

СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ ЖИДКОСТИ С НЕОДНОРОДНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ОБЪЕМНЫМ ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИЕМ

*П. С. Кондратенко**, *Д. В. Никольский*, *В. Ф. Стрижов*

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук
115191, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 1 декабря 2006 г.

Теоретически исследованы характеристики свободной конвекции тепловыделяющей жидкости, охлаждаемой с границы, с неоднородным распределением внутренних источников тепла. Анализ проводился на основе аналитических оценок и с помощью прямого численного расчета. Установлено, что при определенных условиях детали распределения внутренних источников тепла в горизонтальных сечениях занимаемого жидкостью объема не влияют на теплофизические характеристики свободной конвекции. При этом распределения температуры жидкости в объеме и потока тепла к границе однозначно определяются распределением по вертикали усредненной по горизонтальному сечению мощности внутренних источников тепла.

PACS: 44.05.+e, 44.25.+f, 47.27.te

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование свободной конвекции ведется уже более ста лет, но до недавнего времени интерес в основном проявлялся к процессам, вызванным неизотермическими граничными условиями [1]. Лишь в последние десятилетия, главным образом в рамках проблемы безопасности АЭС, стали активно изучаться течения, обусловленные внутренними источниками тепла. К настоящему времени этот класс течений достаточно хорошо изучен (см. [2]), однако теоретический анализ и численные расчеты ограничивались однородным распределением источников тепла и вопрос о влиянии неоднородностей на картину течения и теплоотдачи оставался открытым. Вместе с тем, такая задача может быть актуальна для проблемы безопасности АЭС. К примеру, в ряде экспериментов по моделированию свободной конвекции расплава активной зоны реактора источник тепла создавался при помощи переменного магнитного поля (например, как в работе [3]). В этом случае разогрев происходит в пределах скин-слоя с толщиной, зависящей от частоты поля.

В настоящей работе исследована задача о свободной конвекции в жидкости с неоднородным рас-

пределением внутренних источников тепла. Отдельно рассмотрены случаи, когда источники тепла сосредоточены в приграничном слое конечной толщины, и более общая постановка задачи, допускающая нерегулярное распределение источников тепла. Исследование проведено на основе метода аналитических оценок и прямого численного моделирования.

Дальнейшая структура статьи такова. В разд. 2 сформулирована постановка задачи и рассмотрен случай большой по сравнению с толщиной свободно-конвективного пограничного слоя глубины прогрева. В разд. 3 модель обобщена для произвольного распределения мощности тепловыделения. В разд. 4 рассмотрен случай малого масштаба неоднородностей источника тепла. В разд. 5 обсуждается применимость полученных результатов для более сложной геометрии задачи, а также случай охлаждаемой верхней границы. Раздел 6 посвящен численному моделированию свободной конвекции и теплоотдачи в условиях, описанных в разд. 2. В Заключении кратко сформулированы основные результаты работы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Стационарная свободная конвекция несжимаемой жидкости описывается системой уравнений

*E-mail: kondrat@ibrae.ac.ru

(см. [4, 5]):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g} \alpha T + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T + \frac{Q}{\rho c}. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость течения, T — температура, $Q = Q(\mathbf{r})$ — объемная плотность источников тепла, ν — кинематическая вязкость, χ — коэффициент температуропроводности, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, α — коэффициент теплового расширения, ρ — плотность жидкости, c — удельная теплоемкость, P — давление за вычетом гидростатической составляющей.

Основным безразмерным параметром, характеризующим конвекцию тепловыделяющей жидкости, является модифицированное число Рэлея

$$\operatorname{Ra}_I = \frac{g \alpha Q H^5}{\lambda \nu \chi}.$$

Число Рэлея

$$\operatorname{Ra} = \frac{g \alpha \Delta T H^3}{\nu \chi}$$

в этом случае становится функцией Ra_I .

