

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В КИРАЛЬНЫХ СРЕДАХ

*Е. В. Аксенова**, *Е. В. Крюков***, *В. П. Романов****

*Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 3 мая 2007 г.

Исследовано распространение света в одноосных киральных жидких кристаллах с большим шагом спирали. Проанализированы окрестности точек поворота и рассмотрен эффект прохождения необыкновенных волн через запрещенную зону. Показано, что для описания прохождения волн через запрещенную зону необходимо в общем случае учитывать наличие четырех особых точек, две из которых отвечают за взаимодействие необыкновенных лучей, а две — за взаимодействие обыкновенного луча с необыкновенным. Проведен анализ прохождения луча в случае широких запрещенных зон, когда между особыми точками имеют место области применимости ВКБ-приближения. Подробно исследован случай узких запрещенных зон, когда особые точки сливаются. Показано, что эффект прохождения лучей сквозь такую зону и эффект надбарьерного отражения эквивалентен туннельному эффекту для потенциального барьера параболической формы. Рассчитаны угловые зависимости интенсивностей лучей, претерпевших внутреннюю рефракцию и прошедших через запрещенную зону. Показано, что эффект просачивания может наблюдаться экспериментально.

PACS: 42.70.Df, 42.25.Bs, 42.15.-i, 42.25.Fx, 42.25.Lc

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большой интерес проявляется к исследованию оптических свойств самых разнообразных систем со сложной структурой. Прежде всего это касается фотонных кристаллов [1, 2] и жидкокристаллических соединений [3–6]. Интерес к этим объектам обусловлен их необычными оптическими свойствами и широким практическим применением в системах отображения и передачи информации [3, 4]. Центральной проблемой с точки зрения оптических свойств здесь является исследование распространения света в одномерных, двумерных и трехмерных структурах. При этом возникают задачи, которым ранее в физической оптике уделялось сравнительно мало внимания. К ним относится проблема дифракции света на фотонных кристаллах и киральных периодических средах [6]. При решении этой задачи широко используется ее аналогия с задачей дифракции рентгеновских лучей в

кристаллах и тонких слоистых структурах. Другой круг задач связан с исследованием запрещенных зон и волновых каналов, описание которых аналогично эффекту туннелирования в квантовой механике и теории распространения акустических и электромагнитных волн в средах с плавно меняющимися свойствами [7, 8].

В настоящей работе рассматривается распространение света в одномерно периодических структурах с периодом, значительно большим длины световой волны, и исследуется возникновение запрещенных зон и особенности распространения света в их окрестностях. Объектом исследования являются киральные жидкие кристаллы, такие как холестерические жидкие кристаллы или твист-ячейки нематических жидких кристаллов.

Проблема распространения электромагнитных волн в киральных средах исследуется достаточно давно. Разработаны эффективные численные методы для расчета распространения волн в киральных жидких кристаллах [9, 10] и твист-ячейках [11]. Точное решение получено лишь для случая распространения света вдоль оси спирали [12, 13]. В случае

*E-mail: aksev@mail.ru

**E-mail: evkryu@mail.ru

***E-mail: V.Romanov@pobox.spbu.ru

наклонного падения, для систем с шагом спирали порядка или меньше длины световой волны разработаны приближенные методы [6, 14], основанные на теореме Флоке и методах теории дифракции, эффективность которых подтверждена в многочисленных экспериментальных работах. Это приближение является основным при изучении распространения волн в киральных системах до настоящего времени [15, 16].

Проблема распространения волн в киральных средах с шагом спирали, большим длины световой волны, в последнее время стала особенно актуальной в связи с широким применением твист-ячеек в устройствах отображения информации. В этом случае оказывается возможным использовать методы типа Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) (см., например, [17]). Для задачи о распространении электромагнитных волн в локально изотропных средах с плавными неоднородностями проблема была решена в работах [18, 19]. В случае киральных систем усложняющим фактором является наличие оптической анизотропии. С оптической точки зрения эти объекты представляют собой одноосные кристаллы с периодически меняющимся в пространстве направлением оптической оси. Для таких систем задача о распространении волн в приближении ВКБ была решена в работе [20]. Здесь свет распространяется в адиабатическом режиме — имеется две нормальные волны, локально обыкновенная и локально необыкновенная, векторы поляризаций которых определяются локальными направлениями оптической оси и волнового вектора в данной точке. При этом сохраняется компонента волнового вектора, перпендикулярная к оси спирали, а его длина (волновое число) определяется из локального дисперсионного уравнения.

Однако в киральных средах есть области, для которых описание распространения волн в рамках ВКБ-приближения оказывается недостаточным. В частности, экспериментально был обнаружен эффект разворота необыкновенного луча в твист-ячейке холестерического жидкого кристалла [21]. Для описания этого эффекта требуется более детальный анализ возникающих в киральных системах волновых каналов и запрещенных зон.

В настоящей работе основное внимание уделяется последовательному описанию прохождения волн через запрещенные зоны (эффект просачивания) и расчету коэффициентов прохождения и отражения в зависимости от углов падения волн на среду. Для решения этой задачи были использованы векторный аналог метода ВКБ и метод эталонного уравнения

в окрестности точек поворота. Вдали от точек поворота нормальные волны среды — это невзаимодействующие обыкновенные и необыкновенные волны. Вблизи точек поворота эти волны начинают взаимодействовать и требуется рассматривать поле световой волны единым образом.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 приведены общие уравнения, описывающие распространение света в периодической среде, кратко приведено обобщение метода ВКБ на векторный случай и анализируются типы особых точек. В разд. 3 рассматривается процесс просачивания волн через широкие запрещенные зоны и исследуется процесс их взаимной трансформации. Раздел 4 посвящен детальному анализу предельного случая запрещенной зоны нулевой ширины. В разд. 5 приведены приближенное рассмотрение узких запрещенных зон и расчет коэффициентов отражения и прохождения волн. В Заключении проводится общий анализ полученных результатов и обсуждаются возможности экспериментального наблюдения рассмотренных эффектов.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ В КИРАЛЬНЫХ СРЕДАХ

В киральном жидком кристалле (ЖК) направление преимущественной ориентации длинных осей молекул задается единичным вектором директора \mathbf{n}^0 . Будем рассматривать плоско-параллельную твист-ячейку ЖК. В этом случае направление вектора директора вращается относительно некой оси, образуя спираль. Удобно ввести декартову систему координат таким образом, чтобы ось спирали совпала с осью z , ортогональной плоскости пластинки, а вектор директора вращался в плоскости xy с изменением z :

$$\mathbf{n}^0(z) = (\cos(qz + \phi_0), \sin(qz + \phi_0), 0), \quad (2.1)$$

где угол ϕ_0 определяет направление вектора директора на плоскости $z = 0$, $q = 2\pi/p$, p — шаг спирали. Отметим, что направления $\mathbf{n}^0(z)$ и $-\mathbf{n}^0(z)$ эквивалентны и поэтому $p/2$ характеризует период оптических свойств в твист-ячейке ЖК.

Оптические свойства жидкого кристалла определяются локально-одноосным тензором диэлектрической проницаемости [12]

$$\varepsilon_{lk}(z) = \varepsilon_{\perp} \delta_{lk} + \varepsilon_a n_l^0(z) n_k^0(z), \quad l, k = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Здесь $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$, а ε_{\parallel} и ε_{\perp} — диэлектрические проницаемости соответственно вдоль и поперек \mathbf{n}^0 .

Среды с $\varepsilon_a > 0$ и $\varepsilon_a < 0$ рассматриваются сходным образом. Однако в некоторых случаях возникают отличия, на которые мы будем обращать внимание.

Система уравнений Максвелла имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= ik_0 \hat{\mu} \mathbf{H}(\mathbf{r}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -ik_0 \hat{\varepsilon}(z) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — векторы напряженности электрического и магнитного полей, $k_0 = \omega/c$, ω — круговая частота, c — скорость света в вакууме, $\hat{\mu}$ — тензор магнитной проницаемости. Будем рассматривать немагнитную среду, т. е. $\mu_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Нас будет интересовать поле в киральной среде, когда шаг спирали значительно больше длины световой волны. Будем решать уравнения Максвелла методом ВКБ, ограничиваясь нулевым и первым приближениями. Нулевое приближение эквивалентно методу эйконала для волнового уравнения. Оно позволяет определять фазу волны и ее поляризацию. Первое приближение ВКБ аналогично уравнению переноса и позволяет найти амплитуду поля. Кроме того, нас будут интересовать области, в которых происходит взаимная трансформация мод. В этих областях метод ВКБ неприменим и мы будем использовать метод эталонного уравнения.

Ввиду того, что тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(z)$ есть функция только переменной z , удобно перейти в (\mathbf{k}_\perp, z) -представление. Выполним преобразование Фурье по поперечным переменным:

$$F(\mathbf{k}_\perp, z) = \int d\mathbf{r}_\perp F(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp). \quad (2.4)$$

Без ограничения общности можно выбрать систему координат так, чтобы направление вектора \mathbf{k}_\perp совпадало с осью x , т. е. $\mathbf{k}_\perp = (k_\perp, 0, 0)$. Далее, переходя к новой переменной $\xi = qz + \phi_0$ и исключая H_z и E_z , получаем

$$\begin{aligned} \partial_\xi \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ -H_y \end{pmatrix} &= -i\Omega \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon_{xy}(\xi) & \varepsilon_{yy}(\xi) + \varepsilon_\perp(\alpha - 1) & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xx}(\xi) & \varepsilon_{xy}(\xi) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ -H_y \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \alpha = 1 - \frac{k_\perp^2}{k_0^2 \varepsilon_\perp}, \quad \Omega = \frac{k_0}{q} = \frac{p}{\lambda},$$

$\lambda = 2\pi/k_0$ — длина волны.

Систему (2.5) можно формально записать как уравнение для четырехкомпонентного вектора-столбца $\Phi(\xi)$:

$$\partial_\xi \Phi(\xi) = i\Omega \hat{A}(\xi) \Phi(\xi). \quad (2.6)$$

Для решения системы (2.6) с начальными условиями вида $\Phi_0 = \Phi(\xi_0)$ удобно ввести матрицу эволюции $\hat{M}(\xi, \xi_0)$. В этом случае

$$\Phi(\xi) = \hat{M}(\xi, \xi_0) \Phi(\xi_0). \quad (2.7)$$

Матрица $\hat{M}(\xi, \xi_0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, аналогичному (2.6),

$$\partial_\xi \hat{M}(\xi, \xi_0) = i\Omega \hat{A}(\xi) \hat{M}(\xi, \xi_0) \quad (2.8)$$

и начальному условию $\hat{M}(\xi_0, \xi_0) = \hat{I}$.

В дальнейшем будем считать Ω большим параметром. В этом случае можно применить метод последовательной диагонализации и построить решение системы (2.8) в виде ряда по обратным степеням параметра Ω . Эта процедура описана в Приложении А. Используя результаты, полученные в Приложении А, построим решение для компонент поля E_x и E_y в ВКБ-приближении. Получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}^{(o)\pm} &= \frac{C^{(o)\pm}}{\lambda_1^{1/2}(\alpha + (1 - \alpha) \sin^2 \xi)^{1/2}} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \sin \xi \\ -\cos \xi \end{pmatrix} \exp[\pm i\Omega \lambda_1(\xi - \xi_0)], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}^{(e)\pm} &= \frac{C^{(e)\pm}}{\lambda_2^{1/2}(\xi)(\alpha + (1 - \alpha) \sin^2 \xi)^{1/2}} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \alpha \cos \xi \\ \sin \xi \end{pmatrix} \exp\left[\pm i\Omega \int_{\xi_0}^{\xi} \lambda_2(\xi') d\xi'\right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\alpha \varepsilon_\perp}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\alpha \varepsilon_\parallel + (1 - \alpha) \varepsilon_a \sin^2 \xi}, \\ \lambda_3 &= -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

— собственные значения матрицы $\hat{A}(\xi)$, $C^{(o)\pm}$ и $C^{(e)\pm}$ — константы, зависящие от выбора начальных условий. Компонента E_z находится из соотношения

$$\operatorname{div} \hat{\varepsilon} \mathbf{E} = 0, \quad (2.12)$$

обозначения (*o*) и (*e*) указывают тип волны — обыкновенная и необыкновенная, знаки «±» соответствуют волнам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси *z*.

