

# ДИНАМИКА ДИСПЕРСИОННОГО КВАНТОВОГО НЕРАЗРУШАЮЩЕГО ИЗМЕРЕНИЯ ЧИСЛА ФОТОНОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИКРОМАЗЕРА

*А. В. Козловский\**

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 марта 2006 г.

Проведено численное моделирование дисперсионного квантового неразрушающего измерения числа фотонов фоковского состояния поля в резонаторе микромазера. Расчеты показали, что важнейшим свойством дисперсионного взаимодействия атома с полем при использовании его в атомной интерферометрии Рэмзи является крайне высокая чувствительность динамики состояний атомов и поля к значениям основных параметров системы. В случае монокинетического потока атомов, пропускаемых через резонатор микромазера, малое, практически не контролируемое, отклонение значений параметров системы (длины пробега атома в резонаторе, скорости атомов, отстройки частот и констант связи атомов и поля) приводит к качественному изменению состояния поля. При этом возможно формирование в резонаторе как фоковского состояния, так и суперпуассоновского состояния с большими флуктуациями числа фотонов. Наличие случайного разброса скоростей обеспечивает уверенное создание фоковского состояния поля для любых значений параметров системы, однако регистрация интерференционной картины Рэмзи при этом оказывается невозможной, поскольку вероятность регистрации атомов в верхнем или нижнем электронном состоянии становится случайной величиной с почти равномерным распределением в интервале от нуля до единицы, не зависящим от числа фотонов в резонаторе.

PACS: 42.50.Dv, 03.65.Ta

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В ряду известных в настоящее время схем квантовых неразрушающих измерений (КНИ) следует отметить способ квантового неразрушающего измерения числа фотонов, использующий одноатомный микромазер [1–3]. В данной схеме КНИ, предполагается, что в результате дисперсионного взаимодействия с электромагнитным полем высокочастотного резонатора последовательности возбужденных атомов, пропускаемых через него, в результате селективного измерения их состояний на выходе из резонатора, создается чистое энергетическое состояние внутрирезонаторного поля (фоковское состояние). В схеме такого КНИ, предложенной в работе [1], информация о числе фотонов извлекается методом Рэмзи путем анализа периодической структуры зависимости вероятности обнаружения выходящего из резонатора атома в нижнем или верхнем энергетиче-

ском состоянии. Эта зависимость проявляет характерную структуру интерференционных полос, интервал между которыми зависит от числа фотонов в резонаторе. При этом предполагается, что амплитуды вероятности атомных состояний при прохождении через резонатор приобретают лишь линейный по времени фазовый сдвиг, пропорциональный числу фотонов. Это приближение используется в работах [1–3] и полагается справедливым в условиях большой отстройки частоты поля от частоты перехода атома. Наличие же сдвига фазы обусловлено присутствием других нерезонансных полю атомных состояний, приводящих к сдвигу энергии верхнего мазерного состояния атома, пропорциональному числу фотонов в резонаторе. Для щелочных атомов в ридберговских состояниях такой сдвиг фазы может быть значителен даже для малого числа фотонов при больших значениях константы связи атома с полем, характерных для ридберговских атомов в полости малого объема.

\*E-mail: kozlovsk@sci.lebedev.ru

Согласно проективному постулату квантового измерения, детектирование того или иного состояния атома (путем селективной ионизации [1–5]) означает операцию проецирования состояния системы на измеренное собственное состояние атома. Состояние полевой подсистемы при этом переходит в суперпозицию фоковских состояний, соответствующую данному результату измерения состояния атомной подсистемы (редукция состояния). В связи с этим важным является тот факт, что в результате взаимодействия атома с полем система атом + поле переходит в перепутанное состояние, которое не может быть представлено в виде произведения атомных и полевых состояний, что означает установление квантовой корреляции между взаимодействующими подсистемами. Селективное измерение состояния атома приводит, в свою очередь, к распутыванию состояния системы, состояние поля при этом подвергается неунитарной эволюции.

Следуя логике авторов работ [1, 2], процесс формирования поля в собственном энергетическом состоянии представляет собой точное измерение квантового состояния поля, возникающего в самом процессе измерения, поскольку результатом такого процесса является поле внутри резонатора в собственном состоянии оператора числа фотонов с нулевыми флуктуациями этой случайной величины. Последующие измерения числа фотонов могут быть проведены со сколь угодно высокой точностью, как это и предполагает концепция КНИ.

Известная с начала 90-х годов схема эксперимента по дисперсионному КНИ числа фотонов с использованием микромазера, насколько нам известно, практически не реализована до настоящего времени. Теория такой схемы КНИ, по нашему мнению, сложна, недостаточно изучена и требует дальнейшего углубления и развития. Проведение эксперимента и корректная интерпретация его результатов в данном случае невозможны в отсутствие развитой теории.

До настоящего времени расчет динамики измерения с учетом редукции состояния при нерезонансном взаимодействии при анализе КНИ проводился в предположении полного отсутствия обмена энергией между атомами и полем. Дисперсионный характер взаимодействия атомов с полем обеспечивается в этом приближении большим значением отстройки частоты атома от частоты моды поля. При этом предполагалось, что отстройка  $\Delta \equiv \omega_c - \omega_a$  частоты резонатора  $\omega_c$  от частоты перехода атома  $\omega_a$  должна удовлетворять следующим соотношениям [1–5]:

$$\Delta^2 \gg 4g^2n, \Omega^2n, \quad (1)$$

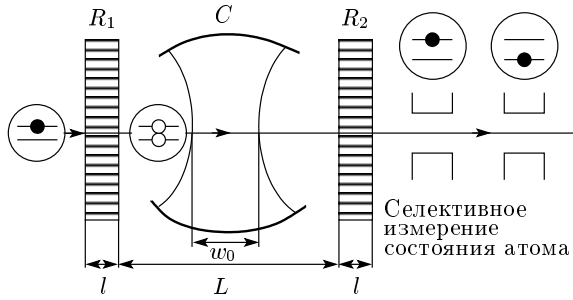
где  $g$  — константа связи атома с полем для фиксированного положения атома в резонаторе или усредненная по положению величина,  $\Omega$  — вакуумная частота Раби и  $n$  — число фотонов в поле. В приближенной теории, развитой в работах [1, 2] для численного моделирования КНИ, отсутствовал учет неоднородности электромагнитного поля (зависимости константы связи атома с полем от положения атома в резонаторе), предполагалось также, что динамика взаимодействия атомов с полем не зависит от значения отстройки  $\Delta$  при выполнении условия (1) (приближение бесконечной отстройки).

Авторы работы [2], основываясь на результатах приведенного анализа, утверждают, что фоковское состояние, создаваемое в процессе КНИ, характеризуется случайным средним числом фотонов, лежащим в пределах исходного распределения числа фотонов в резонаторе. Точное измерение числа фотонов в резонаторе предполагалось возможным с помощью метода атомной интерферометрии Рэмзи при наличии случайного разброса скоростей движения центров масс атомов.

Выполненные в настоящей работе расчеты позволили исследовать влияние на динамику микромазерного КНИ эффектов, связанных с движением центров масс атомов, взаимодействующих с пространственно-неоднородным полем резонатора при случайном измерении состояний атомов, покидающих резонатор. Осцилляции Доплера–Раби, возникающие в подобных условиях, в резонаторе Фабри–Перо и открытом резонаторе со сферическими зеркалами исследовались в работах [6–8]. Кроме того, в точных расчетах, проводимых в настоящей работе, отстройка  $\Delta$  предполагается конечной величиной, которая удовлетворяет условию (1) и значение которой непосредственно определяет динамику взаимодействия атомов с полем в конкретных экспериментальных условиях в дисперсионном режиме.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСПЕРСИОННОГО КНИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИКРОМАЗЕРА

Схема дисперсионного КНИ с использованием микромазера представлена на рис. 1. Предварительно возбужденный в состояние  $|\uparrow\rangle$  ридберговский атом [4] проходит область резонансного микроволнового поля  $R_1$ , в результате чего состояние атома переходит в когерентную суперпозицию состояний  $|\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\rangle$ . Поле микроволновой области  $R_1$  предпола-



**Рис. 1.** Схема дисперсионного КНИ с использованием микромазера. Возбужденные ридберговские атомы последовательно проходят через классическое резонансное атомному переходу микроволновое поле  $R_1$ , резонатор  $C$  и микроволновое поле  $R_2$ . После прохождения пути  $R_1$ - $C$ - $R_2$  атомы подвергаются селективному измерению их электронных состояний посредством ионизации в статическом электрическом поле

гается классическим, и его изменением при взаимодействии с атомом пренебрегается. Далее атом поступает в высокочастотный ( $Q \sim 10^8$ ) резонатор  $C$  со скоростью движения центра масс  $v$ . На входе резонатора в момент  $t = t_0$  волновая функция системы атом + поле резонатора в базисе фоковских состояний поля  $|n\rangle$  имеет вид

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t_0) (i\alpha_{\downarrow}|\downarrow\rangle + \alpha_{\uparrow}|\uparrow\rangle) |n\rangle, \quad (2)$$

где  $b_n$  — коэффициенты разложения по этому базису. Эффективный гамильтониан системы внутри резонатора может быть записан в виде суммы

$$H(t) = H_0 + V(t), \quad (3)$$

$$H_0 = \hbar\omega_c(a^\dagger a + \sigma^z), \quad (4)$$

$$V(t) = -\hbar\Delta\sigma^z + \hbar g_0(t)(a^\dagger\sigma_- + \sigma_+a) + \hbar\chi(t)a^\dagger a\sigma_+\sigma_-, \quad (5)$$

где  $a(a^\dagger)$  — операторы уничтожения (рождения) фотонов,

$$\sigma^z = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) / 2, \\ \sigma_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|, \quad \sigma_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$$

— атомные операторы, а  $\Delta = \omega_c - \omega_a$ , где  $\omega_c$  — собственная частота резонатора,  $\omega_a$  — частота перехода  $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$ , характеризуемого константой связи  $g_0(t)$ .

