

БАЛЛИСТИЧЕСКАЯ АГРЕГАЦИЯ В СИММЕТРИЧНЫХ И НЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

А. А. Андриевский^а, С. Н. Гурбатов^б, А. Н. Соболевский^{а,с*}

^а *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия*

^б *Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, Россия*

^с *Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук
113556, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 декабря 2006 г.

Рассматриваются явные решения задачи о баллистической агрегации пылевидного вещества, частицы которого абсолютно неупруго слипаются при столкновениях — описание возникновения крупномасштабной структуры в космологии в рамках модели слипания (adhesion model), которая является обобщением приближения Зельдовича. Показана эквивалентность предлагавшихся ранее двух различных представлений решений в случае плоскосимметричного течения. Построены явные представления решений в цилиндрической и сферической симметрии. Приведены явные примеры, показывающие невозможность обобщения обеих рассматриваемых конструкций на случай многомерного течения, не обладающего симметрией.

PACS: 47.40.-x, 98.65.Dx, 02.40.Ft, 47.10.A-, 47.10.ab

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются явные решения задачи о баллистической агрегации пылевидного вещества с абсолютно неупруго слипающимися частицами. Такая задача представляет интерес как модель процесса возникновения крупномасштабной структуры распределения вещества во Вселенной, рассматриваемого в приближении Зельдовича [1]. Кратко напомним, как возникает эта модель.

Рассматривается плоская вселенная Эйнштейна–де Ситтера, заполненная массивным пылевидным веществом, которое движется в самосогласованном гравитационном поле. Это вещество участвует в движении двух типов: однородном космологическом расширении Хаббла и развивающейся на его фоне эволюции локальных флуктуаций полей плотности и скорости. При этом на поздней стадии гравитационной неустойчивости эволюции формируются ярко выраженные нелинейные крупномасштабные структуры.

В приближении Зельдовича [1] предполагается,

что при гравитационной неустойчивости определяющей является только возрастающая мода, причем и на сильно нелинейной стадии движение частиц остается таким же, как и на начальной линейной стадии. На основе лагранжева представления движения частиц это позволяет рассчитать плотность распределения материи и при сильных флуктуациях плотности. При описании такой динамики в приведенных координатах, сопутствующих хаббловскому расширению, и введении вместо мирового времени фактора роста возмущений (нелинейной функции времени) движение частиц пылевидного вещества сводится к движению частиц по инерции, или баллистически. В эйлеровом представлении эволюция локальных возмущений в новых переменных описывается уравнениями

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

выражающими законы сохранения массы и импульса. Здесь t — новый временной параметр, $\rho(\mathbf{x}, t)$ —

*E-mail: sobolevski@phys.msu.ru

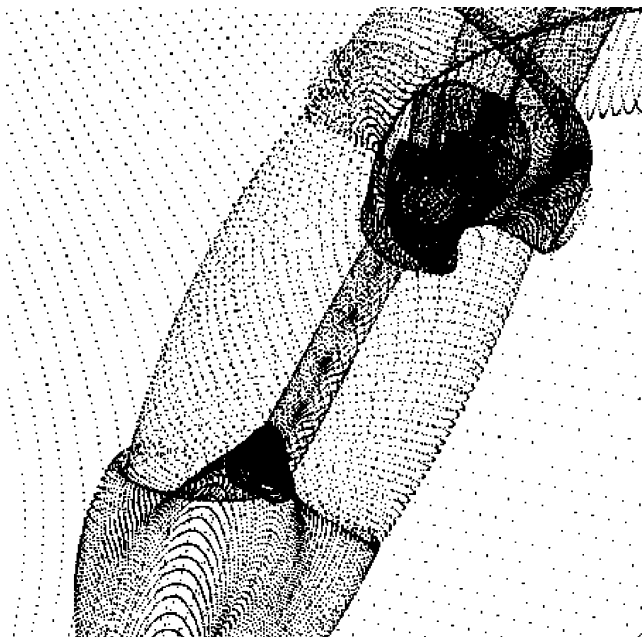


Рис. 1. Захват вещества в областях многопоточного течения (по данным двумерного численного моделирования [5])

приведенное поле плотности, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — приведенное поле скорости, \mathbf{x} — радиус-вектор в системе координат, сопутствующей хаббловскому расширению, $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ обозначает тензор с компонентами $u_i u_j$.

Физически приближение Зельдовича соответствует так называемым условиям параллелизма [2–4], которые предполагают, что peculiar скорость является потенциальным полем, параллельным вектору ускорения, а фактор пропорциональности не зависит от времени. Данные условия выполняются только для возрастающей моды на линейной стадии гравитационной неустойчивости, а также для одномерных возмущений. Тем не менее приближение Зельдовича на удивление хорошо описывает эволюцию плотности в начале нелинейной стадии гравитационной неустойчивости Вселенной. Это связано с тем, что при случайных начальных условиях первыми возникают квазиодномерные структуры с повышенной плотностью вещества, которые часто называют «блинами Зельдовича». Однако после возникновения многопоточности ширина квазиодномерных структур растет медленнее, чем это следует из приближения Зельдовича.

При пересечении траекторий частиц пылевидного вещества нарушается однозначность поля скорости: в одной точке пространства встречаются несколько потоков. Как показывают данные числен-

ного моделирования (см., например [5, 6]), гравитационное взаимодействие между потоками приводит к удержанию вещества в области относительно малого поперечного размера и высокой плотности (рис. 1). Происходит агрегация вещества в структурах типа тонких стенок, филаментов и кластеров. Процесс образования таких структур и называется гравитационной баллистической агрегацией.

В работах [7, 8] (см. также монографии [9, 10] и [1, 3, 11]) для построения решений, описывающих гравитационную баллистическую агрегацию, было предложено использовать уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (3)$$

Здесь диссипативное слагаемое имитирует торможение частиц в областях особенностей и переход крупномасштабного движения в осцилляторное (тепловое) внутри особенностей. Уравнение Бюргерса, естественно, не претендует на описание тонкой структуры особенностей, но позволяет дать качественное описание возникновения и эволюции крупномасштабной структуры. В пределе исчезающей вязкости $\mu \rightarrow 0$ в решениях уравнения Бюргерса действительно наблюдаются особенности типа бесконечно тонких стенок, филаментов и кластеров, которые качественно можно рассматривать как идеализированные аналоги крупномасштабных космологических структур. В космологии данное приближение принято называть моделью слипания (adhesion model). Предельное решение уравнения Бюргерса при $\mu \rightarrow 0$ совпадает с известным обобщенным решением квазилинейного уравнения первого порядка, решением Хопфа–Лакса–Олейник — следствием принципа наименьшего действия в механике.

