

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ С МЕТАЛЛИЗИРОВАННЫМИ ГРАНИЦАМИ: КОНВЕРСИЯ МОД, ЧИСТЫЕ ОТРАЖЕНИЯ, ОБЪЕМНЫЕ ПОЛЯРИТОНЫ

*В. И. Альшиц\*, В. Н. Любимов*

*Институт кристаллографии им. А. В. Шубникова Российской академии наук  
119333, Москва, Россия*

*А. Радович\*\**

*Технологический университет  
25-314, Кельце, Польша*

Поступила в редакцию 9 июня 2006 г.

Построена теория отражения плоских электромагнитных волн в одноосных кристаллах с положительно определенным тензором диэлектрической проницаемости и произвольно ориентированной металлизированной границей. Задача решена как для ориентаций общего положения, отвечающих трехпарциальному отражению, так и для специальных условий, допускающих двупарциальные отражения: конверсию мод, когда падающая и отраженная волны принадлежат разным полостям поверхности рефракции, а также «чистые» отражения, когда обе волны относятся к одной и той же полости. Показано, что пространство чистых отражений образовано двумя типами ориентаций оптической оси: произвольные направления в плоскости поверхности кристалла и в плоскости падения. Исследованы конфигурации поверхности конверсии для оптически положительных и отрицательных кристаллов. Найдено подпространство чистых отражений, которые при скользящем падении превращаются в однопарциальные объемные поляритоны с потоком энергии, параллельным поверхности. Показано, что область существования таких объемных собственных волн ограничена двумя «линиями» решений. Для поляритонов обыкновенного типа это любые направления вдоль границы, содержащей оптическую ось, а для необыкновенных поляритонов — направление вдоль проекции оптической оси на поверхность при произвольной ориентации оси по отношению к границе.

PACS: 71.36.+c

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Металлическое покрытие, нанесенное на поверхность кристалла, является экраном, запирающим электромагнитные поля в кристалле. Отсутствие сопутствующих полей в прилегающем пространстве значительно упрощает теорию электромагнитных волн в таких средах. В частности, в недавней работе [1] двумя авторами настоящей статьи были установлены ясные критерии существования поляритонов на металлизированной границе одноосного кристалла и получены компактные точные выражения для всех их характеристик, включая поляризацию,

параметры локализации и дисперсионные соотношения. Как оказалось, металлизация границы не только упрощает описание, но и существенно меняет физические свойства среды. Например, она приводит к принципиальному запрету [2] на существование поверхностных электромагнитных волн в кристаллах с положительно определенным тензором диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}$ . Такого запрета нет на границе кристалла с диэлектриком [3–5]. В упомянутой выше работе [1] (см. также [6–8]) локализованные поляритонные моды возникали только благодаря сильной частотной дисперсии тензора  $\hat{\epsilon}$  вблизи определенных резонансных состояний, когда одна из его компонент оказывается отрицательной.

В настоящей работе мы возвращаемся к теории

\*E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru

\*\*A. Radowicz, Kielce University of Technology

электромагнитных волн в одноосных кристаллах с металлизированной поверхностью. На этот раз нас будет интересовать более распространенный случай кристалла с положительно определенным тензором  $\hat{\epsilon}$ . Конечно, в такой среде локализованных собственных волн нет, но остается проблема отражения в ее довольно разнообразных аспектах, а также такие специфические собственные моды, как особые (exceptional) объемные (нелокализованные) поляритоны, переносящие энергию параллельно поверхности и удовлетворяющие условиям на металлизированной границе.

Мы начнем с теории отражения плоских волн от произвольно ориентированной поверхности в плоскости падения общего положения, когда задача отражения решается трехпарциальной суперпозицией волн: одна падающая и две отраженные компоненты, принадлежащие разным полостям поверхности рефракции. Впрочем, одна из отраженных волн может оказаться локализованной у поверхности. При определенных условиях могут также реализоваться дупарциальные отражения, включающие конверсию мод и «чистое» отражение. В первом случае падающая и отраженная волны принадлежат разным полостям поверхности рефракции, а во втором случае — одной и той же полости обыкновенных или необыкновенных волн. Сначала мы изучим условия существования и свойства чистых отражений. Среди решений для чистого отражения будет выделен подкласс, в котором возможен предельный переход при скользящем падении к собственной моде особых объемных поляритонов. Анализ соответствующего дисперсионного уравнения позволит нам найти все ориентации поверхности и направления распространения, допускающие существование обыкновенных или необыкновенных особых объемных волн. Затем будет построена теория конверсионных отражений и найдены конфигурации соответствующей указательной поверхности для оптически положительных и отрицательных кристаллов, задающей индекс рефракции отражения для каждой ориентации оптической оси.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим полуограниченный оптически одноосный кристалл с металлизированной границей и произвольно ориентированной оптической осью. Для наших целей описание удобно проводить в системе координат, связанной не с элементами сим-

