = 1$.

3.1. Энергия основного состояния.

Химический потенциал. Адиабатическая сжимаемость

Полная энергия основного состояния ДДЭ может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$E_{tot} = \frac{2\pi N n e^2 D}{\varepsilon} + E_0. \quad (7)$$

Первое слагаемое соответствует энергии конденсатора, образованного плоскопараллельными e - и h -слоями, раздвинутыми на эффективное расстояние D . Второе слагаемое ответственно за кинетическую энергию N диполей и их взаимодействие друг с другом. Оно равно энергии основного состояния системы этих диполей. Эта энергия рассчитывается методом ДМК.

Через полную энергию экситонов (7) можно выразить их химический потенциал, отсчитанный от края экситонной зоны,

$$\mu = \frac{dE_{tot}}{dN} = \mu_e + \mu_i, \quad (8)$$

где $\mu_e = 4\pi n e^2 D/\varepsilon$ — электростатический вклад, а

$$\mu_i = \frac{dE_0}{dN} \quad (9)$$

— вклад в химический потенциал экситонов, отвечающий их взаимодействию между собой. Через него определяется адиабатическая сжимаемость экситонов:

$$\frac{1}{\chi} = \int \frac{\delta\mu_i}{\delta n(\mathbf{r})} d\mathbf{r}.$$

Для однородной системы ($n(\mathbf{r}) \equiv n$) вариационная производная приводится к обычной производной ($\int (\delta\mu_i/\delta n(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = d\mu_i/dn$) и мы получаем

$$\frac{1}{\chi} = \frac{d\mu_i}{dn}. \quad (10)$$

На рис. 2а представлены результаты ДМК-моделирования для энергии основного состояния взаимодействующих диполей на одну частицу, E_0/N , при различных плотностях. Рассчитанные значения с высокой точностью (в пределах 0.025 %) ложатся на кривую полиномиальной подгонки

$$E_0/N = a_e \exp(b_e \ln \bar{n} + c_e \ln^2 \bar{n} + d_e \ln^3 \bar{n} + e_e \ln^4 \bar{n}), \quad (11)$$

где $a_e = 9.218$, $b_e = 1.35999$, $c_e = 0.011225$, $d_e = -0.00036$ и $e_e = -0.0000281$.

На рис. 2б показаны энергия на одну частицу, E_0/N , вклад в химический потенциал μ_i , связанный

с взаимодействием диполей, и адиабатическая сжимаемость χ , которые вычислены аналитически из подгонки к энергии (11) (см. формулы (9), (10)) и выражены соответственно в величинах ζ'' , ζ' и ζ :

$$E_0/N = \pi \bar{n} \zeta'', \quad (12)$$

$$\mu_i = 2\pi \bar{n} \zeta', \quad (13)$$

$$1/\chi = 2\pi \zeta. \quad (14)$$

Из настоящего моделирования находим, что во всем рассчитанном диапазоне плотностей безразмерная адиабатическая сжимаемость (т. е. безразмерное взаимодействие) оказывается большей или порядка единицы,

$$\zeta \geq 0.774 \sim 1, \quad 1/256 \leq \bar{n} \leq 8. \quad (15)$$

В режиме высоких плотностей ($1/4 \lesssim \bar{n} \lesssim 4$) находим $\zeta \gg 1$ (см. рис. 2б). Это свидетельствует о сильных корреляциях в плотном газе ДДЭ в связанных КЯ, конденсация которого исследована в работах [5–9].

При низких плотностях величина $\zeta \sim 1$. Это — режим корреляций промежуточной силы, реализованный в работах [10, 11, 14].

Режим слабых корреляций ($\zeta \ll 1$) не реализуется даже при наименьшей рассчитанной плотности $\bar{n} = 1/256$ (при которой температура сверхтекучего кроссовера в структурах, исследованных в работах [5–14], не выше 0.12 К; см. разд. 2).

3.2. Одночастичная матрица плотности. Доля бозе-конденсата. Микроскопический фоновый линейный масштаб

На длинноволновых масштабах при $r \gg r_0$ для усредненной по полярному углу одночастичной матрицы плотности

$$\rho_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(0) \rangle d\varphi \quad (16)$$

бозе-конденсированных ДДЭ при $T = 0$ справедливо следующее гидродинамическое выражение (см. Приложение А):

$$\rho_1^{hd}(r) = \frac{n_0}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} \exp \left[\sum_{\mathbf{p} \neq 0} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \left(\frac{\varepsilon_p}{2N p^2} - \frac{1}{4N} \right) - \frac{1}{4N} \right] d\varphi. \quad (17)$$

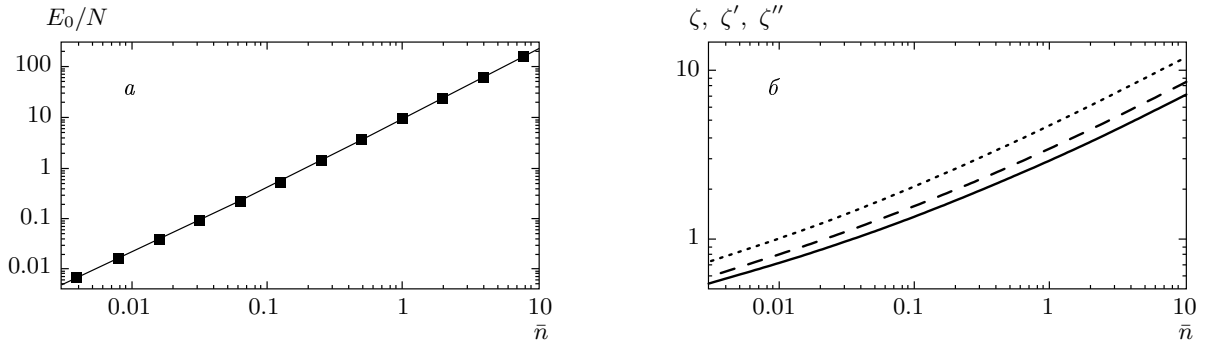


Рис. 2. *а*) Энергия основного состояния на один экситон, E_0/N , в зависимости от плотности (квадраты — данные метода ДМК) и полиномиальная подгонка (11) (линия). *б*) Безразмерная энергия на один экситон ζ'' (сплошная кривая), безразмерный вклад в химический потенциал, связанный с взаимодействием экситонов, ζ' (штриховая), и безразмерная обратная адиабатическая сжимаемость ζ (пунктирная) при $T = 0$, рассчитанные аналитически из полиномиальной подгонки в (11), как функции плотности

В формулах (16) и (17) $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ — оператор поля экситонов, $\langle \dots \rangle$ — усреднение по основному состоянию экситонной системы, φ — полярный угол вектора \mathbf{r} , ε_p — спектр возбуждений при $T = 0$ (который мы приближенно определяем по формуле Фейнмана из структурного фактора; см. пп. 3.4, 3.5), а r_0 — характерный микроскопический фоновый линейный масштаб системы, который разграничивает длинноволновую (гидродинамическую, $r \gg r_0$) и микроскопическую ($r \ll r_0$) области (рис. 3б) и соответствует ультрафиолетовой границе применимости гидродинамического метода. Дискретность суммы по импульсам в выражении (17) ($\mathbf{p} = (2\pi/L)\mathbf{n}$, $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\} \neq 0$ — целочисленный вектор) позволяет нам корректно учитывать конечность размера системы и периодические граничные условия.

Результаты МК-моделирования для одночастичной матрицы плотности $\rho_1(r)$ (линейная экстраполяция ВМК- и ДМК-данных) для различных плотностей экситонов показаны на рис. 3а.

На рис. 3д МК-расчет одночастичной матрицы плотности $\rho_1(r)$ при $\bar{n} = 1$ идеально (в пределах толщины линии) согласуется с гидродинамическим выражением (17) при больших r . Это говорит о внутренней согласованности нашего МК-моделирования, высокой точности измерений и справедливости гидродинамического описания в данной области.

Для сравнения на рис. 3д приведено асимптотическое выражение для одночастичной матрицы плотности при больших r в соответствующей бесконечной системе ($L \rightarrow \infty$) при $\bar{n} = 1$,

$$\rho_1^\infty(r) = n_0^\infty \left(1 + \frac{c_s}{4\pi n} \frac{1}{r} \right), \quad (18)$$

$$L \rightarrow \infty, \quad r \gg r_0, \frac{1}{c_s},$$

получаемое из формулы (17) формальной заменой суммы по \mathbf{p} интегралом. В (18) экспонента разложена в ряд, $c_s = \sqrt{n/\chi}$ — скорость звука при $T = 0$, а $n_0^\infty = 0.340 \pm 0.001$ — плотность бозе-конденсата в бесконечной системе при $\bar{n} = 1$. Величина n_0^∞ получена путем квадратичной экстраполяции значений $\rho_1(L/2)$ к макроскопическому пределу по степеням $1/N$ для четырнадцати значений полного числа экситонов N от 25 до 200.

На рис. 3в приведена доля бозе-конденсата экситонов, полученная путем наилучшей подгонки гидродинамического выражения (17) к МК-данным, в зависимости от плотности. Результаты хорошо (в пределах 0.005) ложатся на следующую полиномиальную подгонку:

$$n_0/n = a_0^n \exp(b_0^n \ln n + c_0^n \ln^2 n + d_0^n \ln^3 n), \quad (19)$$

где $a_0^n = 0.3822$, $b_0^n = -0.2342$, $c_0^n = -0.02852$ и $d_0^n = -0.001594$. Согласно результатам, приведенным на рис. 3в, $n_0/n \approx 1/3$ при $n = 2$, а при $n = 8$ доля бозе-конденсата составляет лишь $n_0/n \approx 1/5$. Это свидетельствует о сильных корреляциях в плотном газе ДДЭ в связанных КЯ в их экспериментально наблюдаемом коллективном состоянии. Особо отметим, что при столь малой доле конденсата применение методов среднего поля (Гросса–Питаевского), расчетов по теории возмущений, а также боголюбовского приближения становится необоснованным

