

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СТИМУЛИРОВАННОЙ РАМАНОВСКОЙ АТОМНО-МОЛЕКУЛЯРНОЙ КОНВЕРСИИ В БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ

*П. И. Хаджи**, *Д. В. Ткаченко***

*Институт прикладной физики Академии наук Республики Молдова
MD 2800, Кишинев, Молдова*

*Приднестровский государственный университет
MD 3300, Тирасполь, Молдова*

Поступила в редакцию 19 сентября 2006 г.

В приближении среднего поля получена и исследована система нелинейных эволюционных уравнений, описывающих динамику атомов, молекул и фотонов в процессе стимулированной атомно-молекулярной конверсии в бозе-эйнштейновском конденсате. Показано, что процесс конверсии может быть как периодическим, так и аperiodическим во времени, причем скорость протекания процесса существенно определяется начальными плотностями частиц и начальной разностью фаз. В зависимости от начальных условий возможно установление различных режимов процесса конверсии. Предсказывается возможность установления особого состояния системы — покоя — при ненулевых значениях начальных плотностей частиц. Указано, что когерентность бозе-конденсата атомов, молекул и фотонов предопределяет возможность фазового контроля процесса конверсии.

PACS: 03.75.Nt, 05.30.Jp, 42.50.Hz

1. ВВЕДЕНИЕ

Первые наблюдения бозе-эйнштейновской конденсации в атомных парах низкой плотности [1–5] стимулировали существенный прогресс в экспериментальном и теоретическом исследовании физических свойств бозе-конденсата в магнитных ловушках [6–9] и его динамики в двухъямных ловушках [10–15]. В последние годы особый интерес вызывают также исследования динамики связанных атомно-молекулярных конденсатов в условиях проявления резонанса Фешбаха либо в условиях рамановской атомно-молекулярной конверсии с участием двух импульсов электромагнитного излучения.

Если в процессе столкновения двух атомов их полная энергия оказывается равной энергии квазисвязанного двухатомного состояния (молекулы в сильновозбужденном состоянии), то возникновение резонансного связывания атомов называют резонансом Фешбаха. Зависимость положения резонанса

Фешбаха от величины приложенного магнитного поля определяет уникальную возможность для непрерывного изменения межатомной длины рассеяния и даже смены знака межатомного взаимодействия при изменении поля [16]. Магнитное поле подстраивает уровни двухатомной и молекулярной систем так, что пары атомов связываются в молекулу в сильновозбужденном состоянии. В работе [17] отмечается, что в сильновзаимодействующей многочастичной системе понятия «пара атомов» и «молекула» в области резонанса Фешбаха становятся в определенной мере условными. Такие резонансы наблюдались, например, в бозе-конденсате атомов натрия в магнитных полях 853 и 907 Гс [18] и в холодном газе ^{85}Rb при 164 Гс [19]. В натрии длина рассеяния a как функция магнитного поля B изменялась в соответствии с теоретическими предсказаниями [16]. В работах [20–22] показано, что время жизни образующихся молекул в сильновозбужденных состояниях намного превышает время релаксации их на нижние уровни. Это свойство объясняется [23] действием эффекта подавления неупругих процессов взаимодействия с пере-

*E-mail: tdsu4@idknet.com

**E-mail: dvtkachenko@mail.ru

ходом молекул на более глубокие уровни. Однако в работах [24, 25] показано, что существуют механизмы неупругих столкновений, например, молекулы с третьим атомом [25], когда скорость столкновений возрастает. Такие столкновения определяют реальные потери в системе конденсированных атомов и молекул. В работе [26] исследован резонанс Фешбаха в зависящем от времени магнитном поле. В этом случае также возникает затухание конденсата из-за перехода части атомов в неконденсатные состояния.

К настоящему времени удалось наблюдать рождение ультрахолодных бозе-конденсированных молекул K_2 [27–29], Li_2 [20–22, 30–34], Cs_2 [35–37], Cs_4 [38], Na_2 [2, 18, 39], Rb_2 [1, 19, 40–43].

В работах [44–46] развита идея оптического манипулирования величиной и знаком длины рассеяния в низкотемпературных атомных газах, т. е. идея оптического резонанса Фешбаха. Двухфотонная атомная фотоассоциация наблюдалась [43, 47] при воздействии на атомную систему двух рамановских импульсов, которые приводили к связыванию пар взаимодействующих атомов в молекулы. При этом длина рассеяния оказалась существенно зависящей от интенсивности лазерных лучей и их расстройек резонанса.

Работы [48–51], выполненные различными авторами, объединяют постановка задачи, метод решения и полученные результаты. Общим подходом для них является использование системы связанных уравнений Гросса–Питаевского в приближении среднего поля для амплитуд атомного и молекулярного конденсатов и численное их решение. Полученные результаты и выводы в работах [48–51] во многом совпадают.

В [48] изучено когерентное образование молекулярного бозе-конденсата из атомного с использованием параметрического взаимодействия, в котором процессы образования и диссоциации молекул аналогичны процессам соответственно генерации второй гармоники и параметрической даун-конверсии. Отмечается возможность возникновения в системе колебаний плотностей атомов и молекул. Предсказывается возможность существования трехмерного связанного атомно-молекулярного конденсата в виде локализованных солитоноподобных структур даже в отсутствие ловушки.

Отметим, что в работе [52] изучена квантовая динамика двухмодового атомно-молекулярного конденсата на базе системы связанных уравнений для амплитуд конденсированных атомов и молекул, причем в гамильтониане, как и в работе [48], учитыва-

ется только параметрическое взаимодействие между конденсатами.

В работе [49] изучены свойства атомного бозе-конденсата, параметрически связанного с молекулярным бозе-конденсатом посредством когерентного стимулированного процесса рамановской фотоассоциации. Показано, что благодаря межчастичным взаимодействиям возникает захваченный в ловушку пространственно-локализованный гибридный атомно-молекулярный конденсат, который является динамически стабильным даже в отсутствие ловушки. Если же конденсат в ловушке оказывается нестабильным, то могут родиться самолокализованные стабильные капли атомно-молекулярного конденсата, после того как конденсат покинет ловушку. Такие капли когерентных материальных волн напоминают самолокализованные оптические солитоны, поддерживаемые параметрическим взаимодействием.

В работе [50] также доказана возможность образования гибридного атомно-молекулярного конденсата самосогласованной плотности, проявляющего жидкоподобные свойства. Подсчитана энергия основного состояния конденсата, приходящаяся на одну частицу, как функция плотности при различных расстройках резонанса. Доказано существование минимума энергии при определенном значении плотности.

В работе [53] также изучен процесс рамановской фотоассоциации. Для скорости связывания атомов в молекулу и ее распада получена величина порядка 10^{-10} см³/с, что намного превышает скорости спонтанных переходов из возбужденных состояний молекулы. Это указывает на осуществимость быстрой когерентной атомно-молекулярной конверсии в конденсате.

Успехи, достигнутые в контроле взаимодействия ультрахолодных атомов, ставят вопрос о возможности осуществления подобного контроля и для ультрахолодных молекул. Резонансные взаимодействия между молекулами могут приводить к синтезу более сложных объектов, нежели атомные димеры. Более того, процессы рассеяния для молекул содержат много новых реактивных каналов по сравнению с атомными системами. Магнитное подстраивание межмолекулярных взаимодействий, подобно атомному резонансу Фешбаха, будет приводить к новым процессам, к контролируемым химическим реакциям, к синтезу сложных ультрахолодных молекул в режимах, когда квантовая когерентность играет чрезвычайно важную роль. Авторы работы [38] наблюдали подстраиваемые магнитным по-

лем столкновительные резонансы в ультрахолодном газе молекул Cs_2 , которые рождались из атомного бозе-эйнштейновского конденсата с использованием излучения CO_2 -лазера, и интерпретируют их как резонансы Фешбаха для ультрахолодных молекул Cs_2 с образованием молекул Cs_4 .

В работе [51] показано, что такого рода процессы могут привести к принципиально новой химии, к так называемой суперхимии, в которой имеет место сильное когерентное стимулирование химических реакций с участием ультрахолодных атомов и молекул. Рамановская атомно-молекулярная конверсия может оказаться доминирующей нелинейностью и привести к новым химическим реакциям при сверхнизких температурах. В работах [43, 48–51, 53–57] предложена теория фотоассоциации атомов бозе-конденсата, которая, в конечном счете, сводится к теории индуцированной внешней электромагнитной волной атомно-молекулярной конверсии. При этом роль оптических импульсов, обеспечивающих рамановский переход, сводится к зависящим от интенсивностей полей нелинейным коэффициентам в гамильтониане взаимодействия, т. е., по сути дела, к использованию приближения заданного поля оптических импульсов. Однако фотоны обоих импульсов также могут стимулировать протекание химических реакций, и поэтому их роль может оказаться гораздо более важной и разнообразной. В работе [51] показано, что простая атомно-молекулярная конверсия либо индуцированная рамановским переходом атомно-молекулярная конверсия сводится к периодическим процессам связывания двух атомов в молекулу и ее распада, причем скорости этих превращений определяются плотностью исходных атомов. На самом деле при непосредственном учете временной эволюции плотностей фотонов рамановских импульсов ситуация может оказаться более сложной [58].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Интерес представляет рассмотрение динамики атомно-молекулярных бозе-конденсатов. Рамановский процесс связывания двух атомов в молекулу считается единым процессом. Ниже представлены результаты исследования этого процесса. Показано, что плотности исходных атомов, молекул и фотонов существенно влияют на скорость протекания процесса и указано, что реакции могут быть как периодическими, так и аperiodическими во време-

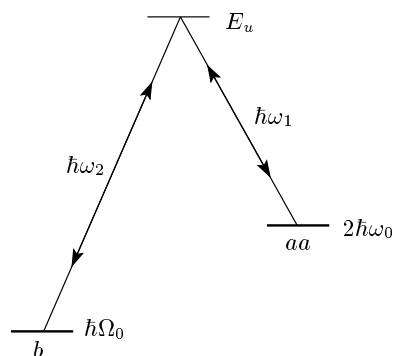


Рис. 1. Схема процесса индуцированной рамановской атомно-молекулярной конверсии. Уровень aa соответствует энергии двух свободных атомов, уровень b — энергии свободной молекулы

ни. Кроме того, отмечена существенная роль разности фаз исходных компонентов реакции и предсказывается возможность фазового контроля химической реакции. Макроскопическая когерентность бозе-конденсата атомов, молекул и фотонов обоих импульсов предопределяет квантовую интерференцию всех компонентов реакции и, соответственно, значимость фазовых соотношений.

В принципе, исследуемый процесс можно было бы назвать также оптической рамановской нутацией в условиях атомно-молекулярной конверсии, состоящей в периодическом изменении населенностей атомного и молекулярного состояний под действием двух когерентных рамановских импульсов лазерного излучения и в периодическом усилении одного из импульсов и ослаблении другого.