В векторной форме уравнения (2.9)–(2.12) можно записать в виде

$$\mathbf{E}^{(j)\pm} = A^{(j)\pm}(\mathbf{k}_\perp, z, z_0) \mathbf{e}^{(j)\pm}(\mathbf{k}_\perp, z) \times \exp \left[i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp \pm i \int_{z_0}^z k_z^{(j)}(\mathbf{k}_\perp, z) dz \right], \quad (2.13)$$

где (*j*) принимает значения (*o*) или (*e*), $A^{(j)\pm}(\mathbf{k}_\perp, z, z_0)$ — зависящая от *z* амплитуда волны, $\mathbf{e}^{(j)\pm}(\mathbf{k}_\perp, z)$ — единичный вектор поляризации,

$$k_z^{(o)} = k_0 \lambda_1, \quad k_z^{(e)} = k_0 \lambda_2. \quad (2.14)$$

В приближении геометрической оптики вектор поляризации обыкновенной волны $\mathbf{e}^{(o)}$ ортогонален плоскости, содержащей векторы $\mathbf{k}^{(o)}$ и \mathbf{n}^0 . Вектор поляризации необыкновенной волны $\mathbf{e}^{(e)}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{k}^{(e)}$ и \mathbf{n}^0 , а его направление задается условием $\hat{\epsilon} \mathbf{e}^{(e)} \perp \mathbf{k}^{(e)}$. Нетрудно проверить, что поляризации волн в уравнениях (2.13) удовлетворяют описанным условиям в каждой точке.

Как известно, решение системы уравнений (2.3) для однородной среды с одноосным тензором диэлектрической проницаемости дает четыре плоские электромагнитные волны: две обыкновенные и две необыкновенные,

$$\mathbf{E}^{(j)\pm} = E_0 \mathbf{e}^{(j)\pm} \exp(i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp \pm i k_z^{(j)} z). \quad (2.15)$$

Коэффициенты преломления для этих волн определяются соотношениями

$$n^{(o)} = \sqrt{\epsilon_\perp}, \quad n^{(e)} = \sqrt{\frac{\epsilon_\perp \epsilon_\parallel}{\epsilon_\parallel \cos^2 \theta + \epsilon_\perp \sin^2 \theta}}, \quad (2.16)$$

где $n^{(o)}$, $n^{(e)}$ — коэффициенты преломления соответственно обыкновенной и необыкновенной волн, θ — угол между волновым вектором \mathbf{k} и направлением оптической оси кристалла \mathbf{n}^0 .

Обратим внимание, что решение системы (2.13), полученное в ВКБ-приближении, фактически представляет собой квазиплоскую волну, параметры которой локально совпадают с параметрами волн в однородной одноосной среде. Для обыкновенной волны показатель преломления такой же, как в однородной среде, а для необыкновенной волны зависит от *z*.

Полученные волны (2.13) будут бегущими только в случае вещественных $\lambda_{1,2}$. Распространение волн в

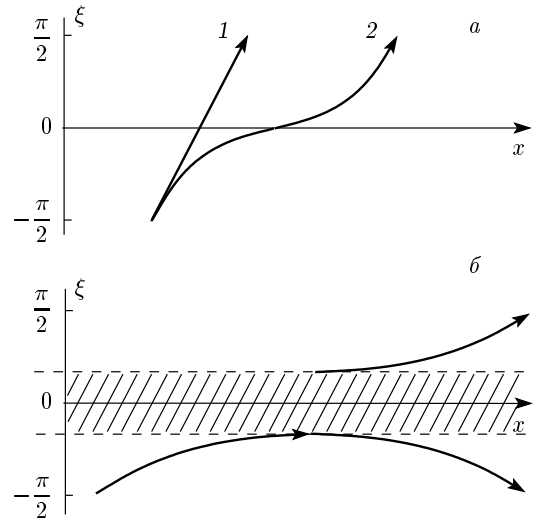


Рис. 1. Проекция траектории необыкновенного луча на плоскость *xz* и траектория обыкновенного луча в киральной среде при разных углах падения: *a* — проходящие обыкновенные (1) и необыкновенные (2) лучи для $\epsilon_a > 0$, *b* — случай запрещенной зоны (заштрихованная область) для необыкновенного луча

среде зависит от значения поперечной компоненты волнового вектора k_\perp . Рассмотрим сначала случай $\epsilon_a > 0$. В этом случае k_\perp может меняться в пределах $0 \leq k_\perp^2 \leq k_0^2 \epsilon_\parallel$. Проанализируем поведение $k_z^{(o)}$ и $k_z^{(e)}$ в зависимости от k_\perp . Удобнее это делать в терминах параметра α , который принимает значения $-\epsilon_a/\epsilon_\perp \leq \alpha \leq 1$. Из (2.11) видно, что при

$$0 < \alpha \leq 1 \quad (0 \leq k_\perp^2 < k_0^2 \epsilon_\perp)$$

подкоренные выражения в формулах для λ_1 и λ_2 положительны при любых ξ , и обе волны будут распространяться на всем протяжении твист-ячейки (рис. 1*a*). При

$$-\epsilon_a/\epsilon_\perp \leq \alpha < 0 \quad (k_0^2 \epsilon_\perp \leq k_\perp^2 < k_0^2 \epsilon_\parallel)$$

подкоренное выражение для λ_1 отрицательно при любых значениях ξ , а для λ_2 подкоренное выражение отрицательно в некоторой области значений ξ . Тогда значение $k_z^{(o)}$ чисто мнимое и обыкновенная волна будет затухающей на всем протяжении твист-ячейки. Для необыкновенной волны экспоненциальное затухание будет иметь место не на всем протяжении твист-ячейки, а лишь в области, где $k_z^{(e)}$ является чисто мнимым (рис. 1*b*). Внутри этой области распространение бегущей в направлении оси ξ волны невозможно, поэтому такая область представляет собой запрещенную зону. Из формулы (2.11)

следует, что запрещенная зона определяется неравенством

$$\sin^2 \xi \leq -\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_a}. \quad (2.17)$$

В случае равенства выражение (2.17) дает точки, где $k_z^{(e)} = 0$, т. е. волновой вектор направлен вдоль оси x . Здесь происходит поворот необыкновенной волны.

В случае $\varepsilon_a < 0$ поперечная компонента волнового вектора k_{\perp} может меняться в пределах $0 \leq k_{\perp}^2 \leq k_0^2 \varepsilon_{\perp}$. Параметр α при этом принимает значения $0 \leq \alpha \leq 1$. В этом случае значение $k_z^{(o)}$ вещественно при любых ξ и α , и обыкновенная волна может распространяться на всем протяжении твист-ячейки. Необыкновенная волна будет распространяться на всем протяжении твист-ячейки только для

$$-\varepsilon_a/\varepsilon_{\perp} < \alpha \leq 1 \quad (0 \leq k_{\perp}^2 < k_0^2 \varepsilon_{\parallel}).$$

В случае же

$$0 \leq \alpha < -\varepsilon_a/\varepsilon_{\perp} \quad (k_0^2 \varepsilon_{\parallel} < k_{\perp}^2 \leq k_0^2 \varepsilon_{\perp})$$

образуется запрещенная зона, определяемая неравенством

$$\sin^2 \xi \geq -\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_a}. \quad (2.18)$$

Заметим, что в случае $\varepsilon_a < 0$ запрещенная зона меняется местами с областью распространения по сравнению со случаем $\varepsilon_a > 0$.

Проведенные рассуждения основаны на выражениях для поля, полученных в ВКБ-приближении. Однако, если собственные значения λ_l сближаются, то амплитуды полученных решений обращаются в бесконечность, и условие применимости метода ВКБ (А.13) нарушается. При вырождении собственных значений различие между соответствующими им волнами исчезает, и в окрестности точки вырождения возможна взаимная трансформация мод, т. е. перераспределение энергии между волнами.

Как видно из формулы (2.11), точки вырождения ($\lambda_2 = \lambda_4$) находятся из соотношения

$$\sin^2 \xi_* = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_a}. \quad (2.19)$$

В этих точках $\lambda_{2,4}(\xi_*) = 0$. Это означает, что волновой вектор направлен по оси x . Поскольку собственные значения λ_2 и λ_4 характеризуют распространение необыкновенных волн, в окрестности ξ_* происходит взаимодействие между падающей и отраженной необыкновенными волнами. Далее такой тип взаимодействия будем обозначать как $e^+ - e^-$. Окрестность,

где происходит это взаимодействие, согласно (А.13), задается неравенством

$$|\xi - \xi_*| \lesssim \Omega^{-2/3}. \quad (2.20)$$

В случае $\varepsilon_a > 0$ возможно также вырождение типа $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\lambda_3 = \lambda_4$. Оно происходит в точках, удовлетворяющих условию

$$\sin^2 \xi_{**} = -\alpha/(1-\alpha). \quad (2.21)$$

Здесь попарно взаимодействуют обыкновенная (o) и необыкновенная (e) волны. Далее такой тип взаимодействия будем обозначать как $e-o$. Область этого взаимодействия ограничена условием

$$|\xi - \xi_{**}| \lesssim \Omega^{-1/2}. \quad (2.22)$$

В случае $\varepsilon_a < 0$ не существует дополнительных точек поворота внутри запрещенной зоны, поскольку уравнение вида $\lambda_1 = \lambda_2$ дает единственное решение при $\alpha = 0$. Этот случай соответствует распространению обыкновенной и необыкновенной волн поперек оси z и не представляет для нас особого интереса.

3. ПРОСАЧИВАНИЕ В СЛУЧАЕ ШИРОКИХ ЗАПРЕЩЕННЫХ ЗОН

Рассмотрим случай широких запрещенных зон. Для таких зон затухание волн будет очень сильным, и с экспериментальной точки зрения этот случай, возможно, не является самым интересным. Однако, как будет показано, для широких запрещенных зон удастся описать поведение волн в окрестностях всех особых точек. Это позволит в дальнейшем рассматривать более интересные с точки зрения эксперимента случаи, опираясь на полученные в этом разделе точные результаты.

Рассмотрим сначала случай $\varepsilon_a > 0$ и пологое падение световой волны ($\alpha < 0$). Здесь и далее будем рассматривать один период ЖК, ограниченный плоскостями $\xi = -\pi/2$ и $\xi = \pi/2$. В этом случае уравнения (2.19) и (2.21) имеют по два решения. Взаимодействие мод происходит в окрестностях четырех точек вырождения (точек поворота), показанных на рис. 2. Будем считать, что запрещенные зоны такие широкие, что между точками поворота, показанными на рис. 2 как точки 1–4, существуют области применимости ВКБ-приближения.