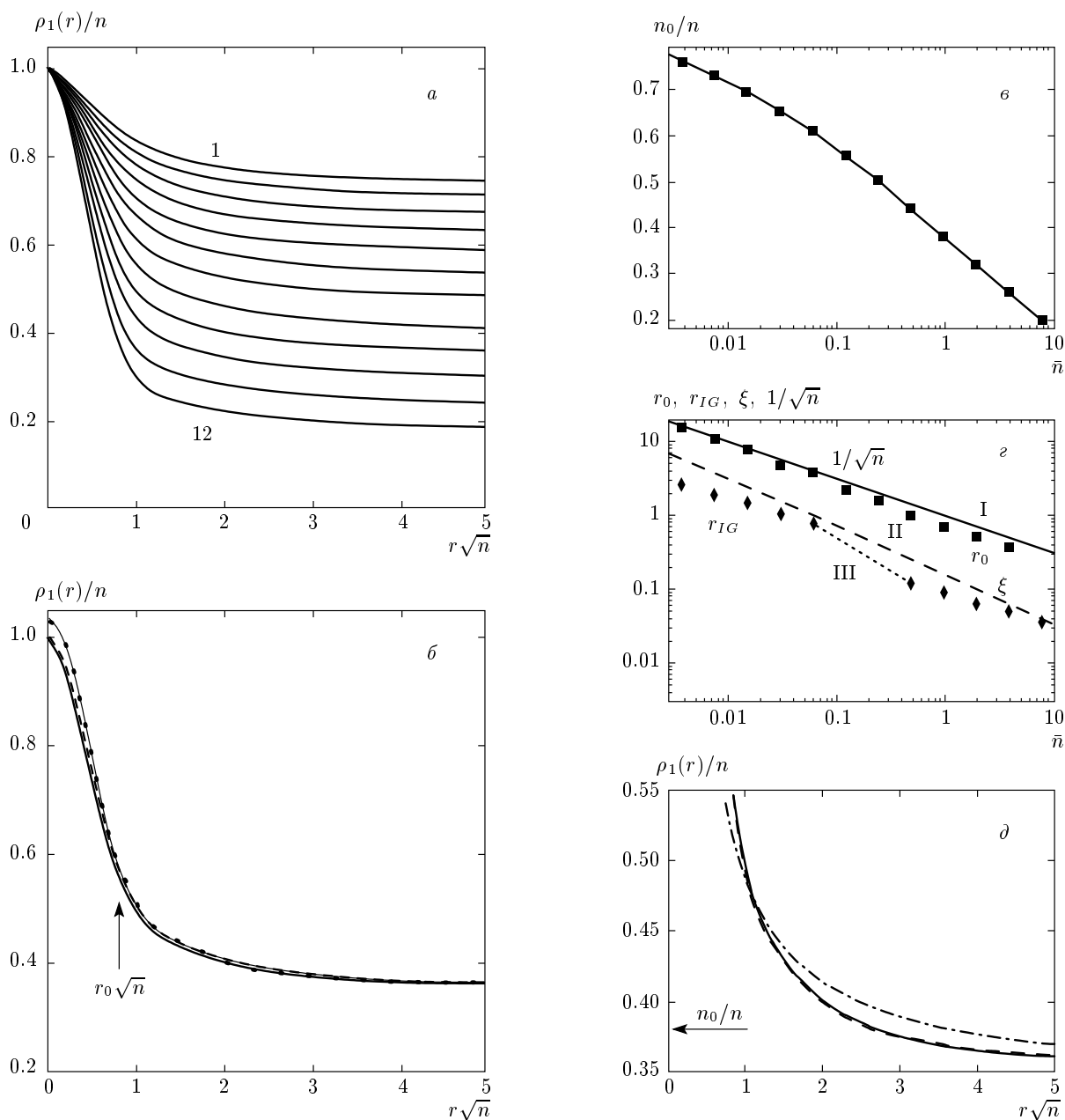


Рис. 3. а) Одночастичная матрица плотности экситонов $\rho_1(r)$ при $T = 0$ для различных плотностей $n = 2^{i-9}$, $i = 1, \dots, 12$. б) Расчет одночастичной матрицы плотности методами ВМК (точки) и ДМК (штрихи), а также линейная экстраполяция ВМК- и ДМК-данных (толстая линия) и гидродинамические подгонки (тонкая линия) при $\bar{n} = 1$ (кривые практически совпадают). Стрелкой показан характерный микроскопический фоновый линейный масштаб r_0 (в единицах $1/\sqrt{\bar{n}}$). в) Доля бозе-конденсата при $T = 0$ (n/n_0 — точки) и полиномиальная подгонка (кривая) по формуле (19) как функции плотности. г) Характерные микроскопические масштабы системы: фоновый масштаб r_0 (квадраты), идеально-газовый масштаб (см. п. 3.5) r_{IG} (ромбы), длина «залечивания» ξ (штрихи) и расстояние между экситонами $1/\sqrt{\bar{n}}$ (сплошная линия) в зависимости от плотности. Обозначены гидродинамическая I, промежуточная II и идеально-газовая III области. д) Одночастичная матрица плотности $\rho_1(r)$ при больших r и $\bar{n} = 1$. ДМК-расчет (штриховая кривая), гидродинамическое выражение (17) (сплошная) и асимптотическое выражение в бесконечной системе (18) (штрихпунктир). Правый край значений r (на котором $r\sqrt{\bar{n}} = 5$) соответствует границе системы $L/2$

и может быть использовано лишь для качественных выводов.

Отметим также, что в макроскопическом пределе ($N \rightarrow \infty$) доля бозе-конденсата еще ниже, чем для $N = 100$ частиц. Так, при $n = 2$ и $n = 8$ соответственно получаем $n_0/n \approx 0.29$ и $n_0/n \approx 0.17$.

Из рис. 3б видно, что на расстояниях r , больших характерного линейного микроскопического фоновго масштаба r_0 (т.е. при $r > r_0$), гидродинамическое выражение (17) прекрасно совпадает с МК-расчетом для $\rho_1(r)$. Но при $r < r_0$ совпадение очень быстро исчезает. Так что кроссоверная область границы применимости гидродинамики для ДДЭ, как оказывается, очень узкая.

Сам характерный линейный микроскопический фоновый масштаб системы r_0 как функция плотности показан на рис. 3г. Хорошо видно, что во всем диапазоне плотностей этот масштаб имеет порядок среднего расстояния между экситонами,

$$r_0 \sim 1/\sqrt{\bar{n}}. \quad (20)$$

При этом длина «залечивания» $\xi = 1/\sqrt{2\mu_i}$ при всех плотностях оказывается существенно меньше r_0 (см. рис. 3г). Это противоречит слабой коррелированности ДДЭ.

3.3. Парное распределение. Диаметр эффективного твердого диска диполя. Влияние внутренней структуры экситона. Зависящая от энергии длина рассеяния

Результат моделирования для парного распределения экситонов, усредненного по полярному углу,

$$\rho_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \hat{\rho}(\mathbf{r}) \hat{\rho}(0) \rangle d\varphi, \quad (21)$$

где $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \hat{\Psi}^+(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ — оператор плотности экситонов, изображен на рис. 4а для различных плотностей \bar{n} .

При высоких плотностях ($\bar{n} \geq 1/8$) в парном распределении появляется резко выраженный горб, соответствующий ближнему порядку. При очень высоких плотностях имеются также более слабые горбы. Это свидетельствует о сильных корреляциях в системе ДДЭ в связанных КЯ в изученной в работах [5–9] низкотемпературной фазе экситонов.

На вставке к рис. 4а приведена зависимость диаметра a эффективного твердого диска диполя от плотности, который определяется точкой пересечения коротковолновой касательной к парному распре-

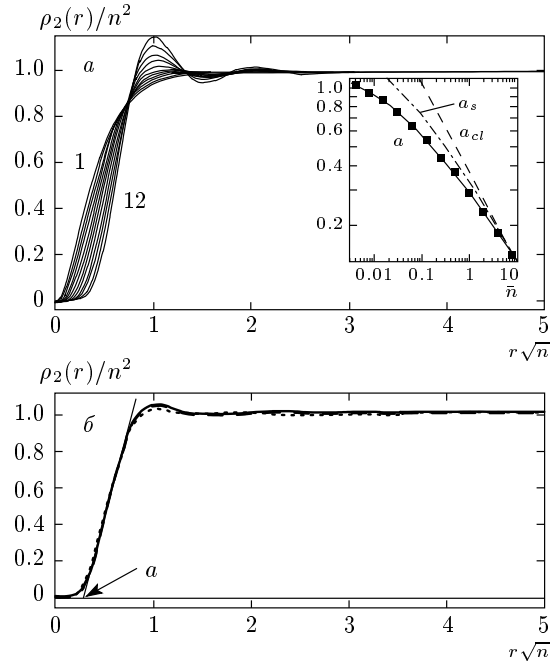


Рис. 4. а) Парное распределение экситонов при $T = 0$ для различных плотностей $n = 2^{i-9}$, $i = 1, \dots, 12$. На вставке — зависимости от плотности: диаметра a эффективного твердого диска диполя (квадраты), полиномиальной подгонки (22) (сплошная кривая); зависящей от энергии длины рассеяния диполей, a_s (23) (штрихпунктирная), классической точки поворота для дипольного потенциала, $a_{cl} = (2E_0/N)^{-1/3}$ (штриховая). б) Данные ВМК (точки) и ДМК (штрихи) и их линейная экстраполяция (сплошная кривая) для парного распределения при $\bar{n} = 1$ (кривые практически совпадают). Стрелка разъясняет определение диаметра a эффективного твердого диска диполя

делению с осью абсцисс (см. рис. 4б). Расчетные точки хорошо (в пределах 2%) ложатся на следующую полиномиальную подгонку:

$$a = a_a \exp(b_a \ln n + c_a \ln^2 n + d_a \ln^3 n), \quad (22)$$

где $a_a = 0.293$, $b_a = -0.324$, $c_a = -0.0123$ и $d_a = 0.00096$.

Расчет диаметра эффективного твердого диска позволяет оценить влияние внутренней структуры экситона, которое в модели дипольных экситонов игнорируется. Если диаметр экситона меньше диаметра a эффективного твердого диска диполя, то пренебрежение внутренней структурой дипольных экситонов оправдано. Это связано с тем, что плотность вероятности нахождения одного экситона на рассто-

янии $r < a$ от другого экситона, пропорциональная $\rho_2(r)$, очень мала (рис. 4б).

В качестве оценки диаметра экситона в GaAs можно принять среднее расстояние a_{eh} между электроном и дыркой в экситоне. В структуре 1, состоящей из связанных КЯ на основе GaAs [5, 7], величина $a_{eh} = 17$ нм, так что $a_{eh} < a$ при размерной плотности экситонов $n < 3.2 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$.

Если же диаметр экситона больше a , то внутренняя структура оказывает некоторое влияние на микроскопические свойства дипольных экситонов. Однако этим влиянием все еще можно пренебрегать вплоть до плотностей n , соответствующих границе режимов сильной и слабой связей, когда дипольный барьер перестает подавлять обменные эффекты (см. разд. 1 и 2).

В структуре 1 [5, 7] при максимальной плотности экситонов $5.17 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$ (см. формулу (6)), соответствующей границе режимов сильной и слабой связей, мы находим $a = 14.2$ нм $\approx 0.84a_{eh}$.

Наконец, на вставке к рис. 4а мы приводим длину рассеяния $a_s = a_s(p)$,

$$a_s(p) = a_s^a \exp(b_s^a \ln p + c_s^a \ln^2 p + d_s^a \ln^3 p), \quad (23)$$

двух диполей с относительным импульсом $p = \sqrt{2E_0/N}$ и энергией E_0/N . Здесь $a_s^a = 0.68845$, $b_s^a = -0.45897$, $c_s^a = -0.03098$ и $d_s^a = 0.002096$. Подгонка (23) основана на нашем расчете [54] и при $0.1 \leq p \leq 20$ (т. е. при $1/340 \leq \bar{n} \leq 9.3$, см. (11)) совпадает с ним в пределах 0.04%. Из вставки видно, что при низких плотностях диаметр a эффективно-го твердого диска лежит ниже длины рассеяния a_s .

3.4. Статический структурный фактор. Скорость звука

Структурный фактор ДДЭ определяется через фурье-образ их парного распределения $\rho_2(\mathbf{r}) = \langle \hat{\rho}(\mathbf{r})\hat{\rho}(0) \rangle$ как

$$S(\mathbf{p}) = 1 + \int e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \left(\frac{\rho_2(\mathbf{r})}{n} - n \right) d\mathbf{r}. \quad (24)$$

Для конечной системы размера L с периодическими граничными условиями он является дискретной функцией импульса $\mathbf{p} = (2\pi/L)\mathbf{n}$, $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$ — целочисленный вектор). Но, как правило, экспериментальный интерес представляют большие двумерные бозе-конденсированные экситонные системы с довольно большим числом экситонов и сложной границей. Для их описания удобно использовать выражение для структурного фактора в соответствующей бесконечной системе.