Последнее слагаемое в выражении (5) присутствует в гамильтониане взаимодействия атома с полем, так как наряду с электронными состояниями

$|\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\rangle$  существует также ближайшее к состоянию  $|\uparrow\rangle$  нерезонансное состояние  $|i\rangle$  ридберговского атома [5]. Частота перехода  $|i\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle$  и отстройка от частоты резонатора равны соответственно  $\omega_i$  и  $\delta = \omega_c - \omega_i$ . При условии, что

$$|\delta| \gg 2g_i(t)\sqrt{n}, \quad (6)$$

где  $n$  — число фотонов в фоковском состоянии поля, а  $g_i(t)$  — константа связи перехода  $|i\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle$ , гамильтониан системы с трехуровневым атомом сводится к эффективному двухуровневому гамильтониану (3)–(5). Очевидно, что нелинейный член в гамильтониане взаимодействия вносит фазовый сдвиг в волновую функцию системы, пропорциональный числу фотонов в резонаторе. Параметр нелинейности  $\chi(t)$ , обусловленный взаимодействием поля с другим атомным уровнем, в этом случае имеет вид

$$\chi(t) = g_i^2(t)/\delta. \quad (7)$$

Пространственная структура поля внутри открытого резонатора со сферическими зеркалами [7, 8] определяет пространственную (временную) зависимость констант связи атомных переходов, имеющих в этом случае вид

$$g_{0(i)}(t) = g_{0(i)} \exp\left[-\frac{1}{w_0^2}\left(vt - \frac{L}{2}\right)^2\right], \quad (8)$$

где  $v$  — скорость атома,  $w_0$  — перетяжка гауссова поля,  $L$  — длина пробега атома в резонаторе.

После прохождения атома через резонатор система переходит в перепутанное состояние

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (F_{\downarrow n}(t)|\downarrow\rangle + F_{\uparrow n}(t)|\uparrow\rangle) |n\rangle, \quad t = t_0 + \tau, \quad (9)$$

где  $\tau$  — время пролета атома в резонаторе,  $U(t, t_0)$  — оператор эволюции системы. Для решения уравнения Шредингера и вычисления коэффициентов  $F$  нами используется метод диагонализации гамильтониана (3)–(5) с помощью базиса одетых состояний системы, определенных в Приложении А. При расчете временной эволюции волновой функции системы интервал  $[t_0, t_0 + \tau]$  разбивается на  $M$  малых временных интервалов длительностью  $\Delta t = \tau/M$ , в течение которых временной зависимостью гамильтониана системы можно пренебречь. Унитарный оператор эволюции при этом на каждом интервале  $\Delta t$  имеет вид

$$U_j(\Delta t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}V_{int}(t_j)\Delta t\right],$$

где использован гамильтониан (5) в представлении взаимодействия (см. Приложение А).

Применяя метод одетых состояний для вектора состояния системы после прохождения атома через резонатор ( $t = t_0 + M\Delta t = t_0 + t_M$ ), мы получили рекуррентные соотношения (Б.13)–(Б.29) для амплитуд  $F$ , вывод которых вынесен в Приложение Б.

Далее, после прохождения через вторую микроволновую область  $R_2$ , аналогичную области  $R_1$ , вектор состояния системы преобразуется согласно соотношению

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{\uparrow n} |\uparrow, n\rangle + c_{\downarrow n} |\downarrow, n\rangle), \quad (10)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} c_{\uparrow n} &= i\beta_{\uparrow} F_{\downarrow n} + \beta_{\downarrow} F_{\uparrow n}, \\ c_{\downarrow n} &= \beta_{\downarrow} F_{\downarrow n} + i\beta_{\uparrow} F_{\uparrow n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты  $\beta$  в (11) (аналогично коэффициентам  $\alpha$  в (2)) определяются частотой Раби  $\Omega_R$  атома в классическом резонансном поле и временем  $\tau_2$  взаимодействия атома с полем:

$$\beta_{\downarrow} \equiv \sin(\Omega_R \tau_2 / 2), \quad \beta_{\uparrow} \equiv \cos(\Omega_R \tau_2 / 2). \quad (12)$$

Для последовательности монокинетических атомов мы полагаем

$$\beta_{\downarrow} = \beta_{\uparrow} = \alpha_{\uparrow} = \alpha_{\downarrow} = 1/\sqrt{2}.$$

При наличии разброса скоростей вблизи среднего значения  $v_0$  эти параметры принимают значения

$$\beta_{\uparrow} = \alpha_{\uparrow} = \cos(\pi v_0 / 4v), \quad \beta_{\downarrow} = \alpha_{\downarrow} = \sin(\pi v_0 / 4v),$$

где  $v$  — скорость данного атома.

Вероятности нахождения выходящих из резонатора атомов в верхнем и нижнем состояниях равны соответственно

$$P_{\uparrow} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{\uparrow n}|^2, \quad P_{\downarrow} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{\downarrow n}|^2.$$

Согласно постулату фон Неймана, обнаружение атома в верхнем ( $\uparrow$ ) или в нижнем ( $\downarrow$ ) состоянии проецирует состояние системы соответственно в состояния

$$|\psi^{(red, \uparrow)}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\uparrow n} |\uparrow, n\rangle / \sqrt{P_{\uparrow}} \quad (13a)$$

и

$$|\psi^{(red, \downarrow)}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\downarrow n} |\downarrow, n\rangle / \sqrt{P_{\downarrow}}. \quad (13b)$$

Возникновение редуцированных состояний (13) означает, что обнаружение (измерение) атома в том или ином состоянии приводит к распутыванию системы атом + поле.

В рассматриваемой нами схеме КНИ атом, выходящий из второй микроволновой зоны  $R_2$ , последовательно взаимодействует с двумя постоянными электрическими полями, напряженность одного из которых соответствует порогу ионизации верхнего, а напряженность другого — порогу ионизации нижнего электронного состояния атома. При взаимодействии атома с резонансным микроволновым полем зоны  $R_2$  атом переходит в состояние суперпозиции верхнего и нижнего электронных состояний; при этом полная система атом + поле находится в запутанном состоянии. В этих условиях атом, взаимодействующий с селективно ионизирующими электрическими полями, в общем случае не находится в точно определенном электронном состоянии и может быть с некоторой вероятностью ионизован любым из этих полей, т. е. селективная ионизация (детектирование) атомов принимает случайный характер. Вероятность ионизации в том или ином из полей пропорциональна вероятности пребывания атома в том или ином электронном состоянии (вероятности  $P_{\uparrow}$  и  $P_{\downarrow}$ ).

При численном расчете динамики КНИ для моделирования процесса случайных измерений состояний атомов, описанного выше, нами использовался стандартный генератор равномерно распределенных случайных чисел. При этом, если  $\xi$  — равномерно распределенные случайные числа,  $\xi \in [0, 1]$ , и для соответствующей  $N$ -му атому, проходящему через резонатор, реализации случайной величины  $\xi_N$  выполняется соотношение  $\xi_N < P_{\uparrow}$ , то возбужденное состояние атома предполагается измеренным. Обратное соотношение  $\xi_N \geq P_{\uparrow}$  означает измерение нижнего энергетического состояния атома, поскольку  $P_{\uparrow} + P_{\downarrow} = 1$ .

Распределение числа фотонов в резонаторе в результате измерения приобретает следующий вид:

$$P_n^{(red, \alpha)} = \left| \langle n, \alpha | \psi^{(red, \alpha)} \rangle \right|^2. \quad (14)$$

Эти величины, как следует из (13), равны  $|c_{\uparrow n}|^2 / P_{\uparrow}$ , если  $\alpha = \uparrow$ , или  $|c_{\downarrow n}|^2 / P_{\downarrow}$ , если  $\alpha = \downarrow$ . Состояние поля, обладающее амплитудами разложения вектора состояния в фоковском базисе вида

$$b_n(t_0) = c_{\uparrow n} / \sqrt{P_{\uparrow}} \quad (15a)$$

или

$$b_n(t_0) = c_{\downarrow n} / \sqrt{P_{\downarrow}}, \quad (15b)$$

которые реализуются для того или иного исхода измерения, представляют собой начальные условия для эволюции системы при прохождении следующего атома.

Среднее значение и флуктуации числа фотонов,  $\langle n(N) \rangle$  и  $\langle (\Delta n(N))^2 \rangle$ , после регистрации электронного состояния очередного  $N$ -го атома вычисляются с помощью выражения (14) согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \langle n(N) \rangle &= \sum_n n P_n^{(red,\alpha)}(N), \\ \langle (\Delta n(N))^2 \rangle &= \sum_n (n - \langle n(N) \rangle)^2 P_n^{(red,\alpha)}(N). \end{aligned} \quad (16)$$

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ КНИ

С помощью формул (7)–(16) и (Б.13)–(Б.29) нами проведены численные расчеты распределений фотонов в резонаторе, флуктуаций числа фотонов и населенностей возбужденного состояния атомов, выходящих из резонатора. Систематические расчеты, проведенные нами для различных случайных реализаций результатов измерений состояний атомов, позволяют выделить наиболее характерные примеры динамики системы при дисперсионном КНИ.

В качестве исходного состояния поля в резонаторе (до начала поступления атомов в него) рассматриваем чистое когерентное состояние с коэффициентами разложения по фоковскому базису вида

$$b_n(t_0) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right).$$

Рассмотрим сначала случай монокинетического потока атомов, проходящих через резонатор.