Отметим, что задача о баллистической агрегации газа слипающихся частиц представляет и самостоятельный физический интерес (см., например [12, 13]).

Однако уравнение Бюргерса записывается в терминах лишь поля скоростей и не учитывает в общем случае законов сохранения массы и импульса.

Одним из вариантов модификации уравнения Бюргерса является изменение правой части этого уравнения [4, 14]. Однако, если не интересоваться тонкой структурой особенностей, можно поставить вопрос о том, соответствуют ли положения и скорости областей повышенной плотности особенностям уравнения Бюргерса. Известно, что для возмущений скорости с постоянной начальной плотностью положения особенностей уравнения Бюргерса совпадают с положениями кластеров слипшихся частиц

(см., например [9, 10, 15]). Отметим, что в одномерном случае удается провести весьма полное аналитическое исследование многопоточкового течения газа гравитационно взаимодействующих частиц и вне рамок приближения агрегации [16].

Указанный недостаток удается преодолеть в случае одномерного плоскосимметричного течения с произвольной начальной плотностью. Разными авторами [12, 13, 17, 18] были независимо получены явные представления решений задачи о баллистической агрегации в одномерном потоке частиц, слипающихся абсолютно неупруго с точным выполнением законов сохранения массы и импульса. В частности, в работах [17] и [18] было показано, что такие представления могут быть сформулированы в виде вариационных принципов, так что поле скоростей и плотности масс в любой момент времени может быть построено при помощи минимизации некоторых функционалов.

В настоящей работе дана физическая интерпретация этих принципов и обсуждается возможность их обобщения на случай, когда плоская симметрия отсутствует. В разд. 2 показана эквивалентность вариационных принципов, предложенных в работах [17] и [18], в случае одномерного плоскосимметричного течения, причем формулировка последнего существенно упрощена по сравнению с оригинальной публикацией. В разд. 3 конструкция решения обобщена на случай, когда течение обладает цилиндрической или сферической симметрией.

Оба вариационных принципа [17] и [18] допускают обобщение на случай двух- и трехмерного течения, не обладающего какой-либо симметрией. Однако данные обобщения, в отличие от одномерного течения, уже не являются эквивалентными. Более того, удается построить примеры, показывающие некорректность этих обобщений уже в двумерном случае. Многомерные обобщения вариационных принципов [17] и [18] и соответствующие примеры рассмотрены в разд. 4.

2. БАЛЛИСТИЧЕСКАЯ АГРЕГАЦИЯ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ СИММЕТРИИ

2.1. Кластеры и свободные частицы

В плоскосимметричном случае поля плотности $\rho(x, t)$ и скорости $u(x, t)$ зависят только от одной скалярной координаты x . Концентрация массы при неупругих столкновениях приводит к образованию параллельных массивных «стенок» в трехмерном пространстве, которые можно рассматривать как точечные структуры (кластеры) на координатной оси

x . Рассмотрим сначала эволюцию чисто дискретного распределения массы.

Пусть на координатной оси x расположены N частиц, в начальный момент времени $t = 0$ занимающие положения $y_1 < y_2 < \dots < y_N$, имеющие скорости u_1, u_2, \dots, u_N и массы m_1, m_2, \dots, m_N . С течением времени i -я частица описывает траекторию $x_i(t) = y_i + u_i t$, пока не столкнется с какой-либо другой частицей. При неупругом столкновении образуется кластер, содержащий в себе всю массу слипшейся группы частиц, скорость которого определяется законом сохранения импульса.

Описание динамики такой системы можно проводить, рассматривая столкновения частиц последовательно. Однако, учитывая упорядоченность частиц на прямой, можно найти положения всех частиц (включая и слипшиеся) непосредственно в произвольный момент времени. Поскольку траектории свободных частиц не могут пересекаться, любой кластер обязательно образуется из группы смежных частиц с номерами $i^- \leq i \leq i^+$. Его масса, скорость и положение совпадают с полной массой, скоростью и положением центра масс данной группы частиц, если бы они двигались как свободные:

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i^- \leq i \leq i^+} m_i, & u &= \frac{1}{m} \sum_{i^- \leq i \leq i^+} u_i m_i, \\ x &= \frac{1}{m} \sum_{i^- \leq i \leq i^+} (y_i + u_i t) m_i. \end{aligned} \tag{4}$$

Чтобы частица с номером i_0 к моменту $t > 0$ оставалась свободной и не была поглощена никаким кластером, ее траектория не должна пересекаться с траекториями центров масс любых групп частиц, примыкающих к i_0 слева или справа. Поэтому при любых i', i'' , удовлетворяющих условиям $1 \leq i' < i_0 < i'' \leq N$, координата $x_{i_0}(t)$ свободной частицы должна удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} \frac{1}{m'} \sum_{i' \leq i < i_0} (y_i + u_i t) m_i < x_{i_0}(t) = \\ = y_{i_0} + u_{i_0} t < \frac{1}{m''} \sum_{i_0 < i \leq i''} (y_i + u_i t) m_i, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$m' = \sum_{i' \leq i < i_0} m_i, \quad m'' = \sum_{i_0 < i \leq i''} m_i.$$

Пользуясь этими условиями и выражениями (4) для координат, скоростей и масс кластеров, можно определить координаты, скорости и массы всех частиц и

кластеров, существующих в момент $t > 0$, не вычисляя динамику в промежуточные моменты времени. Таким образом, формулы (4) и (5) позволяют полностью вычислить решение в случае чисто дискретного распределения массы.

В случае непрерывного распределения массы поля плотности и скорости в начальный момент выражаются функциями $\rho_0(x)$ и $u_0(x)$. При этом в формулах (4) и (5) следует заменить суммирование на интегрирование, индекс i — на непрерывно меняющуюся начальную координату y , а массу i -й частицы m_i — на элемент массы $\rho_0(y) dy$. В результате получается условие

$$\frac{\int_{y'}^{y_0} (y + u_0(y)t) \rho_0(y) dy}{\int_{y'}^{y_0} \rho_0(y) dy} \leq y_0 + u_0(y_0)t \leq \frac{\int_{y_0}^{y''} (y + u_0(y)t) \rho_0(y) dy}{\int_{y_0}^{y''} \rho_0(y) dy}. \quad (6)$$

Если данные неравенства выполнены при любом выборе $y' < y_0 < y''$, причем по крайней мере в одном из них реализуется строгое неравенство, то частица, в начальный момент $t = 0$ находившаяся в точке y_0 , будет оставаться свободной к моменту $t > 0$ и находится в точке $x(y_0, t) = y_0 + u_0(y_0)t$.