При импульсах $p \gg 2\pi/L$ структурный фактор в бесконечной системе, $S(\mathbf{p}) \equiv S(p)$, можно приближенно получить из выражения (24) в плоской ловушке размера L (с числом экситонов, например, $N = 100$), если сгладить выражение (24), выполнив в нем интегрирование по полярному углу:

$$S(p) = 1 + 2\pi \int J_0(pr) \left(\frac{\rho_2(r)}{n} - n \right) r dr, \quad (25)$$

$$p \gg \frac{2\pi}{L}.$$

Здесь учтено, что $\int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(x)$, где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка. При плотности, например, $n = 1$ различие между сглаженными структурными факторами (25) для числа ДДЭ $N = 100$ и $N = 200$ не превышает 0.35%. Так что сглаженный структурный фактор (25) является хорошим приближением для структурного фактора в бесконечной системе при $p \gg 2\pi/L$.

Но при очень малых импульсах $p \lesssim 2\pi\hbar/L$, при которых сказываются эффекты конечности системы, сглаживание (25) не дает верного результата для бесконечных систем. Чтобы получить правильный результат для структурного фактора в бесконечной системе при таких малых импульсах, необходимо шить выражение (25) с длинноволновой гидродинамической асимптотикой для структурного фактора, известной из общей теории. Для большей точности мы используем длинноволновую асимптотику в третьем порядке по импульсу [55],

$$S(p) = sp(1 + \gamma p^2), \quad p \lesssim 2\pi/L, \quad (26)$$

справедливую на гидродинамических масштабах $p \ll p_0 \equiv 1/r_0 \sim \sqrt{n}$ (см. п. 3.2). Здесь $s = \text{const} > 0$ — параметр, отвечающий длинноволновому поведению структурного фактора, а величина $\gamma = \text{const}$ определяет третий порядок по p . Плавная сшивка (совпадение функции и ее производной) сглаженного структурного фактора (25) и длинноволновой асимптотики (26) при промежуточных импульсах $2\pi/L \ll p \ll p_0$ позволяет, как оказывается, довольно точно определить величину s . Предсказание для s , основанное на подгонке к энергии (11), $s = 1/\sqrt{8\pi n\zeta}$ (см. выражения (9)–(14), (27), (28)) для $N = 100$ дает отличие от макроскопического предела менее чем на 0.08%. Это говорит об адекватности наших приближений.

На рис. 5а изображен рассчитанный по формулам (25), (26) структурный фактор в соответствующей бесконечной системе для различных плотностей. При высоких плотностях экситонов ($\bar{n} \geq 1/8$)

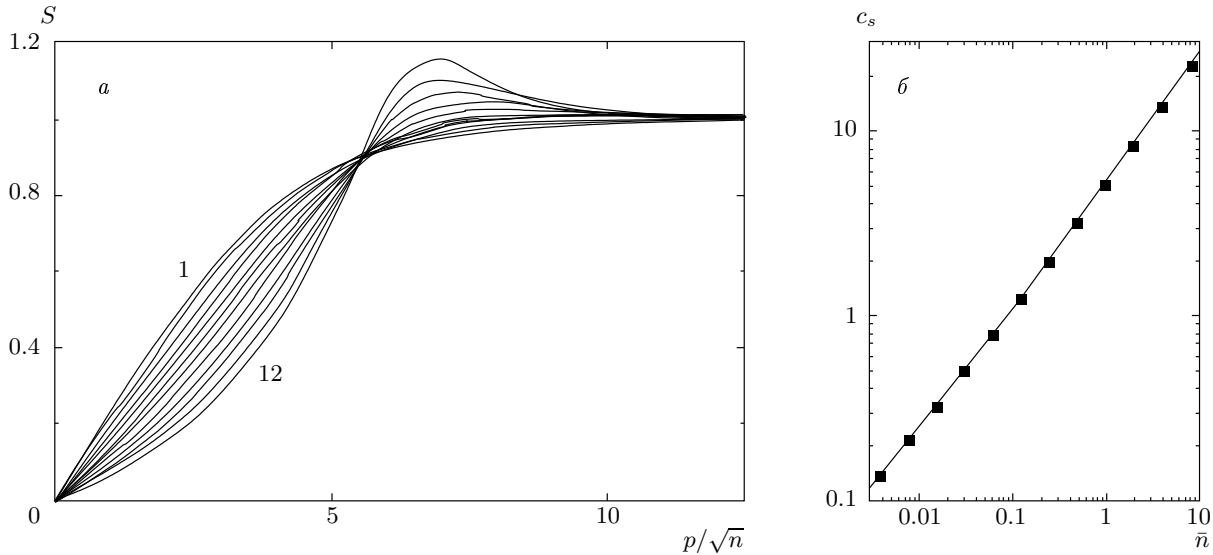


Рис. 5. *а)* Структурный фактор экситонов при $T = 0$ для различных плотностей $n = 2^{i-9}$, $i = 1, \dots, 12$. *б)* Скорость звука, вычисленная из наклона структурного фактора (квадраты) и на основе подгонки к энергии (11) (сплошная линия) как функция плотности

на кривых имеется горб, соответствующий ближнему порядку. При плотностях $1/4 \lesssim \bar{n} \lesssim 4$ он отчетливо виден. Это говорит о сильных корреляциях в плотном газе ДДЭ в связанных КЯ, исследованном в работах [5–9].

На рис. 5*б* изображена зависимость скорости звука c_s в бесстолкновительном режиме от плотности, которую мы находим из гидродинамических соотношений из параметра s :

$$c_s = 1/2s \tag{27}$$

(см. (29)). Расчетные точки для c_s хорошо ложатся на кривую, соответствующую ее выражению через адиабатическую сжимаемость,

$$c_s = \sqrt{n/\chi} = \sqrt{2\pi n\zeta} \tag{28}$$

(безразмерная адиабатическая сжимаемость ζ определяется из подгонки к энергии (11) по формулам (9), (10) и (14); см. п. 3.1). Это говорит о внутренней согласованности нашего ДМК-моделирования.

3.5. Энергетический спектр возбуждений. Характерные микроскопические масштабы системы

Как известно, в газовой фазе бозе-системы в бесстолкновительном режиме имеется только одна

спектральная ветвь. Поэтому спектр элементарных возбуждений бозе-конденсированных ДДЭ в бесконечной системе при $T = 0$ может быть приближенно рассчитан по формуле Фейнмана [56]

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2S(p)}, \tag{29}$$

которая справедлива в длинноволновой (гидродинамической) области ($r \gg r_0$, $p \ll p_0$), где спектр возбуждений соответствует фононам. Приближенно имеем (см. п. 3.4)

$$S(p) \approx sp(1 + \gamma p^2), \quad \varepsilon_p \approx c_s p(1 - \gamma p^2).$$

Формула (29) верна также в коротковолновой области, соответствующей идеальному газу ($r \ll r_{IG}$, $p \gg p_{IG} \equiv 1/r_{IG}$), где $S(p) \approx 1$ и $\varepsilon_p \approx p^2/2$. Но на промежуточных масштабах ($r_{IG} \ll r \ll r_0$, $p_{IG} \gg p \gg p_0$) формула Фейнмана (29) количественно не верна. Тем не менее она верна качественно. Так что для оценки будем ей пользоваться. Детали обсуждаются в Приложении Б.

На рис. 6*а,б* изображен рассчитанный аналитически спектр возбуждений (29) в бесконечном газе ДДЭ при различных плотностях. Во всем диапазоне рассчитанных плотностей спектр возбуждений далек от боголюбовского вида $\varepsilon_p^B = \sqrt{p^4/4 + c_s^2 p^2}$ (хотя при низких плотностях он качественно напоминает боголюбовский спектр). При высоких плотностях

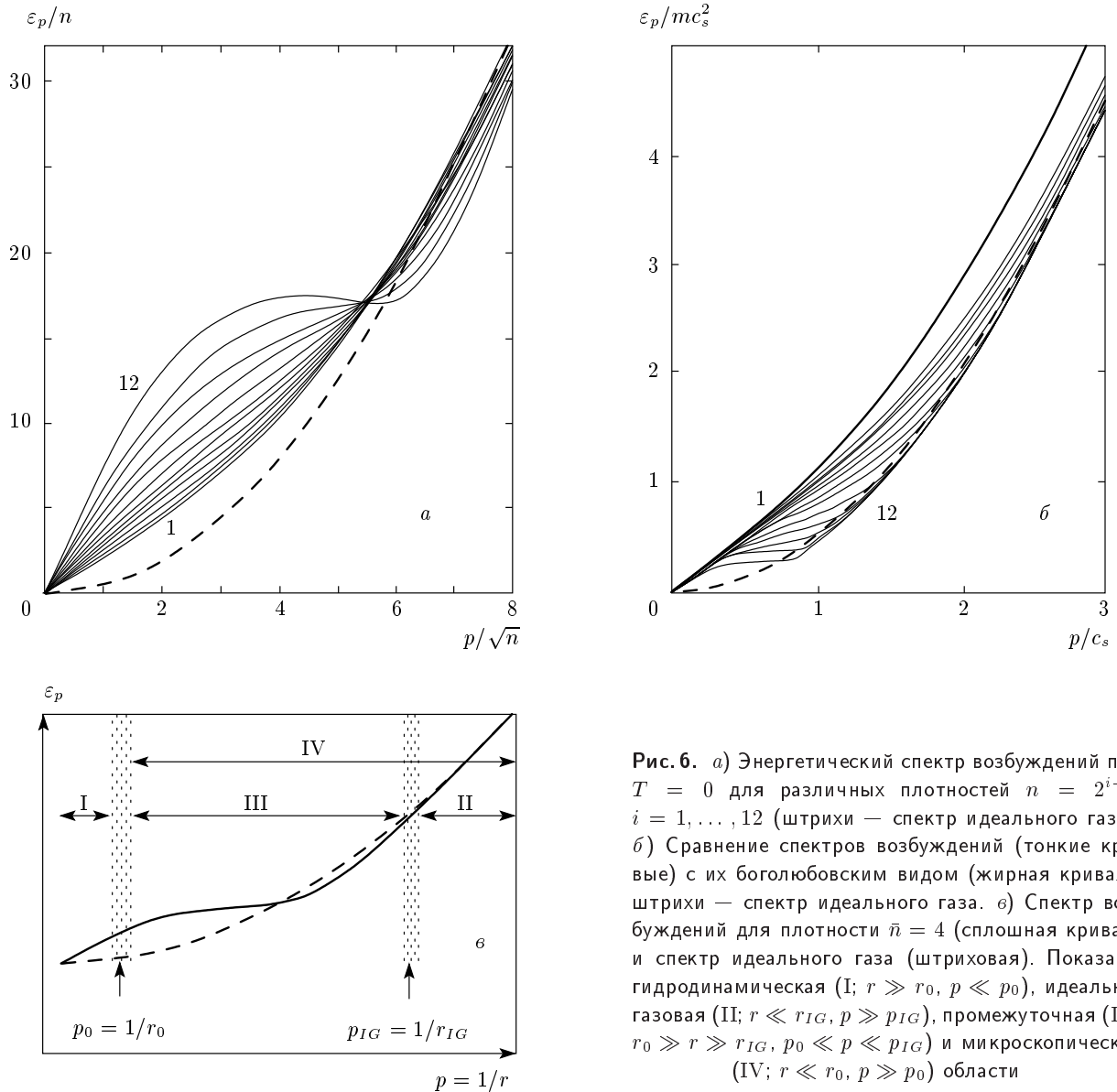


Рис. 6. а) Энергетический спектр возбуждений при $T = 0$ для различных плотностей $n = 2^{i-9}$, $i = 1, \dots, 12$ (штрихи — спектр идеального газа). б) Сравнение спектров возбуждений (тонкие кривые) с их боголюбовским видом (жирная кривая); штрихи — спектр идеального газа. в) Спектр возбуждений для плотности $\bar{n} = 4$ (сплошная кривая) и спектр идеального газа (штриховая). Показаны гидродинамическая (I; $r \gg r_0, p \ll p_0$), идеальное-газовая (II; $r \ll r_{IG}, p \gg p_{IG}$), промежуточная (III; $r_0 \gg r \gg r_{IG}, p_0 \ll p \ll p_{IG}$) и микроскопическая (IV; $r \ll r_0, p \gg p_0$) области

($1/4 \lesssim \bar{n} \lesssim 4$) наглядно проявляются эффекты сильных корреляций. При максимальной рассчитанной плотности $n = 8$ в спектре появляется ротонный минимум.