Предположим, что два одинаковых свободных бозе-конденсированных атома с нулевой кинетической энергией (нулевая температура) и полной энергией $E_i = 2\hbar\omega_0$ переходят в молекулярное состояние с энергией $E_m = \hbar\Omega_0$ через возбужденное молекулярное состояние E_u , поглощая и излучая кванты света с энергиями соответственно $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$ (рис. 1). При этом используются два фазово-когерентных импульса с частотами ω_1 и ω_2 и определенными значениями амплитуд полей и фаз. Связывание каждой пары атомов в молекулу приводит к переносу одного фотона от первого импульса ко второму. Поэтому усиление одного из импульсов и ослабление другого в процессе атомно-молекулярной конверсии могло бы быть указанием на существование когерентности процесса. Что касается промежуточного возбужденного уровня с энергией E_u , то его можно исключить из рассмотрения, используя принцип адиа-

батического следования [54]. В работе [59] изучался индуцированный рамановский перенос атомного бозе-конденсата из одной ловушки в другую через возбужденный общий уровень системы. Процесс переноса атомов рассматривался как двухступенчатый. Численное решение системы уравнений для населенностей двух нижних уровней и верхнего возбужденного показало, что его населенность исчезающе мала по сравнению с населенностями нижних уровней.

Мы предлагаем модельный гамильтониан взаимодействия H_{int} , который описывает процесс индуцированной рамановской атомно-молекулярной конверсии как единый (не двухступенчатый) процесс под действием коротких импульсов резонансного лазерного излучения:

$$\hat{H}_{int} = \hbar g \left(\hat{a} \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{c}_1 \hat{c}_2^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{b} \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2 \right), \quad (1)$$

где \hat{a} и \hat{b} (\hat{a}^\dagger и \hat{b}^\dagger) — бозонные операторы уничтожения (рождения) соответственно атомного и молекулярного состояний, \hat{c}_1 и \hat{c}_2 (\hat{c}_1^\dagger и \hat{c}_2^\dagger) — операторы уничтожения (рождения) фотонов с частотами ω_1 и ω_2 , а g — константа взаимодействия. В сущности, мы предлагаем общий тип нелинейности, которая может приводить к образованию молекулярного бозе-конденсата через стимулированную двумя рамановскими импульсами эмиссию молекулярных бозонов из атомного бозе-конденсата. Подобный гамильтониан, описывающий процесс однофотонной атомно-молекулярной фотоассоциации, обсуждался в работе [54]. Информация об амплитуде и других параметрах падающего импульса содержалась в коэффициенте фотоассоциации.

Как и в работах [49–51, 54–57], используем приближение среднего поля. Условия применимости приближения среднего поля детально обсуждаются в обзоре [8]. Атомно-молекулярный бозе-конденсат характеризуется ненулевыми параметрами порядка для атомного $\langle \hat{a} \rangle = a \neq 0$, молекулярного $\langle \hat{b} \rangle = b \neq 0$ и электромагнитных $\langle \hat{c}_{1,2} \rangle = c_{1,2} \neq 0$ полей, которые мы далее будем называть амплитудами материального и электромагнитного полей. Усредняя гейзенберговские уравнения движения для операторов \hat{a} , \hat{b} , \hat{c}_1 и \hat{c}_2 ($i\hbar d\hat{a}/dt = [\hat{a}, \hat{H}]$ и т. д.), в этом приближении получаем уравнения движения для соответствующих амплитуд a , b , c_1 и c_2 . При этом учитывается то обстоятельство, что в предположении полной когерентности системы среднее значение от произведения нескольких операторов равно произведению средних значений каждого из операторов, т. е. произведению соответствующих амплитуд полей. Получающаяся таким образом система нелинейных диффе-

ренциальных уравнений с использованием гамильтониана (1), описывающая временную эволюцию амплитуд материальных и электромагнитных полей, имеет вид

$$\begin{aligned} i\dot{a} &= \omega_0 a + 2ga^*bc_1^*c_2, \\ i\dot{b} &= \Omega_0 b + gaac_1c_2^*, \\ i\dot{c}_1 &= \omega_1 c_1 + ga^*a^*bc_2, \\ i\dot{c}_2 &= \omega_2 c_2 + gaab^*c_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Эту систему уравнений необходимо дополнить начальными условиями, которые можно представить в виде

$$\begin{aligned} a|_{t=0} &= a_0 \exp(i\varphi_0), & b|_{t=0} &= b_0 \exp(i\psi_0), \\ c_1|_{t=0} &= c_{10} \exp(i\psi_{10}), & c_2|_{t=0} &= c_{20} \exp(i\psi_{20}), \end{aligned} \quad (3)$$

где каждая из переменных характеризуется своими начальными амплитудой и фазой.

Из уравнений (2) видно, что стимулированная рамановская атомно-молекулярная конверсия в конденсате является существенно нелинейной по амплитудам как материального, так и электромагнитного полей. Введем далее в рассмотрение плотности частиц,

$$n = |a|^2, \quad N = |b|^2, \quad f_1 = |c_1|^2, \quad f_2 = |c_2|^2,$$

и две компоненты «поляризации»,

$$Q = i(aab^*c_1c_2^* - a^*a^*bc_1^*c_2),$$

$$R = aab^*c_1c_2^* + a^*a^*bc_1^*c_2.$$

Используя (2), приходим к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{n} = 2gQ, \quad \dot{N} = -gQ, \quad \dot{f}_1 = gQ, \quad \dot{f}_2 = -gQ, \quad (4)$$

$$\dot{Q} = \Delta R + 2gn[(4N - n)f_1f_2 + Nn(f_2 - f_1)], \quad (5)$$

$$\dot{R} = -\Delta Q, \quad (6)$$

где $\Delta = 2\omega_0 - \Omega_0 + \omega_1 - \omega_2$ — расстройка резонанса. Используя условия (3), можно записать начальные условия для плотностей частиц,

$$\begin{aligned} n|_{t=0} &\equiv n_0 = |a_0|^2, & N|_{t=0} &\equiv N_0 = |b_0|^2, \\ f_1|_{t=0} &\equiv f_{10} = |c_{10}|^2, & f_2|_{t=0} &\equiv f_{20} = |c_{20}|^2, \end{aligned} \quad (7)$$

и для компонент «поляризации»,

$$\begin{aligned} Q|_{t=0} &\equiv Q_0 = 2n_0 \sqrt{N_0 f_{10} f_{20}} \sin \theta_0, \\ R|_{t=0} &\equiv R_0 = 2n_0 \sqrt{N_0 f_{10} f_{20}} \cos \theta_0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\theta_0 = \psi_0 - 2\varphi_0 + \psi_{20} - \psi_{10} \quad (9)$$

начальная разность фаз.

Решая систему уравнений (4)–(6) с использованием условий (7), (8), получаем три независимых интеграла движения для плотностей частиц,

$$\begin{aligned} n + 2N &= n_0 + 2N_0, \\ f_1 + N &= f_{10} + N_0, \quad f_2 - N = f_{20} - N_0, \end{aligned} \quad (10)$$

и выражения для функций R и Q :

$$R = \frac{\Delta}{g}(N - N_0) + 2n_0 \sqrt{N_0 f_{10} f_{20}} \cos \theta_0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Q^2 &= - \left[\frac{\Delta}{g}(N - N_0) - 2n_0 \sqrt{N_0 f_{10} f_{20}} \cos \theta_0 \right]^2 + \\ &+ 4N(n_0 + 2N_0 - 2N)^2 \times \\ &\times (N_0 + f_{10} - N)(f_{20} - N_0 + N). \end{aligned} \quad (12)$$

Используя далее уравнение $\dot{N} = -gQ$ из (4) и выражение для $Q(N)$ из (12), можно получить формальное решение в квадратурах для плотности молекул $N(t)$ в виде гиперэллиптического интеграла:

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{Q(N)} = \pm gt. \quad (13)$$

Рассматривая процесс атомно-молекулярной конверсии как химическую реакцию $aac_1 \leftrightarrow bc_2$, при которой два атома связываются в молекулу с участием двух рамановских фотонов, c_1 и c_2 , будем интересоваться далее концентрацией $N(t)$ образующихся молекул в зависимости от времени при различных значениях плотностей исходных компонентов реакции и других параметров системы. Тогда изменения во времени других компонентов системы (n, f_1, f_2) могут быть найдены с использованием интегралов движения (10). Указанная реакция может идти как в одну, так и в другую сторону, она может быть авто-модельной, периодической либо аперидической во времени.

Изучим временную эволюцию системы для случая точного резонанса ($\Delta = 0$), когда разность энергий $\hbar(2\omega_0 - \Omega_0)$ двухатомного и молекулярного состояний точно равна разности энергий $\hbar(\omega_2 - \omega_1)$ обоих фотонов. Используя выражение (12), уравнение для временной эволюции молекул в этом случае можно представить в виде

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)^2 + W(N) = E_0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} W &= -16N \left(N_0 + \frac{1}{2}n_0 - N \right)^2 \times \\ &\times (N_0 + f_{10} - N)(f_{20} - N_0 + N), \end{aligned} \quad (15)$$

$$E_0 = -4n_0^2 N_0 f_{10} f_{20} \cos^2 \theta_0. \quad (16)$$

Выражение (14) можно рассматривать как уравнение колебаний нелинейного осциллятора, где $(dN/dt)^2$ играет роль кинетической энергии осциллятора, а $W(N)$ и E_0 являются соответственно потенциальной и полной энергиями. Из соотношения (16) видно, что если плотность одной из компонент системы в начальный момент времени равна нулю, то полная энергия E_0 осциллятора равна нулю. При этом исчезает влияние начальной разности фаз θ_0 на эволюцию системы. Важной особенностью уравнения (14) является то, что если атомы в начальный момент отсутствуют ($n_0 = 0$), то эволюция системы невозможна, т.е. система остается в покое, даже если плотности всех остальных трех компонент при $t = 0$ отличны от нуля. Это означает, что распад молекул с образованием атомов при $n_0 = 0$ невозможен. Однако, если предположить, что одна из трех других величин, N_0, f_{10} либо f_{20} , равна нулю при $t = 0$, то эволюция системы имеет место, т.е. плотности всех частиц изменяются со временем. Легко также видеть, что если любые из двух плотностей равны нулю в начальный момент времени, то эволюция системы также невозможна. Как следует из гамильтониана (1), это обусловлено сложным индуцированием процесса.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ КАЧЕСТВЕННЫЕ ВЫВОДЫ

Качественно поведение функции $N(t)$ можно установить, изучая зависимость потенциальной энергии нелинейного осциллятора при различных соотношениях между параметрами. При нулевой полной энергии ($E_0 = 0$) изменение функции $N(t)$ со временем возможно в той области значений $N(t)$, где $W(N) \leq 0$. На рис. 2 представлены графики потенциальной энергии $W(N)$ при различных соотношениях между начальными плотностями частиц. Каждому графику потенциальной энергии соответствуют два типа временной эволюции функции $N(t)$, которые при одном и том же значении плотности N_0 молекул в начальный момент времени различаются знаком производной $dN/dt|_{t=0} \equiv \dot{N}_0$ в

