

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ КОЛЕЦ B И C САТУРНА ПО ДАННЫМ АППАРАТА «КАССИНИ»

Е. Б. Постников^{a}, А. Ю. Лоскутов^{b**}*

^a *Курский государственный университет
305000, Курск, Россия*

^b *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 сентября 2006 г.

Показано, что непрерывное вейвлет-преобразование с комплексным вейвлетом Морле является эффективным средством для анализа текущей переменной периодичности пространственной неоднородности частиц в радиальной структуре колец Сатурна. Предложен оригинальный алгоритм, основанный на сведении интегрального преобразования к решению задачи Коши для дифференциального уравнения. Он использован для анализа ряда изображений колец B и C Сатурна, полученных в течение второй половины 2004 г. аппаратом «Кассини». Это исследование представляет собой продолжение работы [10] по анализу тонкой структуры колец Сатурна.

PACS: 96.30.Wr, 05.45.-a

1. ВВЕДЕНИЕ

Структура главных колец Сатурна (A , B , C), в особенности мелкомасштабная, обнаруженная космическими аппаратами «Вояджер» в начале 1980-х годов, является объектом активного изучения как динамическая система многих частиц (подробный обзор состояния проблемы до появления новых данных, полученных аппаратом «Кассини», см. в статье [1]).

Общепризнано [2], что ряд наиболее характерных крупномасштабных структур — волновых цугов — обязан своим происхождением резонансному взаимодействию со спутниками Сатурна: резонансам Линдблада, связанным с радиальным возмущением со стороны спутника, движущегося в гравитационном поле несферического тела, и вертикальным резонансам, соответствующим движению возмущающего тела по наклоненной к плоскости кольца орбите. В особенности это относится к структурам кольца A .

Тонкая структура других главных колец Сатурна B и C не получила еще полного объяснения [1]. Предполагается (см. обзор [3]), что мелкомасштаб-

ная волновая картина может быть реализована за счет квазигидродинамических эффектов в сплошной самогравитирующей среде (например, благодаря неустойчивости Джинса, «вязкой надстабильности» и др.). Авторы отмечают, что характерные критические длины волн, при которых наблюдается такая неустойчивость, составляют 30–200 м в кольце A , 7–30 м в кольце B и менее 7 м в кольце C . Для условий кольца B детальное численное моделирование на основе уравнения Навье–Стокса с учетом и без учета гравитационного самовоздействия [4] привело к получению радиальной структуры как в виде тонких пиков, разделенных пустыми участками протяженностью 80–100 м (результат вязкой неустойчивости самогравитирующей жидкости), так и в форме волновых структур протяженностью до 200 м. Такая структура может быть следствием так называемой вязкой надстабильности — вторичного неустойчивого режима, отделенного от первичной вязкой неустойчивости коридором значений вязкости, обеспечивающих устойчивое однородное распределение плотности частиц.

Очевидно, эти и подобные результаты требуют разработки методов эффективной пространственно периодической декомпозиции изображений радиаль-

*E-mail: postnicov@mail.ru

**E-mail: loskutov@chaos.phys.msu.ru

ных структур главных колец Сатурна. На основе данных, полученных «Вояджерами» по кольцу А, в работе [5] посредством оконного преобразования Фурье было выделено около 40 резонансных структур, которые отождествлялись с влиянием различных спутников Сатурна. В то же время в статье [5] отмечен ряд резонансных областей, в которых достигнутая степень разрешения и возможности алгоритма обработки не позволили определить особенности распределения вещества кольца. Для кольца В проводился частотный анализ волновых структур с использованием оконного преобразования Фурье [6] и поиск влияния высших резонансов на фоне стохастических эффектов [7].