На рис. 6в наглядно показаны области длинноволновых (гидродинамических), коротковолновых (идеально-газовых), промежуточных и микроскопических масштабов. Диаграммы длинноволновой, промежуточной и коротковолновой областей представлены выше на рис. 3г (см. п. 3.2).

3.6. Температурная зависимость локальной сверхтекучей плотности. Температуры квазиконденсации и перехода БКТ

В квазиконденсированной [57] фазе экситонов вдали от кроссовера между квазиклассическим режимом и квазиконденсированной фазой элементарные возбуждения образуют почти идеальный газ. В этом случае температурная зависимость доли локальной (неперенормированной вихрями [58]) сверхтекучей компоненты квазиконденсированных ДДЭ может быть приближенно рассчитана по формуле Ландау [59]

$$\frac{n_l(T)}{n} = 1 + \int \frac{p^2}{2} \frac{dn(\varepsilon_p^T)}{d\varepsilon_p^T} \frac{pdp}{2\pi n} g_{ex}, \quad (30)$$

$$T_q - T \sim T_q.$$

Здесь n_l — локальная сверхтекучая плотность экситонов (в g_{ex} спиновых степенях свободы),

$$n(\varepsilon_p^T) = \frac{1}{\exp(\varepsilon_p^T/T) - 1} \quad (31)$$

— бозевское распределение идеального газа элементарных возбуждений со спектром ε_p^T при температуре экситонов T , а T_q — оценка температуры квазиконденсации, при которой локальная сверхтекучая компонента и локальный дальний порядок [57] кроссовером исчезают.

Глобальная сверхтекучая компонента (учитывающая вихревую перенормировку [21, 58]) рассчитана в работе [41]. Для расчета локальной компоненты в выражениях (30) и (31) можно положить $\varepsilon_p^T \approx \varepsilon_p^{T=0} = \varepsilon_p$. Тонкости расчета локальной сверхтекучей компоненты обсуждаются в Приложении Б.

Зависимость $n_l(T)/n$, рассчитанная аналитически по формулам (29)–(31) с $\varepsilon_p^T = \varepsilon_p$, при различных плотностях изображена на рис. 7а, где величина

$$T_0 \equiv g_{ex} T_{deg} = 2\pi n \quad (g_{ex} = 4 \text{ в GaAs}) \quad (32)$$

обозначает температуру вырождения соответствующих поляризованных по спину экситонов.

В температурном диапазоне $0 < T < 1.2T_c$ с ошибкой меньше 0.003 данный расчет доли локальной сверхтекучей компоненты совпадает со следующей степенной подгонкой:

$$\frac{n_l(T)}{n} = 1 - \left(1 - \frac{n_l(T_c)}{n}\right) \left(\frac{T}{T_c}\right)^\gamma, \quad (33)$$

$$\gamma = a_l^\gamma + b_l^\gamma \ln n + c_l^\gamma \ln^2 n + d_l^\gamma \ln^3 n, \quad (34)$$

где $a_l^\gamma = 4.186$, $b_l^\gamma = 0.5825$, $c_l^\gamma = 0.0941$ и $d_l^\gamma = 0.00706$, а $T_c < T_q$ — температура сверхтекучего перехода БКТ [20–22], на котором глобальная сверхтекучая компонента в бесконечной системе скачкообразно исчезает [21, 23]. Для T_c мы используем выражение [21, 23] (см. также Приложение Б)

$$T_c = \frac{\pi n_l(T_c)}{2\tilde{\epsilon}}, \quad (35)$$

в котором диэлектрическую проницаемость $\tilde{\epsilon}$ пар вихрей на переходе БКТ можно взять из двумерной x - y -модели ($\tilde{\epsilon} = 1.1349 \pm 0.0005$ [41]).

На рис. 7б–г мы приводим аналитически рассчитанные точки для температур квазиконденсации T_q

(см. Приложение Б) и сверхтекучего перехода БКТ T_c , а также для локальной сверхтекучей доли на переходе БКТ, $n_l(T_c)/n$, в бесконечной системе, которые очень хорошо ложатся на соответствующие полиномиальные подгонки (в пределах соответственно 0.0025, 0.0005 и 0.0025)

$$T_q/T_0 = a_q^T + b_q^T \ln n + c_q^T \ln^2 n + d_q^T \ln^3 n + e_q^T \ln^4 n, \quad (36)$$

$$T_c/T_0 = a_c^T + b_c^T \ln n + c_c^T \ln^2 n + d_c^T \ln^3 n, \quad (37)$$

$$n_l(T_c)/n = a_c^l + b_c^l \ln n + c_c^l \ln^2 n + d_c^l \ln^3 n. \quad (38)$$

Здесь

$$a_q^T = 0.5344, \quad b_q^T = 0.038, \quad c_q^T = -0.00395,$$

$$d_q^T = -0.001146, \quad e_q^T = -0.000086, \quad a_c^T = 0.2146,$$

$$b_c^T = 0.00414, \quad c_c^T = -0.000877, \quad d_c^T = -0.0000446,$$

$$a_c^l = 0.9745, \quad b_c^l = 0.0188,$$

$$c_c^l = -0.00398, \quad d_c^l = -0.000202.$$

Согласно нашим результатам, распространенная в литературе фононная модель [26, 27] (в которой $\varepsilon_p \equiv c_s p$) довольно неплохо описывает температуру перехода БКТ (рис. 7в), но температуру кроссовера квазиконденсации описывает плохо (рис. 7б). (Фононная модель не учитывает ротонного загибания спектра на промежуточных масштабах (см. рис. 6а, в), которое при высоких плотностях и $T \sim T_q$ дает основной вклад.)

Важно, что локальная сверхтекучая доля на переходе БКТ, $n_l(T_c)/n$, при высоких плотностях ($1/4 \lesssim \bar{n} \lesssim 4$) близка к единице. Это свидетельствует о сильных корреляциях в плотном газе ДДЭ в связанных КЯ [5–9] (см. также сноску 2).

Кроме того, для деполяризованного по спину плотного газа ДДЭ в GaAs ($g_{ex} = 4$) температура квазиконденсации $T_q \approx 0.5T_0$ (см. рис. 7б) примерно вдвое выше температуры вырождения $T_{deg} = T_0/g_{ex} = 0.25T_0$ (см. (32)), а температура перехода БКТ $T_c \approx 0.2T_0$ (см. рис. 7в) лишь немного ниже T_{deg} . Это сильно отличается от распространенных в литературе моделей идеального и слабокоррелированного двумерных экситонных газов в КЯ, для которых эти температуры логарифмически малы по сравнению с температурой вырождения T_{deg} [49].

Таким образом, конденсированное состояние ДДЭ в связанных и одиночных КЯ экспериментально получить гораздо проще, чем в случае слабокоррелированных экситонов.

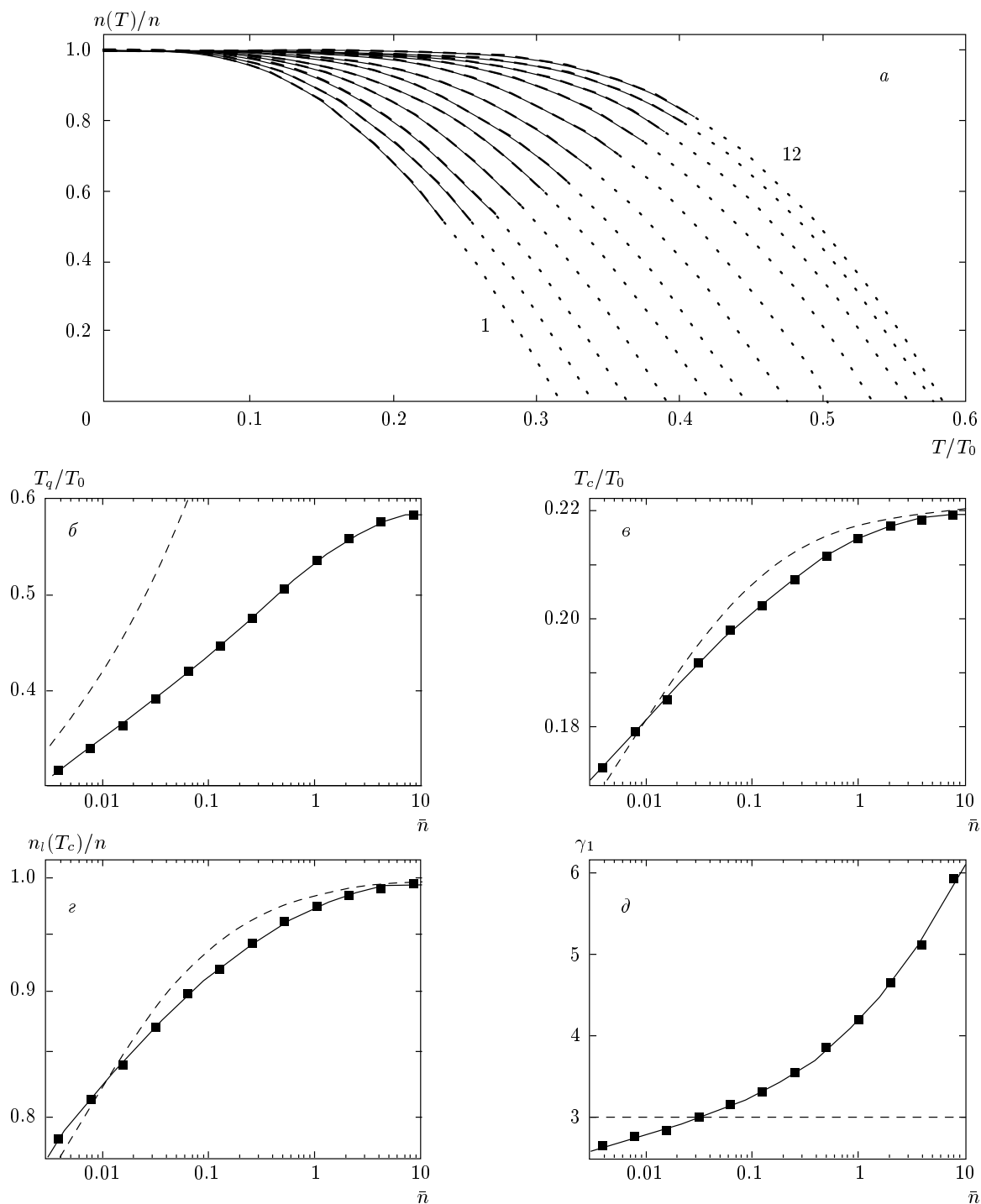


Рис. 7. а) Температурная зависимость доли локальной сверхтекучей компоненты экситонов в $g_{ex} = 4$ спиновых степенях свободы для различных плотностей $n = 2^{i-9}$, $i = 1, \dots, 12$ (сплошные линии) и низкотемпературные степенные подгонки (33) (штриховые линии); пунктирные линии — экстраполяция расчета в область квазиконденсированного кроссовера. Температура квазиконденсации T_q (б), температура T_c перехода БКТ в соответствующей бесконечной системе (в) и локальная сверхтекучая доля при $T = T_c$ (г) — квадраты, полиномиальная подгонка (сплошные кривые) и расчет в рамках фононной модели (штриховые) как функции плотности. д) Показатель степени в (33) в зависимости от плотности. Квадраты — подгонка для каждой плотности, сплошная линия — общая подгонка (34), штриховая — фононная модель

4. ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛОВУШКА ПРИ $T = 0$

Современная экспериментальная техника позволяет создавать гармоническое удержание ДДЭ в плоскости КЯ. Это удержание может быть получено с помощью как неоднородного сжатия образца, вызванного нажимом иглы, упирающейся в его поверхность [11, 12], так и неоднородного электрического поля в электростатических ловушках [5, 13, 60–62].