Сложность анализа распространения волн в окрестности точек поворота заключается в том, что здесь невозможно описывать поле как набор квази-плоских обыкновенных и необыкновенных волн с

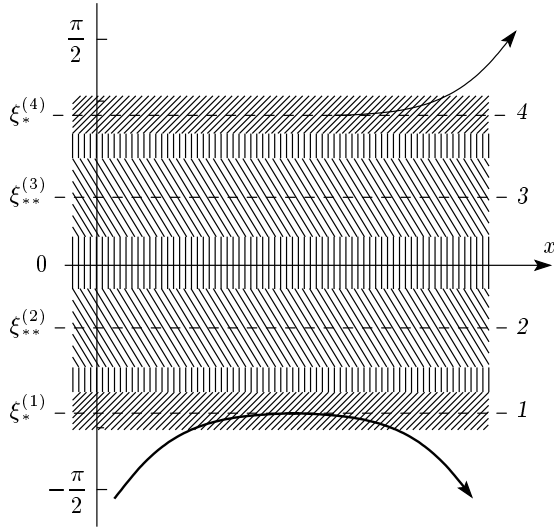


Рис. 2. Структура широкой запрещенной зоны для $\varepsilon_a > 0$. В областях 1 и 4 имеет место взаимодействие двух необыкновенных волн, в областях 2 и 3 попарно взаимодействуют необыкновенные и обыкновенные волны. Вертикальной штриховкой показаны области применимости метода ВКБ

плавно меняющимися параметрами. Вблизи точек поворота поле находится как решение эталонного уравнения. Для получения поля во всей области, включая точку поворота, необходимо сшивать решения ВКБ и решение эталонного уравнения.

В дальнейшем вместо анализа системы уравнений (2.5) нам удобно рассмотреть систему уравнений для компонент вектора напряженности электрического поля. Волновое уравнение для вектора \mathbf{E} записывается как

$$(\text{rot rot} - k_0^2 \hat{\varepsilon}(z))\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.1)$$

откуда в (\mathbf{k}_\perp, z) -представлении имеем

$$\begin{cases} \partial_\xi^2 E_x - i\Omega \frac{k_\perp}{k_0} \partial_\xi E_z + \Omega^2 \varepsilon_{xx} E_x + \\ \quad + \Omega^2 \varepsilon_{xy} E_y = 0, \\ \partial_\xi^2 E_y + \Omega^2 \varepsilon_{xy} E_x + \Omega^2 \left(\varepsilon_{yy} - \frac{k_\perp^2}{k_0^2} \right) E_y = 0, \\ -i\Omega \frac{k_\perp}{k_0} \partial_\xi E_x + \Omega^2 \varepsilon_\perp \alpha E_z = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Рассмотрим поле в окрестности точки поворота $\xi_*^{(1)}$,

$$\sin \xi_*^{(1)} = -\sqrt{-\frac{\alpha \varepsilon_\parallel}{(1-\alpha)\varepsilon_a}}.$$

Если исключить компоненту E_z , то система (3.2) принимает вид

$$\begin{cases} \partial_\xi^2 E_x + \alpha \Omega^2 \varepsilon_{xx} E_x + \alpha \Omega^2 \varepsilon_{xy} E_y = 0, \\ \partial_\xi^2 E_y + \Omega^2 \left(\varepsilon_{yy} - \frac{k_\perp^2}{k_0^2} \right) E_y + \Omega^2 \varepsilon_{xy} E_x = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Решение этой системы в окрестности точки поворота $\xi_*^{(1)}$ приведено в Приложении В. Оно представляет собой линейную комбинацию функций Ханкеля. Также в Приложении В получены асимптотики решения в окрестности точки поворота при $|\xi - \xi_*^{(1)}| \gg \Omega^{-2/3}$. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_< &= \sqrt{\frac{3}{\pi}} \times \\ &\times \frac{v^{-1/12}}{(\xi_*^{(1)} - \xi)^{1/4} \Omega^{1/6} (\alpha + (1-\alpha) \sin^2 \xi_*^{(1)})^{1/2}} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \alpha \cos \xi_*^{(1)} \\ \sin \xi_*^{(1)} \end{pmatrix} \times \\ &\times \left[A_{<}^{(1)} \exp\left(\frac{2i}{3} v^{1/2} \Omega (\xi_*^{(1)} - \xi)^{3/2} - \frac{5i\pi}{12}\right) + \right. \\ &\left. + B_{<}^{(1)} \exp\left(-\frac{2i}{3} v^{1/2} \Omega (\xi_*^{(1)} - \xi)^{3/2} - \frac{5i\pi}{12}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_> &= \sqrt{\frac{3}{\pi}} \times \\ &\times \frac{v^{-1/12}}{(\xi - \xi_*^{(1)})^{1/4} \Omega^{1/6} (\alpha + (1-\alpha) \sin^2 \xi_*^{(1)})^{1/2}} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \alpha \cos \xi_*^{(1)} \\ \sin \xi_*^{(1)} \end{pmatrix} \times \\ &\times \left[A_{>}^{(1)} \exp\left(-\frac{2}{3} v^{1/2} \Omega (\xi - \xi_*^{(1)})^{3/2} - \frac{5i\pi}{12}\right) + \right. \\ &\left. + B_{>}^{(1)} \exp\left(\frac{2}{3} v^{1/2} \Omega (\xi - \xi_*^{(1)})^{3/2} + \frac{5i\pi}{12}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$v = 2\sqrt{-\alpha \varepsilon_\parallel (\varepsilon_a + \alpha \varepsilon_\perp)},$$

$A_{<}^{(1)}, B_{<}^{(1)}, A_{>}^{(1)}, B_{>}^{(1)}$ — константы.

Область применимости (2.20) ВКБ-решений пересекается с областью применимости решения в окрестности точки поворота. Эта область пересечения определяется неравенствами

$$\Omega^{-2/3} \ll |\xi - \xi_*^{(1)}| \ll 1.$$

В этой области можно выполнить сшивание решений: асимптотики ВКБ-решений при $|\xi - \xi_*^{(1)}| \ll 1$ должны совпадать с асимптотиками решения в окрестности точки поворота при $|\xi - \xi_*^{(1)}| \gg \Omega^{-2/3}$.

Разложим решения ВКБ (2.10) в ряд в окрестности $\xi_*^{(1)}$. Получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_{<}^{(e)\pm} &= \\ &= \frac{C_{<}^{(e)\pm}}{(v(\xi_*^{(1)} - \xi))^{1/4}(\alpha + (1 - \alpha) \sin^2 \xi_*^{(1)})^{1/2}} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \alpha \cos \xi_*^{(1)} \\ \sin \xi_*^{(1)} \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \exp \left[\pm i\Omega \left(\int_{\xi_0}^{\xi_*^{(1)}} \lambda_2 d\xi' - v^{1/2} \frac{2}{3} (\xi_*^{(1)} - \xi)^{3/2} \right) \right], \\ &\quad \xi < \xi_*^{(1)}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_{1}^{(e)\pm} &= \\ &= \frac{C_1^{(e)\pm}}{(-v(\xi - \xi_*^{(1)}))^{1/4}(\alpha + (1 - \alpha) \sin^2 \xi_*^{(1)})^{1/2}} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \alpha \cos \xi_*^{(1)} \\ \sin \xi_*^{(1)} \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \exp \left[\pm i\Omega \left(i \int_{\xi_0}^{\xi_*^{(1)}} \lambda_2 d\xi' - v^{1/2} \frac{2}{3} (\xi - \xi_*^{(1)})^{3/2} \right) \right], \\ &\quad \xi > \xi_*^{(1)}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Здесь индекс «<» у компонент поля и констант относится к значениям левее первой точки поворота в области применимости ВКБ-приближения, а индекс «1» — к значениям правее первой точки поворота в области применимости ВКБ-приближения; $C_1^{(e)+}$ и $C_1^{(e)-}$ — константы, описывающие амплитуды ВКБ-решений после прохода окрестности первой точки поворота. Приравнивая асимптотики, можно получить формулы связи для констант $C^{(e)+}$ и $C^{(e)-}$ по разные стороны от точки поворота. Заметим, что значения этих амплитуд не обязаны совпадать. Это связано с взаимной трансформацией мод, возникающей при сближении волновых векторов двух волн. Приравнивая асимптотики ВКБ-решений и решения в окрестности точки поворота, получим формулы связи

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_{<}^{(e)-} \\ C_1^{(e)+} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \exp \left(2s - \frac{i\pi}{2} \right) & \exp \left(-\frac{i\pi}{4} \right) \\ \exp \frac{i\pi}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} C_{<}^{(e)+} \\ C_1^{(e)-} \end{pmatrix}, \quad (3.8) \end{aligned}$$

где

$$s = i\Omega \int_{\xi_0}^{\xi_*^{(1)}} \lambda_2 d\xi'.$$

Это выражение описывает связь амплитуд ВКБ-решений по разные стороны от точки поворота $\xi = \xi_*^{(1)}$. Как видно, взаимодействие мод проявляется в том, что амплитуда отраженной волны $C_{<}^{(e)-}$ начинает зависеть от двух амплитуд $C_{<}^{(e)+}$ и $C_1^{(e)-}$. Заметим, что здесь амплитуды $C_1^{(e)+}$ и $C_1^{(e)-}$ отвечают экспоненциально затухающему и экспоненциально растущему решениям, проникшим внутрь запрещенной зоны. Вне окрестности точки поворота эти затухающие решения описываются ВКБ-приближением.

Внутри запрещенной зоны существуют еще две точки поворота вида (2.21) (точки 2 и 3 на рис. 2), дающие взаимную трансформацию необыкновенной и обыкновенной мод. Окрестности этих точек поворота, в которых нарушается ВКБ-приближение, задаются условием (2.22). В точках ξ_{**} происходит парное вырождение волн типа $e-o$.

Рассмотрим взаимодействие волн, распространяющихся в положительном направлении по ξ , т. е. взаимодействие мод типа $(e)+$ и $(o)+$, в окрестности точки

$$\sin \xi_{**}^{(2)} = -\sqrt{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Построение решения в окрестности точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$ аналогично процедуре, изложенной в Приложении В, поэтому мы не будем подробно рассматривать эту точку поворота, а лишь остановимся на отличиях от рассмотренного ранее случая. Удобно сделать замену

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} &= \exp \left[i\Omega \sqrt{\alpha \varepsilon_{\perp}} \left(\xi - \xi_{**}^{(2)} \right) \right] \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \alpha \cos \xi_{**}^{(2)} & 0 \\ 0 & \sin \xi_{**}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \quad (3.9) \end{aligned}$$

и ввести растянутую переменную $\rho = \Omega^{1/2}(\xi - \xi_{**}^{(2)})$. Решение для функции $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$ этого уравнения ищется в виде ряда по степеням $\Omega^{-1/2}$. В нулевом приближении это решение имеет вид

$$\mathbf{g}_0 = \gamma(\rho)\chi_1, \quad \chi_1 = (1, 1)^T,$$

где функция $\gamma(\rho)$ зависит от знака ρ :

$$\begin{aligned} \gamma_{>,<}(\rho) = & \sqrt{|\rho|} \exp\left(\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_\perp}} \rho^2\right) \times \\ & \times \left[A_{>,<}^{(2)} I_{1/4}\left(\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_\perp}} |\rho|^2\right) + \right. \\ & \left. + B_{>,<}^{(2)} K_{1/4}\left(\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_\perp}} |\rho|^2\right) \right], \quad (3.10) \end{aligned}$$

где $I_\nu(u)$ и $K_\nu(u)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и второго рода, $A_{>,<}^{(2)}$ и $B_{>,<}^{(2)}$ — константы, отвечающие решениям для положительных и отрицательных значений ρ . Соотношения между константами найдем из условия непрерывности поля и его производной в точке $\xi_{**}^{(2)}$.