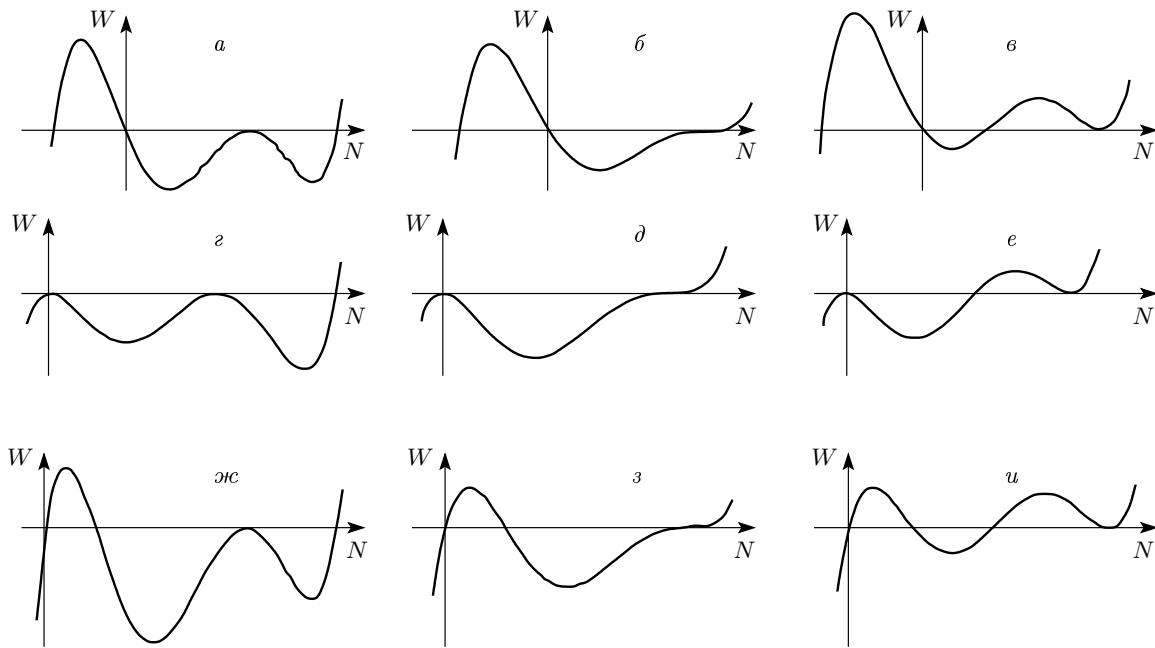


Рис. 2. Графики потенциальной энергии $W(N)$ при $\theta_0 = \pi/2$ и различных соотношениях между параметрами f_{10} , f_{20} , N_0 и n_0 : а-в — $f_{20} > N_0$; г-е — $f_{20} = N_0$; ж-и — $f_{20} < N_0$; а, г, ж — $f_{10} < n_0/2$; б, д, з — $f_{10} = n_0/2$; в, е, и — $f_{10} > n_0/2$. Полная энергия E_0 осциллятора равна нулю при $\theta_0 = \pi/2$ и является отрицательной при $\theta_0 \neq \pi/2$

начальный момент времени. В свою очередь знак \dot{N}_0 определяется знаком величины $Q|_{t=0} = Q_0$ либо знаком функции $\sin \theta_0$, как это следует из уравнения $\dot{N} = -gQ$ и выражения для Q_0 из (8). Таким образом, начальная разность фаз θ_0 является существенным управляющим параметром системы. Временная эволюция системы и, в частности, направление этой эволюции с момента $t = 0$ зависят от того, как подготовлена система в начальный момент времени, т. е. какова начальная разность фаз θ_0 . Поэтому одному и тому же значению начальной плотности N_0 молекул могут соответствовать два значения \dot{N}_0 , различающиеся только знаками ($\pm \dot{N}_0$) для значений θ_0 , равных, например, $\pi/2$ и $-\pi/2$.

Из представленных на рис. 2 графиков видно, что колебательный режим эволюции функции $N(t)$ при $\theta_0 = \pm\pi/2$ возможен только при условии $f_{10} \leq n_0/2$, включая также случай $f_{10} = 0$. При любых других соотношениях между параметрами n_0 , N_0 , f_{10} и f_{20} имеют место только аperiодические режимы временной эволюции. Из рис. 2а,б видно, что при $f_{20} > N_0$ и $f_{10} \geq n_0/2$ имеют место аperiодические режимы эволюции, причем при $\dot{N}_0 > 0$ плотность молекул только растет со временем и асимптотически стремится к значению $N_0 + n_0/2$. Если же $\dot{N}_0 = 0$, то плотность молекул сначала убывает до

нуля, после чего возрастает и снова асимптотически стремится к значению $N_0 + n_0/2$. При $f_{20} > N_0$ и $f_{10} < n_0/2$ имеет место колебательный режим эволюции плотности молекул, причем $N(t)$ изменяется в пределах от нуля до $N_0 + f_{10}$ при $f_{20} > N_0$ (рис. 2в) и от $N_0 - f_{20}$ до $N_0 + f_{10}$ при $f_{20} < N_0$ (рис. 2и). Здесь также могут возникнуть по два колебательных режима для каждого из графиков $W(N)$ в зависимости от знака \dot{N}_0 , причем период колебаний не зависит от знака \dot{N}_0 . При $f_{20} = N_0$ и $f_{10} \geq n_0/2$ эволюция является аperiодической, причем $N(t)$ монотонно растет со временем от N_0 до $N_0 + n_0/2$, если $\dot{N}_0 > 0$, и монотонно убывает от N_0 до нуля при $\dot{N}_0 < 0$ (рис. 2г,д). Если же $f_{10} < n_0/2$, то плотность молекул сначала растет, достигает максимального значения $N_0 + f_{10}$, затем монотонно убывает до нуля при $\dot{N}_0 > 0$ либо монотонно убывает от N_0 до нуля при $\dot{N}_0 < 0$ (рис. 2е). При $f_{20} < N_0$ и $f_{10} \geq n_0/2$ плотность молекул монотонно растет от N_0 до $N_0 + n_0/2$, если $\dot{N}_0 > 0$ либо сначала убывает от N_0 до $N_0 - f_{20}$, затем растет, асимптотически приближаясь к величине $N_0 + n_0/2$ при $\dot{N}_0 < 0$ (рис. 2ж,з). Если же $f_{10} < n_0/2$, то имеет место колебательный режим эволюции и функция $N(t)$ колеблется в пределах от $N_0 - f_{20}$ до $N_0 + f_{10}$ (рис. 2и).

Из выражений (14)–(16) следует, что при началь-

ной разности фаз $-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2$ полная энергия E_0 монотонно убывает при удалении от $\theta_0 = \pm\pi/2$ и имеет минимальное значение при $\theta_0 = 0$ ($\theta_0 = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$). Прямая линия $E_0 < 0$, располагаясь ниже нулевого уровня потенциальной энергии, пересечет все графики функции $W(N)$ на рис. 2 при значениях $W(N) < 0$. При этом образуются две точки поворота со значениями $N = N_{min}$ и $N = N_{max}$, между которыми изменяется функция $N(t)$. В этом случае ($\theta_0 \neq \pm\pi/2$) все аperiodические режимы, представленные на рис. 2, превращаются в периодические, причем при $\theta_0 = 0$ (либо $\theta_0 = \pm k\pi$) амплитуды колебаний при всех соотношениях между параметрами N_0, n_0, f_{10} и f_{20} оказываются наименьшими. Отметим, что при $\theta_0 = 0$ возможен особый режим колебаний, амплитуда которого монотонно убывает при изменении начальных плотностей частиц и при определенном соотношении между ними она оказывается равной нулю. Это означает, что при определенном выборе начального состояния система находится в покое с отличными от нуля плотностями частиц.

4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ ФОТОНОВ ПАДАЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ

Рассмотрим решения в приближении заданной плотности фотонов обоих импульсов: $f_{10}, f_{20} \gg n_0, N_0$. Этому приближению соответствует рис. 2а при $\theta_0 = \pm\pi/2$. Решение для плотности $N(t)$ молекул при $\theta_0 = \pm\pi/2$ имеет вид

$$N = \left(N_0 + \frac{n_0}{2}\right) \times \frac{\left[\sqrt{N_0} \pm \sqrt{N_0 + \frac{n_0}{2}} \operatorname{th} \left(2g\sqrt{f_{10}f_{20}} \left(N_0 + \frac{n_0}{2}\right)t\right)\right]^2}{\left[\sqrt{N_0 + \frac{n_0}{2}} \pm \sqrt{N_0} \operatorname{th} \left(2g\sqrt{f_{10}f_{20}} \left(N_0 + \frac{n_0}{2}\right)t\right)\right]}, \quad (17)$$

где знаки «+» и «-» соответствуют начальным условиям $\dot{N}_0 > 0$ ($\theta_0 = -\pi/2$) и $\dot{N}_0 < 0$ ($\theta_0 = +\pi/2$) (соответственно кривые 1, 2 и 1', 2' на рис. 3а). Из выражения (17) следует, что в пределе больших времен ($g\sqrt{f_{10}f_{20}}(N_0 + n_0/2)t \gg 1$) плотность молекул асимптотически стремится к значению $N = N_0 + n_0/2$. Это означает, что с течением времени все атомы связываются в молекулы. Решение со знаком «+» монотонно растет со временем, причем скорость роста тем больше, чем больше плотности f_{10}, f_{20}, N_0 и n_0 (кривые 1, 2 на рис. 3а). Реше-

ние со знаком «-» сначала убывает, достигает нуля в момент времени

$$t = t_0 = \frac{\operatorname{arth} \sqrt{N_0/(N_0 + n_0/2)}}{2g\sqrt{f_{10}f_{20}}(N_0 + n_0/2)}, \quad (18)$$

после чего начинает расти и асимптотически приближается к значению $N = N_0 + n_0/2$, как и решение со знаком «+» (кривые 1', 2' на рис. 3а). Таким образом, на больших временах оба решения асимптотически приближаются к одному и тому же значению плотности молекул, равному $N = N_0 + n_0/2$. Имеющиеся в системе атомы полностью связываются в молекулы, чем процесс эволюции и завершается. Реакция в обратную сторону, сопровождающаяся распадом молекул, не идет. Поэтому можно утверждать, что в указанном приближении при $\theta_0 = \pm\pi/2$ реакция объединения всех атомов в молекулы является аperiodической, хотя решение со знаком «-» на начальном этапе представляет собой реакцию быстрого распада всех молекул с последующим их восстановлением и генерацией дополнительного количества молекул за счет связывания исходных атомов.

Эволюция системы в том же приближении ($f_{10}, f_{20} \gg N_0, n_0$), но при начальной разности фаз $\theta_0 = 0, \pi(\pm k\pi, k = 0, 1, 2, \dots)$, существенно иная. Из выражения (16) видно, что в этом случае полная энергия $E_0 = -4n_0^2 N_0 f_{10} f_{20}$, а потенциальная энергия $W(N) = -16f_{10}f_{20}N(N_0 + n_0/2 - N)^2$.

Отметим, что при $\theta_0 = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) решения со знаками «+» и «-» совпадают. Из (8) видно, что $Q_0(k\pi) = 0$, поэтому $\dot{N}|_{t=0} = 0$. Иными словами, совпадение обоих решений обусловлено тем, что один из корней уравнения $W(N) = E_0$ совпадает с начальным значением $N = N_0$. Поскольку этот корень располагается на одном из «скатов» профиля потенциальной энергии, дальнейшая эволюция функции $N(t)$ сразу же после начального момента времени происходит только в одном направлении — с увеличением либо уменьшением $N(t)$ со временем.