В последних экспериментах по бозе-конденсации экситонов реализуется случай, когда число экситонов в гармонической ловушке велико, $N \gg 1$ [5, 11, 12, 60]. В этом случае фоновый микроскопический линейный масштаб системы $r_0 \sim 1/\sqrt{n(0)}$ (см. (20); $n(\mathbf{r})$ — профиль плотности экситонов в ловушке) оказывается существенно меньшим размера ловушки $L_{TF} \sim \sqrt{N/n(0)}$ ($L_{TF} = \sqrt{2N/\pi n(0)}$ — радиус Томаса–Ферми). Другие микроскопические масштабы (ξ , r_{IG} , a и т. д.) в рассчитанном диапазоне плотностей еще меньше, чем r_0 (см. разд. 3). Поэтому микроскопическим свойствам экситонов в ловушке удастся сформироваться на локальных масштабах, на которых потенциал ловушки меняется плавно.

Более того, если в ловушке число экситонов N значительно превышает $4\pi^2 \approx 40$, то гидродинамическая область $p \ll 1/r_0 \sim \sqrt{n(0)}$ простирается существенно за пределы шага дискретности импульса $2\pi/L_{TF} \sim 2\pi\sqrt{n(0)/N} \ll \sqrt{n(0)}$, обусловленного граничными эффектами в однородной системе размера $L = L_{TF}$ (см. пп. 3.2, 3.4). Так что в экситонной системе в большой ловушке, содержащей $N \gg 40$ экситонов, звуковая область импульсов $2\pi/L_{TF} \ll p \ll 1/r_0$ существует и не замазывается эффектами конечности системы, возникающими на масштабах $p \lesssim 2\pi/L_{TF}$.

Таким образом, достаточно большая система ДДЭ в гармонической ловушке при $T = 0$ может быть довольно хорошо описана в приближении локальной плотности (ПЛП)³⁾. В этом приближе-

³⁾ В режиме слабых корреляций ($\zeta \ll 1$) выполнены равенства $L_{TF}/a_{ho} \sim a_{ho}/\xi \sim \sqrt{\mu/\hbar\omega_{ho}}$ ($a_{ho} = \sqrt{\hbar/m\omega_{ho}}$ — осцилляторная длина, ω_{ho} — частота ловушки и мы положили $\mu = \mu_i$). Так что при $\zeta \ll 1$ условия справедливости ПЛП $L_{TF} \gg a_{ho}$ и $\mu \gg \hbar\omega_{ho}$, которые распространены в литературе по бозе-конденсации атомов [63], могут быть заменены на условие $L_{TF} \gg \xi$ плавности потенциала ловушки на микроскопических масштабах, (среди которых, как можно показать, максимальным является ξ). Но в режиме промежуточных и сильных корреляций ($\zeta \gtrsim 1$) и если одновременно $\mu = \mu_i + \mu_e \neq \mu_i$, максимальный характерный микроскопический линейный масштаб есть r_0 , а не ξ (см. выше). В этом случае условие справедливости ПЛП $L_{TF} \gg r_0$ (или же $N \gg 1$, см. выше) более корректно, чем условия $L_{TF} \gg a_{ho}$ и

нии локальные микроскопические свойства экситонов вблизи точки \mathbf{r} ловушки приближенно заменяются на свойства соответствующей однородной системы с плотностью n , равной плотности экситонов в ловушке $n(\mathbf{r})$ в точке \mathbf{r} .

Так, профиль полной плотности экситонов в (симметричной) ловушке $n(r)$ в ПЛП определяется из уравнения Томаса–Ферми, которое при $T = 0$ принимает вид

$$V(r) + \mu(n(r)) = \mu, \quad (39)$$

где $V(r) = (m/2)\omega_{ho}^2 r^2$ — потенциал ловушки с осцилляторной частотой ω_{ho} , μ — химический потенциал экситонов в ловушке, отсчитанный от края экситонной зоны, а $\mu(n(r))$ — локальный химический потенциал экситонов в ловушке, равный их химическому потенциалу в однородной системе с плотностью $n = n(r)$.

Плотность бозе-конденсата экситонов при $T = 0$ в гармонической ловушке может быть рассчитана в ПЛП как

$$n_0(r) = n_0(n(r)), \quad (40)$$

где $n_0(n(r))$ — плотность бозе-конденсата в однородной системе с плотностью $n = n(r)$.

На рис. 8а изображены рассчитанные аналитически профили полной и бозе-конденсатной плотностей в гармонической ловушке в ПЛП при $T = 0$ для различных плотностей $n(0)$ в центре ловушки. Для расчета величин $\mu(n)$ и $n_0(n)$ в бесконечной однородной системе мы приближенно использовали соответствующие подгонки (11) и (19) (см. также (8) и (9)) для однородной конечной системы из $N = 100$ экситонов.

Хорошо видно, что при $\zeta'_e \equiv \mu_e/T_0 \equiv 2e^2 D/\varepsilon = 10$ кривые полной плотности $n(r)$ для всех $n(0)$ почти идеально ложатся на профиль томас-фермиевской перевернутой параболы,

$$n(r) \approx n(0)(1 - r^2/L_{TF}^2)\Theta(L_{TF} - r) \quad (41)$$

(см. рис. 8а), где $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$. Однако этот факт обусловлен не столько слабой нелинейностью столкновительного вклада в химический потенциал по плотности, сколько большим значением электростатического вклада $\mu_e = \zeta'_e T_0 = 10T_0$, который линеен по плотности

$\mu \gg \hbar\omega_{ho}$. Кроме того, отметим, что при $T \neq 0$ ПЛП, строго говоря, несправедливо при описании вихревой подсистемы, поскольку масштабы, связанные с вихрями велики и сравнимы с размером ловушки [41].

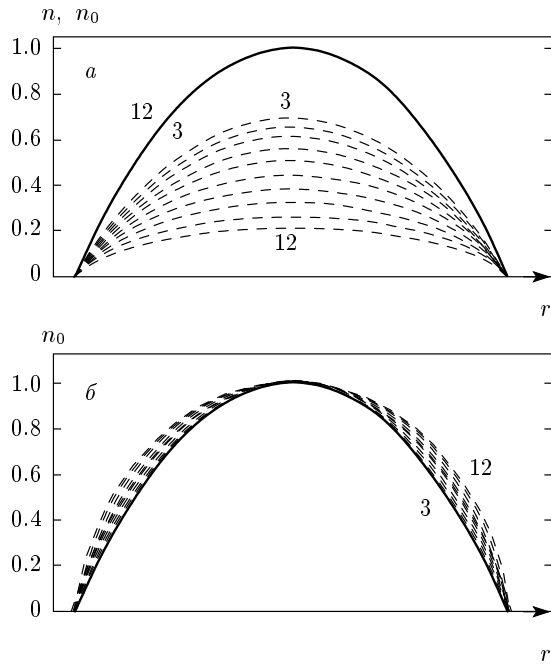


Рис. 8. а) Профили полной $(n(r)/n(0))$, сплошные кривые) и бозе-конденсатной $(n_0(r)/n(0))$, штриховые) плотностей экситонов в гармонической ловушке в ПЛП при $T = 0$ и $\zeta'_e \equiv 2e^2D/\varepsilon = 10$ для различных плотностей в центре $(n(0) = 2^{i-9}, i = 3, \dots, 12)$. б) Сравнение профилей плотности бозе-конденсата $(n_0(r)/n_0(0))$, штриховые кривые) при различных $n(0)$ с томас-фермиевской перевернутой параболой (сплошная кривая)

(см. (32)). (Значения электростатического вклада в химический потенциал $\zeta'_e \approx 10$ были реализованы в экспериментах [5–9, 12, 13].)

Но форма профиля бозе-конденсата $n_0(r)$ при высоких плотностях $(1/4 \lesssim \bar{n} \lesssim 4)$ заметно отличается от перевернутой параболы $n_0(0)(1 - r^2/L_{TF}^2)\Theta(L_{TF} - r)$, рис. 8б. Это свидетельствует в пользу сильных корреляций в плотном газе дипольных экситонов.

Отметим, что ПЛП позволяет предсказывать частоты коллективных осцилляций моды сжатия, когда возбуждение вызывается резким изменением частоты удерживающего потенциала [64]. Частота этой моды зависит от конкретного вида двухчастичного взаимодействия (в отличие от моды, вызываемой смещением центра масс и зависящей только от частоты удерживающего потенциала), что позволяет экспериментально исследовать уравнение состояния (см. (11)). Еще одной важной величиной, измеряемой в экспериментах, является энергия вы-

свобождения. Быстрое отключение ловушки обращает в нуль удерживающий потенциал, но оставляет практически неизменными кинетическую энергию и часть потенциальной энергии, связанную с парным взаимодействием. Высвободившаяся энергия может быть измерена во время разлета. Используя ПЛП, можно оценить энергию высвобождения [64].

5. ВОЗМОЖНОЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ СИЛЬНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ ЭКСИТОНОВ

Эффекты сильных корреляций в плотном газе ДДЭ в связанных КЯ могут быть обнаружены при наблюдении особенностей их люминесценции в продольном магнитном поле.

В самом деле, в отсутствие магнитного поля согласно закону сохранения импульса для однофотонной рекомбинации экситонов импульс p рекомбинирующего экситона равен проекции импульса испущенного фотона на плоскость КЯ, $(\hbar\omega/c_0) \sin \theta$. Здесь θ — угол между испущенным фотоном и нормалью в вакууме, c_0 — скорость света в вакууме, ω — частота фотона и мы переходим к обычным (размерным) единицам. Однако когда мы прикладываем к системе продольное магнитное поле H_{\parallel} , дисперсионная кривая ДДЭ ε_p смещается на величину $p_H = eDH_{\parallel}/c_0$ [65] (этот эффект эквивалентен описанному в работах [1] возбуждению продольным магнитным полем диамагнитных токов в системе пространственно разделенных спаривающихся электрона и дырки [66]). В результате соотношение между углом θ испущенного фотона и импульсом p рекомбинировавшего экситона принимает вид

$$(\hbar\omega/c_0) \sin \theta = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_H|. \quad (42)$$

Если мы интересуемся люминесценцией вдоль нормали ($\theta = 0$), то $p = p_H$ (см. (42)) и $\varepsilon_p = \varepsilon_{p_H}$. Отсюда для спектрально-угловой люминесценции вдоль нормали в поле H_{\parallel} при $T = 0$ получаем

$$I_{\theta=0}^H(\omega) = I_{\theta=0}^H \delta(\omega - \Omega + \varepsilon_{p_H}/\hbar), \quad p_H \gg p_T, \quad (43)$$

где $I_{\theta=0}^H$ — спектрально-интегрированная интенсивность угловой люминесценции вдоль нормали в поле H_{\parallel} , Ω — частота экситонного резонанса (для люминесценции при $H_{\parallel} = 0$ и $\theta = 0$), а $p_T = T/c_s$ — характерный тепловой импульс бозе-конденсированных экситонов, который разграничивает области тепловых $p \ll p_T$ и нуль-температурных $p_T \ll p \ll p_0$ флуктуаций фазы квазиконденсата [57].