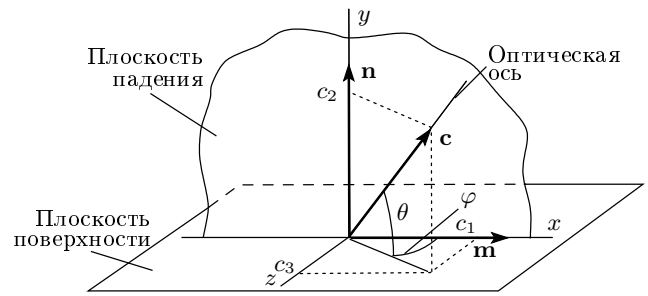


Рис. 1. Система координат  $xuz$  и ориентация оптической оси  $c$  кристалла

метрии кристалла, а с параметрами волнового поля. Выберем ось  $x$  вдоль направления распространения  $\mathbf{m}$ , а ось  $y$  — вдоль внутренней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности. При этом плоскость  $xu$  является плоскостью падения, где лежат все волновые векторы падающих и отраженных волн, плоскость  $xz$  совпадает с границей кристалла, а оптическая ось задается произвольно направленным единичным вектором  $\mathbf{c}$  (рис. 1). Ориентация вектора  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  в выбранной системе координат может быть задана двумя углами  $\theta$  и  $\varphi$ . Угол  $\theta$  определяет ориентацию поверхности, а угол  $\varphi$  на поверхности — направление распространения стационарного волнового поля.

Исследуемые волновые суперпозиции выражаются в виде совокупности компонент двух ветвей — обыкновенной ( $o$  — ordinary) и необыкновенной ( $e$  — extraordinary), которые в свою очередь подразделяются на падающую ( $i$ ) и отраженную ( $r$ ):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(x, y, t) \\ \mathbf{H}(x, y, t) \end{pmatrix} = \left\{ C_o^i \begin{pmatrix} \mathbf{E}_o^i(y) \\ \mathbf{H}_o^i(y) \end{pmatrix} + C_o^r \begin{pmatrix} \mathbf{E}_o^r(y) \\ \mathbf{H}_o^r(y) \end{pmatrix} + C_e^i \begin{pmatrix} \mathbf{E}_e^i(y) \\ \mathbf{H}_e^i(y) \end{pmatrix} + C_e^r \begin{pmatrix} \mathbf{E}_e^r(y) \\ \mathbf{H}_e^r(y) \end{pmatrix} \right\} \times \exp [ik(x - vt)], \quad (1)$$

где зависимость векторных амплитуд от координаты  $y$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_o^{i,r}(y) \\ \mathbf{H}_o^{i,r}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_o^{(0)i,r} \\ \mathbf{H}_o^{(0)i,r} \end{pmatrix} \exp (\mp ip_o ky), \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_e^{i,r}(y) \\ \mathbf{H}_e^{i,r}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_e^{(0)i,r} \\ \mathbf{H}_e^{(0)i,r} \end{pmatrix} \exp [i(p \mp p_e)ky]. \quad (3)$$

В формулах (1)–(3)  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного поля,  $k$  — общая  $x$ -компонента волновых векторов обыкновенных и необыкновенных парциальных волн:  $k = \mathbf{k}_o^{i,r} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{k}_e^{i,r} \cdot \mathbf{m}$ ,  $v = \omega/k$  — приведенная фазовая скорость волны,  $\omega$  — частота,  $C_o^{i,r}$  и  $C_e^{i,r}$  — амплитудные множители, определяемые из граничных условий. В членах  $\mp p_{o,e}$  верхний знак относится к падающей волне, нижний — к отраженной.