Теперь проведем сшивание решений в окрестности точки поворота с ВКБ-решениями. Асимптотики модифицированных функций Бесселя имеют вид

$$\begin{aligned} I_{1/4}\left(\frac{1}{4} au^2\right) &= \frac{1}{u} \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \times \\ &\times \exp\left(\frac{1}{4} au^2\right) [1 + O(u^{-2})], \\ K_{1/4}\left(\frac{1}{4} au^2\right) &= \frac{1}{u} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{4} au^2\right) [1 + O(u^{-2})]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Поведение решения (3.10) при $|\rho| \gg 1$ в старшем порядке имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_{>,<}^{(2)} &= \frac{\varepsilon_\perp^{1/4} \exp[i\Omega \sqrt{\alpha \varepsilon_\perp} (\xi - \xi_{**}^{(2)})]}{\varepsilon_a^{1/2} \Omega^{1/4} |\xi - \xi_{**}^{(2)}|^{-1/2}} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} A_{>,<}^{(2)} \exp\left[\frac{1}{2} \Omega \frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_\perp}} (\xi - \xi_{**}^{(2)})^2\right] + \sqrt{2\pi} B_{>,<}^{(2)} \right\} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \alpha \cos \xi_{**}^{(2)} \\ \sin \xi_{**}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Здесь индекс (2) у поля обозначает окрестность точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$. Решение ВКБ в окрестности точки $\xi_{**}^{(2)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_{<,>}^{(o)+} &= \frac{C_{<,>}^{(o)+}}{(\alpha \varepsilon_\perp)^{1/4} [-2i\alpha^{1/2} (\xi - \xi_{**}^{(2)})]^{1/2}} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \sin \xi_{**}^{(2)} \\ -\cos \xi_{**}^{(2)} \end{pmatrix} \exp[i\Omega \sqrt{\alpha \varepsilon_\perp} (\xi - \xi_0)]. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Здесь индекс «<>» у компонент поля и констант относится к значениям левее точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$ в области применимости ВКБ-приближения, а индекс «2» — к значениям правее точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$ в области применимости ВКБ-приближения. Также имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}_{1,2}^{(e)+} &= \frac{C_{1,2}^{(e)+}}{(\alpha \varepsilon_\perp)^{1/4} [-2i\alpha^{1/2} (\xi - \xi_{**}^{(2)})]^{1/2}} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \alpha \cos \xi_{**}^{(2)} \\ \sin \xi_{**}^{(2)} \end{pmatrix} \exp\left[i\Omega \int_{\xi_0}^{\xi_{**}^{(2)}} \lambda_2 d\xi + i\Omega \sqrt{\alpha \varepsilon_\perp} (\xi - \xi_0) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \Omega \frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_\perp}} (\xi - \xi_{**}^{(2)})^2 \right]. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Здесь индекс «1» у компонент поля и констант относится к значениям между точками поворота $\xi_*^{(1)}$ и $\xi_{**}^{(2)}$ в области применимости ВКБ-приближения, а индекс «2» — к значениям правее точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$ в области применимости ВКБ-приближения.

Сравнение асимптотик ВКБ-решения и решения в окрестности точки поворота показывает, что $I_{1/4}(u)$ описывает распространение необыкновенной волны, а $K_{1/4}(u)$ — обыкновенной.

Теперь запишем связь амплитуд ВКБ-решений по обе стороны точки поворота $\xi_{**}^{(2)}$:

$$\begin{pmatrix} C_2^{(e)+} \\ C_2^{(o)+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\frac{i\pi}{2} & -2^{1/2} \alpha^{-1/2} \exp\left\{ i\Omega \left[\sqrt{\alpha \varepsilon_\perp} (\xi_{**}^{(2)} - \xi_0) - \int_{\xi_0}^{\xi_{**}^{(2)}} \lambda_2 d\xi \right] \right\} \\ 0 & \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{(e)+} \\ C_1^{(o)+} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Вклад обыкновенной волны в необыкновенную определяется экспоненциальным множителем в (3.15). Величина этого множителя зависит от разности интервалов, на которых затухает каждая из волн. Необыкновенная волна затухает от точки $\xi_*^{(1)}$

до точки $\xi_{**}^{(2)}$, а обыкновенная — от ξ_0 до $\xi_{**}^{(2)}$. Поэтому вклад обыкновенной волны в необыкновенную может быть значителен, только если область распространения необыкновенной волны достаточно узкая, т. е. разность $\xi_0 - \xi_*^{(1)}$ мала.

Аналогичным образом можно описать взаимодействие волн $(e)-$ и $(o)-$ в окрестности точки $\xi_{**}^{(2)}$, а также построить решение и получить формулы связи для симметричных точек поворота $\xi_{**}^{(3)}$ и $\xi_*^{(4)}$. Мы не будем здесь приводить формулы связи для этих точек. Вместо этого дадим качественное описание прохождения необыкновенной волны через запрещенную зону.

Заметим, что наиболее интересным с практической точки зрения является случай, когда на среду падает необыкновенная волна, проникающая в запрещенную зону, а экспоненциально затухающая обыкновенная волна отсутствует или ею можно пренебречь ($C_{<}^{(o)+} = 0$). В этом случае сначала происходит взаимодействие волн $(e)+$ и $(e)-$ в точке $\xi_*^{(1)}$. Появляются отраженная необыкновенная волна и экспоненциально затухающая прошедшая необыкновенная волна. Согласно формулам связи (3.8), прошедшая волна приобретет фазовый сдвиг $\pi/4$. Далее на пути прошедшей необыкновенной волны встретится точка поворота $\xi_{**}^{(2)}$. В окрестности этой точки, согласно формулам связи (3.15), необыкновенная волна приобретет фазовый сдвиг $\pi/2$. Обыкновенная волна не появится, так как $C_{<}^{(o)+} = 0$. Далее на пути волны возникает симметричная точка поворота $\xi_{**}^{(3)}$. В окрестности этой точки необыкновенная волна получает фазовый сдвиг $-\pi/2$. Таким образом, влияние точек поворота вида ξ_{**} на необыкновенную волну никак не проявляется, поскольку фазовые сдвиги компенсируются. В точке поворота $\xi_{**}^{(3)}$ из необыкновенной волны рождается экспоненциально затухающая обыкновенная волна, которая не представляет для нас интереса, поскольку она не может превратиться в бегущую. В заключение необыкновенная волна встречает симметричную точку поворота $\xi_*^{(4)}$, в которой взаимодействуют волны $(e)+$ и $(e)-$. В результате при проходе окрестности точки поворота $\xi_*^{(4)}$ возникает бегущая волна. При этом происходит обратное изменение фазы на $-\pi/4$. Таким образом, прохождение запрещенной зоны не дает изменения фазы необыкновенной волны. Изменение амплитуды необыкновенной волны определяется вещественным отрицательным показателем экспоненты (2.10) внутри запрещенной зоны. Коэффициент прохождения необыкновенной волны можно записать в виде

$$W = \exp \left(-\Omega \int_{\xi_*^{(1)}}^{\xi_*^{(4)}} |\lambda_2| d\xi \right). \quad (3.16)$$

Для возможности применения изложенного ме-

тода для широких запрещенных зон необходимо, чтобы все четыре точки поворота находились друг от друга на достаточном расстоянии. При выполнении этого условия вырождение собственных значений матрицы \hat{A} происходит попарно. В этом случае эталонные уравнения имеют второй порядок, а не четвертый, как было бы в случае вырождения всех четырех собственных значений матрицы \hat{A} сразу. Также для выполнения последовательной процедуры сшивания с решениями ВКБ вблизи каждой из точек поворота необходимо, чтобы между точками поворота существовали области применимости метода ВКБ. Эти условия накладывают ограничения на ширину запрещенной зоны, которая задается параметром α . Согласно формулам (2.19)–(2.22), можно сделать следующие оценки:

$$\begin{aligned} \xi_* &\approx \sqrt{-\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_a}} \gtrsim \Omega^{-2/3}, \\ \xi_{**} &\approx -\sqrt{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \gtrsim \Omega^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$-\alpha \gtrsim \frac{\varepsilon_a}{(\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} - \sqrt{\varepsilon_a})^2} \Omega^{-1}, \quad -\alpha \gtrsim \Omega^{-1}. \quad (3.18)$$

Рассмотрим поведение коэффициента затухания для значений α , определяемого неравенствами $\Omega^{-1} < -\alpha \ll 1$:

$$\begin{aligned} |W|^2 &= \\ &= \exp \left\{ -2\Omega \int_{\xi_*^{(1)}}^{\xi_*^{(4)}} |\alpha \varepsilon_{\parallel} + (1-\alpha)\varepsilon_a \sin^2 \xi|^{1/2} d\xi \right\} \approx \\ &\approx \exp \left[-2\Omega \varepsilon_a^{1/2} \int_{-\Theta}^{\Theta} (\Theta^2 + \xi^2) d\xi \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$\Theta = \sqrt{|\alpha| \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_a}}.$$

После вычисления интеграла получаем

$$|W|^2 = \exp \left(-\pi |\alpha| \Omega \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_a^{1/2}} \right). \quad (3.20)$$

Итак, выражение (3.20) дает поведение коэффициента прохождения в случае широких запрещенных зон (3.18).

В случае $\varepsilon_a < 0$ отсутствуют точки поворота типа $e-o$ и анализ поведения мод внутри запрещенной зоны значительно проще. В данном случае задача сводится к исследованию прохождения через две точки поворота типа 1 и 4 на рис. 2, между которыми имеется область применимости метода ВКБ.

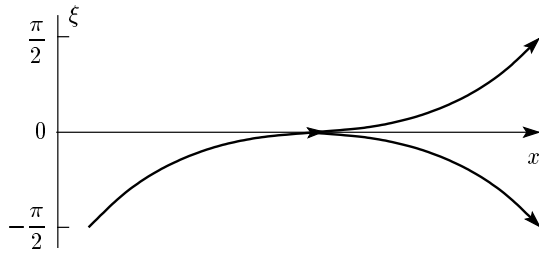


Рис. 3. Траектория предельного луча при $\varepsilon_a > 0$

4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЛУЧ

Особый интерес представляет исследование узких запрещенных зон, поскольку в этом случае экспоненциальное затухание волны мало и эффект просачивания наиболее просто наблюдать экспериментально. В этом разделе мы рассмотрим запрещенную зону нулевой ширины для сред с $\varepsilon_a > 0$, что соответствует лучу с $\alpha = 0$ (рис. 3). Луч, для которого ширина запрещенной зоны равна нулю, будем называть предельным. При $\varepsilon_a < 0$ предельному лучу соответствует $\alpha = -\varepsilon_a/\varepsilon_{\perp}$. Этот случай рассматривается аналогично предельному лучу для сред с $\varepsilon_a > 0$.