С другой стороны, пусть группа частиц, вначале расположенных на интервале $y^- < y < y^+$, к моменту t слипается и образует кластер, к которому с обеих сторон примыкают свободные частицы. Тогда масса, скорость и координата этого кластера задаются выражениями

$$m = \int_{y^-}^{y^+} \rho_0(y) dy, \quad u = \frac{1}{m} \int_{y^-}^{y^+} u_0(y) \rho_0(y) dy, \quad (7)$$

$$x = \frac{1}{m} \int_{y^-}^{y^+} (y + u_0(y)t) \rho_0(y) dy.$$

В совокупности формулы (6) и (7) позволяют определить для любой частицы, находившейся в начальный момент в точке y , ее положение $x(y, t)$ в момент

времени $t > 0$, не вычисляя динамику в промежуточные моменты времени, но для этого надо решить систему неравенств.

Получить из формул (6) и (7) явное выражения для $x(y, t)$ можно двумя способами, которые рассматриваются в двух следующих пунктах. Оба эти способа связаны с минимизацией некоторых функционалов, и поэтому их можно рассматривать как (обобщенные) вариационные принципы.

2.2. Вариационный принцип ERS

Введем в формулах (6) и (7) «массовую координату»:

$$m(y) = \int_{y_b}^y \rho_0(\eta) d\eta, \quad (8)$$

и положим

$$\Phi_0(m) = \int_{y_b}^{y(m)} \eta \rho_0(\eta) d\eta, \quad (9)$$

$$U_0(m) = \int_{y_b}^{y(m)} u_0(\eta) \rho_0(\eta) d\eta,$$

$$\Phi_t(m) = \Phi_0(m) + tU_0(m).$$

Нижний предел интегрирования y_b в формулах (8), (9) может выбираться произвольно. Здесь $\Phi_0(m)$ и $U_0(m)$ имеют смысл моментов инерции и импульса начального распределения вещества в интервале $[y_b, y(m)]$. Как легко проверить, обратная функция $y(m)$ и функция $u_0(y)$ выражаются следующим образом:

$$y(m) = \frac{d\Phi_0(m)}{dm}, \quad u_0(y(m)) = \frac{dU_0(m)}{dm}. \quad (10)$$

Поэтому, пока некоторая частица остается свободной, ее координата может быть выражена по формуле

$$x(y, t) = y + u_0(y)t = \frac{d\Phi_0}{dm} + \frac{d(tU_0)}{dm} = \frac{d\Phi_t}{dm}. \quad (11)$$

Однако после того, как траектории частиц начинают пересекаться, эта формула перестает правильно описывать положения частиц, поглощенных кластерами. Чтобы получить выражение для $x(y, t)$, справедливое при всех t , рассмотрим случаи свободной частицы и кластера по отдельности.

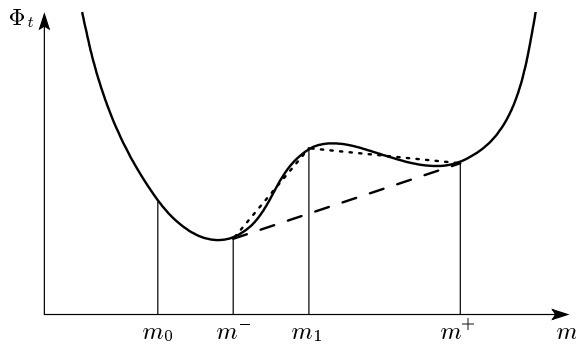


Рис. 2. Построение решения при помощи вариационного принципа ERS. В точке m_0 условие (12) выполняется с любыми $m' < m_0 < m''$; в точке m_1 условие (12) нарушается (например, при выборе $m' = m^-, m'' = m^+$ наклон левой пунктирной линии больше наклона правой). На отрезке (m^-, m^+) выпуклая оболочка $\text{conv } \Phi_t(m)$, показанная штриховой линией, не совпадает с $\Phi_t(m)$, а частицы, изображаемые точками отрезка (m^-, m^+) , в момент t слипаются и образуют кластер массы $m^+ - m^-$

Условие (6) для частицы остаться свободной при $t > 0$ принимает следующий вид: если $m_0 = m(y_0)$, то для любых $m' < m_0 < m''$

$$\frac{\Phi_t(m_0) - \Phi_t(m')}{m_0 - m'} < \frac{\Phi_t(m'') - \Phi_t(m_0)}{m'' - m_0}. \quad (12)$$

Иначе говоря, в точках, соответствующих свободным частицам, график функции $\Phi_t(m)$ должен совпадать с графиком своей выпуклой оболочки $\text{conv } \Phi_t$ — наибольшей выпуклой функции, не превосходящей Φ_t (рис. 2; график выпуклой оболочки можно представлять себе как форму, которую примет резиновая нить, плотно натянутая снизу на график функции Φ_t). Поскольку функция Φ_t дифференцируема, ее выпуклая оболочка также является дифференцируемой, и в точках, где их графики совпадают, производные $d\Phi_t/dm$ и $d(\text{conv } \Phi_t)/dm$ равны друг другу, а формула (11) принимает вид

$$x(y, t) = \frac{d\Phi_t}{dm} = \frac{d(\text{conv } \Phi_t)}{dm}. \quad (13)$$

Если же группа частиц, вначале расположенных на интервале $y^- < y < y^+$, к моменту t слипаются и образует кластер, к которому справа и слева примыкают свободные частицы, то на соответствующем интервале значений $m^- = m(y^-) < m < m^+ = m(y^+)$ условие (12) нарушается и график функции $\Phi_t(m)$ лежит выше хорды, проведенной через точки $\Phi_t(m^-)$ и $\Phi_t(m^+)$, а следовательно, строго выше своей выпуклой оболочки (см. рис. 2). При этом

из формул (7) следует, что положение кластера определяется формулой

$$x = \frac{\Phi_t(m^+) - \Phi_t(m^-)}{m^+ - m^-} = \frac{d(\text{conv } \Phi_t)}{dm}. \quad (14)$$

Дифференцируя данное выражение по t , нетрудно проверить также, что выполнен и закон сохранения импульса: импульс кластера равен суммарному импульсу всего попавшего в него вещества.

Таким образом, как в кластерах, так и на участках непрерывного распределения массы отображенные $x(y, t)$ задается производной выпуклой оболочки графика функции Φ_t :

$$x(y(m), t) = \frac{d(\text{conv } \Phi_t(m))}{dm}. \quad (15)$$

Это выражение для $x(y, t)$ в работе [18] названо «обобщенным вариационным принципом» по аналогии с вариационным принципом Хопфа–Лакса–Олейник — следствием принципа наименьшего действия в механике, которое применяется при построении решения уравнения Бюргера (3). Ниже данное выражение называется вариационным принципом ERS. Аналогичные представления для $x(y, t)$ были независимо получены в работах [12, 13].