Из выражения (43) мы видим, что измерение красного⁴⁾ смещения люминесцентной линии ε_{p_H}/\hbar в магнитном поле $H_{\parallel} = c_0 p_H/eD$ дает возможность непосредственно найти спектр возбуждений ε_p . При $D = 12.3$ нм, $m = 0.22m_0$, $\varepsilon = 12.5$ [6, 8], $n = 2 \cdot 10^{10}$ см⁻² и $H_{\parallel} = 8$ Тл находим

$$p_H/\hbar = 1.49 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1} = 10.5\sqrt{n} \approx p_{IG}/\hbar$$

(см. разд. 2 и рис. 3з). Так что в структуре 2 [6, 8], содержащей экситонный газ с плотностью $n = 2 \cdot 10^{10}$ см⁻² поле $H_{\parallel} = 8$ Тл покрывает как звуковую (гидродинамическую, $p \ll p_0$), так и промежуточную ($p_0 \ll p \ll p_{IG}$) области спектра (см. рис. 6в). При этом тепловой импульс p_T при $T = 0.2T_0 = 1$ К, $m = 0.22m_0$ и $\zeta = 3.7$ (см. рис. 2б, разд. 2 и п. 3.1) соответствует полю

$$H_{\parallel}^T = \frac{c_0 T}{eD} \sqrt{\frac{m}{\zeta T_0}} \approx 0.2 \text{ Тл.}$$

Зная наклон измеренного спектра ε_{p_H} , можно рассчитать скорость звука $c_s \approx \varepsilon_{p_H}/p_H$ ($p_H \ll p_0$; см. рис. 6а). Отсюда можно найти безразмерную адиабатическую сжимаемость (см. (28))

$$\zeta = m^2 c_s^2 / 2\pi \hbar^2 n.$$

Альтернативно безразмерную обратную адиабатическую сжимаемость ζ можно определить из измерения спектрально-проинтегрированной интенсивности люминесценции вдоль нормали в магнитном поле, $I_{\theta=0}^H$. Действительно, спектрально-проинтегрированная интенсивность люминесценции в пространственный угол $d\Omega = \sin\theta d\varphi d\theta$ вблизи нормали связана с импульсным распределением экситонов

$$n_{p_H} \equiv \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_H \cdot \mathbf{r}\right) \rho_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

(т. е. числом экситонов с импульсом \mathbf{p}_H) следующим соотношением:

$$I_{\theta=0}^H d\Omega = \kappa \frac{\hbar\omega}{\tau_0} n_{p_H} \frac{d\mathbf{p}_H}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (44)$$

⁴⁾ Во взаимодействующих экситонных системах при $T = 0$ экситонный резонанс испытывает красное смещение на величину, соответствующую p_H . Это связано с тем, что при $T = 0$ при рекомбинации экситона элементарное возбуждение рождается из основного состояния и принимает на себя часть энергии. Это отличается от случая идеального газа при $T \neq 0$, когда рекомбинирует экситон с энергией $\hbar\Omega + p_H^2/2m$ и всю эту энергию передает фотону, вызывая голубое смещение. Последний сценарий наблюдался в работах [65].

Здесь τ_0 — время жизни изолированного деполаризованного по спину экситона в основном состоянии и $\kappa = 1/2$ ($\kappa = 1$) в случае измерения люминесценции лишь по одну (по обе) стороны от плоскости КЯ.

На наиболее интересных для нас масштабах $p_T \ll p_H \ll p_0$ импульсное распределение при $T = 0$ дается фурье-образом выражения (18),

$$n_{p_H} = \frac{n_0}{n} \frac{m c_s}{2 p_H}. \quad (45)$$

Из (44), (45) получаем искомую связь интенсивности угловой люминесценции вдоль нормали, $I_{\theta=0}^H$, и безразмерной адиабатической сжимаемости ζ :

$$I_{\theta=0}^H = I_0 \frac{q_r^2 c_0}{4\pi e D \sqrt{m T_0}} \frac{\sqrt{\zeta}}{H_{\parallel}}, \quad (46)$$

$$p_T \ll \frac{e D H_{\parallel}}{c_0} \ll \hbar \sqrt{n},$$

где $I_0 = (\hbar\Omega/\tau_0)\kappa n_0$ — интенсивность люминесценции бозе-конденсата экситонов при $T = 0$. При $n = 2 \cdot 10^{10}$ см⁻², $D = 12.3$ нм, $T = 0.1T_0 = 0.5$ К, $m = 0.22m_0$, $\varepsilon = 12.5$ и $\zeta = 3.7$ диапазон импульсов $p_T \ll e D H_{\parallel}/c_0 \ll p_0$ в (46) соответствует диапазону полей

$$\frac{c_0 T}{e D} \sqrt{\frac{m}{\zeta T_0}} \ll H_{\parallel} \ll \frac{c_0 \hbar \sqrt{n}}{e D},$$

или 0.1 Тл $\ll H_{\parallel} \ll 0.75$ Тл.

Входящая в выражение (46) интенсивность люминесценции бозе-конденсата при $T = 0$ может быть приближенно рассчитана как вклад тепловых флуктуаций фазы в люминесценцию квазиконденсата при низких температурах (см. (44)):

$$I_0 \approx \int_0^{p_T} I_{\theta=0}^H \frac{2\pi p_H dp_H}{q_r^2} = \kappa \frac{\hbar\Omega}{\tau_0} n_0, \quad T \ll T_q, \quad (47)$$

где $q_r = \hbar\Omega/c_0$ — ширина радиационной зоны в вакууме. Здесь учтено, что экситонная щель $\hbar\Omega \sim 1$ эВ существенно превышает все характерные энергетические масштабы для экситонов $\varepsilon_{p_H}, T \lesssim 1$ мэВ $\ll \hbar\Omega$, так что $\hbar\omega \approx \hbar\Omega$. Также учтено, что $dp_H = q_r d\sin\theta = q_r d\theta$ при $p_H = p$ и $\theta = 0$ (см. (42)). (Формулу (47) можно получить, распространяя метод, изложенный в Приложении А, на случай $T \neq 0$, см. [19, 57].)

Наконец, измеряя величину (47), можно определить важный параметр, определяемый экситонными корреляциями, — плотность бозе-конденсата при $T = 0$:

$$n_0 = \frac{1}{\kappa} \frac{\tau_0}{\hbar\Omega} I_0.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью моделирования на основе первых принципов и аналитических расчетов детально исследованы микроскопические свойства бозе-конденсированных сверхтекучих двумерных дипольных экситонов (ДДЭ) в квантовых ямах (КЯ). Для однородной системы ДДЭ численно рассчитаны энергия основного состояния, одночастичная матрица плотности и функция парного распределения. На основании данного численного расчета для однородной системы аналитически найдены структурный фактор, энергетический спектр, температурная зависимость локальной сверхтекучей плотности, плотность бозе-конденсата, химический потенциал, адиабатическая сжимаемость, скорость звука, характерные микроскопические линейные масштабы (фононный масштаб, длина «залечивания», длина рассеяния, диаметр эффективного твердого диска диполя и др.), а также температуры квазиконденсации и перехода Березинского–Костерлица–Таулеса. Для гармонической ловушки с большим числом ДДЭ аналитически вычислены профили полной плотности и плотности бозе-конденсата.

Показано, что во всех выполненных в настоящее время экспериментах по бозе-конденсации ДДЭ в связанных КЯ оказываются сильнокоррелированными. Как следствие, бозе-конденсация и сверхтекучесть ДДЭ достижимы экспериментально гораздо легче, чем предсказывается моделями идеального и слабокоррелированного экситонных газов.

Полученные результаты для энергии E_0/N основного состояния ДДЭ, их химического потенциала $\mu = \mu_i + \mu_e$, адиабатической сжимаемости χ , скорости звука c_s , спектра возбуждений ε_p , плотностей бозе-конденсата n_0 и локальной сверхтекучей компоненты $n_l(T)$ и характерного микроскопического фононного линейного масштаба r_0 могут быть использованы как справочный материал для построения количественной гидродинамической теории оптических свойств ДДЭ в КЯ, в частности, их люминесценции, когерентности и нелинейных эффектов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-02-17871) и Шведского фонда стратегических исследований (SSR).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Длинноволновая гидродинамическая асимптотика одночастичной матрицы плотности

На длинноволновых масштабах ($r \gg r_0$) одночастичная матрица плотности (16) бозе-конденсированных ДДЭ при $T = 0$ может быть рассчитана в рамках гидродинамического метода в квантовой теории поля [19]:

$$\rho_1(\mathbf{r}) = C \exp \left[- \left\langle \frac{(\hat{\phi}(\mathbf{r}) - \hat{\phi}(0))^2}{2} \right\rangle \right] = n_0 \exp [\langle \hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\phi}(0) \rangle], \quad r \gg r_0. \quad (48)$$

Здесь $\hat{\phi}(\mathbf{r})$ — фаза оператора поля экситонов $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \exp[i\hat{\phi}(\mathbf{r})] \sqrt{\hat{\rho}(\mathbf{r})}$, удовлетворяющая коммутационному соотношению $[\hat{\phi}(\mathbf{r}), \hat{\phi}(\mathbf{r}')] = 0$, а $C = n_0 \exp(\langle \hat{\phi}^2(0) \rangle) = \text{const}$ не зависит от \mathbf{r} и предполагается ультрафиолетовое обрезание (при этом величины C и $\langle \hat{\phi}^2(0) \rangle$ расходятся в ультрафиолетовом пределе, но n_0 и $\langle \hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\phi}(0) \rangle$ при $r \gg r_0$ конечны в пределе больших импульсов).

Входящий в выражение (48) коррелятор фаза-фаза $\langle \hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\phi}(0) \rangle$ при $T = 0$ может быть выражен через функцию Грина фаза-фаза при $T = 0$ (в размерных единицах),

$$D_p^{\varphi\varphi}(\omega) = -i \int \langle \hat{T}[\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \hat{\phi}(0, 0)] \rangle \times \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + i\omega t \right) d\mathbf{r} dt,$$

следующим соотношением:

$$\langle \hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\phi}(0) \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \right) \times \int i D_p^{\varphi\varphi}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (49)$$

где \hat{T} — оператор хронологического упорядочения.

В гидродинамическом (длинноволновом) приближении, в котором гидродинамический гамильтониан приобретает локальный по времени вид, функция $D_p^{\varphi\varphi}(\omega)$ равна [57, 67]

$$D_p^{\varphi\varphi}(\omega) = \frac{\hbar m \varepsilon_p^2 / n_s p^2}{\hbar^2 \omega^2 - \varepsilon_p^2 + i\delta}, \quad p \ll p_0, \quad (50)$$

где n_s — глобальная сверхтекучая плотность экситонов (в g_{ex} спиновых степенях свободы).