На рис. 2а приведены зависимости среднего числа  $\langle n \rangle$  фотонов и фактора Фано  $F = \langle (\Delta n)^2 \rangle / \langle n \rangle$  для поля в резонаторе от числа  $N$  атомов, прошедших путь  $R_1-C-R_2$  и зарегистрированных в том или ином электронном состоянии. Для параметров системы нами использовались значения, приведенные в работах [3, 4]. Как следует из рис. 2а, в случае исходного когерентного состояния со средним числом фотонов  $\langle n_0 \rangle = |\alpha|^2 = 1$  в результате прохождения через резонатор 20-и атомов с последующими их селективными измерениями поле в резонаторе переходит в квантовое состояние со стационарным средним числом фотонов  $\langle n_{ss} \rangle \approx 2.1$  и фактором Фано  $F_{ss} \approx 0.15$ . Таким образом, состояние поля является значительно сжатым по числу фотонов, однако даже при очень большом числе атомов ( $N \sim 10^5$ )

состояние не приближается к чистому фоковскому состоянию поля.

На графиках, приведенных на рис. 2а,б, скачки среднего числа фотонов (и фактора Фано), а также населенности верхнего уровня атома при  $N = 20$  присутствуют вследствие того, что при  $N < 20$  в процессе селективной ионизации регистрировалось верхнее состояние атомов, а при  $N = 20$  было зарегистрировано нижнее электронное состояние. В рассматриваемых нами условиях такой скачок является следствием редукции состояния системы при селективном измерении состояния атома.

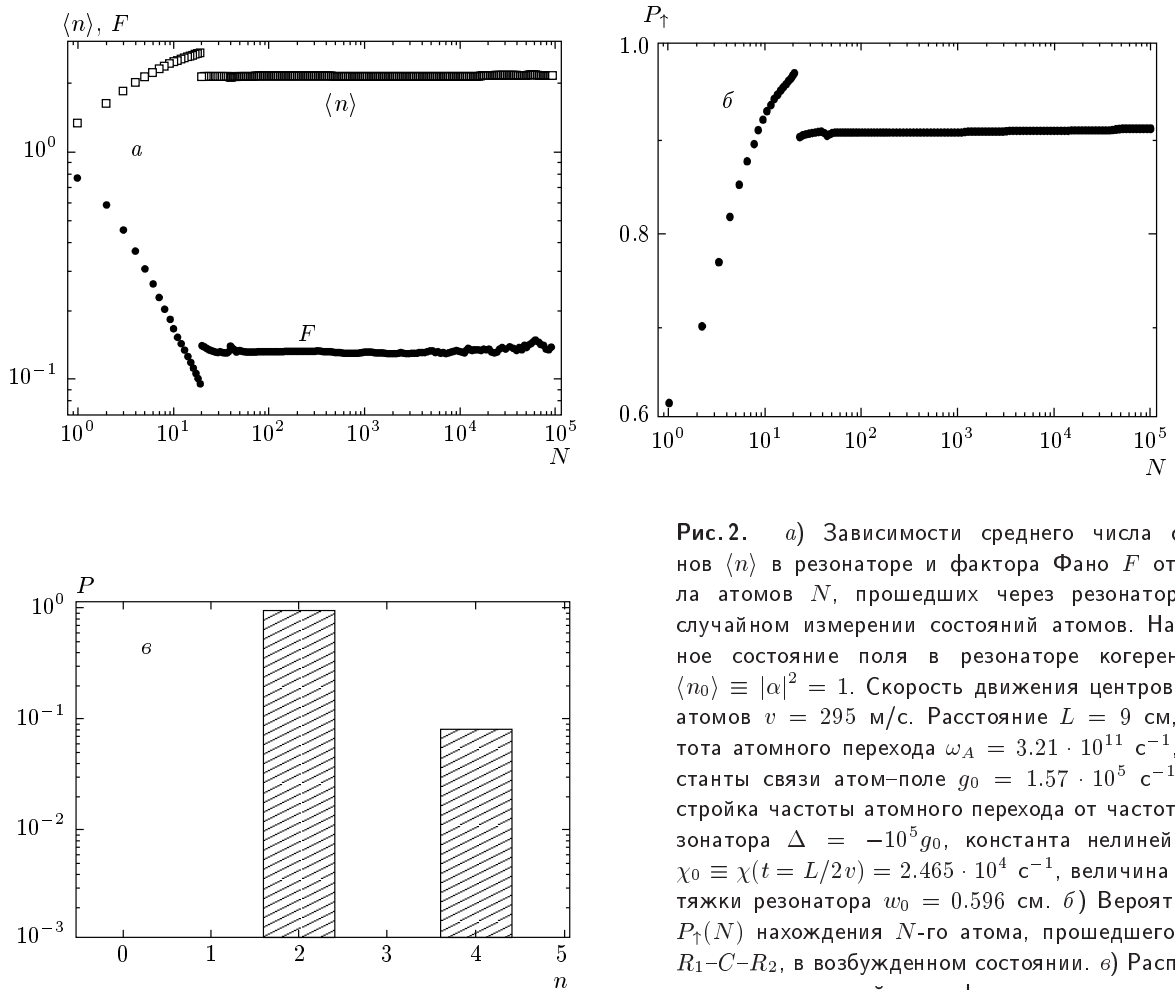
В работе [9] нами приведены результаты численного моделирования КНИ для тех же значений параметров системы, но для другой частной реализации случайного процесса измерения состояний атомов. Сравнение зависимостей  $\langle n(N) \rangle$  и  $F(N)$ , изображенных на рис. 2а в работе [9], с такими же зависимостями на рис. 2а настоящей работы показывает лишь количественное различие в результатах. Стационарные значения  $\langle n_{ss} \rangle$  различаются на единицу при близких значениях фактора Фано  $F_{ss} \approx 0.1$ .

Как видно на рис. 2б, вероятность регистрации атома, прошедшего путь  $R_1-C-R_2$ , в возбужденном состоянии для  $N > 20$  принимает стационарное значение  $P_{\uparrow ss} \approx 0.91$ , значительно превышающее ее исходное значение при поступлении атома в резонатор,  $P_{\uparrow 0} \approx 0.5$ . Это означает, что взаимодействие атомов с полем резонатора приводит к их заметно возбуждению при неизменном состоянии поля.

На рис. 2в изображено распределение чисел фотонов поля в резонаторе в стационарных условиях ( $N = 10^3$ ). Как видно из рисунка, состояние поля не является фоковским, что означало бы успешный результат процесса КНИ. Имеет место квантовое распределение фотонов со значительными вероятностями пребывания в резонаторе чисел фотонов, равных 2 и 4.

На рис. 3 приведены результаты численного моделирования КНИ в условиях, аналогичных случаю рис. 2, но с незначительно большим расстоянием между микроволновыми областями Рэмзи  $R_1$  и  $R_2$ :  $L = 9.0001$  см. Из рис. 3а видно, что динамика среднего числа фотонов и фактора Фано имеет принципиально иной характер. С ростом числа  $N$  атомов среднее число фотонов резко убывает, а фактор Фано возрастает от исходного значения, равного единице, до десяти.

Для значений  $1000 < N < 60000$  фактор Фано остается неизменным при резком уменьшении среднего числа фотонов  $\langle n \rangle \rightarrow 0$ , и при  $N \approx 70000$  фактор Фано скачкообразно принимает значение еди-



**Рис. 2.** а) Зависимости среднего числа фотонов  $\langle n \rangle$  в резонаторе и фактора Фано  $F$  от числа атомов  $N$ , прошедших через резонатор при случайном измерении состояний атомов. Начальное состояние поля в резонаторе когерентное,  $\langle n_0 \rangle \equiv |\alpha|^2 = 1$ . Скорость движения центров масс атомов  $v = 295$  м/с. Расстояние  $L = 9$  см, частота атомного перехода  $\omega_A = 3.21 \cdot 10^{11}$  с $^{-1}$ , константы связи атом–поле  $g_0 = 1.57 \cdot 10^5$  с $^{-1}$ . Отстройка частоты атомного перехода от частоты резонатора  $\Delta = -10^5 g_0$ , константа нелинейности  $\chi_0 \equiv \chi(t = L/2v) = 2.465 \cdot 10^4$  с $^{-1}$ , величина перетяжки резонатора  $w_0 = 0.596$  см. б) Вероятности  $P_{\uparrow}(N)$  нахождения  $N$ -го атома, прошедшего путь  $R_1-C-R_2$ , в возбужденном состоянии. в) Распределение вероятностей чисел фотонов в резонаторе после прохождения  $N$  атомов пути  $R_1-C-R_2$  и селективного измерения атомных состояний ( $N = 10000$ )

ницы. Такое стационарное состояние поля также нельзя отнести к фоковскому, поскольку флуктуации числа фотонов в фоковском состоянии полностью отсутствуют и величина  $F_{ss}$  должна стремиться к нулю.

Зависимость  $P_{\uparrow}(N)$ , изображенная на рис. 3б, в отличие от той же зависимости, но для другого значения  $L$  (рис. 2б), носит монотонный характер со стационарным значением  $P_{\uparrow ss} \approx 0.77$ , значительно меньшим, чем в случае, изображенном на рис. 2б.