В случае постоянной начальной плотности $\rho_0(y) \equiv 1$, когда $m \equiv y$, вариационный принцип ERS (15) совпадает с вариационным принципом Хопфа–Лакса–Олейник и, соответственно, с решением одномерного уравнения Бюргера при исчезающе малой вязкости.

2.3. Вариационный принцип S

За 10 лет до появления работы [18] иное, неявное вариационное представление для координат частиц $x(y, t)$ было предложено Шнирельманом [17]. Данный результат, первоначально опубликованный в малодоступном сборнике, представляет самостоятельный интерес и, как будет показано ниже, допускает более полное обобщение на многомерный случай, чем вариационный принцип ERS. В настоящем разделе дана новая, существенно упрощенная формулировка вариационного представления [17], которое мы будем называть вариационным принципом S.

Введем поле смещений

$$\xi_t(y) = x(y, t) - y. \quad (16)$$

Если пересечения траекторий не происходит, то $\xi_t(y) = u_0(y)t$, а координата $x(y, t) = y + \xi_t(y)$ монотонно возрастает при увеличении y :

$$y' + \xi_t(y') \leq y'' + \xi_t(y'') \quad (17)$$

для любых $y' < y''$.

В дальнейшем рассматриваются только такие поля смещений, для которых интеграл $\int \xi_t^2(y) \rho_0(y) dy$ сходится: для этого достаточно, чтобы начальные поля плотности $\rho_0(y)$ и скорости $u_0(y)$ (а вместе с последним и поле смещений) либо быстро убывали на бесконечности, либо были периодическими.

Условимся называть поле смещений, для которого не происходит пересечения траекторий частиц, т. е. условие (17) выполнено для любых $y' < y''$, допустимым. Согласно вариационному принципу S отображение $x(y, t)$ определяется выражением

$$x(y, t) = y + \bar{\xi}_t(y), \quad (18)$$

где $\bar{\xi}_t(y)$ — такое допустимое поле смещений, для которого квадратичная норма «невязки» по отношению к $u_0(y)t$ минимальна:

$$\int |\bar{\xi}_t(y) - u_0(y)t|^2 \rho_0(y) dy = \min. \quad (19)$$

В простейшем случае, когда траектории частиц не пересекаются, $\bar{\xi}_t(y) = u_0(y)t$, данное поле смещений является допустимым и невязка обращается в нуль. После пересечения траекторий допустимое поле смещений, для которого реализуется минимум в выражении (19), уже не может совпадать с u_0t .

С математической точки зрения задача минимизации невязки (19) сводится к ортогональному проектированию поля $u_0(y)t$ на множество допустимых смещений, которое ниже будет обозначаться \mathcal{X} . «Ортогональность» здесь понимается по отношению к функциональному скалярному произведению:

$$\xi \eta = \int \xi(y) \eta(y) \rho_0(y) dy, \quad (20)$$

квадрат нормы невязки (19) определяется как ее скалярное произведение на себя:

$$\begin{aligned} \|\xi_t - u_0t\|^2 &= \int |\xi_t(y) - tu_0(y)|^2 \rho_0(y) dy = \\ &= (\xi_t - u_0t)(\xi_t - u_0t). \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что допустимые смещения образуют выпуклое множество: если поля смещений $\xi_1(y)$, $\xi_2(y)$ допустимы, то их «смесь» $(1 - \alpha)\xi_1(y) + \alpha\xi_2(y)$, где $0 < \alpha < 1$, также допустима. Кроме того, множество допустимых смещений \mathcal{X} замкнуто: предел любой последовательности допустимых смещений также является допустимым смещением. Из функционального анализа хорошо известно (см., например [19]), что ортогональная проекция на замкнутое

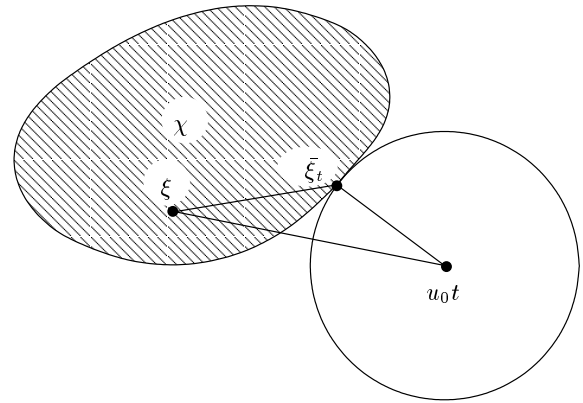


Рис. 3. Ортогональное проектирование на выпуклое множество \mathcal{X} в гильбертовом пространстве; изображено сечение множества \mathcal{X} гиперплоскостью, проходящей через элементы u_0t , $\bar{\xi}_t$ и ξ . Поскольку точка $\bar{\xi}_t$ ближайшая к u_0t в множестве \mathcal{X} , все это множество лежит вне сферы, построенной на радиусе $(u_0t, \bar{\xi}_t)$. Поэтому в треугольнике, соединяющем точки u_0t , $\bar{\xi}_t$ и ξ , угол при вершине $\bar{\xi}_t$ больше прямого, т. е. квадрат противолежащей ему стороны больше суммы квадратов двух прилежащих (неравенство (24))

выпуклое множество \mathcal{X} существует и единственна, так что вариационный принцип S всегда приводит к однозначно определенному результату.

Сформулированный вариационный принцип не дает явного выражения для поля смещений частиц, закон сохранения массы и импульса при агрегации частиц из него также явно не следует. Чтобы обосновать вариационный принцип S, покажем, что его формулировка (19) приводит к такому же результату, как и применение вариационного принципа ERS. Обозначим поле смещений, определяемое отображением $x(y, t)$ из формулы (15), как

$$\tilde{\xi}_t(y(m)) = \frac{d(\text{conv } \Phi_t(m))}{dm} - y(m). \quad (22)$$

Достаточно проверить, что это поле смещений приводит к минимуму выражение (19), т. е. что для любого другого допустимого смещения ξ в множестве \mathcal{X}

$$\|\xi - u_0t\|^2 > \|\tilde{\xi}_t - u_0t\|^2. \quad (23)$$

Из рис. 3 видно, что в действительности ортогональная проекция на выпуклое множество \mathcal{X} должна удовлетворять даже более сильному неравенству

$$\|\xi - u_0t\|^2 > \|\tilde{\xi}_t - u_0t\|^2 + \|\xi - \tilde{\xi}_t\|^2, \quad (24)$$

которое мы и будем проверять.