Будем предполагать, что жидкость заключена в вертикально ориентированном круглом цилиндре радиуса R и высоты $H \sim R$. Распределение мощности тепловыделения полагаем не зависящим от азимутальной координаты:

$$Q = Q(r, z), \quad (4)$$

где r — радиальная координата, z — вертикальная координата. Полагаем, что охлаждается боковая граница, температуру которой считаем постоянной. Плоские горизонтальные участки границы считаем адиабатическими (неадиабатические граничные условия будут обсуждены позже). Температуру T будем отсчитывать от температуры боковой границы.

Рассмотрим случай, когда прогревается прилегающий к боковой границе слой жидкости конечной толщины δ_Q , меньшей радиуса цилиндра R и высоты H . Режим течения предполагаем ламинарным. Считаем, что толщина свободно-конвективного пограничного слоя (ПС) на боковой границе много меньше глубины прогрева δ_Q :

$$\delta \ll \delta_Q. \quad (5)$$

Оценка значения толщины ПС δ приведена в конце раздела. При выполнении условия (5), как в работах [6, 7], тепловыделением внутри пограничного

слоя можно пренебречь. Тогда в приближении Прандтля [5] уравнения движения для ПС примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g \alpha (T - T_b), \quad (7)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

где u и v — продольная и поперечная компоненты скорости в ПС, y — расстояние до боковой границы, T_b — температура жидкости в основном объеме (вне пограничных слоев). Из соотношений (6)–(8) получаем следующие качественные оценки (см. [2, 6–8]):

$$v \sim \frac{\delta}{z} u, \quad (9)$$

$$\frac{u^2}{z} \approx g \alpha T_b, \quad (10)$$

$$\frac{u}{z} \approx \frac{\chi}{\delta^2}. \quad (11)$$

Здесь для простоты предполагается, что значение числа Прандтля $\operatorname{Pr} = \nu/\chi$ порядка единицы. В основном объеме (вне ПС) теплопроводность и вязкость не существенны. Поэтому уравнения движения в этой области имеют следующий вид (см. [2, 6–8]):

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (12)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla P_b}{\rho} + g \alpha T_b \mathbf{n}, \quad (13)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla T_b = \frac{Q(r, z)}{\rho c}, \quad (14)$$

где \mathbf{V} — скорость течения в основном объеме, P_b — давление в основном объеме за вычетом гидростатической составляющей, $Q(r, z)$ — мощность объемного тепловыделения, \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по вертикали вверх.

Согласно условию баланса массы (1), течение вне пограничного слоя значительно медленнее, чем в самом пограничном слое:

$$V_z \approx \frac{\delta}{\delta_Q} u, \quad (15)$$

где V_z — вертикальная компонента \mathbf{V} . Ввиду этого обстоятельства архимедовы силы почти полностью уравновешиваются градиентом давления так же, как в гидростатике, где все функции состояния жидкости зависят только от вертикальной координаты. Это дает основания полагать, что в основном

объеме устанавливается температурная стратификация, другими словами, температура в этой области зависит только от вертикальной координаты [2, 6–8]. Этот вывод подтверждается следующим, более строгим анализом.

Из горизонтальной компоненты уравнения Навье–Стокса оценим порядок изменения давления в горизонтальной плоскости при фиксированном z :

$$(\Delta P)_{hor} \approx \rho V_r^2. \quad (16)$$

Подставляя это выражение в вертикальную компоненту уравнения баланса импульса, получаем характерный порядок изменения температуры при том же z :

$$(\Delta T_b)_{hor} \sim \frac{V_r^2}{g\alpha z}. \quad (17)$$

Из уравнения (9) с учетом того, что $V_r|_{r=R} = -v|_{\delta \ll y \ll \delta_Q}$ вытекает следующее соотношение для горизонтальной компоненты скорости:

$$V_r \sim \frac{\delta}{z} u, \quad (18)$$

и мы получаем следующую оценку:

$$(\Delta T_b)_{hor} \sim \left(\frac{\delta}{z}\right)^2 T_b. \quad (19)$$

Таким образом, в области $z \gg \delta$ имеет место температурная стратификация, так что с точностью до малых поправок порядка (19) температура является функцией только вертикальной координаты:

$$T_b \approx T_b(z). \quad (20)$$

С учетом этого факта уравнение баланса энергии можно записать в следующем виде:

$$V_z \frac{dT_b}{dz} = \frac{Q(r, z)}{\rho c}. \quad (21)$$

Уравнение (21), описывающее баланс энергии в основном объеме, справедливо для любой геометрии объема — геометрический фактор сказывается лишь на условиях сшивки пограничного слоя и основного объема, т. е. на граничном условии для уравнения (21).

Следует заметить, что оценки (9)–(11) для пограничного слоя на боковой границе, уравнение (21) и оценки (16)–(19) для основной части объема не привязаны к определенному характеру распределения мощности тепловыделения и остаются справедливыми при произвольном распределении с одним ограничением — тепловыделение в ПС должно быть

незначительным по сравнению с тепловыделением в основном объеме. Перечисленные обстоятельства помогут в анализе более общего случая, рассмотренного ниже.

Также заметим, что вследствие уравнения (21) вертикальная компонента скорости V_z зависит от радиальной координаты таким же образом, как мощность тепловыделения:

$$V_z = \frac{Q(r, z)}{\frac{dT_b}{dz} \rho c}. \quad (22)$$

Подставляя это выражение в уравнение неразрывности,

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(V_r r) = 0, \quad (23)$$

и интегрируя (23) по горизонтальному сечению, получаем следующее выражение для радиальной компоненты скорости на периферии ПС (условие сшивки):

$$v(z) = V_r(R) = -\frac{R}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{dT_b/dz} \right) \bar{Q}(z). \quad (24)$$

Как видим, радиальная компонента скорости определяется только средней по горизонтальному сечению плотностью источников тепла:

$$\bar{Q}(z) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R Q(r, z) \cdot 2\pi r dr, \quad (25)$$

и не зависит от особенностей его распределения по радиальной координате r .

Уравнение (21) также можно проинтегрировать по горизонтальному сечению с учетом условия баланса массы:

$$2 \frac{dT_b}{dz} \int_0^{\delta} u dy = -R \frac{\bar{Q}(z)}{\rho c}. \quad (26)$$

Заметим, что соотношения (24) и (26) задают соответствие между характеристиками ПС и основного объема, замыкая систему уравнений (6)–(8) и (21).

В том случае, когда величина \bar{Q} не зависит от z , соотношения (24) и (26) сохраняются такими же, как при равномерном распределении источников тепла по объему. При этом распределение температуры в основном объеме и теплоотдача к боковой границе также будут соответствовать случаю однородно распределенных источников тепла.

С учетом сказанного можно конкретизировать полученные условия (5), для чего необходимо определить параметр δ — толщину свободно-конвективного пограничного слоя на боковой границе. В геометрии круглого цилиндра, при однородно распределенных источниках тепла толщина пограничного слоя была оценена в работах [7, 8]. Она определяется модифицированным числом Рэлея Ra_I и для ламинарного режима течения в пограничном слое, соответствующего $Ra_I < 10^{12}$, имеет порядок

$$\delta \sim R Ra_I^{-0.2}.$$

В рассматриваемой задаче с неоднородным тепловыделением модифицированное число Рэлея выражается через среднюю по объему плотность источников тепла \overline{Q}_{Vol} :

$$Ra_I = \frac{g\alpha\overline{Q}_{Vol}H^5}{\nu\chi\lambda},$$

где λ — коэффициент теплопроводности. Само условие (5) приобретает вид

$$\frac{\delta Q}{R} \gg Ra_I^{-0.2}. \quad (27)$$

При значениях модифицированного числа Рэлея, представляющих интерес для практики — выше 10^8 — правая часть неравенства (27) много меньше единицы.

3. ПРОИЗВОЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Распределение источников тепла в предыдущем разделе предполагалось аксиально-симметричным. Рассмотрим более общий случай, полагая, как и ранее, что главная часть тепловыделения приходится на основной объем. Будем, как и прежде, считать геометрию задачи цилиндрической, а мощность тепловыделения распределенной произвольным образом:

$$Q = Q(\mathbf{r}),$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор.

Полагаем, что прогрев происходит по всему объему. Параметр δ_Q в данном случае играет роль характерного масштаба неоднородностей (например, размера «белых пятен» — областей с незначительным тепловыделением). Здесь следует выделить два предельных случая: когда этот масштаб значительно больше толщины ПС, $\delta \sim \chi/v$ (что отвечает условию (5)), и, соответственно, когда он не превышает

ее. Подробно рассмотрим первый предельный случай. Второй случай будет рассмотрен в следующем разделе.

Как было отмечено выше, при условии малости тепловыделения в пограничном слое по сравнению с основным объемом оценки (9)–(11) для пограничного слоя на боковой границе и оценки (14)–(17) для основного объема остаются справедливыми независимо от характера распределения тепловыделения в основном объеме. Следовательно, в основном объеме устанавливается температурная стратификация, а соотношение

$$V_z(\mathbf{r}) \frac{dT_b}{dz} = \frac{Q(\mathbf{r})}{\rho c} \quad (28)$$

задает режим течения. Как видим, вертикальная скорость определяется плотностью мощности тепловыделения:

$$V_z(\mathbf{r}) = \frac{Q(\mathbf{r})}{\frac{dT_b}{dz} \rho c}. \quad (29)$$

Иначе говоря, она «отслеживает» неоднородности распределения источников тепла. Запишем уравнение неразрывности в виде:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \text{div}_{2D} \mathbf{V}_{hor} = 0, \quad (30)$$

где оператор div_{2D} определяется следующим образом:

$$\text{div}_{2D} \mathbf{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (f_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (f_\varphi),$$

φ — азимутальная координата.

Усредняя уравнение (30) по горизонтальному сечению и пользуясь теоремой Гаусса, получаем следующее соотношение:

$$\frac{d\overline{V}_z}{dz} = -\frac{1}{\pi R^2} \oint V_r R d\varphi = \frac{2}{R} v, \quad (31)$$

где v — поперечная скорость на периферии ПС. Величина v не зависит от азимутального угла φ , поскольку течение в ПС определяется распределением температуры в основном объеме, которая, как было показано выше, зависит только от вертикальной координаты. Подставляя соотношение (29) в (31), находим

$$\frac{R}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{dT_b/dz} \right) \frac{\overline{Q}(z)}{\rho c} = v(z), \quad (32)$$

что совпадает с формулой (24).