Распределение числа фотонов при этих условиях приведено на рис. 3в для  $N = 10000$ . Одновременно с основным пиком распределения для  $n = 0$  присутствует также отличная от нуля вероятность обнаружения в резонаторе десяти фотонов. Несмотря на малость величины  $P(10) \approx 10^{-8}$ , присутствие

второго пика в распределении вероятностей приводит к большим флуктуациям числа фотонов вследствие большой разницы между значениями числа фотонов, для которых распределение вероятности отлично от нуля. Наряду со случайным процессом, в результате которого формируется вакуумное состояние поля в резонаторе, при незначительно различающихся значениях параметров системы возможен качественно иной процесс, динамика которого приведена на рис. 4. Малое изменение (около 2%) скорости атомов приводит к качественному изменению динамики состояния поля в резонаторе. В случае  $v = 295$  м/с (см. рис. 2) в стационарных условиях ( $N \rightarrow \infty$ ) состояние поля является существенно субпуассоновским со средним числом фотонов, близким к исходному, тогда как при

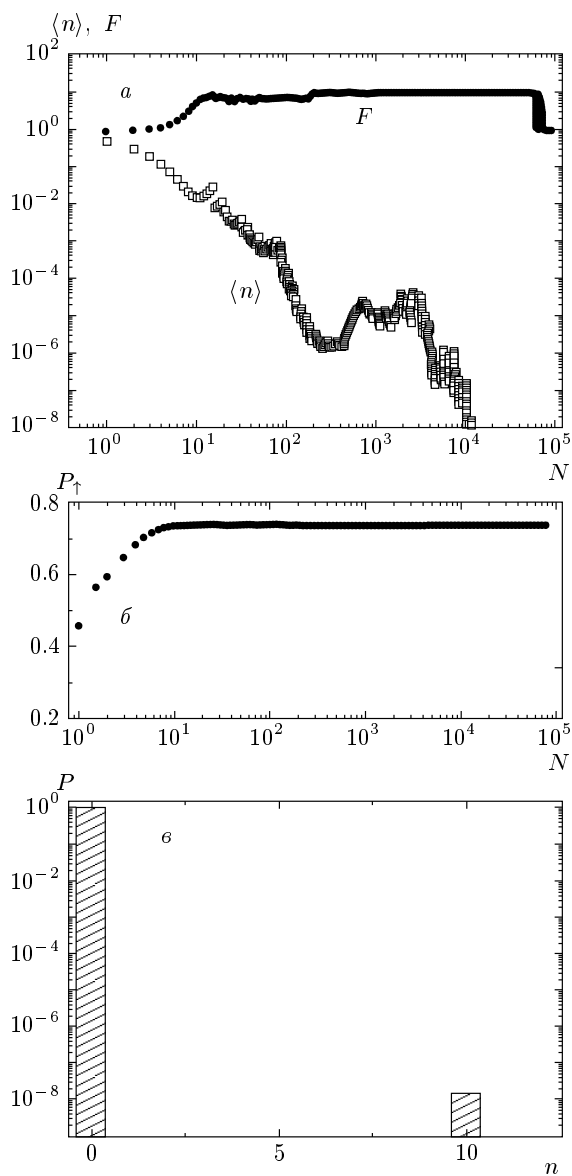


Рис. 3. То же, что на рис. 2 для  $L = 9.0001$  см

$v = 295.0 + 6.4$  м/с (рис. 4а) стационарное поле обладает высокими флуктуациями числа фотонов. Как следует из рис. 4а, для  $N > 40$  в резонаторе устанавливается состояние поля с малым числом фотонов  $\langle n \rangle \approx 0.05$ , много меньшим исходного значения  $\langle n_0 \rangle = 1$  и большими флуктуациями ( $F \approx 4$ ), существенно превышающими флуктуации когерентного исходного состояния ( $F_0 \approx 1$ ). В отличие от рассмотренного выше случая «квазидиссипации» (см. рис. 3), такие статистические характеристики состояния являются стационарными до  $N = 100000$ . Стационарное стандартное вакуумное состояние поля, устанавливающееся в режиме «квазидиссипации», в

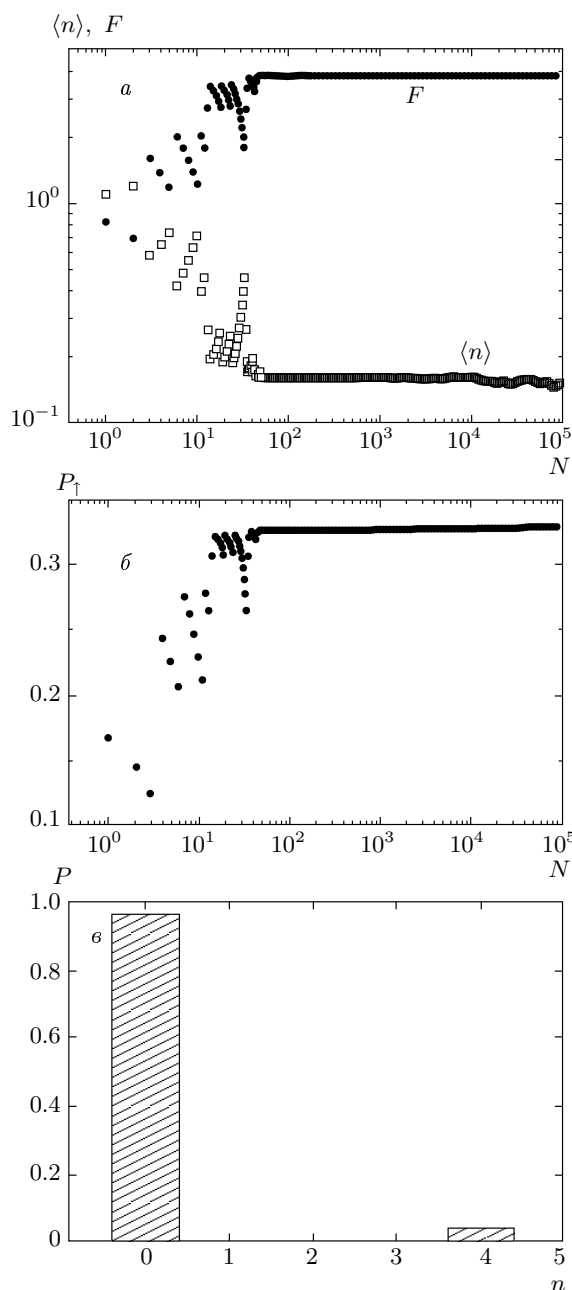


Рис. 4. То же, что на рис. 2, для  $v = 295.0 + 6.4$  м/с (а) и  $N = 500$  (в)

этом случае не достигается даже для очень больших  $N$ .

Расчет для тех же значений параметров системы, но для другой реализации случайного процесса измерения (см. рис. 2с в [9]) показывает качественно другую динамику зависимостей  $\langle n(N) \rangle$  и  $F(N)$  со стационарными средними значениями  $\langle n_{ss} \rangle \approx 1$  и  $F_{ss} \approx 0.5$ . Следовательно, в результате такого КНИ

может быть создано как частично сжатое состояние поля, так и состояние поля с большими флуктуациями, значительно превышающими уровень дробового шума (суперпуассоновские состояния).

Как видно из рис. 4б, вероятность регистрации атома, выходящего из резонатора в возбужденном состоянии, в этом случае равна  $P_{\uparrow} \approx 0.33$ , что значительно ниже ее исходного значения  $P_{\uparrow 0} \approx 0.5$ , тогда как в случае процесса «квазидиссипации»  $P_{\uparrow} \approx 0.72 > P_{\uparrow 0}$  (см. рис. 3б). Таким образом, убывание среднего числа фотонов в резонаторе сопровождается в первом случае понижением степени возбуждения атомов, тогда как во втором этот процесс протекает с повышением степени возбуждения атомов в результате их прохождения через резонатор и микроволновые области. Поведение атомной подсистемы в первом случае противоречит интуитивному представлению о сохранении энергии полной системы, поскольку понижение степени возбуждения атомной подсистемы и уменьшение ее средней энергии сопровождается уменьшением средней энергии поля в резонаторе. В условиях, когда результатом процесса является стационарное состояние поля с определенной энергией (фоковское собственное состояние оператора энергии), также возможным оказывается преобразование исходного когерентного состояния поля в состояние с большим средним числом фотонов,  $\langle n_{ss} \rangle > \langle n_0 \rangle$ , сопровождающееся повышением степени возбуждения атомов,  $P_{\uparrow ss} > P_{\uparrow 0}$ .

Отметим, что соотношения сохранения энергии для атомной и полевой подсистем справедливы лишь в случае пребывания каждой из них в энергетическом состоянии. Возможность создания таких условий в данной схеме, как следует из расчетов, отсутствует.

Расчеты показывают, что состояние поля качественно зависит от среднего числа  $\langle n_0 \rangle$  фотонов исходного когерентного поля. На рис. 5а приведена динамика поля для значений параметров системы, идентичных случаю рис. 2а, но с другим значением  $\langle n_0 \rangle$ . Сравнение этих рисунков показывает, что вместо фоковского состояния при  $\langle n_0 \rangle = 1$  (рис. 2а) при  $\langle n_0 \rangle = 4$  присутствует состояние, близкое к исходному даже при  $N \sim 10^5$ . Флуктуации числа фотонов при  $N > 40$  оказываются близкими к исходному их значению  $F = 1$ , характерному для когерентного состояния. Расчет для тех же значений параметров системы, но для другой реализации случайного процесса измерения (см. рис. 2д в [9]) показывает, что в данном случае использование различных реализаций почти не изменяет динамику КНИ.