В рассчитанном диапазоне плотностей ($n x_0^2 \leq 8$) экситоны находятся в газовой фазе [33]. Кроме того,

мы пренебрегаем внешним случайным потенциалом, неизбежно присутствующим в гетероструктурах. В этом случае глобальная сверхтекучая плотность экситонов при $T = 0$ совпадает с их полной плотностью (см. работу [21] и п. 3.6),

$$n_s = n. \quad (51)$$

На основании формул (49)–(51) для коррелятора $\langle \hat{\psi}(\mathbf{r})\hat{\psi}(0) \rangle$ при $T = 0$ и $r \gg r_0$ получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}(\mathbf{r})\hat{\psi}(0) \rangle &= \frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) \frac{m\varepsilon_p}{2np^2} = \\ &= \frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) \frac{m\varepsilon_p}{2np^2} - \frac{1}{4N} \sum_{\mathbf{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) = \\ &= \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) \left(\frac{m\varepsilon_p}{2Np^2} - \frac{1}{4N}\right) - \frac{1}{4N}. \quad (52) \end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что при $r \gg r_0$ (т. е. при $\mathbf{r} \neq 0$) δ -образный вклад

$$\frac{1}{4N} \sum_{\mathbf{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) = \frac{1}{4n} \sum_{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{n}L)$$

равен нулю в ящике размера L ($\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$ — целочисленный вектор).

Подставляя выражение (52) в (48) и усредняя по полярному углу вектора \mathbf{r} , приходим к искомому гидродинамическому выражению (17) для одночастичной матрицы плотности бозе-конденсированных ДДЭ при $T = 0$, которое на длинноволновых масштабах ($r \gg r_0$) прекрасно сходится с ДМК-расчетом (см. рис. 3*д*).

В завершение отметим, что во взаимодействующих системах с конечной длиной рассеяния спектр возбуждений ε_p при $p \rightarrow \infty$ экспоненциально приближается к спектру идеального газа $\varepsilon_p = p^2/2m + O(\exp(-p/p_1))$ (где $p_1 = \text{const} > 0$; см. также пункт 2 в Приложении Б). Так что входящая под знаком суммы в (52) величина $m\varepsilon_p/2Np^2 - 1/4N$ при $p \rightarrow \infty$ имеет порядок $O(\exp(-p/p_1))$. Поэтому выражение (52) для коррелятора фаза–фаза сходится в ультрафиолетовом пределе. Так что известное в квантово-полевой гидродинамике ультрафиолетовое обрезание [57] на границе длинноволновой зоны ($r \sim r_0$, $p \sim p_0$) оказывается излишним в (52); для сходимости оказалось достаточным бесконечно малого обрезания.

Однако надо иметь в виду, что гидродинамическое (длинноволновое) приближение не дает правильного ответа для коррелятора фаза–фаза на микроскопических масштабах $r \ll r_0$, $p \gg p_0$ и область

$p \gg p_0$ учитывается в (52) некорректно. В связи с этим используемый здесь гидродинамический подход вносит некоторую ошибку в вычисление одночастичной матрицы плотности и, следовательно, плотности бозе-конденсата. Однако прямой расчет показывает, что если в (52) все же ввести плавное конечно малое ультрафиолетовое обрезание на $p \sim p_0$, поправка к плотности бозе-конденсата экспоненциально исчезнет при больших N . Численный расчет суммы в (52) показывает, что при $N = 100$ эта поправка имеет порядок 0.001.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Условия применимости и детали расчета

Обсудим тонкие моменты вычислений спектра возбуждений, плотности локальной сверхтекучей компоненты и температур квазиконденсированного и сверхтекучего переходов.

1) Как показали Боронат и др. [56], в сильнокоррелированных системах на промежуточных масштабах истинный спектр лежит ниже, чем спектр, рассчитанный по формуле Фейнмана (хотя чем слабее корреляции, тем формула Фейнмана точнее). Поэтому в режиме сильных корреляций наш расчет доли локальной сверхтекучей компоненты, а также температур квазиконденсации T_q и перехода БКТ T_c справедлив лишь качественно.

2) Для простоты при оценке спектра возбуждений мы опускаем эффекты, связанные с большим затуханием элементарных возбуждений выше точки окончания спектра [59].

3) Формула Ландау справедлива только в бесстолкновительном (не гидродинамическом) режиме, когда элементарные возбуждения взаимодействуют слабо, а их затухание мало. Это заведомо не так выше точки p_c окончания спектра. В плотной системе точка окончания спектра лежит высоко (см. рис. 6*а* и [59]), так что область $p > p_c$ «вырезается» в (30) бозевской экспонентой (31). При низких плотностях точка p_c окончания спектра соответствует меньшим частотам, но существенное затухание появляется лишь выше звуковой области спектра. Эта область тоже вырезается бозевской экспонентой (см. (30)–(32) и рис. 6*а*, 7*б*). Но при очень низких плотностях n , когда экситоны слабо коррелированы, гидродинамический режим может наступить именно в той области спектра, которая дает в формуле Ландау основной вклад. В этом случае формула (30) несправедлива. Однако, согласно нашей пря-

мой оценке, даже при меньшей рассчитанной плотности $\bar{n} = 1/256$ такая ситуация не реализуется.

4) Для расчета локальной компоненты мы положили $\varepsilon_p^T \approx \varepsilon_p^{T=0} = \varepsilon_p$ в (30) и (31). Действительно, при низких температурах ($T \ll T_q$) бозевская экспонента (31) оставляет в (30) лишь вклад длинноволновых масштабов, на которых $\varepsilon_p^T \approx c_s(T)p \approx c_s(0)p \approx \varepsilon_p$. При высоких температурах ($T \sim T_q$, $T < T_q$), благодаря множителю $(p^2/2)pdp$ в (30), длинноволновые масштабы не дают вклада. А на более коротковолновых (микроскопических) масштабах рассчитанный по формуле Фейнмана спектр слабо подвержен изменению температуры. Последний факт выявлен в ходе моделирования методом МК парного распределения и структурного фактора в жидком гелии вплоть до таких высоких температур (4.2 К), как удвоенная температура λ -точки $T_\lambda = 2.1$ К [68].

5) Температуру квазиконденсации T_q мы формально рассчитываем из условия $n_l(T_q)/n = 0$, где $n_l(T)/n$ дается формулой (30) с $\varepsilon_p^T = \varepsilon_p$. Это — приближенная оценка, поскольку в области кроссовера при температурах вблизи T_q исчезают локальная сверхтекучесть и локальный дальний порядок, элементарные возбуждения перестают образовывать почти идеальный газ и квантовый режим переходит в классический.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, Письма в ЖЭТФ **22**, 556 (1975); ЖЭТФ **71**, 738 (1976); Yu. E. Lozovik and V. I. Yudson, Sol. St. Comm. **19**, 391 (1976); *ibid* **21**, 211 (1977); Ю. Е. Лозовик, В. Н. Нишанов, ФТТ **18**, 3267 (1976); Ю. Е. Лозовик, А. М. Рувинский, ЖЭТФ **112**, 1791 (1997); Ю. Е. Лозовик, в *Труды конференции по диэлектрической электронике*, ФАН, Ташкент (1973), с. 63.
2. А. Filinov, P. Ludwig, Yu. E. Lozovik et al., J. Phys.: Conf. Series **35**, 197 (2006).
3. S. A. Moskalenko and D. W. Snoke, *Bose-Einstein Condensation of Excitons and Biexcitons and Coherent Nonlinear Optics with Excitons*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
4. D. Snoke, Science **298**, 1368 (2002); R. Rapaport and G. Chen, J. Phys.: Condens. Matter **19**, 295207 (2007); Z. Vörös, V. Hartwell, D. W. Snoke et al., *ibid* **19**, 295216 (2007).
5. В. Б. Тимофеев, УФН **175**, 315 (2005).
6. L. V. Butov, Sol. St. Comm. **127**, 89 (2003); J. Phys.: Condens. Matter **16**, R1577 (2004); **19**, 295202 (2007).
7. А. В. Горбунов, В. Е. Бисти, В. Б. Тимофеев, ЖЭТФ **128**, 803 (2005); А. В. Ларионов, В. Б. Тимофеев, И. Хвам, К. Соеренсен, *ibid* **117**, 1255 (2000); Письма в ЖЭТФ **71**, 174 (2000); *ibid* **75**, 233 (2002); А. В. Ларионов, В. Б. Тимофеев, *ibid* **73**, 342 (2001); А. В. Ларионов, В. Б. Тимофеев, Д. А. Ни и др., *ibid* **75**, 689 (2002); А. А. Дремин, В. Б. Тимофеев, А. В. Ларионов и др., *ibid.* **76**, 526 (2002); А. В. Горбунов, В. Б. Тимофеев, *ibid* **83**, 178 (2006); А. А. Дремин, А. В. Ларионов, В. Б. Тимофеев, ФТТ **46**, 168 (2004).
8. L. V. Butov and A. I. Filin, Phys. Rev. B **58**, 1980 (1998); L. V. Butov, C. W. Lai, A. L. Ivanov et al., Nature (London) **417**, 47 (2002); C. W. Lai, J. Zoch, A. C. Gossard, and D. S. Chemla, Science **303**, 503 (2004); L. V. Butov, A. L. Ivanov, A. Imamoglu et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 5608 (2001); L. V. Butov, L. S. Levitov, A. V. Mintsev et al., *ibid* **92**, 117404 (2004); A. T. Hammack, M. Griswold, L. V. Butov et al., *ibid* **96**, 227402 (2006); S. Yang, A. T. Hammack, M. M. Fogler et al., *ibid* **97**, 187402 (2006); см. также [48].
9. V. V. Krivolapchuk, E. S. Moskalenko, and A. L. Zhmodikov, Phys. Rev. B **64**, 045313 (2001); V. V. Krivolapchuk, E. S. Moskalenko, A. L. Zhmodikov et al., Sol. St. Comm. **111**, 49 (1999).
10. D. Snoke, S. Denev, Y. Liu et al., Nature (London) **418**, 754 (2002); R. Rapaport, G. Chen, D. Snoke et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 117405 (2004).
11. D. W. Snoke, Y. Liu, Z. Vörös et al., Sol. St. Comm. **134**, 37 (2005).
12. Z. Vörös, D. W. Snoke, L. Pfeiffer, and K. West, Phys. Rev. Lett. **97**, 016803 (2006).
13. Z. Vörös, R. Balili, D. W. Snoke et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 226401 (2005); G. Chen, R. Rapaport, L. N. Pfeiffer et al., Phys. Rev. B **74**, 045309 (2006).
14. А. В. Горбунов, В. Б. Тимофеев, Письма в ЖЭТФ **84**, 390 (2006); V. B. Timofeev and A. V. Gorbunov, J. Appl. Phys. **101**, 081708 (2007).
15. D. S. Petrov, M. Holzmann, and J. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **84**, 2551 (2000).
16. Ю. Е. Лозовик, О. Л. Берман, ЖЭТФ **111**, 1879 (1997); Yu. E. Lozovik and O. L. Berman, Phys. Scripta **55**, 491 (1997); Yu. E. Lozovik, O. L. Berman, and M. Willander, J. Phys.: Condens. Matter **14**, 12457 (2002).