В зависимости от соотношения между начальными плотностями N_0 и n_0 имеют место различные решения. При $n_0 < 4N_0$ решение для плотности молекул $N(t)$ является осциллирующей функцией в зависимости от времени:

$$N = N_- + (N_0 - N_-) \times \frac{\operatorname{cn}^2 \left(2g\sqrt{f_{10}f_{20}}(N_+ - N_-)t\right)}{\operatorname{dn}^2 \left(2g\sqrt{f_{10}f_{20}}(N_+ - N_-)t\right)}, \quad (19)$$

где N_+ и N_- определяются формулами

$$N_{\pm} = \frac{1}{2} \left[N_0 + n_0 \pm \sqrt{N_0(N_0 + 2n_0)} \right]. \quad (20)$$

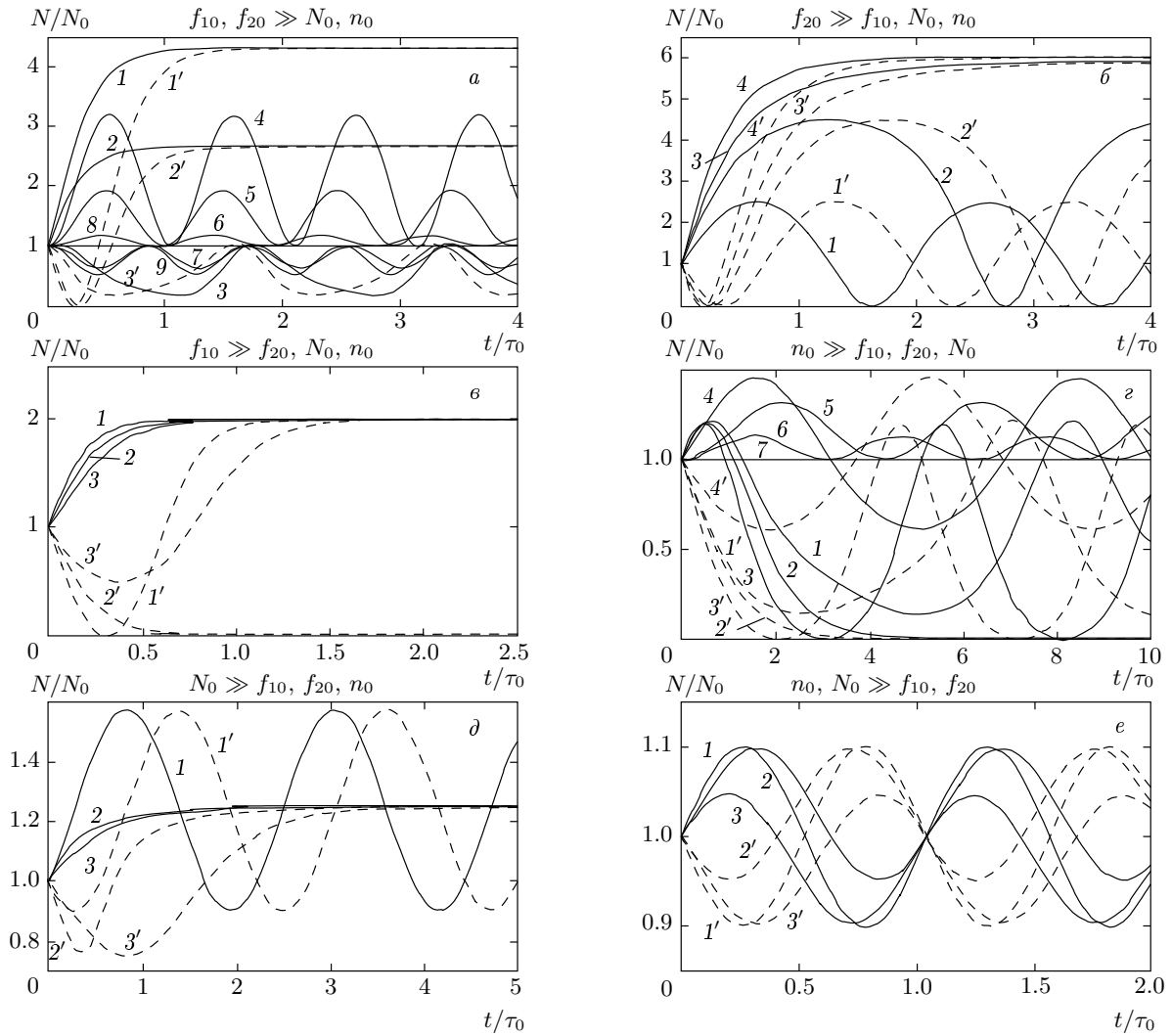


Рис. 3. Зависимости нормированной концентрации N/N_0 от нормированного времени t/τ_0 ($\tau_0 = (gn_0^{3/2})^{-1}$) в приближениях заданных плотностей фотонов обоих импульсов (а), фотонов второго импульса (б), фотонов первого импульса (в), атомов (г), молекул (д), атомов и молекул (е) при следующих значениях параметров (в скобках указаны кривые; плотности фотонов f_{10} , f_{20} и молекул N_0 нормированы на n_0): а — $\theta_0 = \pi/2$, $f_{10} = f_{20} = 1.5$, $N_0 = 0.15$ (1, 1'), 0.3 (2, 2'); $\theta_0 = \pi/3$, $f_{10} = f_{20} = 3$, $N_0 = 0.1$ (3, 3'); $\theta_0 = 0$, $f_{10} = f_{20} = 2$, $N_0 = 0.1$ (4), 0.15 (5), 0.22 (6), 0.25 (7), 0.35 (8), 0.4 (9); б — $\theta_0 = \pi/2$, $f_{20} = 3$, $N_0 = 0.1$, $f_{10} = 0.15$ (1, 1'), 0.35 (2, 2'), 0.5 (3, 3'), 0.75 (4, 4'); в — $\theta_0 = \pi/2$, $f_{10} = 3$, $N_0 = 0.5$, $f_{20} = 1$ (1, 1'), 0.5 (2, 2'), 0.25 (3, 3'); г — $\theta_0 = \pi/2$, $N_0 = 0.5$, $f_{10} = 0.1$, $f_{20} = 0.45$ (1, 1'), 0.5 (2, 2'), 0.75 (3, 3'); д — $\theta_0 = \pi/3$, $f_{10} = f_{20} = 0.1$, $N_0 = 0.2$, (4, 4'); $\theta_0 = 0$, $f_{10} = f_{20} = 0.1$, $N_0 = 0.37$ (5), 0.61 (7), 0.86 (6); е — $\theta_0 = \pi/2$, $N_0 = 1$, $f_{10} = f_{20} = 0.1$, (1, 1'), $\theta_0 = \pi/4$, $N_0 = 1$, $f_{10} = 0.1$, $f_{20} = 0.05$ (2, 2'), $\theta_0 = 0$, $N_0 = 1$, $f_{10} = 0.05$, $f_{20} = 0.1$ (3, 3')

Здесь и далее $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ и $\operatorname{dn} x$ — эллиптические функции Якоби [60, 61] с модулем k . Модуль эллиптических функций в (19) определяется выражением

$$k^2 = \frac{N_0 - N_-}{N_+ - N_-}. \quad (21)$$

Период колебаний плотности молекул выражается формулой

$$T = \frac{K(k)}{g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_+ - N_-)}}, \quad (22)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [60, 61] с модулем k .

Если $n_0 > 4N_0$, то решение имеет вид

$$N = N_0 + (N_- - N_0) \times \sin^2 \left(2g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_+ - N_0)}t \right), \quad (23)$$

где модуль k эллиптической функции и период T колебаний определяются выражениями

$$k^2 = \frac{N_- - N_0}{N_+ - N_0}, \quad T = \frac{K(k)}{g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_+ - N_0)}}, \quad (24)$$

а величины N_{\pm} по-прежнему определяются формулой (20). Из соотношений (24) видно, что с ростом концентрации N_0 молекул и плотностей f_{10} и f_{20} фотонов в обоих импульсах период колебаний уменьшается.

Наконец, при $n_0 = 4N_0$ решение имеет вид

$$N = N_0. \quad (25)$$

Отсюда следует, что в пределе заданных плотностей фотонов обоих импульсов система находится в покое при условии, что в начальный момент времени $n_0 = 4N_0$. Это означает, что процессы связывания атомов в молекулы либо распада молекул отсутствуют.

Амплитуда A колебаний функции $N(t)$ при $\theta_0 = \pm k\pi$ определяется выражением

$$A = \frac{1}{2} \left| N_0 - n_0 + \sqrt{N_0(N_0 + 2n_0)} \right|, \quad (26)$$

откуда видно, что амплитуда колебаний при $\theta_0 = 0$ ($\pm k\pi$) сначала монотонно убывает с ростом параметра n_0/N_0 , обращается в нуль при $n_0/N_0 = 4$, затем практически линейно растет.

Особенности временной эволюции плотности молекул для этих случаев представлены на рис. 3. Видно, что плотность молекул осциллирует со временем в пределах $N_0 \leq N \leq N_-$ (кривые 4, 5, 6) при $n_0 > 4N_0$ и в пределах $N_- \leq N \leq N_0$ (кривые 8, 9) при $n_0 < 4N_0$ и не изменяется во времени (прямая 7) при $n_0 = 4N_0$. Период T колебаний при этом монотонно уменьшается с ростом отношения N_0/n_0 и при $n_0 = 4N_0$ равен $T = \pi / (2g\sqrt{3N_0f_{10}f_{20}})$. Увеличение плотностей f_{10} и f_{20} фотонов в обоих импульсах также ведет к монотонному уменьшению периода колебаний.

Отметим еще раз, что из формул (19), (23) и (25) и из рис. 3 следует, что при постепенном увеличении плотности n_0 атомов в начальный момент времени, начиная с состояния, когда $n_0 < 4N_0$, амплитуда колебаний плотности молекул непрерывно уменьшается и при $n_0 = 4N_0$ обращается в нуль. Точно так же, если исходить из состояния, когда $n_0 > 4N_0$, и постепенно уменьшать начальную плотность n_0 атомов,

амплитуда колебаний будет монотонно уменьшаться и снова окажется равной нулю при $n_0 = 4N_0$. При этом период колебаний также монотонно изменяется. Эффект обращения в нуль амплитуды колебаний молекул при изменении начальной плотности атомов (либо молекул) интересен тем, что хотя в начальный момент времени плотности N_0 , n_0 , f_{10} , f_{20} всех частиц и отличны от нуля и плотности атомов и молекул удовлетворяют соотношению $n_0 = 4N_0$, колебания в системе отсутствуют, т. е. система покоится. По-видимому, можно утверждать, что в этом случае система сбалансирована таким образом, что отсутствует именно результирующее превращение частиц, хотя сами по себе превращения каждого сорта частиц могут иметь место: например, два атома могут объединиться в одну молекулу и одновременно одна молекула может распасться на два атома. При этом общее соотношение между плотностями атомов, молекул и фотонов обоих импульсов сохраняется во времени. Из анализа выражений для потенциальной и полной энергий осциллятора следует, что это явление имеет место только при начальной разности фаз $\theta_0 = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Оказывается, что только в этом случае полная энергия E_0 осциллятора точно равна минимуму потенциальной энергии. Следовательно, в начальный момент времени осциллятор находится в положении равновесия на дне потенциальной ямы и имеет нулевую начальную скорость. Поэтому он не может сдвинуться из положения равновесия и, следовательно, колебания осциллятора, т. е. плотности молекул, отсутствуют.