Начиная с 2004 года стали доступны новые данные, полученные космическим аппаратом «Кассини», в том числе фотографии высокого разрешения колец (см. первичный отчет исследовательской группы проекта [8]). Для их обработки может быть использован такой активно используемый в последние два десятилетия метод анализа, как вейвлет-преобразование, выгодно отличающийся от оконного преобразования Фурье большей адаптивностью к пространственно-частотным свойствам сигнала. Для решения этой задачи эффективность применения преобразования с упрощенным комплексным вейвлетом Морле была продемонстрирована на примере исследования резонансных структур кольца А [10]. При этом само преобразование выполнялось на основе нового алгоритма, сводящего интегральное преобразование к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных с исследуемым распределением в качестве начальных условий. Такой подход позволил достичь большей точности и детальности разрешения при учете локальных свойств распределения.

Данная работа является продолжением анализа структуры главных колец Сатурна по их фотографиям высокого разрешения, переданным в 2004 году аппаратом «Кассини», новым методом вейвлет-преобразования. Однако, так как мелкомасштабный характер распределения яркости колец В и С отличается большей иррегулярностью, чем кольца А, в качестве вейвлета мы используем точный базис Морле.

2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С БАЗИСОМ МОРЛЕ

Если сигнал нерегулярен и сочетает в себе как почти гармонические составляющие конечной дли-

тельности с постоянной или медленно меняющейся частотой, так и отдельные всплески, то для его многомасштабного представления может потребоваться вариация параметров анализирующего вейвлета в широких пределах. Поэтому представляется важным, чтобы функция-вейвлет $\psi(\xi)$ представляла собой элемент функционального базиса [9]. Это означает, что задание вейвлет-образа $w(a, b)$ должно точно восстанавливать исходную функцию-преобраз $f(t)$. В частности, при соблюдении энергетической нормировки

$$\int |\psi(\xi)|^2 d\xi = 1$$

необходимо, чтобы функция $f(t)$ имела вид

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint w(a, b) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) db \frac{da}{a^2},$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. При этом выполняется условие допустимости вейвлета, которое может быть выражено либо через его фурье-образ

$$C_\psi = \int \frac{|\hat{\psi}^*(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty,$$

либо в виде требования, накладываемого на сам вейвлет:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) d\xi = 0.$$

Оно позволяет после обработки восстановить сигнал по его образу.

Легко проверить, что использованный в работе [10] вейвлет Морле не удовлетворяет приведенному условию. Однако при достаточно большой базисной частоте $\omega_0 \geq \pi$ отличие интеграла от нуля становится пренебрежимо малым, что и было использовано для исследования сигналов, характерных для распределения плотности частиц в кольце А.

Ортонормированный базис Морле имеет вид [11]:

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \times \left[\exp(i\omega_0 \xi) - \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2}\right) \right] \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right). \quad (1)$$

Использование здесь энергетической нормировки связано с тем, что ее вычисление (из-за наличия разности в скобках) значительно проще, чем амплитудной нормы. При этом соответствующее интегральное вейвлет-преобразование записывается как

$$w(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt. \quad (2)$$

Как показано в работе [12], в отличие от преобразования в амплитудной нормировке, для анализа локального поведения текущего периода наиболее удобен не модуль вейвлет-преобразования, а его перемасштабированная версия: $|w(a, b)|^2/a$. При этом период T монохроматического сигнала дается соотношением

$$\frac{T}{2\pi} \left(\frac{T\omega_0}{2\pi a} - 1 \right) = \exp \left(-\frac{4\pi\omega_0 a}{T} \right).$$

В работе [10] нами было показано, что вейвлет-преобразование с амплитудной нормой, равной $\exp(-\omega_0^2/2)$, может быть найдено как решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial a} &= a \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \omega_0 \frac{\partial v}{\partial b}, \\ \frac{\partial v}{\partial a} &= a \frac{\partial^2 v}{\partial b^2} - \omega_0 \frac{\partial u}{\partial b}. \end{aligned} \tag{3}$$

Начальными условиями для действительной $u(a, b) = \text{Re } w(a, b)$ и мнимой $v(a, b) = \text{Im } w(a, b)$ частей вейвлет-образа при выборе подходящего значения нормы служат соответственно сама анализируемая функция и нуль. В случае точного базиса (1) предельный переход $a \rightarrow 0$ приводит не к дельта-функции Дирака, а к ее производной, что делает невозможным использовать функцию прообраз $f(b)$ как $w(0, b)$.