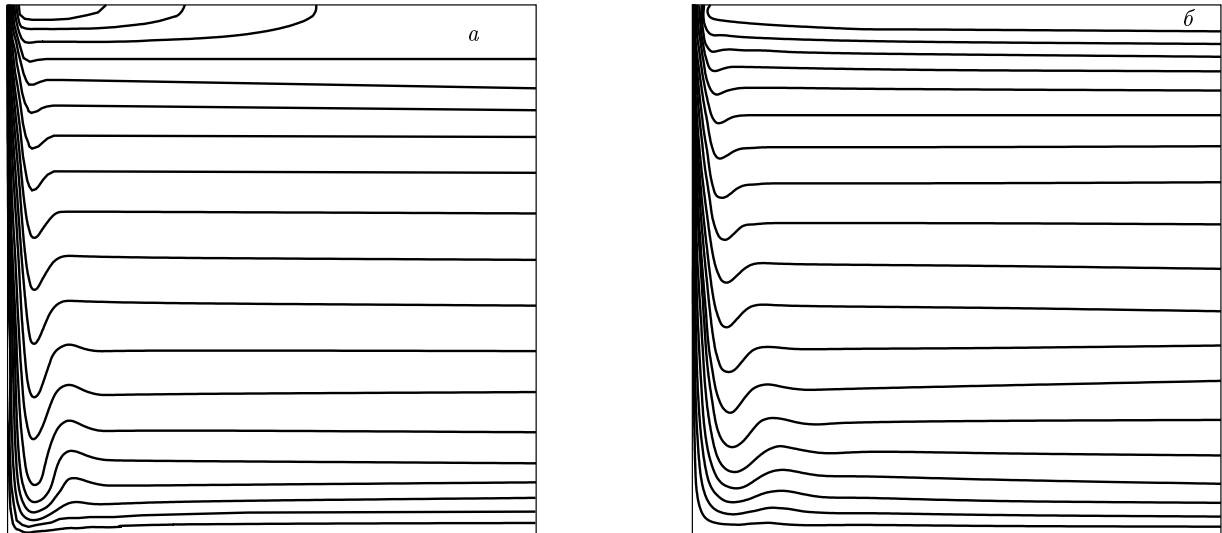


Рис. 1. Изотермы при неоднородном (а) и однородном (б) тепловыделении. Левая вертикальная граница отвечает боковой стенке, правая — оси симметрии

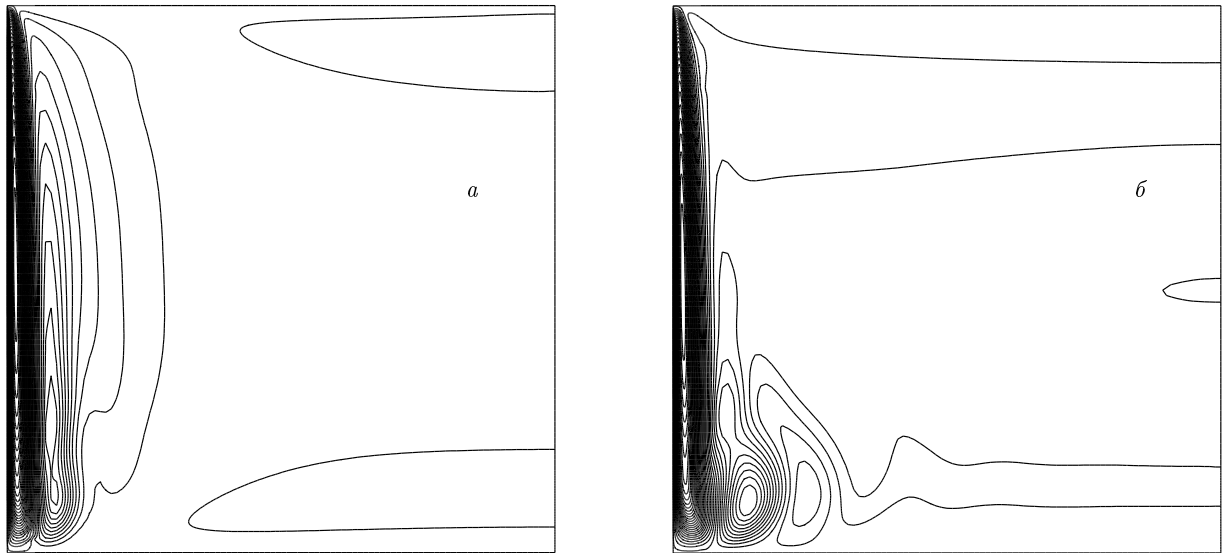


Рис. 2. Распределение вертикальной компоненты скорости при неоднородном (а) и однородном (б) тепловыделении. Левая вертикальная граница отвечает боковой стенке, правая — оси симметрии

Также, усредняя по горизонтальному сечению уравнение (28), получаем:

$$\bar{V}_z \frac{dT_b}{dz} = - \int_0^{y>\delta} u dy \frac{dT_b}{dz} = \frac{\bar{Q}(z)}{\rho c}. \quad (33)$$

Любое из условий сопряжения (32) и (33) замыкает систему уравнений (6)–(8) и (28). Результаты анализа, как мы видим, совпадают с теми, что бы-

ли получены выше для частного случая аксиально-симметричного распределения источников тепла.

4. МЕЛКОМАСШТАБНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ. ТОНКИЙ СКИН-СЛОЙ

Коротко коснемся случаев малого масштаба неоднородностей источников тепла. В условиях,

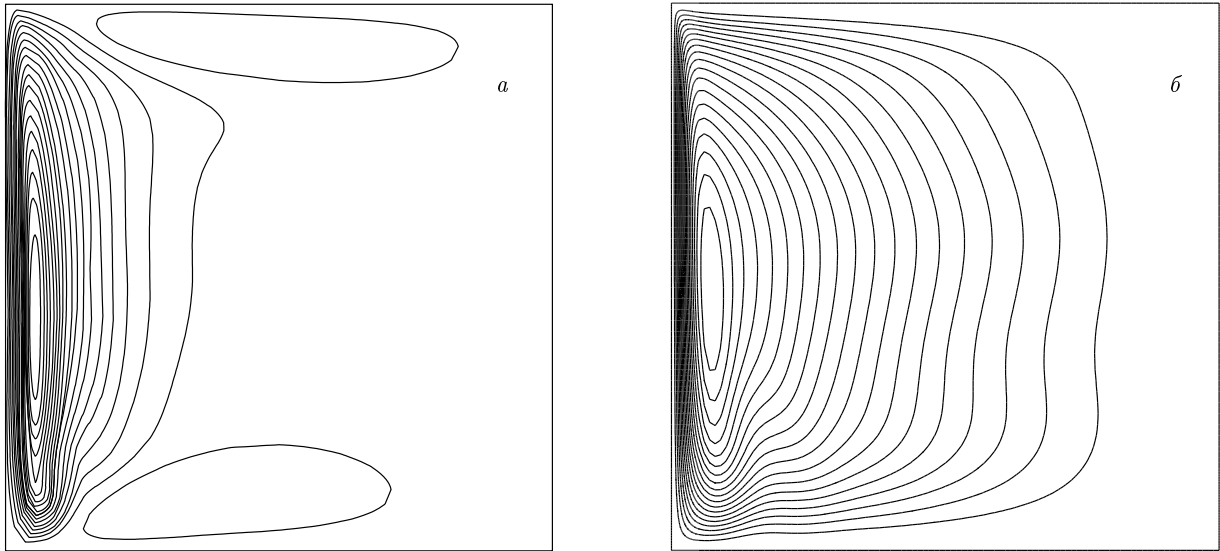


Рис. 3. Линии тока при неоднородном (а) и однородном (б) тепловыделении. Левая вертикальная граница отвечает боковой стенке, правая — оси симметрии