При произвольных значениях начальной разности фаз θ_0 динамика процесса атомно-молекулярной конверсии (в частности амплитуда и частота колебаний плотности молекул) существенно определяется величиной θ_0 . Критические значения плотности молекул определяются из решений кубического уравнения

$$N^3 - 2N^2 \left(N_0 + \frac{n_0}{2} \right) + N \left(N_0 + \frac{n_0}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} n_0^2 N_0 \cos^2 \theta_0 = 0, \quad (27)$$

которое в приближении заданной плотности фотонов обоих импульсов ($f_{10}, f_{20} \gg N_0, n_0$) получается из условия $W(N) = E_0$. При точном резонансе ($\Delta = 0$) полная энергия E_0 нелинейного осциллятора зависит от θ_0 ,

$$E_0 = -4n_0^2 N_0 f_{10} f_{20} \cos^2 \theta_0,$$

тогда как потенциальная энергия $W(N)$ не зависит от θ_0 . Исследование кубического уравнения (27) показывает, что во всей области изменения параметров

N_0 , n_0 и θ_0 оно имеет три действительных положительных корня, два из которых, N_{min} и N_{max} , определяют амплитуду $N_{max} - N_{min}$ колебаний функции $N(t)$. Третий корень N_1 всегда положителен и $N_1 > N_{max} > N_{min}$. Начальное значение N_0 плотности молекул располагается между N_{min} и N_{max} . С ростом θ_0 от нуля до $\pi/2$ уровень полной энергии E_0 постепенно смещается вверх, приближаясь к нулю при $\theta_0 = \pi/2$. Это приводит к изменению координат точек пересечения прямой E_0 с кубической параболой $W(N)$. С ростом θ_0 корень N_{max} растет, а корни N_1 и N_{min} убывают по величине, причем $N_{min} = 0$, а $N_1 = N_{max} = N_0 + n_0/2$ при $\theta_0 = \pi/2$. Если $n_0 = 4N_0$, то при $\theta_0 = 0$ корни N_{min} и N_{max} совпадают и равны N_0 , а $N_1 = 4N_0$, тогда как при $\theta_0 = \pi/2$ совпадают корни N_1 и N_{max} и равны $3N_0$, а $N_{min} = 0$. Отметим, что при $\theta_0 = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) корни N_{max} и N_{min} равны соответственно N_+ и N_- , см. формулу (20). В общем случае три указанных корня определяются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{N_0} &= \frac{1}{3}(2+x) \left(1 + \cos \frac{\alpha}{3}\right), \\ \frac{N_{max}}{N_0} &= \frac{1}{3}(2+x) \left(1 + \cos \frac{\alpha - 2\pi}{3}\right), \\ \frac{N_{min}}{N_0} &= \frac{1}{3}(2+x) \left(1 + \cos \frac{\alpha + 2\pi}{3}\right), \\ \cos \alpha &= -1 + \frac{27x^2}{(2+x)^3} \cos^2 \theta_0, \quad x = \frac{n_0}{N_0}. \end{aligned} \quad (28)$$

Колебания функции $N(t)$ происходят в пределах $N_{min} \leq N \leq N_{max}$, так что амплитуда A колебаний определяется выражением

$$A = \frac{N_0}{\sqrt{3}} (2+x) \sin \frac{\alpha}{3}. \quad (29)$$

Решение уравнения для $N(t)$ в этом случае имеет вид

$$N = N_{min} + (N_0 - N_{min}) \times \left[\frac{\text{cn } u \text{ dn } u \pm \sqrt{\frac{N_{max}-N_0}{N_0-N_{min}} \frac{N_1-N_0}{N_1-N_{min}} \text{sn } u}}{1 - \frac{N_0-N_{min}}{N_1-N_{min}} \text{sn}^2 u} \right]^2, \quad (30)$$

где переменная u , модуль k эллиптических функций и период T колебаний определяются формулами

$$\begin{aligned} u &= 2g \sqrt{f_{10} f_{20} (N_1 - N_{min})} t, \\ k^2 &= \frac{N_{max} - N_{min}}{N_1 - N_{min}}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$T = \frac{K(k)}{g \sqrt{f_{10} f_{20} (N_1 - N_{min})}}. \quad (32)$$

Решения со знаками «+» и «-» соответствуют начальным условиям $\dot{N}_0 > 0$ и $\dot{N}_0 < 0$. Из решения (30) видно, что процесс атомно-молекулярной конверсии является периодическим (см. рис. 3а, кривые 3, 3'). Период T колебаний, а также максимальная N_{max} и минимальная N_{min} плотности молекул существенно зависят от начальных значений плотностей f_{10} , f_{20} , N_0 и n_0 и разности фаз θ_0 . Полагая начальные плотности частиц неизменными, изменяя только начальную разность фаз θ_0 , можно управлять как периодом колебаний, так и величинами N_{min} и N_{max} , т. е. амплитудой колебаний плотности молекул.

5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ ФОТОНОВ ВТОРОГО ИМПУЛЬСА

Можно получить решения также и в пределах заданной плотности фотонов каждого из импульсов в отдельности. Рассмотрим сначала эволюцию системы в приближении заданной плотности фотонов второго импульса ($f_{20} \gg f_{10}, N_0, n_0$) при начальной разности фаз $\theta_0 = \pm(2k+1)\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Из выражения (12) следует, что в этом приближении возможны три типа решений в зависимости от соотношения между параметрами f_{10} и n_0 .

При $f_{10} < n_0/2$ решение уравнения для плотности молекул $N(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} N &= (N_0 + f_{10}) \times \\ &\times \sin^2 \left(2g \sqrt{f_{20} (N_0 + n_0/2) (n_0/2 - f_{10})} t \pm C \right) \times \\ &\times \left[1 - \frac{N_0 + f_{10}}{N_0 + n_0/2} \times \right. \\ &\times \left. \cos^2 \left(2g \sqrt{f_{20} (N_0 + n_0/2) (n_0/2 - f_{10})} t \pm C \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$C = \text{arctg} \sqrt{\frac{N_0}{f_{10}} \frac{n_0/2 - f_{10}}{n_0/2 + N_0}}. \quad (34)$$

На рис. 3б кривые 1, 1' и 2, 2' представляют колебательный режим временной эволюции плотности молекул для этого случая. Решения со знаками «+» и «-» в аргументах тригонометрических функций соответствуют условиям $\theta_0 = \pm(2k+1)\pi/2$. Видно, что колебания плотности молекул совершаются со сдвигом по фазе, который определяется начальными

ми плотностями частиц. Период колебаний определяется формулой

$$T = \pi / \left[2g\sqrt{f_{20}(N_0 + n_0/2)(n_0/2 - f_{10})} \right]. \quad (35)$$

С ростом f_{10} от нуля до $n_0/2$ период колебаний монотонно растет, обращаясь в бесконечность при $f_{10} = n_0/2$. Однако с ростом параметров f_{20} , N_0 , n_0 период колебаний монотонно убывает.

При $f_{10} = n_0/2$ получаем

$$N = (N_0 + f_{10}) \times \frac{[\sqrt{N_0} \pm 2g\sqrt{f_{10}f_{20}}(N_0 + f_{10})t]^2}{f_{10} + [\sqrt{N_0} \pm 2g\sqrt{f_{10}f_{20}}(N_0 + f_{10})t]^2}. \quad (36)$$

Решение со знаком «+» монотонно растет со временем от значения $N = N_0$ при $t = 0$, асимптотически приближаясь к плотности $N + f_{10}$ при больших t (рис. 3б, кривая 3). Решение со знаком «-» сначала убывает от N_0 до минимального значения $N = 0$ при $t = t_0$, где

$$t_0 = \sqrt{N_0} / \left[2g\sqrt{f_{10}f_{20}}(N_0 + f_{10}) \right], \quad (37)$$

после чего начинает расти и асимптотически стремится к значению $N_0 + f_{10}$, как и решение со знаком «+» (рис. 3б, кривая 3'). Таким образом, на больших временах все атомы связываются в молекулы, чем эволюция системы и завершается.

При $f_{10} > n_0/2$ эволюция системы также является аperiодической. Плотность молекул выражается формулой

$$N = \left(N_0 + \frac{n_0}{2} \right) \times \text{sh}^2 \left(2g\sqrt{f_{20} \left(N_0 + \frac{n_0}{2} \right) \left(f_{10} - \frac{n_0}{2} \right) t \pm D} \right) \times \left[\text{ch}^2 \left(2g\sqrt{f_{20} \left(N_0 + \frac{n_0}{2} \right) \left(f_{10} - \frac{n_0}{2} \right) t \pm D} \right) - \frac{N_0 + n_0/2}{N_0 + f_{10}} \right]^{-1}, \quad (38)$$

где

$$D = \text{arth} \sqrt{\frac{N_0}{f_{10}} \frac{f_{10} - n_0/2}{N_0 + n_0/2}}. \quad (39)$$

Решение со знаком «+» монотонно растет со временем от N_0 до $N_0 + n_0/2$ (рис. 3б, кривая 4). Решение со знаком «-» сначала убывает, достигает минимального значения $N = 0$ при $t = t_0$, которое определяется выражением

$$2g\sqrt{f_{20}(N_0 + n_0/2)(f_{10} - n_0/2)}t_0 = D, \quad (40)$$

затем растет и асимптотически стремится к значению $N_0 + n_0/2$ при больших t (рис. 3б, кривая 4'). Таким образом, видно, что эволюция системы в этом случае является аperiодической во времени и завершается, после того как все атомы превратятся в молекулы. Движение в обратном направлении, т. е. распад молекул, не происходит.

Если положить, что в начальный момент в системе отсутствовали молекулы ($N_0 = 0$), то в этом случае формулы (33) и (35) существенно упрощаются и принимают вид

$$N = \frac{f_{10} \sin^2 \left(g\sqrt{n_0 f_{20}}(n_0 - 2f_{10})t \right)}{1 - (2f_{10}/n_0) \sin^2 \left(g\sqrt{n_0 f_{20}}(n_0 - 2f_{10})t \right)}, \quad (41)$$

$$T = \pi / \left[g\sqrt{n_0 f_{20}}(n_0 - 2f_{10}) \right]. \quad (42)$$

Отсюда видно, что при $f_{10} < n_0/2$ плотность молекул периодически изменяется с периодом T и амплитудой f_{10} . Поскольку $f_{10} < n_0/2$, все фотоны частоты ω_1 за период T полностью исчезают. Если $f_{10} \ll n_0/2$, то

$$N = f_{10} \sin^2 \left(gn_0\sqrt{f_{20}}t \right). \quad (43)$$

В этом простейшем случае период T_0 колебаний определяется выражением

$$T_0 = \pi / \left(gn_0\sqrt{f_{20}} \right). \quad (44)$$

Отметим, что из (38) получаем формулу (17) в приближении $f_{10}, f_{20} \gg N_0, n_0$.

6. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ ФОТОНОВ ПЕРВОГО ИМПУЛЬСА

Рассмотрим теперь эволюцию системы в приближении заданной плотности фотонов первого импульса ($f_{10} \gg f_{20}, N_0, n_0$) при начальной разности фаз $\theta_0 = \pm(2k+1)\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). В этом приближении также возможны три типа решений в зависимости от соотношения между параметрами f_{20} и N_0 . Заметим, что в соответствии с выражением (12) и качественными результатами, представленными на рис. 2, эволюция в данном приближении является аperiодической при любых соотношениях между параметрами f_{20} , N_0 и n_0 . Точнее, во всех трех типах решений эволюция системы в конечном счете сводится к аperiодическому связыванию всех атомов

в молекулы. Правда, при $N_0 = f_{20}$ возможна также эволюция с распадом всех молекул на атомы при начальном условии $\dot{N}_0 < 0$.

Обсудим кратко полученные решения. При $f_{20} > N_0$ имеем

$$N = (f_{20} - N_0)(2N_0 + n_0) \times \text{th}^2 \left(g\sqrt{f_{10}(2N_0 + n_0)(2f_{20} + n_0)} t \pm P \right) \times \left[(2f_{20} + n_0) - (2N_0 + n_0) \times \text{th}^2 \left(g\sqrt{f_{10}(2N_0 + n_0)(2f_{20} + n_0)} t \pm P \right) \right]^{-1}, \quad (45)$$

где

$$P = \text{arth} \sqrt{\frac{N_0}{f_{20}} \frac{2f_{20} + n_0}{2N_0 + n_0}}. \quad (46)$$

Легко видеть, что в пределе $f_{20} \gg N_0$ выражение (45) приводится к (17).

Из (45) следует, что решение со знаком «+» монотонно растет со временем от $N = N_0$ при $t = 0$ и асимптотически приближается к предельной плотности $N_0 + n_0/2$ (рис. 3в, кривая 1). Решение со знаком «-» сначала убывает, в момент времени $t = t_0$ достигает минимального значения $N = 0$, после чего начинают расти и асимптотически приближается к значению $N = N_0 + n_0/2$ (рис. 3в, кривая 1'). Здесь t_0 определяется формулой

$$g\sqrt{f_{10}(2N_0 + n_0)(2f_{20} + n_0)} t_0 = P. \quad (47)$$

Таким образом, оба решения (со знаками «+» и «-») при больших временах принимают одно и то же предельное значение плотности молекул.

При $f_{20} < N_0$ находим

$$N = (N_0 - f_{20}) \left[1 - \frac{2f_{20} + n_0}{2N_0 + n_0} \times \text{th}^2 \left(g\sqrt{f_{10}(2N_0 + n_0)(2f_{20} + n_0)} t \pm S \right) \right]^{-1}, \quad (48)$$

где

$$S = \text{arth} \sqrt{\frac{f_{20}}{N_0} \frac{2N_0 + n_0}{2f_{20} + n_0}}. \quad (49)$$

Качественно решение (48) ведет себя подобно решению (45) (рис. 3в, кривые 3, 3'), однако решение со знаком «-» достигает отличного от нуля минимального значения плотности молекул, равного $N_0 - f_{20}$, в момент времени $t = t_0$ (рис. 3в, кривая 3'), где

$$g\sqrt{f_{10}(2N_0 + n_0)(2f_{20} + n_0)} t_0 = S. \quad (50)$$

Эволюция в этом случае также завершается полным связыванием всех атомов в молекулы.

Наконец, при $f_{20} = N_0$ получаем

$$N = \left(N_0 + \frac{n_0}{2} \right) \times \left[1 + \frac{n_0}{2N_0} \exp \left(\pm 2g(2N_0 + n_0)\sqrt{f_{10}} t \right) \right]^{-1}. \quad (51)$$

Формула (51) является предельным случаем выражений (45) и (48) при $f_{20} = N_0$. Отсюда видно, что решение со знаком «+» («-») монотонно убывает (растет), асимптотически приближаясь к нулю (к значению $N_0 + n_0/2$) (рис. 3в, кривые 2, 2').

Таким образом, полученные решения в приближении заданной плотности фотонов первого импульса при $\theta_0 = \pm(2k+1)\pi/2$ свидетельствуют о том, что эволюция системы представляет собой аperiодический процесс превращения всех атомов в молекулы (либо распада всех молекул при $f_{20} = N_0$).

7. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ АТОМОВ

Рассмотрим теперь решения в приближении заданной плотности атомов $n_0 \gg f_{10}, f_{20}, N_0$ при начальной разности фаз $\theta_0 = \pm(2k+1)\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Этому приближению соответствуют качественные результаты, представленные на рис. 2в,е,и. Детальное поведение функции $N(t)$ определяется соотношением плотностей N_0 и f_{20} . При $f_{20} < N_0$ решение уравнения для $N(t)$ имеет вид

$$N = N_0 \left[1 - \frac{f_{20}}{N_0} \text{sn}^2 \left(gn_0\sqrt{N_0 + f_{10}} t \right) \right]^2 \times \left[\text{dn} \left(gn_0\sqrt{N_0 + f_{10}} t \right) \pm \sqrt{\frac{f_{10}f_{20}}{N_0(N_0 + f_{10})}} \times \text{sn} \left(gn_0\sqrt{N_0 + f_{10}} t \right) \text{cn} \left(gn_0\sqrt{N_0 + f_{10}} t \right) \right]^{-2}, \quad (52)$$

где период T колебаний и модуль k эллиптических функций определяются формулами

$$T = \frac{2K(k)}{gn_0\sqrt{N_0 + f_{10}}}, \quad k^2 = \frac{f_{10} + f_{20}}{N_0 + f_{10}}. \quad (53)$$

При $f_{20} > N_0$ решение имеет вид

$$N = N_0 \left[\operatorname{cn} \left(gn_0 \sqrt{f_{10} + f_{20}} t \right) \pm \sqrt{\frac{f_{10} f_{20}}{N_0 (f_{10} + f_{20})}} \operatorname{sn} \left(gn_0 \sqrt{f_{10} + f_{20}} t \right) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{dn} \left(gn_0 \sqrt{f_{10} + f_{20}} t \right) \right]^2 \times \left[1 - \frac{f_{10}}{f_{10} + f_{20}} \operatorname{sn}^2 \left(gn_0 \sqrt{f_{10} + f_{20}} t \right) \right]^{-2}, \quad (54)$$

где

$$T = \frac{2K(k)}{gn_0 \sqrt{f_{10} + f_{20}}}, \quad k^2 = \frac{N_0 + f_{10}}{f_{10} + f_{20}}. \quad (55)$$

Если же $N_0 = f_{20}$, то решение имеет простой вид

$$N = N_0 \left[\operatorname{ch} \left(gn_0 \sqrt{N_0 + f_{10}} t \right) \pm \sqrt{\frac{f_{10}}{N_0 + f_{10}}} \operatorname{sh} \left(gn_0 \sqrt{N_0 + f_{10}} t \right) \right]^{-2}. \quad (56)$$

Из полученных решений видно, что при $N_0 \neq f_{20}$ плотность молекул осциллирует со временем (рис. 3з, кривые 1, 1', 3, 3'). При $f_{20} < N_0$ плотность $N(t)$ молекул изменяется в пределах от $N_0 - f_{20}$ до $N_0 + f_{10}$. С ростом f_{20} уменьшается минимальная (фоновая) плотность молекул и растет период колебаний (рис. 4). При $f_{20} = N_0$ фоновая плотность молекул оказывается равной нулю (рис. 3з, кривые 2, 2'). При этом плотность молекул монотонно стремится к нулю при начальном условии $\dot{N}_0 > 0$, а при $\dot{N}_0 < 0$ она сначала растет, достигает максимального значения, равного $N_0 + f_{10}$ в момент времени

$$t = t_0 = \frac{\operatorname{arth} \sqrt{f_{10}/(N_0 + f_{10})}}{gn_0 \sqrt{N_0 + f_{10}}},$$

затем монотонно убывает, так что на больших временах оба решения (со знаками «+» и «-») обращаются в нуль. При $f_{20} > N_0$ плотность молекул колеблется от нуля до $N_0 + f_{10}$ (кривые 2' и 3' на рис. 3з). Что касается периода колебаний, то он растет с ростом отношения f_{20}/n_0 , обращается в бесконечность при $f_{20} = N_0$, затем монотонно убывает (рис. 5).

Рассмотрим теперь эволюцию системы при начальной разности фаз $\theta_0 = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). В этом случае потенциальная $W(N)$ и полная E_0 энергии нелинейного осциллятора определяются выражениями

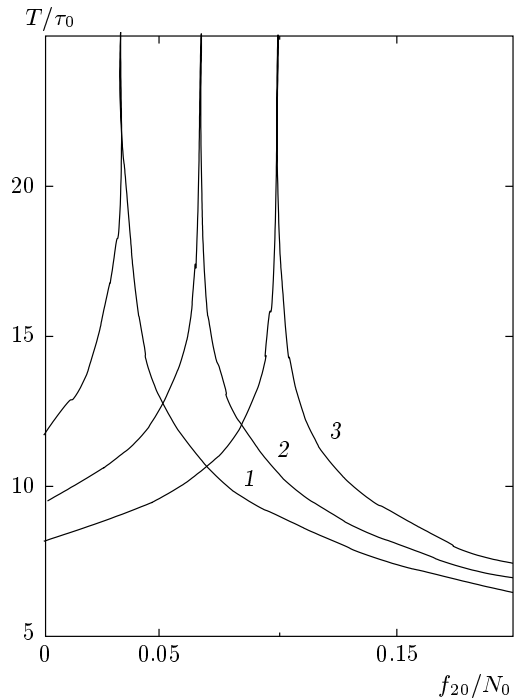


Рис. 4. Зависимости нормированного периода колебаний от нормированной плотности фотонов второго импульса в приближении заданной плотности атомов для $\theta_0 = \pi/2$ при различных значениях нормированной концентрации молекул $N_0/n_0 = 0.03$ (1), 0.07 (2), 0.1 (3)

$$W(N) = -4n_0^2 N(N_0 + f_{10} - N)(f_{20} - N_0 + N),$$

$$E_0 = -4n_0^2 N_0 f_{10} f_{20}.$$

Точки поворота классической траектории определяются из решения кубического уравнения $W(N) = E_0$. Одним из корней этого уравнения является начальное значение $N = N_0$ плотности молекул. Два других корня кубического уравнения выражаются формулами

$$N_{\pm} = \frac{1}{2} \left[N_0 + f_{10} - f_{20} \pm \sqrt{(N_0 + f_{10} - f_{20})^2 + 4f_{10}f_{20}} \right]. \quad (57)$$

Корень N_- является отрицательным, а N_+ определяет верхний либо нижний предел колебаний плотности молекул. Если параметры N_0, n_0, f_{10}, f_{20} таковы, что $f_{20} < f_{10} + f_{10}f_{20}/N_0$, то в этом случае $N_+ > N_0$. Тогда функция $N(t)$ является осциллирующей (рис. 3з, кривая 5) и изменяется в пределах