Однако линейность по составляющим ядра интегрального преобразования с базисом Морле допускает раздельное вычисление величин:

$$\begin{aligned} W^{(1)}(a, b) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t-b}{a} + i\omega_0 \right)^2 \right]}{\sqrt{2\pi a}} dt, \\ W^{(2)}(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t-b}{a} \right)^2 \right]}{\sqrt{2\pi a}} dt, \end{aligned} \tag{4}$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial a} = a \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial b^2} - i\omega_0 \frac{\partial W^{(1)}}{\partial b}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial W^{(2)}}{\partial a} = a \frac{\partial^2 W^{(2)}}{\partial b^2}. \tag{6}$$

При этом ядра обоих преобразований (4) в пределе $a \rightarrow 0$ переходят в дельта-функции и, соответственно, уравнения (5), (6) получают начальные условия

$$\begin{aligned} \text{Re } W^{(1)}(0, b) &= \text{Re } W^{(2)}(0, b) = f(b), \\ \text{Im } W^{(1)}(0, b) &= \text{Im } W^{(2)}(0, b) = 0. \end{aligned}$$

Система уравнений для действительной и мнимой частей функции $W^{(1)}$ аналогична (3). У функции $W^{(2)}$ ненулевой является только действительная часть, изменяющаяся согласно уравнению (6). Искомое вейвлет-преобразование (2) с базисом (1) выражается через вспомогательные функции как

$$w(a, b) = \sqrt[4]{4\pi a^2} \left(W^{(1)}(a, b) - W^{(2)}(a, b) \right) \times \exp \left(-\frac{\omega_0^2}{2} \right).$$

Приведенные далее расчеты по описанному алгоритму проводились при помощи стандартных функций решения систем параболических дифференциальных уравнений языка математических расчетов MATLAB. При этом, вследствие конечности длины обрабатываемого сигнала, задача Коши заменялась граничной задачей с условиями первого рода, в качестве которых выступают исходные значения сигнала в краевых точках.

3. ВЕЙВЛЕТ-ОБРАЗЫ СТРУКТУР КОЛЕЦ В И С

Применим описанный выше подход к анализу фотографических данных, полученных аппаратом «Кассини» (октябрь–декабрь 2004 г.). Выборка узкой радиально направленной полосы проводилась из собрания NASA/JPL/Space Science Institute: PIA06535 (1024×15 пикселей, рис. 1а), PIA06543 (1024×17 пикселей, рис. 2а), — кольцо В и PIA06537 (1024×15 пикселей, рис. 3а) — кольцо С (центр изображения находится на расстоянии 75 тыс. км от Сатурна). На рис. 1б, 2б, 3б представлены функции-сигналы, полученные усреднением по выборке. Темные области соответствуют большему значению функции. На рис. 1в, 2в, 3в изображены модули вейвлет-преобразования с базовой частотой, равной π , на рис. 3г — 2π . С изображений удалены области, на которых четко видны краевые эффекты.

На рис. 1 показана центральная область кольца В, на рис. 2 — его внешний край (однородная темная область с тонкой яркой полосой внутри — это щель