Как видно из системы уравнений (2.5), при $\alpha = 0$ компонента поля E_x является константой, $E_x = C_0$. Далее нам будет удобнее вместо системы (2.5) рассматривать уравнения для компонент E_y и E_z :

$$\begin{cases} -i\sqrt{\varepsilon_{\perp}}\partial_{\xi}E_z + \Omega\varepsilon_{xx}C_0 + \Omega\varepsilon_{xy}E_y = 0, \\ \partial_{\xi}^2E_y + \Omega^2\varepsilon_{xy}C_0 + \Omega^2\varepsilon_{yy}E_y = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Интегрируя первое уравнение этой системы, имеем

$$E_z = -i\frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} \left[C_0\xi(1+\sqrt{\varepsilon_{\perp}}\varepsilon_a) + \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}\varepsilon_a}{4}C_0 \sin 2\xi + \sqrt{\varepsilon_{\perp}}\varepsilon_a \int E_y \cos \xi \sin \xi d\xi \right] + C. \quad (4.2)$$

Система (4.1) должна удовлетворяться при любых значениях ε_{\perp} . С другой стороны, растущий вклад $C_0\xi$ не может быть скомпенсирован интегральным членом. Растущее решение не согласуется с законом сохранения энергии, поэтому следует положить $C_0 = 0$. В этом случае система (4.1) принимает вид

$$\begin{cases} \partial_{\xi}E_z + i\Omega\frac{\varepsilon_a}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}\sin \xi \cos \xi E_y = 0, \\ \partial_{\xi}^2E_y + \Omega^2\varepsilon_a \sin^2 \xi E_y = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Решение ВКБ этой системы представляет собой сум-

му трех волн, обыкновенной и двух необыкновенных,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(e)+} + \mathbf{E}^{(e)-} + \mathbf{E}^{(o)}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{E}^{(o)} = E^{(o)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{E}^{(e)\pm} = \frac{C^{(e)\pm}}{\varepsilon_a^{1/4}\sqrt{|\sin \xi|}} \exp\left(\pm i\Omega\varepsilon_a^{1/2} \int_0^{\xi} |\sin \xi'| d\xi'\right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mp \frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_{\perp}^{1/2}} \text{sign}(\sin \xi) \cos \xi \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Для предельного луча точки поворота ξ_* и ξ_{**} вырождаются в одну точку: $\xi_* = \xi_{**} = 0$. Область применимости ВКБ-приближения для точки ξ_* поглощается областью применимости для точки ξ_{**} и задается условием

$$|\xi| \gg \Omega^{-1/2}.$$

Решение в окрестности точки поворота дано в Приложении С. Приведем здесь лишь асимптотики решений (С.2), (С.3) при $\xi \rightarrow \pm\infty$:

$$E_{y,>} = \frac{2}{\varepsilon_a^{1/8}\Omega^{1/4}\sqrt{\pi|\xi|}} \times \left\{ A_{>} \exp\left[i\Omega\varepsilon_a^{1/2}\frac{\xi^2}{2} - i\frac{3\pi}{8}\right] + B_{>} \exp\left[-i\Omega\varepsilon_a^{1/2}\frac{\xi^2}{2} + i\frac{3\pi}{8}\right] \right\}, \quad (4.7)$$

$$E_{y,<} = \frac{2}{\varepsilon_a^{1/8}\Omega^{1/4}\sqrt{\pi|\xi|}} \times \left\{ A_{<} \exp\left[i\Omega\varepsilon_a^{1/2}\frac{\xi^2}{2} - i\frac{3\pi}{8}\right] + B_{<} \exp\left[-i\Omega\varepsilon_a^{1/2}\frac{\xi^2}{2} + i\frac{3\pi}{8}\right] \right\}.$$

Теперь воспользуемся ВКБ-разложением для сшивания решений. При условии $|\xi| \ll 1$ выражение для компоненты E_y в (4.6) переходит в следующие:

$$\begin{aligned}
 E_{y,>} &= C_{>}^{(e)+} \frac{1}{\varepsilon_a^{1/4} \sqrt{\xi}} \exp\left(i\Omega\varepsilon_a^{1/2} \frac{\xi^2}{2}\right) + \\
 &+ C_{>}^{(e)-} \frac{1}{\varepsilon_a^{1/4} \sqrt{\xi}} \exp\left(-i\Omega\varepsilon_a^{1/2} \frac{\xi^2}{2}\right), \\
 E_{y,<} &= C_{<}^{(e)+} \frac{1}{\varepsilon_a^{1/4} \sqrt{|\xi|}} \exp\left(-i\Omega\varepsilon_a^{1/2} \frac{\xi^2}{2}\right) + \\
 &+ C_{<}^{(e)-} \frac{1}{\varepsilon_a^{1/4} \sqrt{|\xi|}} \exp\left(i\Omega\varepsilon_a^{1/2} \frac{\xi^2}{2}\right),
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

где константы $C_{>}^{(e)\pm}$ и $C_{<}^{(e)\pm}$ относятся к ВКБ-решениям соответственно до и после точки поворота. Эти константы могут отличаться, поскольку в окрестности точки поворота происходит взаимодействие мод.

Можно заметить, что при значениях $\Omega^{-1/2} \ll \ll |\xi| \ll 1$ перекрываются области применимости асимптотик ВКБ-приближения (4.8) и асимптотик решений в окрестности точки поворота (4.7). Можно установить связь между константами в решениях ВКБ и в решениях в окрестности точки поворота. Эта связь позволяет получить соотношения между амплитудами падающих и отраженных волн:

$$\begin{aligned}
 C_{>}^{(e)+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(C_{<}^{(e)+} - iC_{>}^{(e)-} \right), \\
 C_{<}^{(e)-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-iC_{<}^{(e)+} + C_{>}^{(e)-} \right).
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Таким образом, при падении волн со стороны положительных и отрицательных ξ происходит их отражение в окрестности точки поворота, причем имеет место перераспределение энергии между волнами:

$$\begin{aligned}
 |C_{>}^{(e)+}|^2 &= \frac{1}{2} \left(|C_{<}^{(e)+}|^2 + |C_{>}^{(e)-}|^2 \right) + \\
 &+ \text{Im} \left(C_{<}^{(e)+} C_{>}^{(e)-*} \right), \\
 |C_{<}^{(e)-}|^2 &= \frac{1}{2} \left(|C_{<}^{(e)+}|^2 + |C_{>}^{(e)-}|^2 \right) - \\
 &- \text{Im} \left(C_{<}^{(e)+} C_{>}^{(e)-*} \right).
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Из выражений (4.10) следует закон сохранения энергии:

$$|C_{>}^{(e)+}|^2 + |C_{<}^{(e)-}|^2 = |C_{<}^{(e)+}|^2 + |C_{>}^{(e)-}|^2. \tag{4.11}$$

Также соотношения (4.9) показывают, что при отражении волны от запрещенной зоны происходит уменьшение фазы на $\pi/2$, в то время как волна, которая просачивается через запрещенную зону, не приобретает фазового сдвига.

Для построения решения, отвечающего компоненте поля E_z , проинтегрируем первое уравнение системы (С.1). Аналогично процедуре, проделанной для компоненты E_y , построим отдельно решения для $\zeta > 0$ и для $\zeta < 0$. Используя выражение (С.2) и выполняя интегрирование, получаем

$$\begin{aligned}
 E_{z,>} &= -i \frac{\pi^{1/2}}{2^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_{\perp}^{1/2}} \zeta^2 \times \\
 &\times \left\{ A_{>} \left[H_{1/4}^{(1)}\left(\frac{\zeta^2}{2}\right) \mathbf{H}_{-3/4}\left(\frac{\zeta^2}{2}\right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - H_{-3/4}^{(1)}\left(\frac{\zeta^2}{2}\right) \mathbf{H}_{1/4}\left(\frac{\zeta^2}{2}\right) \right] + \right. \\
 &+ B_{>} \left[H_{1/4}^{(2)}\left(\frac{\zeta^2}{2}\right) \mathbf{H}_{-3/4}\left(\frac{\zeta^2}{2}\right) - \right. \\
 &\quad \left. \left. - H_{-3/4}^{(2)}\left(\frac{\zeta^2}{2}\right) \mathbf{H}_{1/4}\left(\frac{\zeta^2}{2}\right) \right] \right\} + F_z, \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

где F_z — константа, дающая вклад в амплитуду обыкновенной волны, $\mathbf{H}_{\nu}(u)$ — функция Струве. Для случая $\zeta < 0$ в выражении (4.12) достаточно заменить величины $A_{>}$, $B_{>}$ на $A_{<}$, $B_{<}$. Связь между константами $A_{>}$, $B_{>}$, $A_{<}$, $B_{<}$ определяется выражениями (С.4). Для компоненты поля E_z также должны соблюдаться условия непрерывности в нуле самой функции и ее производной. Как видно из формулы (4.12), непрерывность соблюдается, если для $\zeta > 0$ и $\zeta < 0$ в качестве константы интегрирования мы возьмем одну и ту же величину F_z . Величина F_z связана с обыкновенной волной. Если обыкновенная волна отсутствует и на среду падает одна необыкновенная волна с амплитудой $C_{<}^{(e)+}$, то после прохода окрестности точки поворота возникают две волны: прошедшая и отраженная соответственно с амплитудами $C_{>}^{(e)+}$ и $C_{<}^{(e)-}$. Как следует из формулы (4.9), интенсивности этих волн совпадают и равны половине интенсивности падающей волны. Если же на среду падают сразу две волны с амплитудами $C_{<}^{(e)+}$ и $C_{>}^{(e)-}$ и их фазы не совпадают, то интенсивности прошедшей и отраженной волн будут отличаться из-за последнего слагаемого в (4.10). Таким образом, при проходе окрестности точки поворота произойдет перераспределение энергии. Кроме того, при падении на среду двух необыкновенных волн возникают обыкновенные волны, бегущие вдоль оси x и имеющие разные амплитуды по обе стороны точки поворота $\xi = 0$. В случае стационарной задачи и бесконечной ширины пучка (присутствие одной фурье-гармоники) поток энергии вдоль оси x присутствует на всей оси x и в каждой точке

выполнен закон $\text{div } \mathbf{S} = 0$, где \mathbf{S} — вектор Пойнтинга. В случае реальной задачи — широкого по сравнению с длиной волны фронта остронаправленного пучка — также нет энергетических противоречий. В этом случае появление такой обыкновенной волны имеет место только в близкой окрестности (по оси z и оси x) точки поворота. По оси x эта область ограничена освещенной пучком необыкновенной волны частью плоскости поворота. Таким образом, за пределы окрестности области поворота конечного пучка такая обыкновенная волна не уходит и тем самым не вносит изменений в перераспределение энергии на границах системы.

Вдали от точки поворота поле может быть рассчитано методом ВКБ, обыкновенная волна является плоской, а необыкновенная — квазиплоской с линейной поляризацией. По мере приближения к точке поворота ВКБ-решения непрерывным образом переходят в решения (С.2), (С.3), (4.12). В окрестности точки поворота происходит взаимодействие между волнами и тем самым деление на необыкновенные и обыкновенные волны с физической точки зрения необоснованно, а имеет смысл только полное поле. В близкой окрестности точки поворота в силу трансформации мод возникает поле, которое нельзя рассматривать, как сумму обыкновенной и необыкновенных волн. Это поле не имеет вида плоской волны и может приобретать эллиптичность.

5. СЛУЧАЙ УЗКИХ ЗАПРЕЩЕННЫХ ЗОН

В этом разделе рассмотрим наиболее интересный с экспериментальной точки зрения случай прохождения волн через узкую запрещенную зону. Проблема описания узкой запрещенной зоны состоит в том, что точки поворота сближаются и между ними нет областей применимости метода ВКБ. В этом случае эталонное уравнение строится для области, охватывающей все точки поворота. Мы ограничимся случаем, когда точки поворота настолько близки, что их можно учитывать как одну эффективную точку. При этом описания распространения волн в средах с $\varepsilon_a > 0$ и $\varepsilon_a < 0$ заметно различаются. Рассмотрим вначале случай $\varepsilon_a < 0$, поскольку здесь решение в окрестности точки поворота строится без упрощающих предположений.