Вместо волновых векторов нам будет удобней далее пользоваться безразмерными векторами рефракции:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_o^{i,r} &= \mathbf{k}_o^{i,r}/k_0 = (1, \mp p_o, 0)n, \\ \mathbf{n}_e^{i,r} &= \mathbf{k}_e^{i,r}/k_0 = (1, p \mp p_e, 0)n. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $k_0 = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света в вакууме,  $n = k/k_0 = c/v$  — безразмерная медленность волны, называемая также параметром или индексом рефракции. Параметры  $p_o$ ,  $p_e$  и  $p$ , определяющие зависимости парциальных амплитуд от глубины  $y$ , по аналогии с [1] могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} p_o^2 &= \frac{\varepsilon_o}{n^2} - 1, \\ p_e^2 &= \left( \frac{\varepsilon_o}{n^2} - \frac{B}{A} \right) \frac{\gamma}{A} = \frac{\gamma}{A} \left[ p_o^2 + \frac{\gamma-1}{A} \left( c_2^2 + \frac{c_3^2}{\gamma} \right) \right], \\ p &= (1 - \gamma) \frac{c_1 c_2}{A}, \end{aligned} \quad (5)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A &= 1 + c_2^2(\gamma - 1), \\ B &= 1 - c_3^2(1 - 1/\gamma), \quad \gamma = \varepsilon_e/\varepsilon_o. \end{aligned} \quad (6)$$

Ориентация векторных амплитуд волновых полей известна из литературы [9–11] и может быть задана соотношениями

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_o^{(0)\alpha} \\ \mathbf{H}_o^{(0)\alpha} \end{pmatrix} &= \frac{N_o^\alpha}{n} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_o^\alpha \times \mathbf{c} \\ \mathbf{n}_o^\alpha \times (\mathbf{n}_o^\alpha \times \mathbf{c}) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{E}_e^{(0)\alpha} \\ \mathbf{H}_e^{(0)\alpha} \end{pmatrix} &= N_e^\alpha \begin{pmatrix} \mathbf{c} - \mathbf{n}_e^\alpha (\mathbf{n}_e^\alpha \cdot \mathbf{c})/\varepsilon_o \\ \mathbf{n}_e^\alpha \times \mathbf{c} \end{pmatrix}, \\ \alpha &= i, r. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь нормирующие множители  $N_{o,e}^\alpha$  выбраны из условий  $|\mathbf{E}_o^{(0)\alpha}| = 1$ ,  $|\mathbf{H}_e^{(0)\alpha}| = n$  и задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_o^{i,r}} &= \left\{ (c_2 \pm c_1 p_o)^2 + \frac{c_3^2 \varepsilon_o}{n^2} \right\}^{1/2}, \\ \frac{1}{N_e^{i,r}} &= \left\{ [c_2 - c_1(p \mp p_e)]^2 + c_3^2 [(p \mp p_e)^2 + 1] \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ 1 + (p \mp p_e)^2 - [c_1 + c_2(p \mp p_e)]^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где опять верхний знак отвечает падающей волне, а нижний — отраженной.

Граничные условия для кристалла с металлизированной поверхностью, согласно работе [9], сводятся к обращению в нуль тангенциальных компонент электрического поля  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E}_t|_{y=0} = 0. \quad (9)$$

Иными словами, электрическое поле суммарной волновой суперпозиции должно быть ортогональным поверхности, т.е. параллельным нормали  $\mathbf{n}$  к ней (рис. 1):  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n}$ . Выполнение условия (9) автоматически обеспечивает на границе обращение в нуль нормальных компонент магнитного поля  $\mathbf{H}$  и вектора Пойнтинга  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_{y=0} = 0, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}|_{y=0} = 0. \quad (10)$$

### 3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОТРАЖЕНИЯ

С учетом выражений (7) для ориентаций амплитуд парциальных электромагнитных волн граничные условия (9) для рассматриваемой суперпозиции обыкновенных и необыкновенных волн (1)–(3) сводятся к уравнению