Пользуясь формулой (21), перепишем неравенство (24) в виде

$$(\tilde{\xi}_t - \xi)(u_0 t - \tilde{\xi}_t) > 0 \tag{25}$$

и вычислим его левую часть:

$$\begin{aligned} (\tilde{\xi}_t - \xi)(u_0 t - \tilde{\xi}_t) &= \\ &= \int (\tilde{\xi}_t(y) - \xi(y))(u_0(y)t - \tilde{\xi}_t(y))\rho_0(y) dy. \end{aligned} \tag{26}$$

Заметим, что

$$u_0 t - \tilde{\xi}_t = y + u_0 t - x(y, t) = \frac{\partial \Phi_t}{\partial m} - \frac{\partial(\text{conv } \Phi_t)}{\partial m}, \tag{27}$$

где $y = y(m)$. Это выражение отлично от нуля на некоторой совокупности отрезков (m_i^-, m_i^+) оси переменной m , на которых выполняется условие $\Phi_t(m) > \text{conv } \Phi_t(m)$. Поэтому интеграл (26) распадается на сумму интегралов по отрезкам $(y(m_i^-), y(m_i^+)) = (y_i^-, y_i^+)$, на каждом из которых значение $x(y, t)$ постоянно:

$$x(y(m), t) = \frac{\Phi_t(m_i^+) - \Phi_t(m_i^-)}{m_i^+ - m_i^-} = x_i,$$

а подынтегральное выражение в (26) распадается на произведение функции

$$\tilde{\xi}_t(y) - \xi(y) = x_i - (y + \xi(y)), \tag{28}$$

которая убывает, поскольку $\xi(y)$ — допустимое поле смещений, и непрерывной функции $(u_0(y)t - \tilde{\xi}_t(y))\rho_0(y)$. По формуле Бонне для среднего значения произведения монотонной функции на непрерывную¹⁾ на отрезке (y_i^-, y_i^+) найдется такая точка y_i , что

$$\begin{aligned} &\int_{y_i^-}^{y_i^+} (x_i - y - \xi(y))(u_0(y)t - \tilde{\xi}_t(y))\rho_0(y) dy = \\ &= (x_i - y_i^- - \xi(y_i^-)) \int_{y_i^-}^{y_i} (u_0(y)t - \tilde{\xi}_t(y))\rho_0(y) dy + \\ &+ (x_i - y_i^+ - \xi(y_i^+)) \int_{y_i}^{y_i^+} (u_0(y)t - \tilde{\xi}_t(y))\rho_0(y) dy. \end{aligned} \tag{29}$$

¹⁾ Если функция $f(x)$ монотонна, а $g(x)$ непрерывна, то на отрезке (a, b) найдется такая точка c , что $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx$.

Учтем, что при $y_i^- \leq z \leq y_i^+$

$$\begin{aligned} &\int_{y_i^-}^z (u_0(y)t - \tilde{\xi}_t(y))\rho_0(y) dy = \\ &= \int_{m_i^-}^{m(z)} \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial m} - \frac{\partial(\text{conv } \Phi_t)}{\partial m} \right) dm = \\ &= \Phi_t(m(z)) - \text{conv } \Phi_t(m(z)) \geq 0, \end{aligned} \tag{30}$$

причем этот интеграл обращается в нуль только тогда, когда $z = y_i^+$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\int_{y_i}^{y_i^+} (u_0(y)t - \tilde{\xi}_t(y))\rho_0(y) dy = \\ &= - \int_{y_i^-}^{y_i} (u_0(y)t - \tilde{\xi}_t(y))\rho_0(y) dy \end{aligned} \tag{31}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} &\int_{y_i^-}^{y_i^+} (x_i - y - \xi(y))(u_0(y)t - \tilde{\xi}_t(y))\rho_0(y) dy = \\ &= (y_i^+ + \xi(y_i^+) - y_i^- - \xi(y_i^-)) (\Phi_t(m(y_i)) - \\ &\quad - \text{conv } \Phi_t(m(y_i))) > 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Тогда и весь интеграл (26) положителен, так как он распадается на сумму положительных слагаемых. Следовательно, поле смещений $\tilde{\xi}_t$ удовлетворяет неравенству (25) и потому реализует минимум в вариационном принципе S (19). С другой стороны, единственное решение задачи минимизации (19) должно приводить к минимуму и в вариационном принципе ERS.

Таким образом, мы показали, что в течениях плоской симметрии оба вариационных принципа приводят к одному и тому же явному выражению для координат частиц.

3. БАЛЛИСТИЧЕСКАЯ АГРЕГАЦИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

В отсутствие плоской симметрии положение кластера (особенности плотности) зависит не только от локальной плотности слипающихся частиц, но и от кривизны локального поля потенциала скорости.

Пусть начальные поля плотности ρ_0 и скорости \mathbf{u}_0 зависят от d -мерного радиус-вектора \mathbf{y} и характеризуются сферической симметрией с центром в начале координат:

$$\rho_0(\mathbf{y}) = \rho_0(|\mathbf{y}|), \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{y}) = \frac{u_0(|\mathbf{y}|)}{|\mathbf{y}|} \mathbf{y}. \quad (33)$$

При $d = 2$ данная симметрия является цилиндрической, а при $d = 3$ — истинно сферической, но результаты настоящего раздела остаются правильными при любом $d > 1$, включая нефизический случай более высоких размерностей.

Чтобы перенести на данный случай полученную выше конструкцию решения задачи о баллистической агрегации, в формулах (6) и (7) необходимо заменить элемент массы $\rho_0(y) dy$ на $\rho_0(|\mathbf{y}|)\Omega_d d\mathbf{y}$, где $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ — площадь поверхности единичной сферы в d -мерном пространстве [20]. Рассуждая аналогично п. 2.1, введем массовую координату

$$m(|\mathbf{y}|) = \int_0^{|\mathbf{y}|} \rho_0(\eta)\Omega_d d\eta \quad (34)$$

и положим

$$\begin{aligned} \Phi_0(m) &= \int_0^{y^{(m)}} \eta \rho_0(\eta)\Omega_d d\eta, \\ U_0(m) &= \int_0^{y^{(m)}} u_0(\eta)\rho_0(\eta)\Omega_d d\eta, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$y(m) = \frac{d\Phi_0(m)}{dm}, \quad u_0(y(m)) = \frac{dU_0(m)}{dm}. \quad (36)$$

Доопределяя $\Phi_0(m) = \Phi_0(-m)$, $U_0(m) = U_0(-m)$ при $m < 0$ и полагая $\Phi_t(m) = \Phi_0(m) + tU_0(m)$, получим явное представление решения в виде, формально совпадающем с (15), но при новом определении функции Φ_t :

$$x(y(m), t) = \frac{d(\text{conv } \Phi_t(m))}{dm} \quad \text{при } m > 0. \quad (37)$$

Легко проверить, что при таком определении $\Phi_t(m)$ закон сохранения импульса выполняется в произвольном угловом секторе. Определение функции $\Phi_t(m)$ при отрицательных значениях переменной m требуется потому, что при центростремительном характере течения в начале координат может образовываться кластер конечной массы $M(t)$, соответствующий отрезку выпуклой оболочки между точками $m = \pm M(t)$.