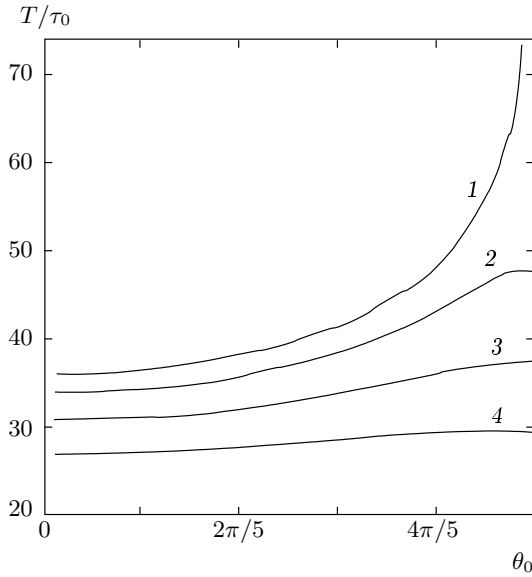


Рис. 5. Зависимости нормированного периода колебаний от начальной разности фаз в приближении заданной плотности атомов при различных нормированных плотностях молекул $N_0/n_0 = 0.1$ (1), 0.14 (2), 0.2 (3), 0.3 (4)

$N_0 < N < N_+$. Решение уравнения для $N(t)$ при этом выражается формулой

$$N = N_- + \frac{N_0 - N_-}{\operatorname{dn}^2(g n_0 \sqrt{N_+ - N_-} t)}. \quad (58)$$

Модуль k эллиптической функции и период T колебаний определяются формулами

$$k^2 = \frac{N_+ - N_0}{N_+ - N_-}, \quad T = \frac{2K(k)}{g n_0 \sqrt{N_+ - N_-}}. \quad (59)$$

Отметим, что формулы (57)–(59) справедливы и при $f_{10} = f_{20}$. Если же параметры удовлетворяют обратному неравенству $f_{20} > f_{10} + f_{10}f_{20}/N_0$, то оказывается, что $N_+ < N_0$ (рис. 3г, кривая 6). Тогда решение имеет вид

$$N = N_0 + (N_+ - N_0) \operatorname{sn}^2(g n_0 \sqrt{N_0 - N_-} t), \quad (60)$$

где

$$k^2 = \frac{N_0 - N_+}{N_0 - N_-}, \quad T = \frac{2K(k)}{g n_0 \sqrt{N_0 - N_-}}. \quad (61)$$

Наконец, если $f_{20} = f_{10} + f_{10}f_{20}/N_0$, то оказывается, что $N_+ = N_0$, и тогда решение имеет простой вид:

$$N = N_0, \quad (62)$$

т. е. система находится в покое (рис. 3г, прямая 7). Тот же результат следует и из выражений (58), (60) в пределе $N_+ = N_0$. При этом амплитуда A колебаний определяется формулой

$$A = \frac{1}{2} \left| N_0 - f_{10} + f_{20} - \sqrt{(N_0 + f_{10} - f_{20})^2 + 4f_{10}f_{20}} \right|. \quad (63)$$

Из полученных решений следует, что характер эволюции системы при начальных условиях $\theta_0 = 0$, $\pm\pi$ и $\theta_0 = \pm\pi/2$ существенно различается. Интересным является решение $N = N_0$, когда система, подготовленная определенным образом, не эволюционирует во времени (рис. 3г, прямая 7).

Рассматривая общий случай начального условия для разности фаз θ_0 , т. е. полагая $\theta_0 \neq k\pi$ и $\theta_0 \neq \pm(2k+1)\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), получаем выражения (15) и (16) для потенциальной $W(N)$ и полной E_0 энергий. Условие $W = E_0$ приводит к кубическому уравнению

$$N^3 - N^2(2N_0 + f_{10} - f_{20}) + N(N_0 + f_{10})(N_0 - f_{20}) + N_0 f_{10} f_{20} \cos^2 \theta_0 = 0, \quad (64)$$

которое имеет три действительных корня $N_{max} > N_{min} > 0 > N_-$. Корень N_- всегда отрицательный. Корни N_{max} и N_{min} определяют максимальное и минимальное значение функции $N(t)$ в процессе эволюции, причем они оказываются такими, что $N_{min} < N_0 < N_{max}$. При фиксированных значениях параметров N_0, n_0, f_{10}, f_{20} изменение θ_0 от нуля до $\pi/2$ приводит к существенному изменению всех трех корней. С ростом θ_0 от нуля до $\pi/2$ корень N_{max} монотонно растет, приближаясь к значению $N_0 + f_{10}$ при $\theta_0 = \pi/2$. Корень N_{min} , наоборот, убывает с ростом θ_0 , причем при $\theta_0 = \pi/2$ он оказывается равным $N_0 - f_{20}$ при $N_0 > f_{20}$ либо нулю при $N_0 \leq f_{20}$. Корень N_- , оставаясь отрицательным, уменьшается по абсолютному значению с ростом θ_0 до нуля при $N_0 \geq f_{20}$ либо приближается к значению $N_0 - f_{20}$ при $N_0 \leq f_{20}$. При $\theta_0 = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) корень N_- совпадает с выражением для N_- из (57), а N_{max} и N_{min} совпадают с N_+ из (57) и N_0 .

Режим эволюции в этом случае является колебательным (рис. 3г, кривые 4, 4'). Решение для функции $N(t)$ имеет вид

$$N = N_- + (N_0 - N_-) \left(1 - \frac{N_0 - N_{min}}{N_0 - N_-} \operatorname{sn}^2 u \right)^2 \times \left[\operatorname{dn} u \pm \sqrt{\frac{(N_0 - N_{min})(N_{max} - N_0)}{(N_0 - N_-)(N_{max} - N_-)}} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \right]^{-3}, \quad (65)$$

где переменная u , модуль k и период колебаний T определяются выражениями

$$u = gn_0 \sqrt{N_{max} - N_-} t, \quad k^2 = \frac{N_{max} - N_{min}}{N_{max} - N_-}, \quad (66)$$

$$T = \frac{2K(k)}{gn_0 \sqrt{N_{max} - N_-}}.$$

На рис. 5 представлены графики нормированного периода колебаний T/τ_0 в зависимости от начальной разности фаз θ_0 при различных начальных значениях концентрации N_0/n_0 . Видно, что с увеличением начальной разности фаз период осцилляций растет, а с ростом концентрации молекул убывает.

8. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ МОЛЕКУЛ

Обсудим кратко результаты, полученные в приближении заданной плотности молекул $N_0 \gg \gg n_0, f_{10}, f_{20}$ при начальной разности фаз $\theta_0 = \pm \pi/2$. Если $f_{10} < n_0/2$, то эволюция плотности молекул определяется выражением

$$N = N_0 + (f_{10} - f_{20}) \sin^2 (gn_0 \sqrt{N_0} t) \pm \sqrt{f_{10} f_{20}} \cos (2gn_0 \sqrt{N_0} t). \quad (67)$$

При $f_{10} = n_0/2$ находим

$$N = N_0 + f_{10} - \frac{f_{10} + f_{20}}{1 + [\sqrt{f_{20}/f_{10}} \pm 2g(f_{10} + f_{20})\sqrt{N_0} t]^2}. \quad (68)$$

Наконец, при $f_{10} > n_0/2$ получаем

$$N = N_0 - f_{20} + \left(f_{20} + \frac{n_0}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{f_{20} + n_0/2} \operatorname{th} x \pm \sqrt{f_{20}}}{\sqrt{f_{20} + n_0/2} \pm \sqrt{f_{20}} \operatorname{th} x}\right)^2, \quad (69)$$

где

$$x = \sqrt{N_0 f_{10} (f_{20} + n_0/2)} t. \quad (70)$$

Отсюда видно, что при $f_{10} < n_0/2$ плотность молекул осциллирует во времени (рис. 3*d*, кривые 1 и 1'), изменяясь в пределах $N_0 - f_{20} \leq N \leq N_0 + f_{10}$, тогда как при $f_{10} \geq n_0/2$ плотность молекул монотонно растет от значения N_0 до $N_0 + n_0/2$ при $\theta_0 = -\pi/2$ либо сначала убывает, достигает минимальной величины $N_0 - f_{20}$, затем растет, асимптотически приближаясь к значению $N_0 + n_0/2$ при $\theta_0 = \pi/2$ (рис. 3*d*,

кривые 2, 2', 3, 3'). Отметим, что при начальном условии $\theta_0 \neq \pm(2k+1)\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) при любых соотношениях между плотностями f_{10} и n_0 имеет место осцилляционный режим эволюции плотности молекул с малой амплитудой. В приближении заданной плотности молекул амплитуда колебаний примерно равна $f_{10} + f_{20}$, что намного меньше N_0 . Поэтому эволюция плотности молекул в этом приближении представляет собой малоамплитудные осцилляции на фоне большой начальной плотности N_0 .

9. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

Самые простые решения задачи получаются в приближении заданной плотности атомов и молекул: $N_0, n_0 \gg f_{10}, f_{20}$. Поскольку в этом приближении задача становится линейной, удобно одновременно учесть влияние расстройки резонанса Δ и начальной разности фаз θ_0 на динамику системы. Используя (12), легко получить выражение для плотности молекул $N(t)$, которое имеет вид

$$N = N_0 + \frac{1}{2}(x_+ + x_-) - \frac{1}{2}(x_+ - x_-) \times \sin \left(\pm \sqrt{\Delta^2 + 4g^2 n_0^2 N_0} t + C \right), \quad (71)$$

где

$$x_{\pm} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\Delta^2}{4g^2 n_0^2 N_0} \right)} \times \left\{ f_{10} - f_{20} + \frac{\Delta \sqrt{f_{10} f_{20}}}{4gn_0 \sqrt{N_0}} \cos \theta_0 \pm \left[\left(f_{10} - f_{20} + \frac{\Delta \sqrt{f_{10} f_{20}}}{4gn_0 \sqrt{N_0}} \cos \theta_0 \right)^2 + 4 \left(1 + \frac{\Delta^2}{4g^2 n_0^2 N_0} \right) f_{10} f_{20} \sin^2 \theta_0 \right]^{1/2} \right\}. \quad (72)$$

Знаки «+» и «-» в аргументе синуса определяются начальной разностью фаз: «-» при $0 < \theta_0 < \pi$ и «+» при $\pi < \theta_0 < 2\pi$ (с периодом 2π). Решения со знаками «±» смещены друг относительно друга на величину

$$C = \arcsin \frac{x_+ + x_-}{x_+ - x_-}. \quad (73)$$

Видно, что при любом значении начальной разности фаз существует только колебательный режим эволюции. На рис. 3*e* представлены графики временной эволюции плотности молекул для случая, когда

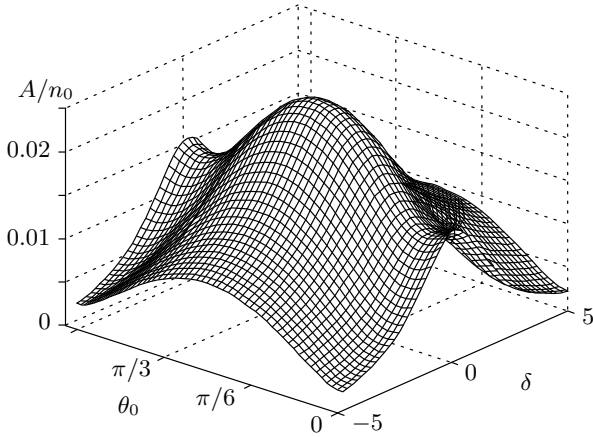


Рис. 6. Зависимость нормированной амплитуды колебаний плотности молекул от нормированной расстройки резонанса $\delta = \tau_0 \Delta$ и начальной разности фаз θ_0 при $f_{10}/n_0 = f_{20}/n_0 = 0.1$ в приближении заданной плотности атомов и молекул