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} c_1 p_o + c_2 & -c_1 p_o + c_2 \\ -c_3 p_o \varepsilon_o / n^2 & c_3 p_o \varepsilon_o / n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_o^i N_o^i \\ C_o^r N_o^r \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} c_3 & c_3 \\ c_1 p_e + c_2 p_e & c_1 p_e - c_2 p_e \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} C_e^i N_e^i \\ C_e^r N_e^r \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где введена функция

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{\varepsilon_o}{n^2} - \frac{1}{A} = p_o^2 - \frac{c_2}{c_1} p = \\ &= \frac{A}{\gamma} \left( p_e^2 - \frac{c_3^2}{A^2} (\gamma - 1) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

При постановке задачи отражения обычно рассматривают только одну падающую волну, считая ее амплитуду ( $C_o^i$  или  $C_e^i$ ) заданной (а другую полагая равной нулю). Параметр рефракции  $n$ , непосредственно определяющий угол падения, при этом также считается известным, а подлежат определению амплитуды отраженных волн ( $C_o^r$  и  $C_e^r$ ). Впрочем, как мы увидим, при определенных условиях одна из этих волн может оказаться локализованной.

Начнем рассмотрение с падающей обыкновенной волны. В этом случае уравнение (11) сводится к системе

$$\begin{pmatrix} c_1 p_o - c_2 & -c_3 \\ c_3 p_o \varepsilon_o / n^2 & c_1 g - c_2 p_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_o^r N_o^r \\ C_e^r N_e^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 p_o + c_2 \\ c_3 p_o \varepsilon_o / n^2 \end{pmatrix} C_o^i N_o^i. \quad (13)$$

Решение системы (13) имеет вид

$$C_o^r = \frac{D_o N_o^i}{D N_o^r} C_o^i, \quad C_e^r = -\frac{2c_2 c_3 p_o \varepsilon_o N_o^i / n^2}{D N_e^r} C_o^i, \quad (14)$$

где нормирующие факторы  $N_o^i$  и  $N_o^r, e$  заданы уравнениями (8), а  $D$  и  $D_o$  — детерминанты матриц, построенных из соответствующих коэффициентов системы (13):

$$D = (c_1 p_o - c_2)(c_1 g - c_2 p_e) + \frac{c_3^2 p_o \varepsilon_o}{n^2}, \quad (15)$$

$$D_o = (c_1 p_o + c_2)(c_1 g - c_2 p_e) + \frac{c_3^2 p_o \varepsilon_o}{n^2}. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь отражение, когда падающей является необыкновенная волна. Полагая в (11)  $C_o^i = 0$ , приходим к уравнению

$$\begin{pmatrix} c_1 p_o - c_2 & -c_3 \\ c_3 p_o \varepsilon_o / n^2 & c_1 g - c_2 p_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_o^r N_o^r \\ C_e^r N_e^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ -(c_1 g + c_2 p_e) \end{pmatrix} C_e^i N_e^i. \quad (17)$$

Левая часть полученной системы совпадает с левой частью уравнения (13). Поэтому решение уравнения (17) для скалярных амплитуд  $C_o^r$  и  $C_e^r$ , естественно, характеризуется теми же знаменателями, что и в (14), (15):

$$C_o^r = -\frac{2c_2 c_3 p_e N_e^i}{D N_o^r} C_e^i, \quad C_e^r = -\frac{D_e N_e^i}{D N_e^r} C_e^i. \quad (18)$$

Здесь

$$D_e = (c_1 p_o - c_2)(c_1 g + c_2 p_e) + \frac{c_3^2 p_o \varepsilon_o}{n^2}. \quad (19)$$

Прежде чем начать анализ полученных решений, напомним, что мы рассматриваем только кристаллы (и частоты), отвечающие положительно определенному тензору диэлектрической проницаемости  $\hat{\varepsilon}$  (т. е.  $\varepsilon_o > 0$  и  $\varepsilon_e > 0$ ). В зависимости от соотношения между компонентами  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon_e$  принято различать