При $\varepsilon_a < 0$ предельно узкая запрещенная зона существует при условии $\alpha = -\varepsilon_a/\varepsilon_\perp$, т. е. в случае узкой запрещенной зоны мала величина $\alpha + \varepsilon_a/\varepsilon_\perp$. Будем считать, что эта величина имеет порядок Ω^{-1} :

$$\alpha + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_\perp} = -\delta\alpha\Omega^{-1}, \quad 0 < \delta\alpha \lesssim 1, \quad (5.1)$$

где параметр $\delta\alpha$ связан с шириной запрещенной зоны Δ следующим образом:

$$\delta\alpha = \Omega \frac{|\varepsilon_a| \varepsilon_\parallel \Delta^2 q^2}{4\varepsilon_\perp^2}. \quad (5.2)$$

Ширину запрещенной зоны можно выразить, например, через угол падения луча χ_0 в жидком кристалле в точке $\xi = 0$. Имеем

$$\Delta^2 = \frac{4\varepsilon_\perp^2}{|\varepsilon_a| \varepsilon_\parallel q^2} \left(\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp} - \sin^2 \chi_0 \right). \quad (5.3)$$

При условии (5.1) точки поворота (2.19) практически вырождаются в точку $\xi = \pi/2$. В этом случае, как следует из (5.2), окрестность точки поворота ограничена неравенством

$$\left| \xi - \frac{\pi}{2} \right| \lesssim \Omega^{-1/2}. \quad (5.4)$$

Разложим коэффициенты уравнений системы (3.3) в ряд в окрестности точки $\xi = \pi/2$. Далее введем «растянутую» переменную $\eta = \Omega^{1/2}(\xi - \pi/2)$, которая в силу (5.4) не является малой в области взаимодействия. Система (3.3) принимает вид

$$\begin{cases} \partial_\eta^2 E_x - \Omega \left(\delta\alpha\Omega^{-1} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_\perp} \right) (\varepsilon_\perp + \varepsilon_a\Omega^{-1}\eta^2) E_x + \\ + \varepsilon_a \left(\delta\alpha\Omega^{-1} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_\perp} \right) \Omega^{1/2}\eta E_y = 0, \\ \partial_\eta^2 E_y - (\varepsilon_\perp\delta\alpha + \varepsilon_a\eta^2) E_y - \varepsilon_a\Omega^{1/2}\eta E_x = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Итерационное решение для компонент поля будем искать в виде ряда по убывающим степеням $\Omega^{-1/2}$. Для компоненты E_y в нулевом приближении получаем уравнение

$$\partial_\sigma^2 E_{y,0} + (\sigma^2 - \psi^2) E_{y,0} = 0, \quad (5.6)$$

где

$$\sigma = \left(\frac{\varepsilon_\parallel |\varepsilon_a|}{\varepsilon_\perp} \right)^{1/4}, \quad \eta = \left(\frac{\varepsilon_\parallel |\varepsilon_a|}{\varepsilon_\perp} \right)^{1/4} \Omega^{1/2} \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\psi^2 = \delta\alpha \frac{\varepsilon_\perp^{3/2}}{\varepsilon_\parallel^{1/2} |\varepsilon_a|^{1/2}}.$$

Решением уравнения (5.6) являются функции параболического цилиндра. Для сравнения с ВКБ-решениями воспользуемся асимптотиками функций параболического цилиндра. Если волна

падает со стороны $\sigma \rightarrow -\infty$, асимптотики имеют вид

$$E_{y,0} = AG_3\sigma^{-1/2} \exp \left[i \frac{\psi^2}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\psi^2} - \ln \frac{2\sigma}{|\psi|} \right) \right] \quad (5.7)$$

для $\sigma > 0$ и

$$E_{y,0} = A|\sigma|^{-1/2} \left\{ G_2 \exp \left[i \frac{\psi^2}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\psi^2} - \ln \frac{2|\sigma|}{|\psi|} \right) \right] + G_1 \exp \left[-i \frac{\psi^2}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\psi^2} - \ln \frac{2|\sigma|}{|\psi|} \right) \right] \right\} \quad (5.8)$$

для $\sigma < 0$, где A — константа,

$$G_1 = \sqrt{2\pi}\Gamma^{-1} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\psi^2}{2} \right) \times \exp \left[i \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\psi^2}{4} \ln 2 + \frac{\psi^2}{2} \ln |\psi| \right) - \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{\pi\psi^2}{8} \right],$$

$$G_2 = \exp \left[-i \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\psi^2}{4} \ln 2 + \frac{\psi^2}{2} \ln |\psi| \right) - \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{3\pi\psi^2}{8} \right],$$

$$G_3 = \exp \left[i \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\psi^2}{4} \ln 2 - \frac{\psi^2}{2} \ln |\psi| \right) - \frac{1}{4} \ln 2 - \frac{\pi\psi^2}{8} \right].$$

Можно убедиться, что асимптотики полностью соответствуют старшему члену ВКБ-приближения.

Вычислим коэффициенты отражения $V = G_2/G_1$ и прохождения $W = G_3/G_1$. Для энергии отраженной и прошедшей волн получаем

$$|V|^2 = (1 + e^{-\pi\psi^2})^{-1}, \quad |W|^2 = (1 + e^{\pi\psi^2})^{-1}. \quad (5.9)$$

Нетрудно убедиться, что энергетические коэффициенты отражения и прохождения (5.9) в сумме дают единицу. Также можно показать, что при увеличении ψ коэффициент прохождения совпадает в пределе с результатом, полученным для удаленных точек поворота, где коэффициент затухания дается интегралом

$$\int_{-\psi}^{\psi} (\zeta^2 - \psi^2)^{1/2} d\zeta = i \frac{\pi\psi^2}{2}. \quad (5.10)$$

Заметим, что полученные решения будут справедливы и в случае, когда компонента волнового вектора $k_z^{(e)}$ в нуль не обращается, но может быть очень

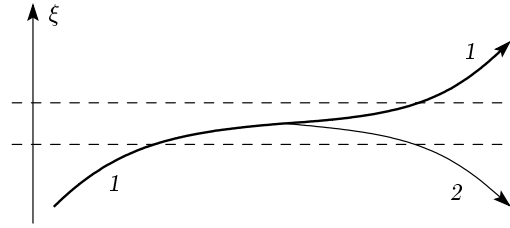


Рис. 4. Траектории необыкновенного луча, близко к предельному (1), отраженного луча, обусловленного надбарьерным отражением (2). Штриховыми линиями показана область, где нарушается ВКБ-приближение

близка к нулю. Такая ситуация приводит к нарушению применимости метода ВКБ и требует использования метода эталонного уравнения. Этот случай отличается от рассмотренного тем, что величина ψ является чисто мнимой. Физически данный случай соответствует надбарьерному отражению (рис. 4).

В случае $\varepsilon_a > 0$ построить последовательное решение для узких запрещенных зон не удастся. Сложность проблемы здесь обусловлена тем, что все четыре точки поворота сближаются. Формально это приводит для каждой компоненты поля к дифференциальному уравнению четвертого порядка, для которого не удается построить последовательное решение. Поэтому в этом случае мы ограничимся построением приближенного решения, основанного на простых физических соображениях. Будем считать, что обыкновенная и необыкновенная волны не взаимодействуют. Тогда распространение необыкновенной волны может быть описано скалярным уравнением Гельмгольца в среде с периодически меняющимся показателем преломления. В (\mathbf{k}_\perp, z) -представлении это уравнение с учетом второго соотношения (2.11) имеет вид

$$\partial_\xi^2 \mathcal{E} + \Omega^2 [\alpha \varepsilon_\parallel + (1 - \alpha) \varepsilon_a \sin^2 \xi] \mathcal{E} = 0. \quad (5.11)$$

Поляризация необыкновенной волны будет определяться соотношениями $E_x = \mathcal{E} \alpha \cos \xi$, $E_y = \mathcal{E} \sin \xi$.

Решение этого уравнения для узкой запрещенной зоны приводит в нулевом приближении к уравнению для \mathcal{E} вида (5.6), где в качестве переменной ψ следует взять новое значение

$$\psi = \left[\alpha \left| \Omega \frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_a^{1/2}} \right| \right]^{1/2}. \quad (5.12)$$

Дальнейшие вычисления проводятся так же, как и для случая $\varepsilon_a < 0$, и приводят для необыкновенной волны к формулам (5.9), где ψ имеет вид (5.12).

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы рассмотрели проблему распространения света в киральных одноосных средах с большим по сравнению с длиной волны шагом спирали. Как в любой анизотропной среде, здесь существует два типа волн: обыкновенные и необыкновенные. Но поведение этих волн в киральной среде существенно различно. Обыкновенная волна имеет прямолинейную траекторию, а вектор поляризации подстраивается под локальные характеристики среды. Для необыкновенной волны траектория луча неплоская и имеет достаточно сложную форму. При определенных соотношениях между углом падения и оптическими параметрами среды этот луч претерпевает внутреннее отражение и распространяется в обратном направлении по отношению к оси спирали. При этом возникает запрещенная зона — область, в которой амплитуда волны экспоненциально затухает. Для периодических сред ширина запрещенной зоны ограничена.

Мы проанализировали запрещенные зоны различной ширины. В случае широкой запрещенной зоны имеет место набор из четырех особых точек, вблизи которых лучи попарно взаимодействуют, а между этими точками есть области, где можно применять метод ВКБ. Прохождение волн через широкую запрещенную зону имеет достаточно сложный характер. Внутри всей запрещенной зоны волны экспоненциально затухают. В областях, где применим метод ВКБ, имеем волны двух типов, а в окрестностях точек поворота такое разделение недопустимо и требуется рассматривать единое поле. Удобство рассмотрения широкой запрещенной зоны заключается в том, что в этом случае удастся провести последовательное описание процесса подбарьерного прохождения волны. Здесь удастся описать поле как внутри, так и вне запрещенной зоны с учетом взаимодействия между волнами разных типов. Однако широкая запрещенная зона приводит к сильному затуханию волн, которое трудно наблюдать экспериментально. Поэтому мы отдельно проанализировали случаи узкой и предельно узкой запрещенных зон.

В случае узкой запрещенной зоны точки поворота сближаются, и у нас возникает единая окрестность этих точек поворота. Для случая $\epsilon_a < 0$ удастся описать эту окрестность без введения дополнительных упрощающих предположений, поскольку для такой системы нет взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн. В случае $\epsilon_a > 0$ мы пренебрегли взаимодействием обыкновенных и необыкновенных волн. При этом для $\epsilon_a < 0$ и $\epsilon_a > 0$ описа-

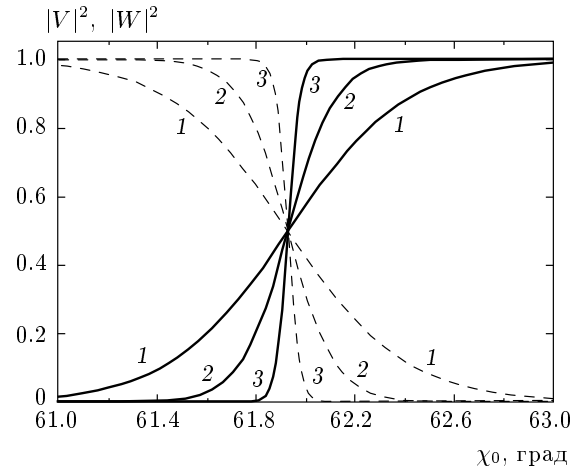


Рис. 5. Угловая зависимость коэффициентов отражения $|V|^2$ (сплошные линии) и прохождения $|W|^2$ (штриховые) необыкновенных волн в киральной среде с $\epsilon_{||} = 2.89$, $\epsilon_{\perp} = 2.25$ и различных значениях $\Omega = p/\lambda$: $\Omega = 20$ (1), 50 (2), 200 (3), χ_0 — угол, образованный лучом с осью z на плоскости $\xi = -\pi/2$. Предельному лучу соответствует $\chi_0^* = \arcsin \sqrt{\epsilon_{\perp}/\epsilon_{||}} = 61.96^\circ$

ние поля свелось к решению скалярного уравнения Гельмгольца для среды с периодически меняющимся показателем преломления. Интересно отметить, что возникающая задача аналогична задаче прохождения частиц через барьер параболической формы. Мы рассчитали зависимости коэффициентов отражения и прохождения от угла падения. Эти зависимости приведены на рис. 5 с использованием типичных для киральных жидких кристаллов оптических параметров. В области углов порядка 0.1° – 0.2° просачивание волн является заметным и эффект может быть обнаружен экспериментально.