17. Л. В. Келдыш, Ю. В. Копаев, ФТТ **6**, 2791 (1965); А. Н. Козлов, Л. А. Максимов, ЖЭТФ **48**, 1184 (1965); Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, ЖЭТФ **54**, 978 (1968).
18. P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 383 (1967); N. D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
19. J. W. Kane and L. P. Kadanoff, Phys. Rev. **155**, 80 (1967); F. Weling, A. Griffin, and M. Carrington, Phys. Rev. B **28**, 5296 (1983).
20. В. Л. Березинский, ЖЭТФ **59**, 907 (1970); **61**, 1144 (1971).
21. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
22. J. M. Kosterlitz, J. Phys. C **7**, 1046 (1974).
23. D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, Phys. Rev. Lett. **39**, 1201 (1977).
24. V. Bagnato and D. Kleppner, Phys. Rev. A **44**, 7439 (1991); W. Ketterle and N. J. van Druten, *ibid* **54**, 656 (1996).
25. G. Vignale and A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **76**, 2786 (1996); S. Conti, G. Vignale, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **57**, R6846 (1998); A. V. Balatsky, Y. N. Joglekar, and P. B. Littlewood, Phys. Rev. Lett. **93**, 266801 (2004); Y. N. Joglekar, A. V. Balatsky, and M. P. Lilly, Phys. Rev. B **72**, 205313 (2005).
26. O. L. Berman, Yu. E. Lozovik, D. W. Snoke, and R. D. Coalson, Phys. Rev. B **70**, 235310 (2004); **73**, 235352 (2006); Sol. St. Comm. **134**, 47 (2005); Physica E **34**, 268 (2006).
27. Yu. E. Lozovik and M. Willander, Appl. Phys. A **71**, 379 (2000); Yu. E. Lozovik, O. L. Berman, and V. G. Tsvetus, Phys. Rev. B **59**, 5627 (1999); Ю. Е. Лозовик, О. Л. Берман, В. Г. Цветус, Письма в ЖЭТФ **66**, 332 (1997); Ю. Е. Лозовик, О. Л. Берман, *ibid* **64**, 526 (1996).
28. J. F. Jan and Y. C. Lee, Phys. Rev. B **58**, 1714 (1998); Z. G. Koinov, *ibid* **61**, 8411 (2000).
29. X. Zhu, P. B. Littlewood, M. S. Htibertsen, and T. M. Rice, Phys. Rev. Lett. **74**, 1633 (1995); Y. Naveh and B. Laikhtman, *ibid* **77**, 900 (1996); J. Fernández-Rossier and C. Tejedor, *ibid* **78**, 4809 (1997); P. Pieri, D. Neilson, and G. C. Strinati, Phys. Rev. B **75**, 113301 (2007).
30. Yu. E. Lozovik, I. L. Kurbakov, G. E. Astrakharchik et al., Sol. St. Comm. **144**, 399 (2007).
31. Yu. E. Lozovik and O. L. Berman, Phys. Scripta **58**, 86 (1998); Ю. Е. Лозовик, О. Л. Берман, ФТТ **40**, 1350 (1998); Д. В. Кулаковский, Ю. Е. Лозовик, А. В. Чаплик, ЖЭТФ **126**, 979 (2004).
32. S. De Palo, F. Rapisarda, and G. Senatore, Phys. Rev. Lett. **88**, 206401 (2002); А. И. Белоусов, Ю. Е. Лозовик, Письма в ЖЭТФ **68**, 817 (1998); А. I. Belousov and Yu. E. Lozovik, Europhys. J. D **8**, 251 (2000); Yu. E. Lozovik and E. A. Rakoch, Phys. Lett. A **235**, 55 (1997); A. Filinov, M. Bonitz, P. Ludwig, and Yu. E. Lozovik, Phys. Stat. Sol. (c) **3**, 2457 (2006); C. Mora, O. Parcollet, and X. Waintal, Phys. Rev. B **76**, 064511 (2007).
33. G. E. Astrakharchik, J. Boronat, I. L. Kurbakov, and Yu. E. Lozovik, Phys. Rev. Lett. **98**, 060405 (2007); см. также [46].
34. Ю. Е. Лозовик, И. Л. Курбаков, Г. Е. Астрахарчик, М. Вилландер, ФТТ (2008), в печати.
35. Ю. Е. Лозовик, С. Ю. Волков, М. Вилландер, Письма в ЖЭТФ **79**, 585 (2004); G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras et al., E-print archives, cond-mat/07074630.
36. A. L. Ivanov, P. B. Littlewood, and H. Haug, Phys. Rev. B **59**, 5032 (1999); A. V. Soroko and A. L. Ivanov, *ibid*. **65**, 165310 (2002); С. В. Иорданский, А. Кашуба, Письма в ЖЭТФ **73**, 542 (2001); A. L. Ivanov, Europhys. Lett. **59**, 586 (2002).
37. S. I. Shevchenko, Phys. Rev. Lett. **72**, 3242 (1994); Phys. Rev. B **56**, 10355 (1997); **57**, 14809 (1998); Yu. E. Lozovik and E. A. Rakoch, *ibid* **57**, 1214 (1998); T. Iida and M. Tsubota, *ibid* **60**, 5802 (1999); J. Luminescence **87–89**, 241 (2000).
38. Yu. E. Lozovik and V. I. Yudson, Sol. St. Comm. **22**, 117 (1977); А. В. Ключник, Ю. Е. Лозовик, ЖЭТФ **76**, 670 (1979); А. В. Ключник and Yu. E. Lozovik, J. Phys. C **11**, L483 (1978); Yu. E. Lozovik and A. V. Poushnov, Phys. Lett. **228A**, 399 (1997); см. также [37].
39. L. S. Levitov, B. D. Simons, and L. V. Butov, Phys. Rev. Lett. **94**, 176404 (2005); Sol. St. Comm. **134**, 51 (2005).
40. B. Laikhtman, Europhys. Lett. **43**, 53 (1998); P. Steinius, Phys. Rev. B **60**, 14072 (1999); Ю. Е. Лозовик, И. В. Овчинников, Письма в ЖЭТФ **74**, 318 (2001); Yu. E. Lozovik and I. V. Ovchinnikov, Phys. Rev. B **66**, 075124 (2002); Sol. St. Comm. **118**, 251 (2001); Yu. E. Lozovik, I. L. Kurbakov, and I. V. Ovchinnikov, *ibid* **126**, 269 (2003); J. Keeling, L. S. Levitov, and P. B. Littlewood, Phys. Rev. Lett. **92**, 176402 (2004); R. Zimmermann, Phys. Stat. Sol. (b) **243**, 2358 (2006).

41. Yu. E. Lozovik, I. L. Kurbakov, and M. Willander, *Phys. Lett.* **366A**, 487 (2007).
42. Ю. Е. Лозовик, О. Л. Берман, А. М. Рувинский, *Письма в ЖЭТФ* **69**, 573 (1999); K. Huang and H.-F. Meng, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 644 (1992); M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **40**, 546 (1989); см. также [26, 27, 67].
43. K. Moon, H. Mori, K. Yang et al., *Phys. Rev. B* **51**, 5138 (1995); K. Park and S. Das Sarma, *ibid* **74**, 035338 (2006); Ю. Е. Лозовик, И. В. Овчинников, *Письма в ЖЭТФ* **79**, 86 (2004); H. A. Fertig and G. Murthy, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 156802 (2005); J. P. Eisenstein and A. H. MacDonald, *Nature (London)* **432**, 691 (2004); J. P. Eisenstein, *Science* **305**, 950 (2004); см. также [27].
44. M. Kellogg, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036801 (2004); E. Tutuc, M. Shayegani, and D. A. Huse, *ibid* **93**, 036802 (2004).
45. A. Griesmaier, J. Werner, S. Hensler et al., *Phys. Rev. Lett.* **94**, 160401 (2005); D. Jaksch, J. I. Cirac, P. Zoller et al., *ibid* **85**, 2208 (2000); H. Pu, W. Zhang, and P. Meystre, *ibid* **87**, 140405 (2001); S. Yi and L. You, *Phys. Rev. A* **63**, 053607 (2001); U. R. Fischer, *ibid* **73**, 031602 (2006); S. Yi and H. Pu, *ibid* **73**, 061602 (2006); G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras et al., *Phys. Rev. A* **75** 063630 (2007).
46. H. P. Büchler, E. Demler, M. Lukin et al., *Phys. Rev. Lett.* **98**, 060404 (2007); D. DeMille, *ibid* **88**, 067901 (2002); R. V. Cremers, *ibid* **96**, 123202 (2006); J. M. Sage, S. Sainis, T. Bergeman, and D. DeMille, *ibid* **94**, 203001 (2005); J. L. Bohn, *Phys. Rev. A* **63**, 052714 (2001); T. Köhler, K. Góral, and P. S. Julienne, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1311 (2006).
47. M. Schick, *Phys. Rev. A* **3**, 1067 (1971); Yu. E. Lozovik and V. I. Yudson, *Physica A* **93**, 493 (1978); E. B. Kolomeisky and J. P. Straley, *Phys. Rev. B* **46**, 11749 (1992); A. Yu. Chreny and A. A. Shanenko, *Phys. Rev. E* **64**, 027105 (2001).
48. S. Yang, A. V. Mintsev, A. T. Hammack et al., *Phys. Rev. B* **75**, 033311 (2007).
49. D. S. Fisher and P. C. Hohenberg, *Phys. Rev. B* **37**, 4936 (1988); см. также [57].
50. S. Schmitt-Rink, D. S. Chemla, and D. A. B. Miller, *Phys. Rev. B* **32**, 6601 (1985).
51. L. Reatto and G. V. Chester, *Phys. Rev.* **155**, 88 (1967).
52. J. Boronat and J. Casulleras, *Phys. Rev. B* **49**, 8920 (1994).
53. J. Casulleras and J. Boronat, *Phys. Rev. B* **52**, 3654 (1995).
54. G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras et al., submitted to *Phys. Rev. A* (2008).
55. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
56. R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **94**, 262 (1954); Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **31**, 536 (1957); J. Boronat, J. Casulleras, F. Dalfovo et al., *Phys. Rev. B* **52**, 1236 (1995).
57. В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, Атомиздат, Москва (1976).
58. P. Minnhagen, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1001 (1987); *Phys. Rev. B* **32**, 3088 (1985); P. Minnhagen and G. G. Warren, *ibid* **24**, 2526 (1981).
59. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Добросвет, Москва (1968).
60. А. В. Горбунов, В. Б. Тимофеев, *Письма в ЖЭТФ* **80**, 210 (2004).
61. M. Willander, O. Nur, Yu. E. Lozovik et al., *Microelectron. J.* **36**, 940 (2005).
62. A. T. Hammack, N. A. Gippius, S. Yang et al., *J. Appl. Phys.* **99**, 066104 (2006).
63. G. Baymand and C. J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 6 (1996).
64. G. E. Astrakharchik, *Phys. Rev. A* **72**, 063620 (2005).
65. L. V. Butov, A. V. Mintsev, Yu. E. Lozovik et al., *Phys. Rev. B* **62**, 1548 (2000); L. V. Butov, C. W. Lai, D. S. Chemla et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 216804 (2001).
66. Yu. E. Lozovik, I. V. Ovchinnikov, S. Yu. Volkov et al., *Phys. Rev. B* **65**, 235304 (2002).
67. S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. B* **49**, 12938 (1994); H.-F. Meng, *ibid* **49**, 1205 (1994).
68. E. C. Svensson, V. F. Sears, A. D. B. Woods, and P. Martel, *Phys. Rev. B* **21**, 3638 (1980).