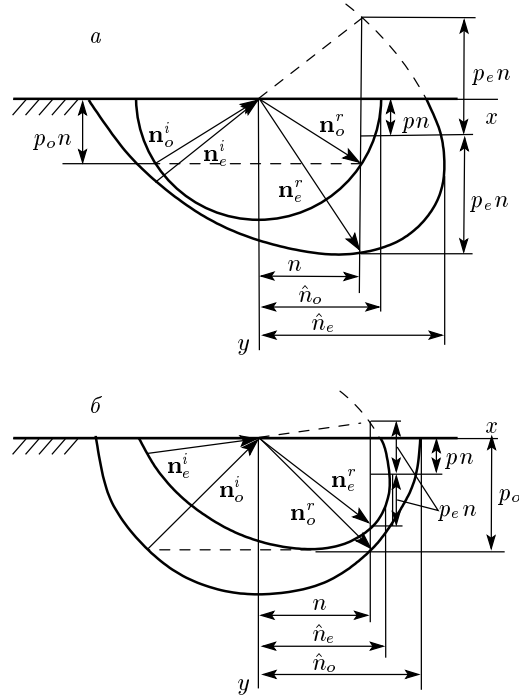


Рис. 2. Сечение обыкновенной и необыкновенной полостей поверхности рефракции плоскостью падения  $xy$  и основные параметры задачи отражения для оптически положительных (а) и оптически отрицательных (б) кристаллов

оптически положительными ( $\varepsilon_e > \varepsilon_o$ , т. е.  $\gamma > 1$ ) и оптически отрицательными ( $\varepsilon_e < \varepsilon_o$ , т. е.  $\gamma < 1$ ) кристаллы. На рис. 2 показаны сечения полостей поверхности рефракции этих двух типов кристаллов плоскостью падения  $xy$  для случая произвольной ориентации границы и направления распространения. Среди основных характеристик отражения, показанных на рис. 2, особенно важную роль играют предельные значения параметров рефракции  $\hat{n}_o$  и  $\hat{n}_e$ ,

$$\hat{n}_o = \sqrt{\varepsilon_o}, \quad \hat{n}_e = \sqrt{\varepsilon_o A/B}, \quad (20)$$

разделяющие для каждой из полостей области действительных и мнимых значений параметров  $p_o$  и  $p_e$ , соответственно:

$$p_o = \sqrt{\left(\frac{\hat{n}_o}{n}\right)^2 - 1}, \quad p_e = \sqrt{\left[\left(\frac{\hat{n}_e}{n}\right)^2 - 1\right] \frac{\gamma B}{A^2}}. \quad (21)$$

Параметр  $p_o$  остается действительным лишь в области  $0 \leq n \leq \hat{n}_o$ , т. е. до тех пор, пока вертикальная прямая на рис. 2 пересекает соответствующее

круговое сечение сферической полости рефракции для обыкновенных волн (или касается его). Аналогично параметр  $p_e$  сохраняет вещественность только в области  $0 \leq n \leq \hat{n}_e$ . В обеих областях вещественности значение индекса рефракции  $n = 0$  описывает отражение при нормальном падении.

Таким образом, при описании стационарных волновых движений вдоль поверхности следует различать три области изменения параметра рефракции  $n$ :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 0 \leq n \leq \min\{\hat{n}_o, \hat{n}_e\}, \\ \text{(II)} \quad & \min\{\hat{n}_o, \hat{n}_e\} < n \leq \max\{\hat{n}_o, \hat{n}_e\}, \\ \text{(III)} \quad & n > \max\{\hat{n}_o, \hat{n}_e\}. \end{aligned} \quad (22)$$

В первой из них оба параметра  $p_o$  и  $p_e$  действительны — это область отражений, где все парциальные волны объемные. Такая ситуация автоматически возникает в оптически положительном кристалле, когда падающая волна является обыкновенной (рис. 2а), или в оптически отрицательном кристалле с падающей волной необыкновенного типа (рис. 2б).

В области II один из параметров,  $p_o$  или  $p_e$ , оказывается мнимым. В оптически положительном кристалле это  $p_o$ , а в оптически отрицательном —  $p_e$ . Поэтому в найденных выше общих решениях одна из парциальных «отраженных» волн может оказаться локализованной у поверхности. В частности, в этой области амплитуды  $C_e^r$  (14) и  $C_o^r$  (18) соответственно в оптически отрицательных и оптически положительных кристаллах описывают именно такие локализованные компоненты отражения.