Отметим, что кроме эффекта проникновения под барьер возникает также эффект, аналогичный надбарьерному отражению. Он имеет место при углах падения, для которых запрещенная зона отсутствует, но лучи достаточно близки к предельным. Для таких лучей имеются области, где метод ВКБ не дает последовательного описания поля, и необходимо решать задачу такого же типа, как для узкой запрещенной зоны. В этом случае коэффициент ψ в формуле (5.12) становится мнимым, ψ^2 — отрицательным, а формулы (5.9) сохраняют прежний вид.

Как видно из рис. 5, при углах падения $\chi_0 < \chi_0^* = 61.96^\circ$ необыкновенный луч проходит через среду, запрещенной зоны нет, но имеет место надбарьерное отражение. Угол $\chi_0 = \chi_0^*$ соответ-

ствует нулевой запрещенной зоне, поэтому вне зависимости от значения Ω интенсивности отраженного и прошедшего лучей равны между собой. При углах $\chi_0 > \chi_0^*$ имеет место просачивание через запрещенную зону. Интенсивность отраженного луча становится больше интенсивности прошедшего. Видно, что с экспериментальной точки зрения наиболее привлекательным является случай не слишком больших Ω , поскольку эффекты просачивания и надбарьерного отражения проявляются в более широком интервале углов.

Для предельно узкой запрещенной зоны, как и для широкой, удастся последовательно описать поле в среде. В этом случае точки поворота сливаются, область экспоненциального затухания исчезает и на каждом периоде имеет место всего одна точка поворота. При прохождении луча через окрестность этой точки возникают отраженная и прошедшая волны с одинаковой амплитудой, т. е. интенсивность падающего необыкновенного луча делится пополам между отраженной и прошедшей волнами.

В заключение обсудим вопрос о соответствии развитого подхода стандартному подходу для киральных систем, основанному на теореме Флоке. В использованном нами подходе мы применили метод ВКБ, основанный на плавном изменении свойств среды. При этом величина оптической анизотропии ε_a считалась произвольной. Профиль изменения свойств среды при этом был не принципиальным, важна была только его плавность. Для безграничной среды ВКБ-подход приближенно дает четыре собственные волны, которые представляют собой квазиплоские волны — две обыкновенные и две необыкновенные. Однако в случае запрещенных зон найденные волны начинают взаимодействовать, что создает технические сложности для описания поля.

С общей точки зрения более удачный выбор собственных волн с явным учетом пространственной периодичности среды существенно упростил бы описание и, в частности, не требовалось бы вводить эталонное уравнение. Построение такого решения основано на теореме Флоке и представляет поле в виде бесконечного ряда:

$$E(\mathbf{r}_\perp, z) \sim \exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + i\mu z) \times \sum_n C_n \exp(ik_b n z), \quad (6.1)$$

где $k_b \mathbf{e}_z = q \mathbf{e}_z$ — вектор обратной решетки. Однако такой подход эффективен, если шаг спирали сравним с длиной световой волны или мала оптическая

анизотропия, поскольку это дает возможность ограничиться небольшим числом членов ряда. В случае большого шага спирали, т. е. среды с очень плавно меняющимися свойствами, для описания поля требуется учитывать большое число членов ряда, по крайней мере порядка p/λ . Это означает, что такой подход мог бы быть реализован только численно. С другой стороны, вдали от особых точек собственные волны с хорошей точностью представляют собой квазиплоские волны. Это означает, что даже очень малая неточность в определении коэффициентов C_n может вызвать значительный сбой в фазе волны, что приведет к неопределенности в описании поля.

Фактически, примененный нами подход эквивалентен квазиклассическому приближению, а использование ряда (6.1) — разложению по волнам Блоха. Первый подход эффективен, когда важна только плавность изменения параметров среды, а для эффективного применения второго подхода определяющим фактором является периодичность системы.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (грант РНП.2.1.1.1712), частичной поддержке фонда некоммерческих программ «Династия», РФФИ (грант № 06-02-16287) и гранта Правительства Санкт-Петербурга.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Векторный метод ВКБ

Выполним диагонализацию уравнения (2.8) в главном порядке по большому параметру Ω . Для этого представим матрицу эволюции $\widehat{M}(\xi, \xi_0)$ в виде

$$\widehat{M}(\xi, \xi_0) = \widehat{U}(\xi) \widehat{H}(\xi, \xi_0). \quad (A.1)$$

Если выбрать матрицу $\widehat{U}(\xi)$ так, чтобы матрица $\widehat{U}^{-1} \widehat{A} \widehat{U}$ стала диагональной, можно получить уравнение для матрицы $\widehat{H}(\xi, \xi_0)$ вида

$$\partial_\xi \widehat{H} = i\Omega \left(\widehat{\Lambda} + \frac{i}{\Omega} \widehat{U}^{-1} \partial_\xi \widehat{U} \right) \widehat{H}, \quad (A.2)$$

где

$$\widehat{\Lambda} = \widehat{U}^{-1} \widehat{A} \widehat{U}. \quad (A.3)$$

Матрица $\widehat{\Lambda}$ диагональна, ее диагональные элементы представляют собой собственные значения матрицы \widehat{A} . При этом столбцы матрицы \widehat{U} являются собственными векторами матрицы \widehat{A} . Случай, когда у матрицы \widehat{A} не существует четырех линейно независимых

собственных векторов и возникают трудности при построении матрицы \widehat{U} , будет рассмотрен ниже. Начальным условием для системы (А.2) является

$$\widehat{H}(\xi_0, \xi_0) = \widehat{U}^{-1}(\xi_0).$$

Если в системе (А.2) в скобках пренебречь членом порядка Ω^{-1} , то в силу диагональности матрицы $\widehat{\Lambda}$ система (А.2) расщепляется на независимые уравнения:

$$\partial_\xi \widehat{H}_0 = i\Omega \widehat{\Lambda} \widehat{H}_0, \quad (\text{А.4})$$

решение которых имеет вид

$$\widehat{H}_0(\xi, \xi_0) = \exp \left[i\Omega \int_{\xi_0}^{\xi} \widehat{\Lambda} d\xi \right] \widehat{U}^{-1}(\xi_0). \quad (\text{А.5})$$

Решение нулевого приближения \widehat{H}_0 корректно описывает фазу волн, но его недостаточно для описания их амплитуды. Для получения амплитудных множителей выполним процедуру диагонализации с учетом следующего порядка малости по Ω^{-1} . Рассмотрим матрицу

$$\widehat{H}(\xi, \xi_0) = \widehat{U}_1(\xi) \widehat{H}_1(\xi, \xi_0), \quad (\text{А.6})$$

где столбцы матрицы \widehat{U}_1 представляют собой собственные векторы матрицы, стоящей в скобках в уравнении (А.2). Тогда

$$\widehat{\Lambda}_1 = \widehat{U}_1^{-1} \left(\widehat{\Lambda} + \frac{i}{\Omega} \widehat{U}^{-1} \partial_\xi \widehat{U} \right) \widehat{U}_1, \quad (\text{А.7})$$

где $\widehat{\Lambda}_1$ — диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы $\widehat{\Lambda} + i\Omega^{-1} \widehat{U}^{-1} \partial_\xi \widehat{U}$. Уравнение первого приближения принимает вид

$$\partial_\xi \widehat{H}_1 = \left(i\Omega \widehat{\Lambda}_1 - \widehat{U}_1^{-1} \partial_\xi \widehat{U}_1 \right) \widehat{H}_1, \quad (\text{А.8})$$

с начальным условием

$$\widehat{H}_1(\xi_0, \xi_0) = \widehat{U}_1^{-1}(\xi_0) \widehat{U}^{-1}(\xi_0).$$

В случае $\Omega \gg 1$ матрица $\widehat{\Lambda} + i\Omega^{-1} \widehat{U}^{-1} \partial_\xi \widehat{U}$ близка к $\widehat{\Lambda}$, а значит и $\widehat{\Lambda}_1$ близка к $\widehat{\Lambda}$, поэтому матрица \widehat{U}_1 близка к единичной, т. е.

$$\begin{aligned} \widehat{U}_1(\xi) &= \widehat{I} + i\Omega^{-1} \widehat{V}(\xi), \\ \widehat{U}_1^{-1}(\xi) &= \widehat{I} - i\Omega^{-1} \widehat{V}(\xi), \end{aligned} \quad (\text{А.9})$$

где матрица $\widehat{V}(\xi)$ не содержит членов порядка Ω и выше. В уравнении (А.8) второе слагаемое в скоб-

ках по отношению к первому имеет согласно (А.9) порядок Ω^{-2} . Пренебрегая им, получим

$$\begin{aligned} \widehat{H}_1(\xi, \xi_0) &\approx \\ &\approx \exp \left[i\Omega \int_{\xi_0}^{\xi} \widehat{\Lambda}_1 d\xi \right] \widehat{U}_1^{-1}(\xi_0) \widehat{U}^{-1}(\xi_0). \end{aligned} \quad (\text{А.10})$$

Подставляя выражения (А.9) в (А.7), для матриц $\widehat{\Lambda}_1$ и \widehat{V} получим в главном порядке по Ω

$$\begin{aligned} (\Lambda_1)_{ll} &\approx \lambda_l + i\Omega^{-1} (\widehat{U}^{-1} \partial_\xi \widehat{U})_{ll}, \\ V_{lm} &\approx (\lambda_m - \lambda_l)^{-1} (\widehat{U}^{-1} \partial_\xi \widehat{U})_{lm}, \quad l \neq m. \end{aligned} \quad (\text{А.11})$$

Здесь $\lambda_l = \Lambda_{ll}$. Пренебрегая поправками порядка Ω^{-1} в выражениях (А.9) для матриц \widehat{U}_1 и \widehat{U}_1^{-1} , получим матрицу эволюции в виде

$$\begin{aligned} \widehat{M}(\xi, \xi_0) &= \\ &= \widehat{U}(\xi) \widehat{\text{diag}} \left\{ \exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi} \left(i\Omega \lambda_l - (\widehat{U}^{-1} \partial_\xi \widehat{U})_{ll} \right) d\xi \right] \right\} \times \\ &\quad \times \widehat{U}^{-1}(\xi_0). \end{aligned} \quad (\text{А.12})$$

Это выражение представляет собой первое приближение векторного аналога метода ВКБ.