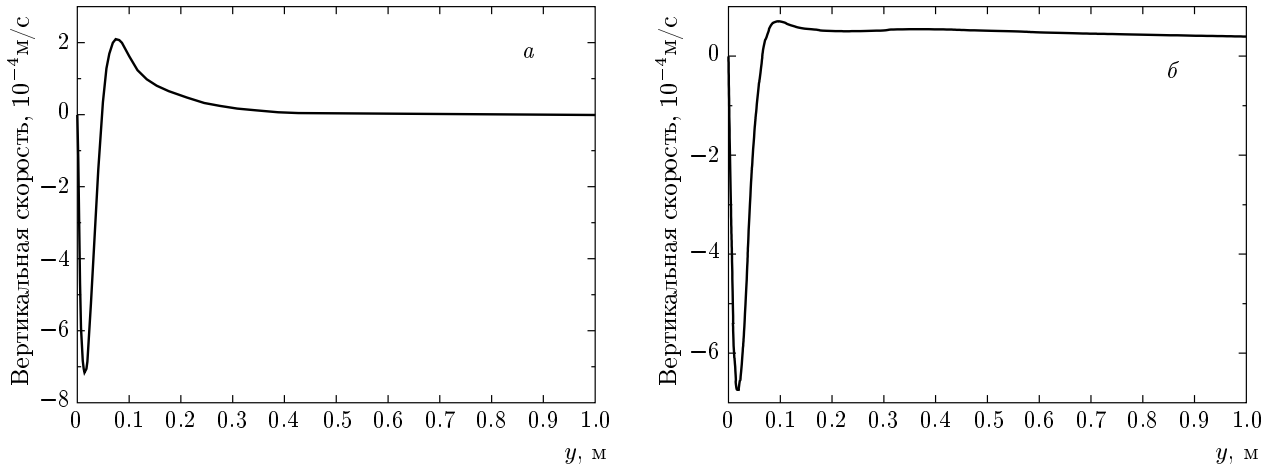


Рис. 4. Зависимости вертикальной скорости от поперечной координаты y на уровне $z = 0.5H$ при неоднородном (а) и однородном (б) тепловыделении

описанных в разд. 3, т.е. при незначительном по сравнению с основным объемом тепловыделении в пограничном слое, если масштаб неоднородностей мощности тепловыделения мал, т.е. не превышает толщины ПС $\delta \sim \chi/v$, эффекты вязкости и теплопроводности, существенные на мелких масштабах, сглаживают неоднородности температуры и скорости течения в основном объеме. Температурная стратификация будет иметь место и в этом случае, а масштаб, на котором меняется скорость в основном объеме, будет порядка R или H . Уравнение баланса энергии после усреднения по горизонталь-

ному сечению запишется в таком же виде, как при однородном распределении источников тепла.

Рассмотрим теперь случай аксиально-симметричного распределения мощности тепловыделения, описанного в разд. 2, но при глубине прогрева δ_Q , много меньшей толщины δ предполагаемого свободно-конвективного пограничного слоя на боковой границе:

$$\delta \gg \delta_Q. \tag{34}$$

В этом случае тепловыделение происходит в тонком слое вблизи границы, где роль конвекции суще-

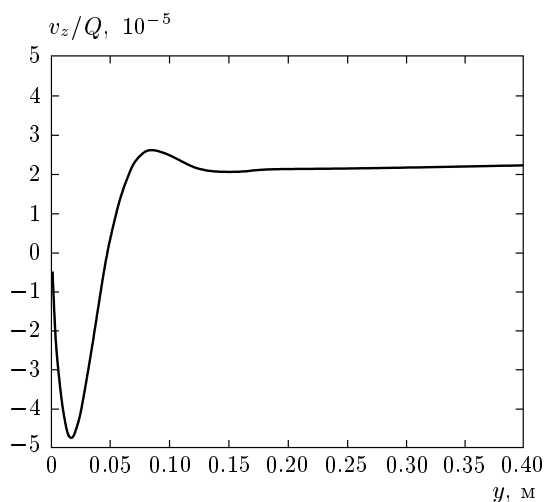


Рис. 5. Отношение вертикальной скорости к локальной плотности мощности тепловыделения при $z = 0.5H$ (неоднородный источник тепла)

ственно меньше роли теплопроводности, за счет которой выделяемое тепло целиком отводится к границе. Температура на периферии прогретого слоя (см. уравнение (3)) имеет порядок

$$T(z) \sim \delta_Q^2 \frac{\bar{Q}(z)}{\lambda}. \quad (35)$$

Решение задачи о свободной конвекции в этом случае будет совпадать с таковым для жидкости без внутренних источников тепла с эффективными граничными условиями, задаваемыми формулой (35).

5. ПОЛУСФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ОХЛАЖДАЕМАЯ ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА

Представленный выше анализ переносится на случай осесимметричного объема более сложной формы, например полусферической. При этом соотношения для основного объема останутся такими же, а уравнения для пограничного слоя и замыкающие соотношения запишутся с учетом геометрического фактора [2, 6]. Для них будут справедливы оценки, аналогичные (9)–(11). Условия, при которых реализуется режим температурной стратификации в основном объеме, останутся такими же. Баланс энергии вне пограничных слоев, как было сказано выше, будет описываться уравнением (28). Соответственно, режим стратификации будет определяться средней по горизонтальному сечению величиной объемной мощности тепловыделения. В частности, если эта величина не зависит от вертикальной

координаты, распределение температуры в области стратификации будет таким же, как при однородном тепловыделении.