Изображенная на рис. 5б зависимость  $P_{\uparrow}(N)$

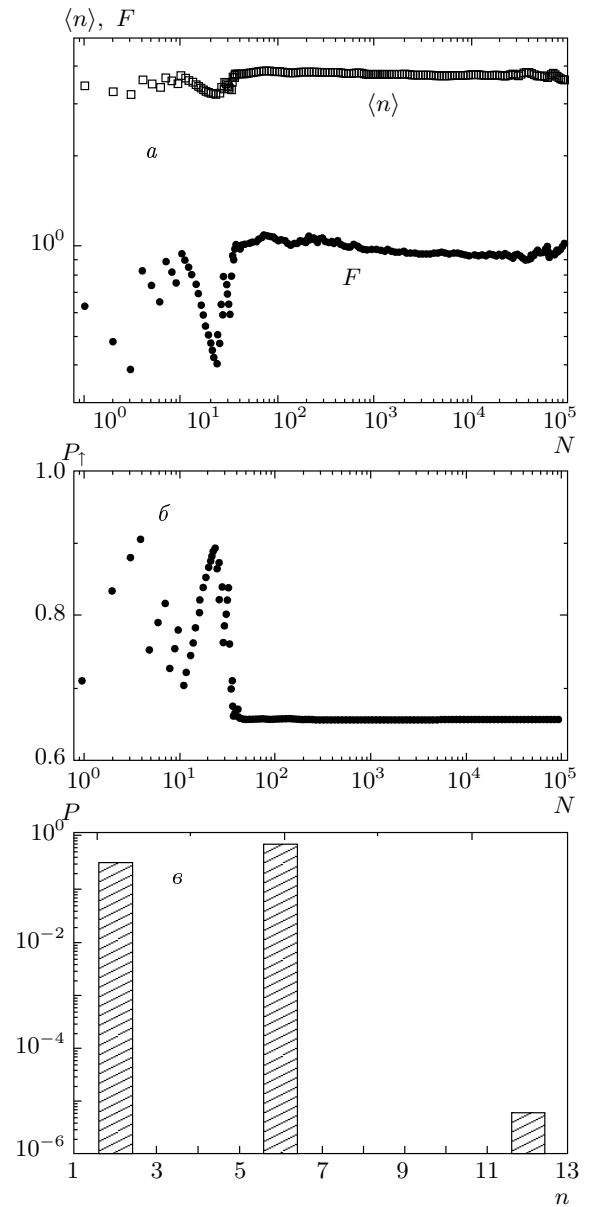


Рис. 5. То же, что на рис. 2, для  $\langle n_0 \rangle = 4$

качественно отличается от аналогичных зависимостей, рассмотренных выше для других значений параметров системы, поскольку динамика установления стационарного значения  $P_{\uparrow}$  в этом случае характеризуется убыванием (а не возрастанием) величины  $P_{\uparrow}(N)$  при  $N < 40$ . Как видно из рис. 5б, стационарное состояние поля в рассматриваемом случае не является когерентным. Распределение фотонов  $P(n)$  имеет неклассическую многопиковую структуру, причем различие в значениях  $n$ , для которых вероятности заполнения отличны от нуля

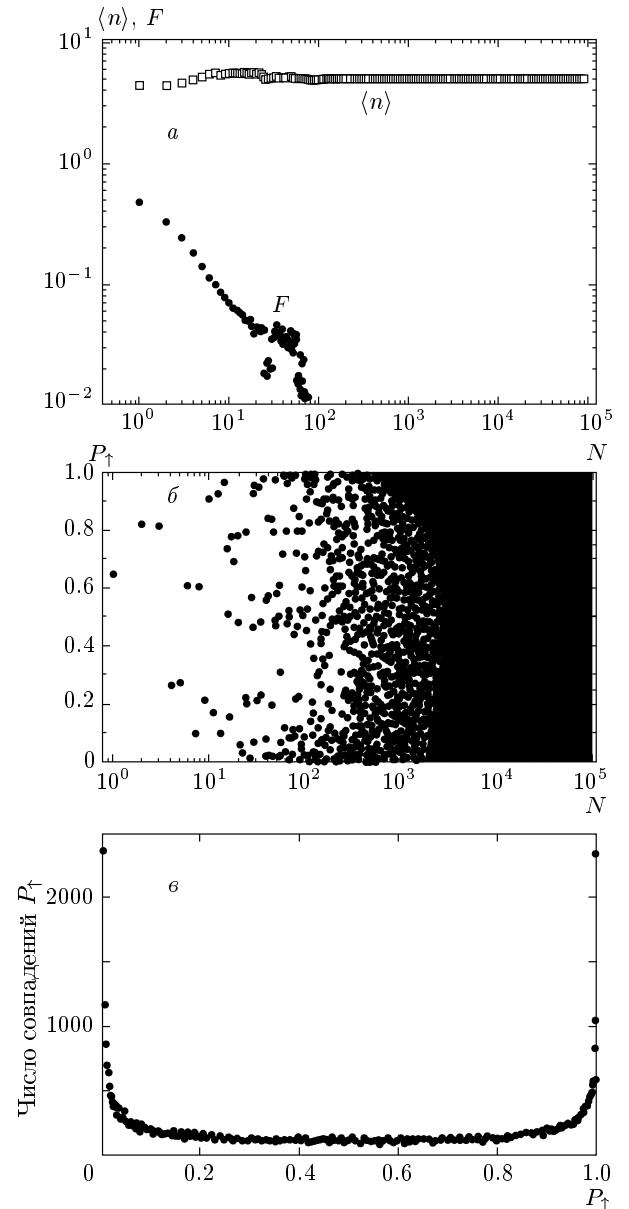


( $n = 2, 6, 12$ ), оказывается большим, что приводит к большим флуктуациям числа фотонов  $F_{ss} \approx 1$ .

Крайне высокую чувствительность проявляет система к изменениям скорости  $v$  (чувствительность порядка  $10^{-5}$  см/с), отстройки  $\Delta$  (порядка  $10^2$  с $^{-1}$ ), длины пробега атома  $L$  (порядка  $10^{-7}$  см) и величины константы связи  $g_0$  (порядка  $10^{-4}$  с $^{-1}$ ). Отмечаемая чувствительность может быть понижена лишь уменьшением отстройки  $\Delta$  при выполнении условий (1). Для рассмотренной нами системы такое понижение чувствительности от указанных параметров не может превышать величину  $10^3$ .

Результаты систематических расчетов показывают, что эффект, связанный с пространственной зависимостью констант связи движущегося атома с полем, имеет принципиально важное значение для формирования поля и результатов КНИ. Численное моделирование, выполненное для тех же значений параметров системы, но без учета зависимости констант связи атома с полем от положения атома в резонаторе, демонстрирует качественно иную динамику поля в каждом из рассмотренных выше случаев. Так, например, в случае, изображенном на рис. 2а, такое отсутствие учета движения центра масс приводит к созданию состояния электромагнитного вакуума в резонаторе (квазидиссипация).

Представленные выше результаты численного моделирования КНИ получены в приближении сильноколлимированного монокинетического потока атомов, проходящих через резонатор. Использование монокинетической последовательности атомов желательнее в экспериментах в схеме Рэмзи, поскольку в этих условиях улучшается видность интерференционной картины. На рис. 6 приведены результаты численного моделирования динамики КНИ в условиях, когда разброс скоростей движения центров масс атомов составляет  $\delta v/v_0 = 1\%$  от средней скорости ( $\delta v = v - v_0$ ). Распределение по скоростям предполагается максвелловским (гауссовым). Как видно из рис. 5а, при  $N > 100$  состояние внутррезонаторного поля становится близким к фоковскому, а среднее число фотонов в резонаторе принимает стационарное значение, незначительно отличающееся от исходного ( $\langle n_0 \rangle = 4$ ,  $\langle n_{ss} \rangle = 5$ ). Как показывают систематические расчеты, присутствие даже незначительного разброса по скоростям атомов обеспечивает создание фоковского состояния со случайным средним значением числа фотонов. В то же время, ввиду резкой чувствительности динамики населенности атомных состояний в условиях дисперсионного взаимодействия к параметрам системы (в том числе к скорости движения атомов), присутствие даже малого



**Рис. 6.** а, б) То же, что на рис. 5а, б с учетом случайного разброса скоростей атомов (максвелловское распределение с разбросом скоростей  $\delta v/v_0 = 1\%$ ). в) Число совпадений значений величины  $P_{\uparrow}(N)$ , изменяющейся в интервале от нуля до единицы при  $0 < N < 90000$ . Среднее значение  $P_{\uparrow}(N) = 0.498$ , стандартное отклонение  $\sigma = 0.353$

разброса по скоростям неизбежно приводит к большому разбросу зависимостей вероятностей  $P_{\uparrow}$  и  $P_{\downarrow}$  от числа атомов  $N$ .

На рис. 6б показана зависимость  $P_{\uparrow}(N)$  при разбросе скоростей  $\delta v/v_0 = 1\%$ . Из рисунка видно, что населенность возбужденного состояния становится в

этих условиях случайной величиной: отличие  $P_{\uparrow}(N)$  от  $P_{\uparrow}(N+1)$  может достигать единицы. На рис. 6в представлены результаты статистической обработки зависимости  $P_{\uparrow}(N)$ , изображенной на рис. 6б. Число совпадений величин  $P_{\uparrow}$  при  $N_{max} = 90000$ , приведенное на рис. 6в, указывает на почти равномерное распределение значений  $P_{\uparrow}$  в интервале  $(0,1)$ ; наиболее вероятными значениями являются  $P_{\uparrow} = 0$  и  $P_{\uparrow} = 1$ . Среднее значение вероятности составляет величину  $\overline{P}_{\uparrow} = 0.498$  с разбросом  $\delta P_{\uparrow} = 0.353$ .