Условием применимости выражения (А.12) является малость отброшенного слагаемого в выражении для \widehat{U}_1 в (А.9):

$$\begin{aligned} |V_{lm}(\xi)| &\ll \Omega, \\ |(\lambda_m - \lambda_l)^{-1} (\widehat{U}^{-1} \partial_\xi \widehat{U})_{lm}| &\ll \Omega, \quad l \neq m. \end{aligned} \quad (\text{А.13})$$

Следствием условий (А.13) является неприменимость метода при вырождении собственных значений матрицы $\widehat{A}(\xi)$. В случае вырожденных собственных значений могут возникнуть трудности с приведением матрицы \widehat{A} к диагональному виду.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Построение решения в окрестности точки поворота

Для построения решения системы (3.3) удобно сделать замену

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} &= (\alpha + (1 - \alpha) \sin^2 \xi_*^{(1)})^{-1/2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \alpha \cos \xi & 0 \\ 0 & \sin \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{В.1})$$

Уравнение для вектора $\mathbf{f} = (f_x, f_y)^T$ имеет вид

$$\partial_{\xi}^2 \mathbf{f} + 2\widehat{G}\partial_{\xi} \mathbf{f} + (\Omega^2 \widehat{B} - \widehat{I})\mathbf{f} = 0, \quad (\text{B.2})$$

где

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} \alpha(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \xi) & \varepsilon_a \sin^2 \xi \\ \alpha\varepsilon_a \cos^2 \xi & \alpha\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \xi \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

$$\widehat{G} = \begin{pmatrix} -\sin \xi \cos^{-1} \xi & 0 \\ 0 & \cos \xi \sin^{-1} \xi \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Разложим коэффициенты уравнения (B.2) в ряд в окрестности точки $\xi_*^{(1)}$. Далее введем «растянутую» переменную $\tau = \Omega^{2/3}(\xi - \xi_*^{(1)})$, которая в силу (2.20) не является малой в области взаимодействия. Уравнение принимает вид

$$\Omega^{-2/3} \partial_{\tau}^2 \mathbf{f} + 2\Omega^{-4/3} [\widehat{G}'_* + \Omega^{-2/3} \tau \widehat{G}'_* + \dots] \partial_{\tau} \mathbf{f} + [-\Omega^{-2} \widehat{I} + \widehat{B}'_* + \Omega^{-2/3} \tau \widehat{B}'_* + \dots] \mathbf{f} = 0, \quad (\text{B.5})$$

где штрих обозначает производную по переменной ξ , а индекс «*» у матриц означает, что их элементы вычисляются в точке $\xi = \xi_*^{(1)}$. Итерационное решение будем искать в виде ряда по убывающим степеням $\Omega^{-2/3}$:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \Omega^{-2/3} \mathbf{f}_1 + \Omega^{-4/3} \mathbf{f}_2 + \dots \quad (\text{B.6})$$

Подстановка ряда (B.6) в уравнение (B.5) дает рекуррентную систему уравнений для $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots$. Приравняв нулю члены при нулевых степенях Ω , получаем

$$\widehat{B}'_* \mathbf{f}_0 = 0. \quad (\text{B.7})$$

Определитель матрицы \widehat{B}'_* равен нулю, поэтому решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{f}_0 = \beta(\tau) \boldsymbol{\chi}, \quad \boldsymbol{\chi} = (1, 1)^T, \quad (\text{B.8})$$

где $\boldsymbol{\chi}$ — собственный вектор матрицы \widehat{B}'_* , отвечающий нулевому собственному значению.

В следующем порядке малости имеем

$$\widehat{B}'_* \mathbf{f}_1 = -(\beta'' \widehat{I} + \tau \beta \widehat{B}'_*) \boldsymbol{\chi}. \quad (\text{B.9})$$

Если разложить вектор \mathbf{f}_1 по собственным векторам матрицы \widehat{B}'_* , нетрудно убедиться, что левая часть уравнения (B.9) ортогональна вектору $\boldsymbol{\chi}$. Таким образом, условием разрешимости системы уравнений (B.9) является требование, чтобы правая часть тоже была ортогональна вектору $\boldsymbol{\chi}$:

$$(\beta'' \widehat{I} + \tau \beta \widehat{B}'_*) \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\chi} = 0. \quad (\text{B.10})$$

Выполняя умножение в (B.10), получаем уравнение для функции β :

$$\beta''_{\tau} - 2\sqrt{-\alpha\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_a + \alpha\varepsilon_{\perp})} \tau \beta = 0. \quad (\text{B.11})$$

Уравнение (B.11) представляет собой уравнение Эйри. Решение этого уравнения запишем через функции Ханкеля первого и второго рода, $H_{1/3}^{(1)}(u)$ и $H_{1/3}^{(2)}(u)$, отдельно для областей $\tau < 0$ и $\tau > 0$ [22]:

$$\beta_{<}(\tau) = [-v^{1/3} \tau]^{1/2} \left[A_{<}^{(1)} H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} v^{1/2} (-\tau)^{3/2} \right) + B_{<}^{(1)} H_{1/3}^{(2)} \left(\frac{2}{3} v^{1/2} (-\tau)^{3/2} \right) \right], \quad \tau < 0, \quad (\text{B.12})$$

$$\beta_{>}(\tau) = [v^{1/3} \tau]^{1/2} \left[A_{>}^{(1)} H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2i}{3} v^{1/2} \tau^{3/2} \right) + B_{>}^{(1)} H_{1/3}^{(2)} \left(\frac{2i}{3} v^{1/2} \tau^{3/2} \right) \right], \quad \tau > 0, \quad (\text{B.13})$$

где

$$v = 2\sqrt{-\alpha\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_a + \alpha\varepsilon_{\perp})},$$

$A_{<}^{(1)}, B_{<}^{(1)}, A_{>}^{(1)}, B_{>}^{(1)}$ — константы, индекс (1) обозначает окрестность первой точки поворота на пути следования волны.

Покажем, что при достаточно больших $|\tau|$ член, пропорциональный $B_{<}^{(1)}$, отвечает падающей необыкновенной волне, а член, пропорциональный $A_{<}^{(1)}$, — отраженной необыкновенной. Воспользуемся асимптотическими выражениями для функций Ханкеля при больших значениях аргумента:

$$H_{\nu}^{(j)}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \exp \left[\pm i \left(u - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) \right] \times [1 + O(u^{-1})], \quad j = 1, 2, \quad (\text{B.14})$$

где

$$|u| \gg 1, \quad \text{Re } \nu > -1/2, \quad |\arg u| < \pi.$$

В случае вещественного u направление распространения волны определяется тем, в каком направлении относительно ξ растет фаза в показателе экспоненты (B.14). Для чисто мнимого u одна волна будет экспоненциально возрастающей, вторая — убывающей. Из закона сохранения энергии коэффициент при возрастающей экспоненте следует положить равным нулю. Физически волна с возрастающей амплитудой соответствует волнам, «распространяющимся» в сторону убывания ξ . Такая волна появляется, если на симметричную точку поворота 4 (рис. 2) падает волна со стороны положительных ξ .

Асимптотики решения в окрестности точки поворота при $|\tau| \gg 1$ имеют вид

$$\beta_{<}(\tau) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} v^{-1/12} (-\tau)^{-1/4} \times \left[A_{<}^{(1)} \exp \left\{ i \left(\frac{2}{3} v^{1/2} (-\tau)^{3/2} - \frac{5}{12} \pi \right) \right\} + B_{<}^{(1)} \exp \left\{ -i \left(\frac{2}{3} v^{1/2} (-\tau)^{3/2} - \frac{5}{12} \pi \right) \right\} \right], \quad (\text{B.15})$$

$$\beta_{>}(\tau) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} v^{-1/12} \tau^{-1/4} \times \left[A_{>}^{(1)} \exp \left(-\frac{2}{3} v^{1/2} \tau^{3/2} - i \frac{5}{12} \pi \right) + B_{>}^{(1)} \exp \left(\frac{2}{3} v^{1/2} \tau^{3/2} + i \frac{5}{12} \pi \right) \right]. \quad (\text{B.16})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Построение решения в окрестности точки поворота для предельного луча

Для описания поля в окрестности точки поворота системы уравнений (4.3) разложим коэффициенты уравнения в окрестности точки $\xi = 0$ с точностью до квадратичных слагаемых. Получим

$$\begin{cases} \partial_{\zeta} E_z + i \frac{\varepsilon_a^{1/2}}{\varepsilon_{\perp}^{1/2}} \zeta E_y = 0, \\ \partial_{\zeta}^2 E_y + \zeta^2 E_y = 0, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

где $\zeta = \varepsilon_a^{1/4} \Omega^{1/2} \xi$. Решением второго уравнения системы (C.1) являются цилиндрические функции порядка $1/4$. Существует произвол в выборе комбинации двух линейно независимых решений. Мы выберем осциллирующие решения — функции Ханкеля первого и второго рода: $H_{1/4}^{(1)}(u)$ и $H_{1/4}^{(2)}(u)$. Функции Ханкеля определены однозначно при $|\arg u| < \pi$. Поэтому для задания решения в области $\zeta < 0$ воспользуемся тем, что вид второго уравнения системы (C.1) не меняется при замене ζ на $-\zeta$. Получаем

$$E_{y,>} = \zeta^{1/2} \left[A_{>} H_{1/4}^{(1)} \left(\frac{1}{2} \zeta^2 \right) + B_{>} H_{1/4}^{(2)} \left(\frac{1}{2} \zeta^2 \right) \right] \quad (\text{C.2})$$

для области $\zeta > 0$,

$$E_{y,<} = |\zeta|^{1/2} \left[A_{<} H_{1/4}^{(1)} \left(\frac{1}{2} |\zeta|^2 \right) + B_{<} H_{1/4}^{(2)} \left(\frac{1}{2} |\zeta|^2 \right) \right] \quad (\text{C.3})$$

для области $\zeta < 0$.

Из условий непрерывности компоненты E_y и ее производной можно выразить константы $A_{>}$ и $A_{<}$ через $B_{>}$ и $B_{<}$:

$$\begin{aligned} A_{>} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(B_{<} e^{i3\pi/4} + B_{>} e^{i\pi/4} \right), \\ A_{<} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(B_{<} e^{i\pi/4} + B_{>} e^{i3\pi/4} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Две оставшиеся константы $B_{>}$ и $B_{<}$ определяются из граничных условий как амплитуды падающих волн со стороны положительных и отрицательных z на границу рассматриваемой области.

Для применения граничных условий рассмотрим асимптотики решений (C.2), (C.3) при $|\zeta| \gg 1$. Для этого воспользуемся асимптотиками функций Ханкеля (B.14) при $\zeta \rightarrow \pm\infty$. Вид этих асимптотик позволяет сделать вывод, что константы $B_{>}$ и $B_{<}$ характеризуют амплитуды падающих волн, а $A_{>}$ и $A_{<}$ — отраженных от нулевой запрещенной зоны.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer-Verlag, Berlin (2005).
2. K. Yasimoto, *Electromagnetic Theory and Applications for Photonic Crystals*, Taylor and Francis Group (2006).
3. P. Yeh and C. Gu, *Optics of Liquid Crystal Displays*, J. Wiley & Sons, New York (1999).
4. D.-K. Yang and S.-T. Wu, *Fundamentals of Liquid Crystal Devices*, J. Wiley & Sons, Chichester (2006).
5. S. Chandrasekhar, H.-S. Kitzerow, and C. Bahr, *Chirality in Liquid Crystals*, Springer-Verlag, New York (2001).
6. В. А. Беляков, *Дифракционная оптика периодических сред сложной структуры*, Наука, Москва (1988).
7. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, Изд-во АН СССР, Москва (1957).
8. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Наука, Москва (1967).
9. D. W. Berreman and T. J. Scheffer, *Phys. Rev. A* **5**, 1397 (1971).

10. D. W. Bergeман, J. Opt. Soc. Amer. **62**, 502 (1972); **63**, 1374 (1973).
11. С. П. Палто, ЖЭТФ **119**, 638 (2001).
12. П. Де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).
13. Е. И. Кац, ЖЭТФ **59**, 1854 (1970).
14. В. А. Беляков, С. А. Сонин, *Оптика холестериче-ских жидких кристаллов*, Наука, Москва (1982).
15. С. Oldano and S. Ponti, Phys. Rev. E **63**, 011703 (2000).
16. S. Ponti, C. Oldano, and M. Vecchi, Phys. Rev. E **64**, 021704 (2001).
17. Н. Фреман, П. У. Фреман, *ВКБ-приближение*, Мир, Москва (1967).
18. V. S. Liberman and В. Ya. Zel'dovich, Phys. Rev. E **49**, 2389 (1994).
19. A. Yu. Savchenko and В. Ya. Zel'dovich, Phys. Rev. E **50**, 2287 (1994).
20. А. Ю. Вальков, Р. В. Гринин, В. П. Романов, Опт. и спектр. **83**, 239 (1997).
21. Е. В. Аксенова, А. Ю. Вальков, А. А. Каретников, А. П. Ковшик, В. П. Романов, Е. И. Рюмцев, ЖЭТФ **126**, 1109 (2004).
22. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, Москва (1971).