4. О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ В ОТСУТСТВИЕ СИММЕТРИИ

Можно ли обобщить полученную выше явную конструкцию решения задачи о баллистической агрегации на случай несимметричных течений?

Математическая разрешимость задачи о баллистической агрегации с учетом законов сохранения массы (1) и импульса (2) в течении общего вида, не обладающем симметрией, установлена в статье [21]. Однако предложенное там доказательство теоремы существования неконструктивно и не позволяет выяснить структуру решения или непосредственно указать численный алгоритм его приближенного построения.

Напротив, оба вариационных принципа S и ERS дают подробную информацию о структуре решения и могут применяться для его численного построения. Более того, когда начальное поле скоростей $\mathbf{u}_0(\mathbf{y})$ потенциально, эти вариационные принципы допускают естественные обобщения на многомерный случай без предположения о какой-либо симметрии начальных данных. Тем не менее удается в явном виде построить примеры неплоских или несимметричных течений, для которых указанные обобщения вариационных принципов S и ERS приводят к некорректным ответам.

4.1. Многомерное обобщение вариационного принципа ERS

Чтобы обобщить вариационный принцип ERS (15) на многомерный случай, достаточно ввести векторные «массовые» координаты \mathbf{m} той же размерности, что радиус-векторы \mathbf{y} :

$$\left| \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{y}} \right| = \rho_0(\mathbf{y}), \quad (38)$$

и определить функции $\Phi_0(\mathbf{m})$, $U_0(\mathbf{m})$ так, чтобы выполнялись аналоги формул (10):

$$\mathbf{y}(\mathbf{m}) = \nabla_{\mathbf{m}} \Phi_0, \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{m}) = \nabla_{\mathbf{m}} U_0; \quad (39)$$

тогда естественно определить $\mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$ по формуле, аналогичной (15):

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}(\mathbf{m}), t) = \nabla_{\mathbf{m}} \text{conv}(\Phi_t + U_0 t). \quad (40)$$

Не останавливаясь на способе определения функций $\mathbf{m}(\mathbf{y})$, $\Phi_0(\mathbf{m})$ и $U_0(\mathbf{m})$ в общем случае, заметим, что при равномерной начальной плотности $\rho_0(\mathbf{y}) \equiv 1$ достаточно принять

$$\mathbf{m} = \mathbf{y}, \quad \Phi_0(\mathbf{m}) = \frac{|\mathbf{m}|^2}{2} \quad (41)$$

и выбрать в качестве U_0 потенциал начального поля скоростей \mathbf{u}_0 . Однако уже в этом случае можно показать, что предлагаемая модификация вариационного принципа ERS приводит к некорректному результату.

Рассмотрим сферическую волну, распространяющуюся из начала координат: в начальный момент вещество во всем пространстве покоится, а потенциал скоростей U_0 равен константе всюду, кроме небольшой области в центре распространения волны. Асимптотически при больших t размер этой области и мелкая структура поля скорости внутри нее становятся несущественными, и начальный потенциал скоростей можно приближенно заменить разрывной функцией:

$$U_0(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{y} = 0, \\ U > 0, & |\mathbf{y}| > 0. \end{cases} \quad (42)$$

Поэтому радиус $R(t)$ сферической волны в момент $t > 0$ определяется производной $d(\text{conv } \Phi_t)/d|\mathbf{y}|$ при $|\mathbf{y}| = 0$, где

$$\begin{aligned} \Phi_t(\mathbf{y}) &= \frac{|\mathbf{y}|^2}{2} + U_0(\mathbf{y})t, \\ \text{conv } \Phi_t(\mathbf{y}) &= \begin{cases} \sqrt{2Ut}|\mathbf{y}|, & 0 \leq |\mathbf{y}| \leq \sqrt{2Ut}, \\ \frac{|\mathbf{y}|^2}{2} + Ut, & \sqrt{2Ut} \leq |\mathbf{y}|. \end{cases} \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, рассматриваемое обобщение вариационного принципа ERS совпадает с решением многомерного уравнения Бюргера при исчезающе малой вязкости и предсказывает, что радиус сферической волны растет как $\sqrt{2Ut}$ независимо от размерности задачи.

С другой стороны, выражение для координаты кластера может быть получено и непосредственно из простых физических соображений. Полная масса фронта сферической волны в момент t равна массе вещества, первоначально распределенного в охватываемом им объеме, т. е. пропорциональна R^d , где $d = 2$ в цилиндрическом случае и $d = 3$ в сферическом случае. Поскольку все движения происходят только в радиальном направлении, полный импульс в каждом секторе должен сохраняться. Поэтому произведение скорости фронта на его массу должно оставаться постоянным: $R^d dR/dt = \text{const}$, откуда следует, что

$$R(t) \propto t^{1/(d+1)}. \quad (44)$$

Именно такая зависимость радиуса фронта волны от времени предсказывается методом, приведенным

в разд. 3, а формула (40) оказывается верной лишь при $d = 1$.

Интересно выяснить зависимость от времени кинетической энергии вещества. Поскольку в рассматриваемой задаче движется лишь фронт сферической волны, полная кинетическая энергия равна произведению его массы на квадрат радиальной скорости. Поэтому в физически корректном решении (44) энергия изменяется по закону $E \propto R^{-d} \propto t^{-d/(d+1)}$, в то время как формула (40) предсказывает для энергии зависимость $E \propto t^{(d-2)/2}$, т. е. кинетическая энергия сферической волны ($d = 3$) оказывается неограниченно возрастающей!

Хотя в выборе массовых координат $\mathbf{m}(\mathbf{y})$ и возможен некоторый произвол, его использование не позволяет устранить полученное противоречие: в случае постоянной начальной плотности ρ_0 можно показать [22], что единственный способ ввести массовые координаты без нарушения сферической симметрии дается формулами (41). Таким образом, вариационный принцип ERS, основанный на построении выпуклой оболочки, не может быть перенесен даже на случай сферически-симметричного многомерного течения.

С другой точки зрения данное обобщение вариационного принципа ERS обсуждалось в работе [23], где также была показана его некорректность.