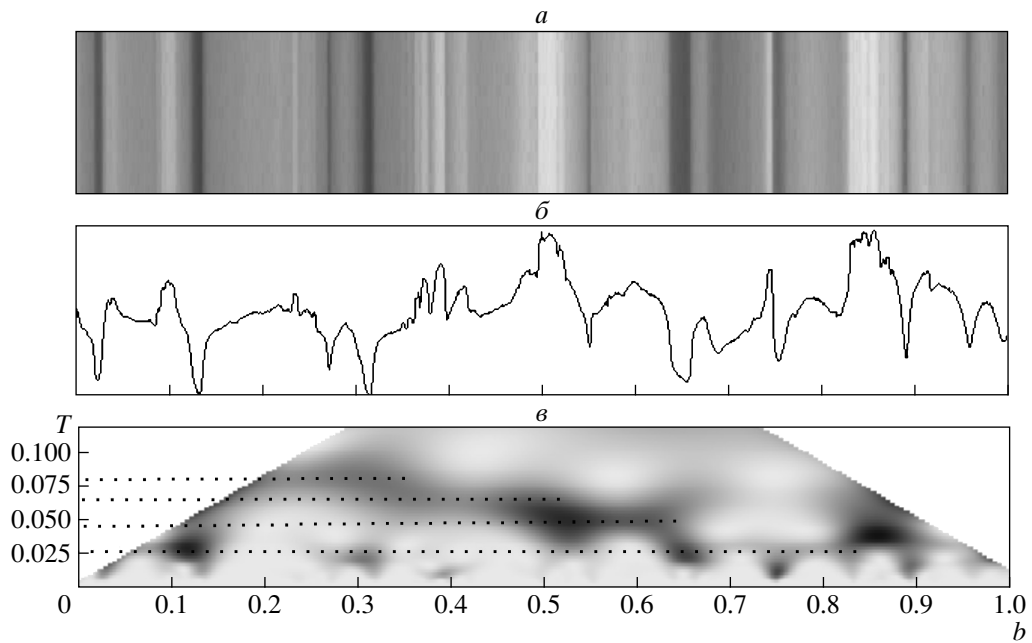


Рис. 1. Центральная часть кольца *B*

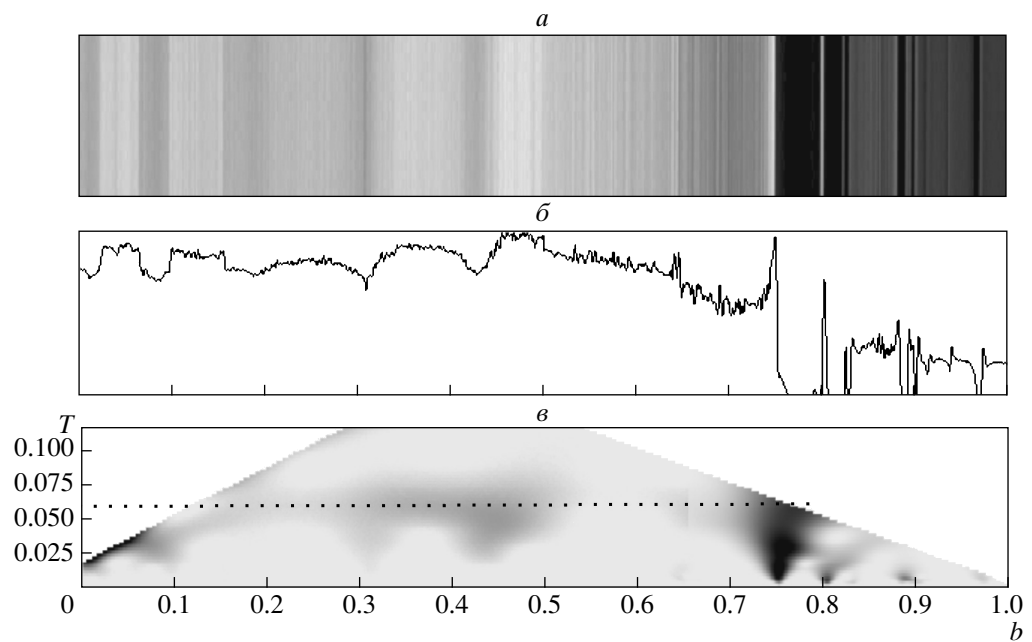


Рис. 2. Внешний край кольца *B*

Гюйгенса). Можно отметить, что вейвлет-образы обоих участков содержат достаточно протяженные области волновой структуры со слабо меняющимся периодом. В частности, на рис. 1в видно, что на участке с безразмерными координатами от 0.2 до

0.65 (что составляет в абсолютных единицах около 2 тыс. км) происходит плавное изменение периода от 0.083 до 0.044 (т.е. от 380 км до 200 км), причем линия максимума имеет ступенчатый вид с тремя плато. Далее имеется участок линии максиму-