Наконец, в области III оба параметра,  $p_o$  и  $p_e$ , мнимые. Иными словами, в этой области стационарное волновое поле, в принципе, возможно только в виде собственных поверхностных электромагнитных волн — поляритонов при фиксированных значениях параметра рефракции  $n$ , задаваемых полюсами решений (14) и (18), т. е. уравнением

$$D(n) = 0. \quad (23)$$

Однако, как показано в работе [1], в одноосных кристаллах на металлизированных поверхностях действительные решения дисперсионного уравнения (23) существуют только при условии  $-\varepsilon_e \operatorname{tg}^2 \theta < \varepsilon_o < 0$ , т. е. невозможны при  $\varepsilon_o > 0$  (напомним также упомянутый во Введении общий запрет [2] существования локализованных собственных мод на металлизированных границах в кристаллах с положительно определенным  $\hat{\varepsilon}$ ). Таким образом, в настоящей работе, посвященной

теории электромагнитных волн в «бездисперсионных» одноосных кристаллах, где обе компоненты  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon_e$  положительны, нас могут интересовать лишь области I и II (22), т. е. интервал

$$0 \leq n \leq \max\{\hat{n}_o, \hat{n}_e\}, \quad (24)$$

в котором локализованные моды, если и существуют, то только как парциальные волны в задаче отражения.

В принципе, выражения (14), (18) полностью решают задачу отражения. В отличие от проблемы поиска собственных волн, когда необходимо анализировать дисперсионное уравнение (23), задающее допустимые значения параметра рефракции  $n$ , в случае отражения выбор  $n$  всего лишь фиксирует угол падения волны на поверхность. При этом кристалл не может не отреагировать на падающую волну, а формулы (14), (18) описывают эту реакцию. Впрочем, для некоторых углов падения отражение имеет весьма специфические, а порой и качественно нетривиальные черты. Например, трехпарциальное решение может вырождаться в двупарциальное, так что вместо двух отраженных волн остается только одна, принадлежащая либо той же полости поверхности рефракции (чистое отражение), либо другой (конверсия мод). А при стремлении к скользкому падению совокупное волновое поле либо стремится к нулю, либо остается конечным, образуя объемный поляритон. Ниже мы более детально остановимся на упомянутых особенностях.

#### 4. ЧИСТЫЕ ОТРАЖЕНИЯ

Наиболее простым типом двупарциальных отражений является чистое отражение, когда падающая и отраженная волны принадлежат одной и той же полости рефракции, т. е. обе компоненты являются либо обыкновенными, либо необыкновенными. Очевидно, что такие отражения реализуются, когда обращаются в нуль амплитуды  $C_e^r$  в (14) или  $C_o^r$  в (18). При этом в первом случае, очевидно, параметр рефракции  $n$  должен принадлежать области  $n < \hat{n}_o$ , а во втором случае — области  $n < \hat{n}_e$ . Замечательным обстоятельством является то, что оба типа чистых отражений определяются одним и тем же критерием:

$$c_2 c_3 = 0. \quad (25)$$

Как следует из уравнения (25), чистые отражения и обыкновенных, и необыкновенных волн в рассматриваемых кристаллах должны существовать независимо друг от друга в одних и тех же двух

типах геометрии отражения. Это происходит только в тех случаях, когда оптическая ось принадлежит либо поверхности кристалла ( $c_2 = 0$ ), либо плоскости падения ( $c_3 = 0$ ). Поскольку при этом оптическая ось имеет свободную ориентацию в этих плоскостях, а угол падения также ничем не ограничен, в трехмерном пространстве  $\{n, \mathbf{c}\}$  чистые отражения занимают поверхности, которые определяются как совокупность двух плоскостей:  $c_2 = 0$  и  $c_3 = 0$ .

Рассмотрим подробнее характеристики чистых отражений в этих двух геометриях.

#### 4.1. Оптическая ось параллельна поверхности

В этом случае  $c_2 = 0$ , т.е.  $\theta = 0$ , а перпендикулярная поверхности плоскость падения  $xy$  составляет произвольный угол  $\varphi$  с направлением оптической оси. При этом основные характеристики (4)–(8) независимо отражающихся обыкновенных и необыкновенных волн приобретают вид

$$\mathbf{n}_{o,e}^{i,r} = \{1, \mp p_{o,e}(n), 0\}n, \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_o^{(0)i,r} \\ \mathbf{H}_o^{(0)i,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\pm c_3 p_o, c_3, \mp c_1 p_o) \\ (c_1 p_o^2, \pm c_1 p_o, c_3 \varepsilon_o / n^2) n \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_e^{(0)i,r} \\ \mathbf{H}_e^{(0)i,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 p_o^2, \pm c_1 p_e, c_3 \varepsilon_o / n^2) \\ (\mp c_3 p_e, -c_3, \pm c_1 p_e) \varepsilon_o / n \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$C_o^r = C_o^i, \quad C_e^i = -C_e^r.$$