Численное моделирование КНИ с учетом случайного (с гауссовым распределением) разброса скоростей атомов показало, что даже при незначительной величине разброса вероятности регистрации атомов в верхнем и нижнем состояниях,  $P_{\uparrow}$  и  $P_{\downarrow}$ , становятся случайными величинами в интервале от нуля до единицы со средними значениями, равными 0.5, что означает отсутствие интерференционной картины Рэмзи и невозможность проведения КНИ. Распределения этой случайной величины  $P_{\uparrow}(N)$  оказываются почти идентичными для любых значений параметров системы и не зависят от среднего числа фотонов в резонаторе. Анализ показал, что четкая интерференционная картина достигается лишь при разбросе по скоростям атомов менее  $10^{-4}$  %.

В работе [4] описана реализация эксперимента по однофотонному детектированию без поглощения, в котором применялась экспериментальная схема, рассмотренная нами, но использованная в принципиально ином режиме, чем в случае дисперсионного КНИ. В работе [4] рассмотрен специальный случай исходного однофотонного фоковского состояния  $|1\rangle$  поля в резонаторе. В таких условиях исходное фоковское состояние поля уже является собственным состоянием числа фотонов, тогда как, согласно общей концепции КНИ, собственное состояние поля в резонаторе возникает в результате измерения при произвольном исходном его состоянии. Редукция состояния, возникающая при селективном измерении состояний атомов и следующая из проективного постулата квантового измерения, в этом случае не приводит к изменению состояния полевой подсистемы, находящейся в собственном состоянии числа фотонов. Эксперимент [4], по сути дела, является контролем состояния поля в резонаторе и возможен лишь в специальном случае исходного поля в определенном заранее известном собственном состоянии.

В настоящей работе анализируется эксперимент по дисперсионному КНИ [1, 2, 5] числа фотонов для исходного когерентного состояния с произвольным средним числом фотонов и исследована динамика состояния поля в резонаторе, возникающая в этом

случае при селективном измерении атомов и редукции состояния системы. Состояние поля при этом радикально изменяется при каждом измерении состояния атома вследствие редукции состояния.

Принципиально важным отличием эксперимента по однофотонному детектированию без поглощения, описанного в [4], от дисперсионного КНИ является, также то, что первый основан на эффекте сдвига фазы состояния системы атом + поле, возникающем при наличии полного  $(2\pi)$  цикла осцилляций Раби на резонансном переходе  $|50\rangle \leftrightarrow |51\rangle$  ( $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ ) в используемых нами обозначениях) за время пребывания атома в резонаторе. Интерференционная картина Рэмзи в присутствии одного фотона в резонаторе при этом оказывается сдвинутой по фазе на величину  $\pi$  относительно соответствующей интерференционной картины, полученной для вакуумного состояния  $|0\rangle$  исходного поля. Отсутствие поглощения фотона проходящим через резонатор атомом при однофотонном детектировании без поглощения обеспечивалось подбором скорости движения атома в резонаторе, соответствующей полному периоду осцилляций Раби ( $2\pi$ -импульс).

Дисперсионное КНИ числа фотонов основано на эффекте дисперсионного сдвига атомного уровня  $|\uparrow\rangle$ , возникающего вследствие взаимодействия поля с нерезонансным уровнем атома (состояние  $|i\rangle$ ). Величина сдвига уровня пропорциональна числу фотонов поля и может быть измерена с помощью атомной интерферометрии Рэмзи. Использование эффективного сдвига энергии уровня  $|\uparrow\rangle$  позволяет исключить нерезонансный уровень  $|i\rangle$  из анализа динамики взаимодействия поля с атомом. В случае однофотонного детектирования без поглощения состояние атома  $|i\rangle$  находится в резонансе с полем резонатора, вследствие чего теоретический анализ эксперимента проводится с прямым учетом излучательных переходов с участием этого уровня; дисперсионные сдвиги энергий при этом не рассматриваются. Информация о состоянии поля в этом случае извлекается непосредственно из сравнения интерференционных картин Рэмзи, полученных для состояний поля  $|1\rangle$  и  $|0\rangle$ ,  $\pi$ -сдвиг между которыми возникает вследствие полного цикла осцилляций Раби между уровнями  $|\uparrow\rangle$  и  $|i\rangle$ .

Однофотонное детектирование без поглощения возможно в случае, когда отстройка собственной частоты резонатора от частоты перехода  $|50\rangle \leftrightarrow |51\rangle$  ридберговского атома мала:  $\delta \ll g_0$ , тогда как условием проведения дисперсионного КНИ является выполнение соотношения  $\delta \gg \sqrt{n} g_0$ , где  $n$  — число фотонов, т. е. условия, при котором осцилляции Раби

на переходе  $|50\rangle \leftrightarrow |51\rangle$  отсутствуют.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ дисперсионного квантового неразрушающего измерения (КНИ) числа фотонов в микроазерной схеме. Такое КНИ представляет собой косвенное измерение числа фотонов энергетического состояния поля в резонаторе, осуществляемое путем установления количественной связи между параметрами интерференционной картины состояний атомов, прошедших через резонатор и две микроволновые области интерферометра Рэмзи, и числом фотонов в резонаторе. Численное моделирование дисперсионного КНИ числа фотонов для сильноколлимированного монокинетического потока атомов, проходящих через резонатор, показало, что исходом такого случайного процесса при большом числе атомов может являться как фоковское состояние внутрирезонаторного поля, так и состояние поля с большими флуктуациями числа фотонов (суперпуассоновское состояние).

Малое изменение значений параметров системы в условиях дисперсионного взаимодействия атома с полем приводит к качественному изменению динамики поля. Различные реализации случайного процесса измерения состояний атомов, проходящих через микроволновые зоны и резонатор, в общем случае приводят к качественно различным состояниям поля: к субпуассоновской или к суперпуассоновской статистике фотонов. Отметим, что успешная реализация КНИ возможна лишь при формировании фоковского состояния поля в резонаторе.

Наличие разброса по скоростям движения центров масс атомов, неизбежно присутствующее в рассматриваемых условиях, приводит с единичной вероятностью к установлению фоковского состояния поля в резонаторе. Однако, ввиду резкой чувствительности динамики дисперсионного КНИ к значениям скоростей движения атомов, измерение числа фотонов в резонаторе, проводящееся в данной схеме на основе анализа зависимости от числа фотонов вероятности регистрации атома в определенном (возбужденном или основном) состоянии в рамках метода интерферометрии Рэмзи, оказывается невозможным. Эта зависимость  $P_{\uparrow}(N)$  становится случайной величиной, почти равномерно распределенной в интервале значений  $(0, 1)$ . Регистрация четкой интерференционной картины Рэмзи оказывается возможной лишь при очень малом разбросе скоростей  $\delta v/v_0 \sim 10^{-4} \%$ , т. е. в случае практически монохроматического потока атомов.

В предшествующих работах [1–4] в расчетах динамики дисперсионного КНИ было использовано приближение бесконечно большой отстройки  $\Delta$  частоты атомного перехода от частоты моды резонатора, вследствие чего результаты численного моделирования в этих работах не зависят от значения  $\Delta$  [4]. Численное моделирование динамики КНИ, проведенное нами и свободное от указанного приближения, показало, что динамика дисперсионного КНИ качественно зависит от величины  $\Delta$ . Обнаружено также, что результаты крайне чувствительны к этой величине. Состояние поля в резонаторе, формирующееся при селективном измерении состояний атомов и квантовой редукции состояния системы, также крайне чувствительно к таким параметрам системы, как время взаимодействия атома с полем и константы взаимодействия атома с полем.

Необходимо отметить, что в расчетах нами точно учитывается пространственная неоднородность электромагнитного поля в резонаторе, тогда как в работах [1–4] использовалось приближение однородного поля. Установлено, что учет пространственной зависимости поля при анализе динамики взаимодействия движущегося атома с полем приводит к качественному изменению состояния поля и необходим при анализе результатов КНИ. Показана возможность создания при КНИ из исходного когерентного состояния поля в резонаторе состояния электромагнитного вакуума (квазидиссипация).

Отметим в заключение, что учет пространственной структуры поля, взаимодействующего с движущимися атомами, необходим также при анализе схем из работ [9–12], используемых в области инженерии квантовых состояний света, а также метода экспериментального наблюдения квантового эффекта Зено, предложенного в работе [15].

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Гамильтониан системы (3)–(5) может быть записан в виде следующей суммы двух операторов  $\hat{C}_1$  и  $\hat{C}_2$ :

$$\hat{H} = \hbar (\hat{C}_1 + \hat{C}_2), \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{C}_1 = \omega_c \left( \hat{n} + \frac{\hat{\sigma}_z}{2} \right), \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{C}_2 = g(t) \left( \hat{S}_+ + \hat{S}_- \right) - \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \chi(t) \hat{n} | \uparrow \rangle \langle \uparrow |,$$

где  $\hat{S}_- \equiv \hat{a}^\dagger | \downarrow \rangle \langle \uparrow |$ ,  $\hat{S}_+ \equiv \hat{a} | \uparrow \rangle \langle \downarrow |$  — операторы поляризации двухуровневого атома, а  $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$  — оператор числа фотонов в резонаторе.