4.2. О многомерном обобщении вариационного принципа S

Вариационный принцип S мог бы быть обобщен на многомерный случай, если бы удалось определить класс допустимых полей смещений так, чтобы решение задачи о баллистической агрегации по-прежнему определялось ортогональной проекцией.

В одномерном случае поле смещений $\xi(y)$ является допустимым, если функция $x(y) = y + \xi(y)$ монотонно возрастает, так что ее первообразная является выпуклой функцией. Заметим, что как в одномерном, так и в многомерном случае «смесь» двух выпуклых функций Φ, Ψ вида $(1 - \alpha)\Phi + \alpha\Psi$, где $0 \leq \alpha \leq 1$, всегда является выпуклой, а операция дифференцирования линейна. Поэтому класс градиентов выпуклых функций является выпуклым подмножеством соответствующего функционального пространства. Условимся называть поле смещений $\xi(\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}$ допустимым, если $\mathbf{x}(\mathbf{y})$ является градиентом некоторой выпуклой функции. Тогда

многомерное обобщение вариационного принципа S состоит в минимизации невязки

$$\int |\xi_t(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_0(\mathbf{y})t|^2 \rho_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \min \quad (45)$$

в классе таких допустимых полей смещений.

Пусть начальное поле скоростей \mathbf{u}_0 потенциально, так что

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(\mathbf{y}) &= \nabla U_0(\mathbf{y}), \\ \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) &= \mathbf{y} + \nabla U_0(\mathbf{y})t = \nabla \Phi_t(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\Phi_t(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}|\mathbf{y}|^2 + U_0(\mathbf{y})t. \quad (47)$$

Очевидно, что при $t = 0$ функция $\Phi_0(\mathbf{y}) = |\mathbf{y}|^2/2$ выпукла.

Пересечения траекторий частиц не происходит, пока якобиан отображения $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$ отличен от нуля (положителен). Поскольку этот якобиан совпадает с определителем матрицы вторых производных $(\partial_i \partial_j \Phi_t)$, при этом сохраняется выпуклость функции $\Phi_t(\mathbf{y})$. Поэтому поле смещений $\mathbf{u}_0(\mathbf{y})t$ остается допустимым, и невязка (45) равна нулю. Напротив, в момент, когда какие-либо две бесконечно близкие траектории впервые пересекаются, определитель матрицы вторых производных Φ_t обращается в нуль, и в дальнейшем эта функция теряет выпуклость, а поле смещений, реализующее минимум в формуле (45), уже не может совпадать с $\mathbf{u}_0 t$.

В сферически-симметричном случае предлагаемое обобщение вариационного принципа S (45) правильно определяет решение. Действительно, минимизацию в выражении (19) достаточно осуществлять для полей смещений $\xi_t(y)$, являющихся градиентами сферически-симметричных выпуклых функций. Это позволяет выполнить интегрирование по телесным углам и перейти к эквивалентной одномерной задаче с эффективным элементом массы $\rho_0(|\mathbf{y}|)\Omega_d d\mathbf{y}$, как и в разд. 3. Теперь, проводя рассуждение аналогично п. 2.3, легко убедиться, что решение задачи минимизации достигается на выпуклой оболочке (37), т. е. совпадает с приведенным в разд. 3.

Тем не менее следующий пример показывает, что предлагаемое обобщение может приводить к некорректному результату в менее симметричных течениях. Проверим, что вариационный принцип неправильно описывает распределение вещества в двумерном случае при взаимодействии двух одинаковых цилиндрических волн, центры которых расположены на расстоянии $2r$ друг от друга, а радиусы

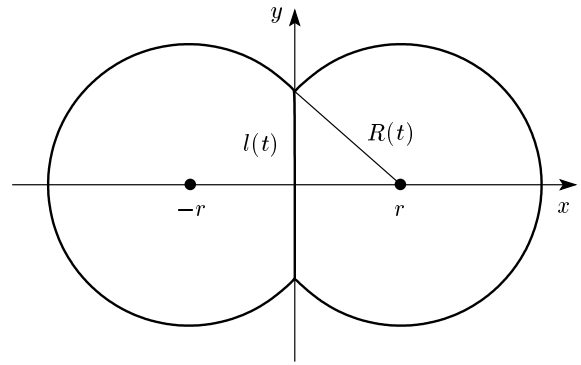


Рис. 4. Две цилиндрические волны: пример течения, в котором предлагаемое многомерное обобщение вариационного принципа S (45) приводит к некорректному результату. Показано положение фронта волны при $(r/K)^3 < t < t^* = (5/2)^{5/2}(r/K)^3$ (см. пояснения в тексте)

возрастают по закону $R(t) = Kt^{1/3}$ (ср. с формулой (44)). При $t > (r/K)^3$ фронты обеих волн начинают взаимодействовать, в результате чего образуется плоский участок фронта, внутри которого движение вещества происходит в продольном направлении (рис. 4).

Простая геометрия данного течения позволяет вычислить поле смещений, характеризующее распределение вещества в цилиндрических фронтах и на плоском участке при $t > (r/K)^3$, непосредственно из законов сохранения массы и импульса. Пусть система координат на плоскости выбрана так, что центры волн находятся в точках $(\pm r, 0)$. В момент времени t плоский участок занимает отрезок длины

$$2l(t) = 2\sqrt{R^2(t) - r^2},$$

лежащий на координатной оси y . В результате неупругого слипания в концах отрезка накапливается приходящее из сферических участков фронта вещество, скорость движения которого направлена от центра к концам и равна $v = \dot{R}l/R$. Поскольку на каждом из концов отрезка его длина увеличивается с большей скоростью

$$\dot{l} = \frac{R\dot{R}}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \dot{R}\frac{R}{l} > \dot{R}\frac{l}{R} = v, \quad (48)$$

движение вещества внутри отрезка можно рассматривать без учета влияния его концов.