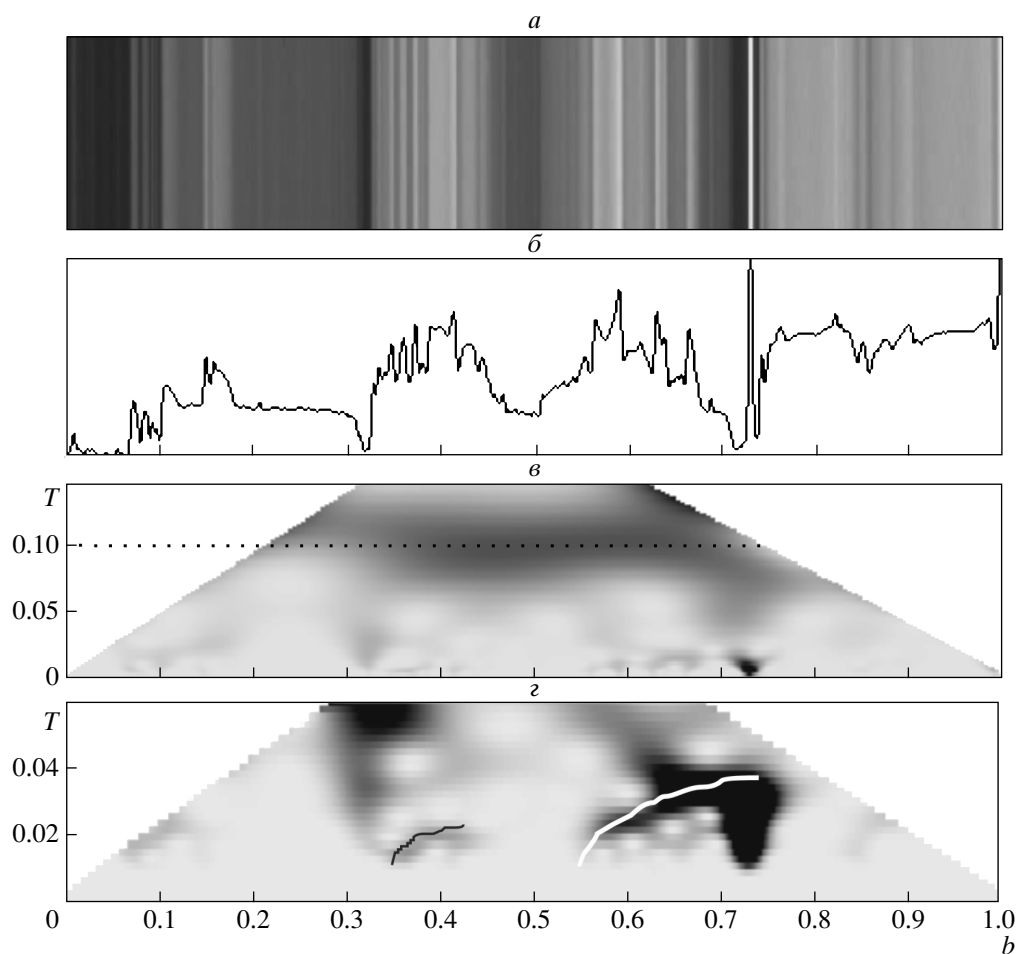


Рис. 3. Центральная часть кольца *C*

ма, соответствующий периоду 0.025 (115 км). Мелкомасштабные же структуры с упорядоченной текущей периодичностью практически отсутствуют: кроме «клиньев», отмечающих точки резкого локального изменения яркости, при данном уровне разрешения можно отметить только резонансную наклонную линию в окрестности точки с координатой 0.4. Подобная «фоновая» периодичность отмечалась и ранее в работе [6], однако предложенное нами вейвлет-преобразование дает возможность проследить «лестничный» характер изменения текущего периода. Одной из возможных физических интерпретаций такого поведения может служить резонансный механизм, подобный тому, что порождает длиннопериодические резонансные волны в кольце *A*, по обе стороны щели Энке, слабо взаимодействующие с коротковолновыми сильными резонансами.