Выше мы ставили адиабатическое граничное условие на верхней горизонтальной границе. В случае охлаждаемой верхней границы максимальная температура достигается не на ней, а внутри объема. При этом в области выше плоскости, проходящей через точку максимума температуры, создаются условия для конвекции Рэлея–Бенара. В интересном для практических приложений диапазоне чисел Рэлея ($10^8 < Ra_I < 10^{15}$) в этой области реализуется турбулентный режим конвекции, благодаря чему температура в ядре (вне пограничных слоев) практически постоянна. В этом случае распределение теплоотдачи будет определяться средней по слою Рэлея–Бенара плотностью источников тепла.

6. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

При помощи пакета программ FLUENT были проведены численные расчеты свободной конвекции в объеме цилиндрической формы с однородным тепловыделением и с распределением источника тепла, заданного выражением:

$$Q(y) = \frac{\bar{Q}}{\delta_Q} \exp\left(-\frac{y}{\delta_Q}\right), \quad (36)$$

при \bar{Q} , равном плотности источников тепла для случая равномерного разогрева. Здесь y — расстояние от боковой стенки. Температура боковой и нижней границ полагалась постоянной. Верхняя граница считалась теплоизолированной. На рис. 1–5 приведены результаты расчетов для

$$Ra_I = \frac{g\alpha\bar{Q}H^5}{\nu\chi\lambda} = 10^9,$$

при $R = H$, адиабатической верхней границе и глубине прогрева $\delta_Q = 0.1R$, что заведомо больше толщины ПС при данном числе Рэлея.

На приведенных графиках хорошо видно, что температурная стратификация присутствует во всем объеме вне пограничных слоев, в том числе в ненагреваемой области, вплоть до оси симметрии. Вертикальная скорость вне пограничного слоя быстро уменьшается (по такому же закону, как плотность источников тепла) с удалением от стенки. Это хорошо согласуется с теоретическими выводами, полученными выше.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы состоят в следующем.

При условии малости толщины пограничных слоев по сравнению с характерным масштабом неоднородностей распределения внутренних источников тепла общая структура свободной конвекции (область устойчивой стратификации, слой Рэлея–Бенара при охлаждаемой верхней границе, свободно-конвективные пограничные слои) сохраняется такой же, как при однородном тепловыделении (см. [2, 7]). При этом многие детали распределения источников тепла играют незначительную роль — определяющим фактором является среднее по горизонтальному сечению значение мощности тепловыделения в зависимости от вертикальной координаты $\overline{Q}(z)$. В случае $\overline{Q}(z) = \text{const}$ имеется полное количественное соответствие случаю однородного распределения источников тепла.

В случае, когда тепло выделяется в тонком по сравнению с толщиной ПС слое вблизи границы, структура течения соответствует свободной конвекции без внутренних источников тепла. Распределение эффективной температуры границы при этом определяется поверхностным тепловыделением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-08-17964).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Прандтль, *Гидроаэромеханика*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск (2000).
2. Л. А. Большов, П. С. Кондратенко, В. Ф. Стрижов, УФН **171**, 1051 (2001).
3. F. J. Asfia, V. Frantz, and V. K. Dhir, ASME J. Heat Transfer **118**, 31 (1996).
4. Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2001).
5. Б. Гебхарт, И. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия, *Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен*, Мир, Москва (1991).
6. L. A. Bolshov and P. S. Kondratenko, Int. J. Heat Mass Transfer **43**, 3897 (2005).
7. Д. Г. Григорук, П. С. Кондратенко, *Труды третьей российской национальной конф. по теплообмену (РНКТ-3)*, Москва (2002), т. 3, с. 57.
8. Д. Г. Григорук, П. С. Кондратенко, Д. В. Никольский, Изв. АН, сер. энергетика **2**, 86 (2004).