Обозначим $T(l)$ обратную функцию к $l(t)$,

$$T(l) = \frac{1}{K^3}(l^2 + r^2)^{3/2}, \quad (49)$$

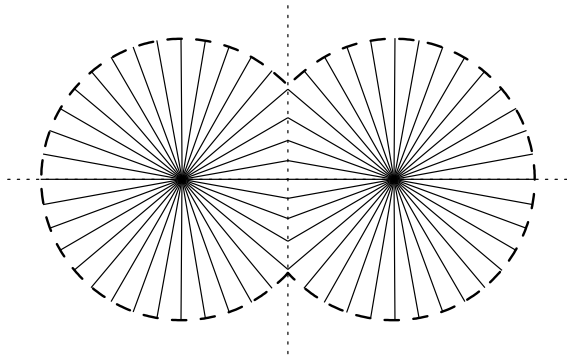


Рис. 5. Сплошные линии, выходящие из точек $(\pm r, 0)$, показывают исходные положения частиц, находящихся в различных точках плоскости xy при $(r/K)^3 < t < t^* = (5/2)^{5/2}(r/K)^3$ в течении, изображенном на рис. 4. Частицы, попадающие в каждую из точек плоского участка фронта, в начальный момент времени расположены на ломаных линиях в центральной части рисунка

и будем пользоваться величиной l как параметром. Поскольку $R(t) = Kt^{1/3}$, имеем $\dot{R}/R = 1/3t$, так что $v(l) = l\dot{R}/R = 1/3T(l)$. Поэтому в момент времени $t > T(l)$ элемент массы, параметризованный величиной l , будет иметь координату

$$y(l, t) = l + v(l)(t - T(l)) = \frac{2}{3}l + \frac{tl}{3T(l)}. \quad (50)$$

Распределение массы внутри плоского участка фронта будет оставаться непрерывным, пока отображение $l \mapsto y(l, t)$ будет сохранять монотонность, т. е. пока

$$\frac{\partial y}{\partial l} = \frac{2}{3} + \frac{t}{3} \left(\frac{l}{T(l)} \right)' > 0$$

при всех l . Это неравенство выполняется при $(r/K)^3 < t < t^*$, где

$$t^* = \min_{l > r/\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{(l/T(l))'} \right) = \left(\frac{5}{2} \right)^{5/2} \left(\frac{r}{K} \right)^3. \quad (51)$$

Здесь минимизация осуществляется по $l > r/\sqrt{2}$, поскольку при $0 \leq l \leq r/\sqrt{2}$ условие $\partial y/\partial l \geq 0$ выполняется при любых t . Несколько более сложная выкладка, основанная на конструкции вариационного принципа ERS, позволяет найти распределение массы на плоском участке фронта и при $t > t^*$.

Теперь обратимся к предложенному обобщению вариационного принципа S. Заметим, что при $T(l) \leq t < t^*$ исходные положения частиц, находящихся в точке $(0, y(l, t))$ плоского участка фронта, занимают на плоскости исходных данных

двухзвенную ломаную линию, соединяющую точку $(0, l)$ с центрами обоих фронтов (рис. 5). Однако прообраз любой точки при отображении, осуществляемом градиентом выпуклой функции, обязан сам быть выпуклым множеством: точкой, отрезком или двумерной выпуклой фигурой. Поскольку прообразы некоторых точек в построенном поле смещений являются невыпуклыми ломаными, такое поле смещений не является допустимым в указанном выше смысле, и предложенное обобщение вариационного принципа S не может корректно описывать движение вещества в задаче о двух цилиндрических волнах.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены вариационные представления решения задачи о баллистической агрегации пылевидного вещества, частицы которого абсолютно неупруго слипаются при столкновениях. Данная модель представляет интерес как приближенное описание возникновения крупномасштабной структуры в космологии в рамках модели слипания (adhesion model), являющейся обобщением приближения Зельдовича.

В случае одномерного плоскосимметричного течения предложена новая формулировка вариационного представления S, существенно упрощенная по сравнению с исходной [17]. Показана эквивалентность в одномерном случае вариационных представлений ERS и S и предложены обобщения обоих вариационных представлений на многомерный случай. Приведены конкретные примеры конфигураций течений, демонстрирующие неэквивалентность этих обобщений. Показано, что вариационный принцип ERS корректно описывает лишь плоскосимметричные течения, а предложенное нами обобщение вариационного принципа S правильно описывает решения в цилиндрически- и сферически-симметричных случаях, но приводит к нефизическим результатам в менее симметричных течениях.

Авторы благодарны А. И. Шнирельману за ценные обсуждения.

Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-02-16517) и программы «Ведущие научные школы» (грант № НШ-5200.2006.2). Работа третьего автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00824), а также совместного гранта РФФИ и CNRS (05-01-02807-НЦНИЛ-а). Вто-

рой и третий авторы выражают благодарность Министерству образования Франции за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. B. Zel'dovich, *Astron. Astrophys.* **5**, 84 (1970).
2. P. J. Peebles, *The Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton Univ. Press, Princeton (1980).
3. M. Vergassola, B. Dubrulle, U. Frisch et al., *Astron. Astrophys.* **289**, 325 (1993).
4. T. Buchert, A. Domínguez, and J. Pérez-Mercader, *Astron. Astrophys.* **349**, 343 (1999).
5. A. L. Melott and S. F. Shandarin, *Astrophys. J.* **343**, 26 (1989).
6. D. H. Weinberg and J. E. Gunn, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **247**, 260 (1990).
7. С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, *Изв. вузов, Радиофизика* **27**, 456 (1984).
8. S. N. Gurbatov, A. I. Saichev, and S. F. Shandarin, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **236**, 385 (1989).
9. С. Н. Гурбатов, А. Н. Малахов, А. И. Саичев, *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии*, Наука, Москва (1990).
10. S. N. Gurbatov, A. N. Malakhov, and A. I. Saichev, *Nonlinear Random Waves and Turbulence in Nondispersive Media: Waves, Rays, Particles*, Wiley, New York (1992).
11. С. Н. Гурбатов, А. Ю. Мошков, *ЖЭТФ* **124**, 1329 (2003).
12. P. A. Martin and J. Piasecki, *J. Stat. Phys.* **76**, 447 (1994).
13. Y. Brenier and E. Grenier, *SIAM J. Numer. Anal.* **35**, 2317 (1998).
14. T. Buchert and A. Domínguez, *Astron. Astrophys.* **335**, 395 (1999).
15. S. N. Gurbatov and A. I. Saichev, *Chaos* **3**, 333 (1993).
16. E. Aurell, D. Fanelli, S. N. Gurbatov et al., *Physica D* **186**, 171 (2003).
17. A. I. Shnirel'man, *Lect. Notes Math.*, Springer-Verlag, Berlin (1986), Vol. 1214, p. 117.
18. W. E. Y. Rykov, and Y. Sinai, *Comm. Math. Phys.* **177**, 349 (1996).
19. A. V. Balakrishnan, *Lect. Notes Operations Res. Math. Systems*, Springer-Verlag, Berlin (1971), Vol. 42.
20. С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, *Введение в теорию нелинейных волн гидродинамического типа*, Изд-во ННГУ, Н. Новгород (2003).
21. M. Sever, *Differential Integral Equations* **14**, 1077 (2001).
22. L. Caffarelli and Y. Li, *Comm. Pure Appl. Math.* **56**, 549 (2003).
23. Y. G. Rykov, *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B* **5**, 55 (2002).