На вейвлет-образе рис. 2в горизонтальный от-

резок вейвлет-максимума соответствует крупномасштабной волне с периодом 0.063 (290 км). Отвечающее ей возмущение видно непосредственно и на графике распределения яркости рис. 2б.

Более богатую структуру демонстрирует участок кольца *C*, представленный на рис. 3. Здесь, помимо общей фоновой волны плотности с периодом 0.1 (460 км), четко выделяются две классические резонансные кривые. Они заметны и на рис. 3в, но наиболее отчетливы на рис. 3г, где линии максимума выделены контрастными черной и белой линиями. Следует отметить, что слабая темная линия, располагающаяся ниже белой, не указывает на наличие еще одного резонанса, а является следствием большой базовой частоты, что приводит к проявлению высших гармоник при обработке несинусоидальных волн.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, вейвлет-анализ структуры колец B и C показывает, что в них, как и в кольце A , существуют волновые возмущения разных масштабов, слабо взаимодействующие между собой. Изучение вейвлет-образа подтверждает относительно малую долю резонансных структур на фоне различных коротковолновых всплесков. Однако, как показано в разд. 2, помимо волн стабильного пространственного периода, выделяемых в кольце B ранее, существуют и длинноволновые резонансные возмущения, сходные с возмущениями, порождаемыми спутниками-пастухами в кольце A .

Следует отметить, что обратное вейвлет-преобразование для точной формы базиса Морле позволяет вырезать из радиального сигнала, например, все резонансные цуги. На плоскости «координата–период» таким цугам соответствуют интенсивные вейвлет-максимумы в виде «лестниц». Подставив значения вейвлет-образа, выбранные вдоль линии максимума и ее малой окрестности, в соотношение для обратного вейвлет-преобразования, можно получить совокупность чисто резонансных колебаний. Теперь, проводя их вычитание из полного сигнала, получим график функции, пригодной для анализа мелкомасштабной структуры. Локализация участков стабильной периодичности и детектирование их периода в квазигидродинамической модели дает информацию о плотности и композиции вещества кольца, обеспечивающих требуемую характерную вязкость. Вследствие такой вязкости появляется структура с данной длиной волны.

Таким образом, нетрудно видеть, что комплексное вейвлет-преобразование гораздо лучше других оконных преобразований приспособлено к подобного рода анализу. Это обусловлено тем, что вследствие свойства самоподобия анализирующего вейвлета в любом частотном диапазоне на ширине окна

укладывается одинаковое характерное число колебаний. Наконец, удаление описанным выше способом наиболее высокочастотной составляющей (на масштабах, близких к нулю) позволяет провести очистку сигнала от шумовой компоненты (обусловленной как структурой кольца, так и аппаратными помехами), а выделение аперiodических пятен на вейвлет-образе дает возможность детектировать структуры в виде узких плотных колец (ринглетов).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. W. Esposito, Rep. Prog. Phys. **65**, 1741 (2002).
2. C. D. Murray, in *Lecture Notes in Physics* (2001), Vol. 577, p. 91.
3. E. Griv and M. Gedalin, Planet. Space Sci. **51**, 899 (2003).
4. U. Schmidt and W. M. Tscharnuter, Icarus **138**, 173 (1999).
5. L. J. Spilker, S. Pilorz, A. L. Lane et al., Icarus **171**, 373 (2004).
6. L. J. Horn and J. N. Cuzzi, Icarus **119**, 285 (1996).
7. K.-U. Thiessenhusen, L. W. Esposito, J. Kurths, and F. Spahn, Icarus **113**, 206 (1995).
8. C. C. Porco et al., Science **307**, 1226 (2005).
9. S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Acad. Press (1999).
10. Е. Б. Постников, А. Ю. Лоскутов, ЖЭТФ **128**, 752 (2005).
11. И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, Ижевск: РХД, Москва (2004).
12. P. S. Addison, J. T. Watson, and T. Feng, J. Sound Vibr. **253**, 733 (2002).