Нетрудно убедиться, что в каждый момент времени операторы  $\hat{C}_1$  и  $\hat{C}_2$  коммутируют между собой, а также с полным гамильтонианом  $\hat{H}$ . Действуя оператором  $\hat{C}_1$  на векторы состояний системы  $|\uparrow, n\rangle = |\uparrow\rangle|n\rangle$ , находим

$$\hat{C}_1 |\uparrow, n\rangle = \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) |\uparrow, n\rangle, \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{C}_1 |\downarrow, n\rangle = \omega_c \left( n - \frac{1}{2} \right) |\downarrow, n\rangle, \quad (\text{A.4})$$

т. е. оператор  $\hat{C}_1$  диагонален в этом представлении. Прodelывая то же самое с оператором  $\hat{C}_2$ , убеждаемся, что в представлении  $|\uparrow(\downarrow), n\rangle$  при  $n > 0$  он недиагонален. Для основного состояния системы ( $n = 0$ ) получаем

$$\hat{C}_1 |\downarrow, 0\rangle = -\frac{\omega_c}{2} |\downarrow, 0\rangle, \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{C}_2 |\downarrow, 0\rangle = \frac{\Delta}{2} |\downarrow, 0\rangle. \quad (\text{A.6})$$

Рассмотрим далее одетые состояния данной системы для каждого момента времени  $t$ , определяемые согласно соотношениям

$$|+, n\rangle_t = c_{n,t} |\downarrow, n+1\rangle + s_{n,t} |\uparrow, n\rangle, \quad (\text{A.7})$$

$$|-, n\rangle_t = -s_{n,t} |\downarrow, n+1\rangle + c_{n,t} |\uparrow, n\rangle, \quad (\text{A.8})$$

где

$$s_{n,t} \equiv \sin(\theta_n(t)), \quad c_{n,t} \equiv \cos(\theta_n(t)). \quad (\text{A.9})$$

Далее, используя свободный параметр  $\theta$ , найдем базис  $|\pm, n\rangle$  в момент времени  $t$ , одновременно диагонализующий операторы  $\hat{C}_1$  и  $\hat{C}_2$ , при фиксированном квантовом числе  $n$ , т. е. проведем блочную диагонализацию гамильтониана  $\hat{H}$ . Действуя оператором  $\hat{C}_2$  на  $|\pm, n\rangle_t$ , находим

$$\begin{aligned} \hat{C}_2 |+, n\rangle_t &= (g_{n,t} c_{n,t} + \chi_{n,t} s_{n,t}) |\uparrow, n\rangle + \\ &+ \left( g_{n,t} s_{n,t} + \frac{\Delta}{2} c_{n,t} \right) |\downarrow, n+1\rangle, \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_2 |-, n\rangle_t &= (-g_{n,t} s_{n,t} + \chi_{n,t} c_{n,t}) |\uparrow, n\rangle + \\ &+ \left( g_{n,t} c_{n,t} - \frac{\Delta}{2} c_{n,t} \right) |\downarrow, n+1\rangle, \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

где

$$g_{n,t} \equiv g(t)\sqrt{n+1}, \quad \chi_{n,t} \equiv \chi(t)n - \Delta/2. \quad (\text{A.12})$$

Для диагонализации оператора  $\hat{C}_2$  путем нахождения его собственных значений потребуем, чтобы

$$\hat{C}_2 |+, n\rangle_t = \lambda_{n,t} |+, n\rangle_t, \quad (\text{A.13})$$

$$\hat{C}_2 |-, n\rangle_t = \lambda'_{n,t} |-, n\rangle_t. \quad (\text{A.14})$$

Подставляя выражения (A.10), (A.11) в (A.13), (A.14) и применяя соотношения, обратные (A.7), (A.8), вида

$$|\uparrow, n\rangle = c_{n,t} |-, n\rangle_t + s_{n,t} |+, n\rangle_t, \quad (\text{A.15})$$

$$|\downarrow, n+1\rangle = c_{n,t} |+, n\rangle_t - s_{n,t} |-, n\rangle_t, \quad (\text{A.16})$$

для собственных значений системы находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \lambda_{n,t} \equiv \Omega_{n,t}^{(+)} &= \frac{\chi(t)n}{2} + g_{n,t} \sin(2\theta_{n,t}) - \\ &- \frac{\chi(t)n - \Delta}{2} \cos(2\theta_{n,t}), \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda'_{n,t} \equiv \Omega_{n,t}^{(-)} &= \frac{\chi(t)n}{2} - g_{n,t} \sin(2\theta_{n,t}) + \\ &+ \frac{\chi(t)n - \Delta}{2} \cos(2\theta_{n,t}). \quad (\text{A.18}) \end{aligned}$$

При этом свободный параметр  $\theta_{n,t}$  принимает значение

$$\theta_{n,t} = \frac{1}{2} \arctg \left[ \frac{2g(t)\sqrt{n+1}}{\Delta - \chi(t)n} \right]. \quad (\text{A.19})$$

Собственные частоты (A.17) и (A.18) могут быть также записаны в следующем виде:

$$\Omega_{n,t}^{(+)} = \frac{\chi(t)n}{2} \pm \tilde{\Delta}_{n,t}, \quad (\text{A.20})$$

$$\Omega_{n,t}^{(-)} = \frac{\chi(t)n}{2} \mp \tilde{\Delta}_{n,t}, \quad (\text{A.21})$$

где обозначено

$$\tilde{\Delta}_{n,t} \equiv \sqrt{(n+1)g^2(t) + \left( \frac{\chi(t)n - \Delta}{2} \right)^2}. \quad (\text{A.22})$$

При этом полный гамильтониан системы в базисе одетых состояний диагонален и верны соотношения

$$\hat{H} |+, n\rangle_t = \hbar \left[ \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + \Omega_{n,t}^{(+)} \right] |+, n\rangle_t, \quad (\text{A.23})$$

$$\hat{H} |-, n\rangle_t = \hbar \left[ \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + \Omega_{n,t}^{(-)} \right] |-, n\rangle_t, \quad (\text{A.24})$$

$$\hat{H} |\downarrow, 0\rangle = -\frac{\hbar\omega_a}{2} |\downarrow, 0\rangle. \quad (\text{A.25})$$

Использование разложения гамильтониана в виде суммы (А.2) удобно для перехода к представлению взаимодействия с помощью оператора преобразования  $\hat{S} = \exp[i\hat{C}_1(t-t_0)]$ , где  $t_0$  — начальный момент времени эволюции системы. В этом случае гамильтониан в представлении взаимодействия совпадает по форме с оператором  $\hat{C}_2$ , т. е. имеем

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} &= \hat{S}\hat{H}\hat{S}^+ = \exp[-iC_1(t-t_0)] \times \\ &\times \hat{H} \exp[iC_1(t-t_0)] = g(t) \left( \hat{S}_+ + \hat{S}_- \right) - \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \\ &+ \chi(t) \hat{n} | \uparrow \rangle \langle \uparrow | = \hat{C}_2(t). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Собственные значения в представлении взаимодействия имеют вид

$$\hat{H}_{int} |+, n\rangle_t = \hbar\Omega_{n,t}^{(+)} |+, n\rangle_t, \quad (\text{A.27})$$

$$\hat{H}_{int} |-, n\rangle_t = \hbar\Omega_{n,t}^{(-)} |-, n\rangle_t, \quad (\text{A.28})$$

$$\hat{H}_{int} |0, \downarrow\rangle = \frac{\hbar\Delta}{2} |0, \downarrow\rangle. \quad (\text{A.29})$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Будем рассматривать случай, когда в начальный момент времени  $t_0$  атом находится в состоянии когерентной суперпозиции состояний  $|\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\rangle$ , а поле — в чистом состоянии, характеризующемся произвольной суперпозицией фоковских состояний.

Временная эволюция системы, состоящей из взаимодействующих между собой атома и поля, в шредингеровском представлении описывается оператором эволюции, удовлетворяющим следующему интегральному уравнению:

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') \hat{U}(t', t_0) dt'. \quad (\text{B.1})$$

Вектор состояния в момент времени  $t$  имеет вид

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} b_n(t_0) \hat{U}(t, t_0) |\alpha\rangle |n\rangle \equiv \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t_0) |\psi_n(t)\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Разобьем конечный интервал времени  $[t_0, t]$  на большое число  $M \gg 1$  малых отрезков  $\Delta t$  и будем предполагать, что внутри каждого из этих отрезков можно пренебречь зависимостью гамильтониана системы от времени. Формально решая уравнение

(B.1) методом итераций, находим, что в представлении взаимодействия временная эволюция системы на каждом из интервалов  $\Delta t$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} |\psi_n(t_j)\rangle &= \hat{U}_j(\Delta t) |\psi_n(t_{j-1})\rangle, \\ t_j &= t_{j-1} + \Delta t, \quad j = 1, M, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

где

$$\hat{U}_j(\Delta t) = \exp\left(-i\hat{C}_2(t_j)\Delta t/\hbar\right),$$

а  $\hat{C}_2(t) = H_{int}(t)$  — гамильтониан (A.26) в представлении взаимодействия. С помощью соотношения (B.3) состояние системы в конечный момент времени  $t$  взаимодействия атома с полем резонатора может быть записано в виде

$$\begin{aligned} |\psi_n(t)\rangle &= \\ &= \hat{U}_M(\Delta t) \hat{U}_{M-1}(\Delta t) \dots \hat{U}_1(\Delta t) |\psi_n(t_0)\rangle, \\ \Delta t &= t/M. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Воспользуемся далее одетыми состояниями системы [6–8] для любого момента времени  $t$  вида  $|\pm, n\rangle_t$  и  $|\pm, n-1\rangle_t$ , связанными с состояниями  $|\downarrow, n\rangle$  и  $|\uparrow, n-1\rangle$  соотношениями (см. Приложение А)

$$\begin{aligned} |\downarrow, n\rangle &= |\downarrow\rangle |n\rangle = \\ &= c_{n-1,t} |+, n-1\rangle_t - s_{n-1,t} |-, n-1\rangle_t, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} |\uparrow, n-1\rangle &= |\uparrow\rangle |n-1\rangle = \\ &= s_{n-1,t} |+, n-1\rangle_t + c_{n-1,t} |-, n-1\rangle_t \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

при  $n > 0$ , где обозначено

$$\begin{aligned} s_{m,t} &\equiv \sin \theta_{m,t}, \quad c_{m,t} \equiv \cos \theta_{m,t}, \\ m &= n, n-1. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Случай  $n = 0$  соответствует основному состоянию  $|\downarrow, 0\rangle$  системы, дополняющему базис  $|\pm, n\rangle_t$ .