$\theta_0 = \pi/2$ (кривые 1, 1'), $\pi/4$ (кривые 2, 2'), 0 (кривые 3, 3'). Период колебаний

$$T = 2\pi / \sqrt{\Delta^2 + 4g^2 n_0^2 N_0} \quad (74)$$

не зависит от начальных плотностей f_{10} , f_{20} фотонов и начальной разности фаз θ_0 , тогда как амплитуда колебаний

$$A = \frac{1}{2} \left[\left(f_{10} - f_{20} + \frac{\Delta \sqrt{f_{10} f_{20}}}{4g n_0 \sqrt{N_0}} \cos \theta_0 \right)^2 + 4 \left(1 + \frac{\Delta^2}{4g^2 n_0^2 N_0} \right) f_{10} f_{20} \sin^2 \theta_0 \right]^{1/2} \times \left(1 + \frac{\Delta^2}{4g^2 n_0^2 N_0} \right)^{-1} \quad (75)$$

существенно определяется этими параметрами. Это дает возможность управлять динамикой системы с помощью начальной разности фаз θ_0 и расстройки резонанса Δ . Колебания плотности молекул представляют собой мелкую «рябь» над огромной фоновой плотностью N_0 . Из рис. 6 видно, что амплитуда A колебаний имеет форму, подобную поверхности Лоренца, в зависимости от расстройки резонанса Δ и периодически зависит от начальной разности фаз θ_0 . Период T колебаний монотонно убывает с ростом расстройки резонанса Δ , а увеличение начальных концентраций атомов n_0 и молекул N_0 приводит к уменьшению периода колебаний.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из представленных результатов следует, что временная эволюция плотностей атомов, молекул и фотонов в процессе стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии существенно определяется начальными плотностями N_0 , n_0 , f_{10} , f_{20} частиц и начальной разностью фаз θ_0 . При $\theta_0 = \pm(2k + 1)\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) плотность молекул изменяется со временем как аperiodически, так и периодически, тогда как при $\theta_0 \neq \pm(2k + 1)\pi/2$ процессы образования и распада молекул являются только периодическими. При этом падающие импульсы когерентного лазерного излучения периодически то усиливаются, то ослабляются. Изменяя начальную разность фаз θ_0 при фиксированных значениях начальных плотностей частиц можно осуществить фазовый контроль процесса индуцированной рамановской атомно-молекулярной конверсии.

Предсказана возможность существования особого режима эволюции, при котором система покоится, хотя плотности всех частиц отличны от нуля, так как процессы связывания атомов в молекулы и распада молекул сбалансированы. Это обусловлено тем, что полная энергия нелинейного осциллятора совпадает с минимумом его потенциальной энергии. В начальный момент времени осциллятор находится на дне потенциальной ямы и его начальная скорость равна нулю; в этом случае колебания либо иное движение осциллятора невозможны.

Из полученных результатов также следует, что бозе-стимулирование химической динамики (связывание бозе-конденсированных атомов в молекулы) является чрезвычайно важным обстоятельством. Коллективные осцилляции плотностей атомов и молекул свидетельствуют о существовании когерентности в системе. В бозе-конденсате рассмотренная химическая конверсия стимулируется благодаря макрозаполнению не только исходной атомной системы, но и конечного молекулярного состояния химической реакции. Это существенно отличается от обычной химической кинетики, где скорость химической реакции не зависит от числа частиц продукта и стремится к нулю при низких температурах в соответствии с законом Аррениуса. Рамановская атомно-молекулярная конверсия при $T \neq 0$ в термодинамически равновесной системе атомов не может привести к подобным коллективным осцилляциям, так как фазы индивидуальных атомно-молекулярных процессов являются случайными. В этом смысле изученные процессы суть пример новой химии — суперхимии, в которой имеет место

когерентное стимулирование химических реакций. Стимулированная квантовая динамика может заменить обычную при сверхнизких температурах, давая полностью новый тип коллективного поведения системы. Учет сильной зависимости химической кинетики от разности фаз свидетельствует о возможности установления фазовой суперхимической динамики. В последние годы проблема фазового контроля различных нелинейно-оптических процессов приобрела особую значимость и актуальность [62–67]. В будущем специфика бозе-стимулированной химической динамики может открыть путь для новых типов квантово-контролируемых химических реакций.

Для оценки численных значений частот колебаний необходимо знать величину константы g . В работе [51] приведены значения некоторых параметров для атомов и молекул рубидия. Сравнивая гамильтониан (1) с гамильтонианом (2) из [51], для оценки величины константы g можно получить соотношение $g = \chi/\hbar f_0$, где константа $\chi/\hbar \approx 7.6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{3/2}/\text{с}$. Полагая для средней плотности фотонов $f_0 \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$, для константы g получаем оценку $g \approx 7.6 \cdot 10^{-18} \text{ м}^{9/2}/\text{с}$. Подсчитаем теперь минимальный период T_0 колебаний по формуле $T_0 = \pi/gn_0\sqrt{f_0}$. При плотности атомов $n_0 \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$, получаем $T_0 \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$, а частота осцилляций оказывается примерно равной $1.5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$. Этот результат согласуется с результатом численного эксперимента [51]. При $n_0 = f_0$ получаем оценку ранее использованного параметра $\tau_0 = (gn_0^{3/2})^{-1} \approx 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ с}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews et al., *Science* **269**, 198 (1995).
2. K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
3. C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tolett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
4. M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten et al., *Phys. Rev. Lett.* **77**, 416 (1996).
5. J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews et al., *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4984 (1996).
6. Э. А. Корнелл, К. Э. Виман, *УФН* **173**, 1320 (2003).
7. В. Кеттерле, *УФН* **173**, 1339 (2003).
8. Л. П. Питаевский, *УФН* **168**, 641 (1998).
9. Б. Б. Кадомцев, М. Б. Кадомцев, *УФН* **167**, 649 (1997).
10. J. Javanainen, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 3164 (1986).
11. A. Smerzi, S. Fantony, S. Giovanazzi, and S. R. Shenoy, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4950 (1997).
12. S. Raghavan, A. Smerzi, S. Fantony, and S. R. Shenoy, *Phys. Rev. A* **59**, 620 (1999).
13. I. Marino, S. Raghavan, S. Fantony et al., *Phys. Rev. A* **60**, 487 (1999).
14. N. Tsukada, M. Gotoda, Y. Nomura, and T. Isu, *Phys. Rev. A* **59**, 3862 (1999).
15. G. L. Salmond, C. A. Holmes, and G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **65**, 033623 (2002).
16. E. Tiesinga, B. J. Verhaar, and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* **47**, 4114 (1993).
17. Ю. Каган, Л. А. Максимов, *Письма в ЖЭТФ* **82**, 70 (2005).
18. S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger et al., *Nature* **392**, 151 (1998).
19. Ph. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 69 (1998).
20. K. E. Strecker, G. B. Partridge, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080406 (2003).
21. S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmayer et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240402 (2003).
22. J. Cubizolles, T. Bourdell, S. J. J. M. F. Kokkelmans et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240401 (2003).
23. D. S. Petrov, C. Solomon, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 090404 (2004).
24. J. Stenger, S. Inouye, M. R. Andrews et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2422 (1999).
25. V. A. Yurovsky, A. Ben-Reuven, P. S. Julienne, and C. J. Williams, *Phys. Rev. A* **60**, R765 (1999).
26. F. A. van Abeelen and B. J. Verhaar, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1550 (1999).
27. M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin, *Nature* **426**, 537 (2003).
28. C. A. Regal, G. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Nature* **424**, 47 (2003).
29. C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004).
30. C. C. Bradley, S. A. Sackett, J. J. Tolett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).

31. M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250401 (2003).
32. M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004).
33. S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmayer et al., *Science* **302**, 2101 (2003).
34. T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 050401 (2004).
35. J. Herbig, T. Kraemer, M. Mark et al., *Science* **301**, 1510 (2003).
36. T. Takekoshi, B. M. Patterson, and R. J. Knize, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5105 (1998).
37. A. Fioretti, D. Comparat, A. Crubellier et al., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4402 (1998).
38. C. Chin, T. Kraemer, M. Mark et al., E-print archives, cond-mat/0411258.
39. K. Xu, T. Mukaiyama, J. R. Abo-Shaeer et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 210402 (2003).
40. R. Dürr, T. Volz, A. Marte, and G. Rempe, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 020406 (2004).
41. M. Theis, G. Thalhammer, K. Winkler et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 123001 (2004).
42. F. K. Fatemi, K. M. Jones, and P. D. Lett, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4462 (2000).
43. R. Wynar, R. S. Freeland, D. J. Han et al., *Science* **287**, 1016 (2000).
44. P. O. Fedichev, Y. Kagan, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2913 (1996).
45. J. L. Bohn and P. S. Julienne, *Phys. Rev. A* **56**, 1486 (1997); **60**, 414 (1999).
46. Y. B. Band and P. S. Julienne, *Phys. Rev. A* **51**, R4317 (1995).
47. T. Rom, T. Best, O. Mandel et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 073002 (2004).
48. P. D. Drummond, K. V. Kheruntsyan, and H. He, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3055 (1998).
49. B. J. Cusack, T. J. Alexander, E. A. Ostrovskaya, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. A* **65**, 013609 (2001).
50. E. Timmermans, P. Tommasini, R. Côté et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2691 (1999); *Phys. Rep.* **315**, 199 (1999).
51. D. J. Heinzen, R. Wynar, P. D. Drummond, and K. V. Kheruntsyan, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5029 (2000).
52. A. Vardi, V. A. Yurovsky, and J. R. Anglin, *Phys. Rev. A* **64**, 063611 (2001).
53. P. S. Julienne, K. Burnett, Y. B. Band, and W. C. Stwalley, *Phys. Rev. A* **58**, R797 (1998).
54. M. Koštrun, M. Mackie, R. Côté, and J. Javanainen, *Phys. Rev. A* **62**, 063616 (2000).
55. J. Javanainen and M. Mackie, *Phys. Rev. A* **59**, R3186 (1999).
56. C. M. Savage, J. Ruostekoski, and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **57**, 3805 (1998).
57. J. Ruostekoski and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **55**, 3625 (1997); **56**, 2996 (1997).
58. П. И. Хаджи, Д. В. Ткаченко, *Письма в ЖЭТФ* **83**, 120 (2006).
59. N. Tsukada, *Phys. Rev. A* **61**, 063602 (2000).
60. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).
61. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1968).
62. P. Zhou and S. Swain, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2500 (1999).
63. M. Macovei, J. Evers, and C. H. Keitel, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 233601 (2003).
64. J.-H. Wu and J.-Y. Gao, *Phys. Rev. A* **65**, 063807 (2002).
65. D. Bortman-Arbiv, A. D. Wilson-Gordon, and H. Friedmann, *Phys. Rev. A* **63**, 043818 (2001).
66. H. Kang, G. Hernandez, and Y. Zhu, *Phys. Rev. A* **70**, 011801(R) (2004).
67. H. Sun, H. Guo, Y. Bai et al., *Phys. Lett.* **335A**, 68 (2005).