Используя соотношения (B.5), (B.6) и (A.7), (A.8), нетрудно убедиться, что для соседних моментов времени  $t_j$  и  $t_{j+1}$  одетые состояния системы связаны соотношениями

$$|+, n\rangle_{t_j} = c_{n,j} |+, n\rangle_{t_{j+1}} - s_{n,j} |-, n\rangle_{t_{j+1}}, \quad (\text{B.8})$$

$$|-, n\rangle_{t_j} = s_{n,j+1} |+, n\rangle_{t_{j+1}} + c_{n,j+1} |-, n\rangle_{t_{j+1}}, \quad (\text{B.9})$$

где

$$s_{m,j} \equiv \sin(\theta_{m,t_{j+1}} - \theta_{m,t_j}), \quad (\text{B.10})$$

$$c_{m,j} \equiv \cos(\theta_{m,t_{j+1}} - \theta_{m,t_j}), \quad m = n, n-1.$$

Скалярные произведения векторов одетых состояний для моментов времени  $t_j$  и  $t_{j+1}$  равны при этом

$$t_j \langle +, n | +, n \rangle_{t_{j+1}} = \sin(\theta_{n,t_j} - \theta_{n,t_{j+1}}), \quad (\text{B.11})$$

$$t_j \langle -, n | -, n \rangle_{t_{j+1}} = \cos(\theta_{n,t_j} + \theta_{n,t_{j+1}}). \quad (\text{Б.12})$$

Вычисляя

$$|\psi(t_1)\rangle = \exp\left(-i\hat{C}_2(t_0 + \Delta t)\Delta t\right) |\psi(t_0)\rangle,$$

$$|\psi(t_2)\rangle = \exp\left(-i\hat{C}_2(t_0 + 2\Delta t)\Delta t\right) |\psi(t_1)\rangle$$

и т. д., с помощью соотношений (Б.3), (Б.5), (Б.6), (А.27)–(А.29) нетрудно убедиться, что вектор (Б.2) состояния системы в момент времени  $t = \tau = M\Delta t$  выхода атома из резонатора в базисе одетых состояний имеет вид

$$\begin{aligned} |\psi(\tau = M\Delta t)\rangle = & \sum_{n=0}^{\infty} b_n(0) \{A_{+,n,M}|+, n\rangle_{t_M=\tau} + A_{-,n,M}|-, n\rangle_{t_M=\tau}\} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \{B_{+,n-1,M}|+, n\rangle_{t=\tau} + \\ & + B_{-,n-1,M}|-, n\rangle_{t=\tau}\} + \\ & + a_{\downarrow} b_0(0) \exp(i\omega_a \tau / 2), \quad (\text{Б.13}) \end{aligned}$$

где величины  $A_{\pm,n,M}$  вычисляются с помощью рекуррентных соотношений

$$A_{+,n,j} = \exp[-i\Omega_{+,n}(t_j)\Delta t] [\cos(\Delta\theta_{n,j})A_{+,n,j-1} + \sin(\Delta\theta_{n,j})A_{-,n,j-1}], \quad (\text{Б.14})$$

$$\begin{aligned} A_{-,n,j} = & \exp[-i\Omega_{-,n}(t_j)\Delta t] [-\sin(\Delta\theta_{n,j})A_{+,n,j-1} + \\ & + \cos(\Delta\theta_{n,j})A_{-,n,j-1}], \quad (\text{Б.15}) \end{aligned}$$

$$\Delta\theta_{n,j} \equiv \theta_{n,t_j} - \theta_{n,t_{j-1}} \quad (\text{Б.16})$$

для любого  $1 < j \leq M$ , а для  $j = 1$  имеем

$$A_{+,n,1} = \alpha_{\uparrow} \sin(\theta_{n,0}) \exp\left[-i\Omega_n^{(+)}(\Delta t)\Delta t\right], \quad (\text{Б.17})$$

$$A_{-,n,1} = \alpha_{\uparrow} \cos(\theta_{n,0}) \exp\left[-i\Omega_n^{(-)}(\Delta t)\Delta t\right], \quad (\text{Б.18})$$

при  $n = 0, 1, 2, \dots$

Выражения для  $B_{\pm,n-1,j}$  получаются из (Б.14), (Б.15) заменой  $A \rightarrow B$  и  $n \rightarrow n - 1$ ,  $n > 0$  в обеих частях равенств. Для коэффициентов  $B_{\pm,n-1,1}$  находим

$$\begin{aligned} B_{+,n-1,1} = & i\alpha_{\downarrow} \cos(\theta_{n-1,0}) \times \\ & \times \exp\left[-i\Omega_{n-1}^{(+)}(\Delta t)\Delta t\right], \quad (\text{Б.19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{-,n-1,1} = & -i\alpha_{\downarrow} \sin(\theta_{n-1,0}) \times \\ & \times \exp\left[-i\Omega_{n-1}^{(-)}(\Delta t)\Delta t\right], \quad (\text{Б.20}) \end{aligned}$$

при  $n = 1, 2, \dots$

Как следует из формулы (А.19), входящие в выражения (Б.7), (Б.9)–(Б.12), (Б.16)–(Б.20) коэффициенты  $\theta_{n,j}$  имеют вид

$$\theta_{n,j} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[ \frac{2g(t_j)\sqrt{n+1}}{\Delta - \chi(t_j)n} \right]. \quad (\text{Б.21})$$

Для динамической  $n$ -фотонной частоты Раби атома [7] имеем

$$\begin{aligned} \Omega_n^{(\pm)}(\Delta t) = & \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega_c \pm \\ & \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2(\Delta t)(n+1)}. \quad (\text{Б.22}) \end{aligned}$$

Используя соотношения (А.15), (А.16) и (А.7), (А.8), находим, что коэффициенты разложения  $F_{\uparrow n}$  и  $F_{\downarrow n}$  волновой функции (9) в базисе собственных состояний системы выражаются через коэффициенты разложения  $A_{+,n,M}$  и  $A_{-,n,M}$  в базисе одетых состояний с помощью следующих соотношений:

$$F_{\downarrow n}(t_M) = b_{n-1}(t_0)\sigma_{\downarrow n-1}(t_M) + b_n(t_0)\mu_{\downarrow n}(t_M), \quad (\text{Б.23})$$

$$F_{\uparrow n}(t_M) = b_n(t_0)\sigma_{\uparrow n}(t_M) + b_{n+1}(t_0)\mu_{\uparrow, n+1}(t_M), \quad (\text{Б.24})$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \sigma_{\downarrow, n-1}(t_M) \equiv & A_{+,n-1,M} \cos \theta_{n-1,t_M} - \\ & - A_{-,n-1,M} \sin \theta_{n-1,t_M}, \quad (\text{Б.25}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\uparrow, n}(t_M) \equiv & A_{+,n,M} \sin \theta_{n,t_M} + \\ & + A_{-,n,M} \cos \theta_{n,t_M}, \quad (\text{Б.26}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\downarrow, n}(t_M) \equiv & B_{+,n-1,M} \cos \theta_{n-1,t_M} - \\ & - B_{-,n-1,M} \sin \theta_{n-1,t_M}, \quad (\text{Б.27}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\uparrow, n+1}(t_M) \equiv & B_{+,n,M} \sin \theta_{n,t_M} + \\ & + B_{-,n,M} \cos \theta_{n,t_M} \quad (\text{Б.28}) \end{aligned}$$

для  $n = 1, 2, \dots$  Для амплитуды основного состояния системы ( $n = 0$ ) имеем

$$F_{\downarrow 0}(t_M) = i\alpha_{\downarrow} b_0(t_0) \exp\left(-i\frac{\Delta}{2}t_M\right). \quad (\text{Б.29})$$

Формулы (Б.13)–(Б.29) являются обобщением результатов работ [6–8, 14], где рассматривались вакуумные состояния исходного поля и возбужденные состояния атома в начальный момент времени, на случай исходного состояния поля, представляющего собой произвольную суперпозицию фоковских состояний и произвольную исходную суперпозицию атомных состояний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre et al., *Phys. Rev. Lett.* **65**, 976 (1990).
2. M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond et al., *Phys. Rev. A* **45**, 5193 (1992).
3. M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt-Kaler et al., *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3339 (1994).
4. J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
5. М. О. Скалли, М. О. Зубайри, *Квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2003).
6. А. В. Козловский, *Письма в ЖЭТФ* **73**, 364 (2001).
7. А. В. Козловский, *ЖЭТФ* **120**, 529 (2001).
8. А. В. Козловский, *КЭ* **32**, 71 (2002).
9. А. В. Козловский, *Письма в ЖЭТФ* **82**, 780 (2005).
10. B. M. Garraway, B. Sherman, H. Moya-Cessa et al., *Phys. Rev. A* **49**, 535 (1994).
11. G. Harel and G. Kurizki, *Phys. Rev. A* **54**, 5410 (1996).
12. C. C. Gerry and H. Ghosh, *Phys. Lett.* **229 A**, 17 (1997).
13. B. T. H. Varcoe, S. Brattke, and H. Walther, *New J. Phys.* **6**, 97 (2004).
14. А. В. Козловский, *Опт. и спектр.* **102**, 640 (2007).
15. G. J. Milburn and M. J. Gagen, *Phys. Rev. A* **46**, 1578 (1992).