В выражениях (26), (27), как и раньше, верхний знак соответствует падающей ( $i$ ) волне, а нижний — отраженной ( $r$ ). В выражении для  $p_e(n)$  (5) следует учесть, что в данном случае  $A = 1$  и  $B = c_1^2 + c_3^2 / \gamma$ . Углы падения, очевидно, определяются величиной  $n < \hat{n}_{o,e}$ . В формулах (27) для простоты нормировочные множители (8) считаются включенными в амплитуды  $C_{o,e}^{i,r}$ .

С учетом (26)–(28) чистое отражение электрической компоненты обыкновенной волны в этой геометрии описывается следующей комбинацией:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_o(x, y, t) = & C_o ([c_3 p_o, c_3, -c_1 p_o] \exp(-ip_o k y) + \\ & + [-c_3 p_o, c_3, c_1 p_o] \exp(ip_o k y)) \times \\ & \times \exp[ik(nx - vt)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Чистое отражение магнитной компоненты необык-

новенной волны задается аналогичной суперпозицией:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_e(x, y, t) = & C_e ([c_3 p_e, c_3, -c_1 p_e] \exp(-ip_e k y) + \\ & + [c_3 p_e, -c_3, -c_1 p_e] \exp(ip_e k y)) \times \\ & \times \exp[ik(nx - vt)]. \end{aligned} \quad (30)$$

#### 4.2. Оптическая ось параллельна плоскости падения

В этом случае  $c_3 = 0$ , т.е. азимут  $\varphi = 0$ , а угол  $\theta$  любой, что соответствует произвольно ориентированной поверхности кристалла и плоскости падения, проходящей через оптическую ось. Основные характеристики независимо отражающихся волн при этом задаются формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_o^{i,r} &= \{1, \mp p_o(n), 0\}n, \\ \mathbf{n}_e^{i,r} &= \{1, p \mp p_e(n), 0\}n, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_o^{(0)i,r} \\ \mathbf{H}_o^{(0)i,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0, 1) \\ (\mp p_o, -1, 0)n \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_e^{(0)i,r} \\ \mathbf{H}_e^{(0)i,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\pm p_e, \gamma/A^2 \pm p p_e, 0) \\ (0, 0, 1) \varepsilon_e / A n \end{pmatrix},$$

$$C_o^r = -C_o^i, \quad C_e^r = C_e^i. \quad (33)$$

При  $c_3 = 0$  в выражении для  $p_e(n)$  (5) имеем  $B = 1$ ,  $A = c_1^2 + \gamma c_2^2$ . Таким образом, согласно формулам (32) чистое отражение волн обыкновенного типа описывается парциальными  $TE$ -волнами, в которых электрическая компонента ортогональна сагитальной плоскости. Аналогично парциальные компоненты чистого отражения необыкновенных волн образованы  $TM$ -модами с магнитной составляющей, перпендикулярной той же плоскости.

В рассматриваемом случае аналоги формул (29), (30) оказываются еще проще:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_o(x, y, t) = & C_o(0, 0, 1) \sin(p_o k n y) \times \\ & \times \exp[ik(nx - vt)], \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_e(x, y, t) = & C_e(0, 0, 1) \cos(p_e k n y) \times \\ & \times \exp[ik\{n(x + p y) - vt\}]. \end{aligned} \quad (35)$$

### 5. ОСОБЫЕ ОБЪЕМНЫЕ ПОЛЯРИТОНЫ

#### 5.1. Чистые отражения обыкновенных волн при скользящем падении

Как видно из рис. 2, скользящее падение обыкновенной волны реализуется при  $n = \hat{n}_o$ , когда в

соответствии с формулами (21)  $p_o = 0$ . При этом чистое отражение обыкновенной волны при стремлении к скользящему падению,  $p_o \rightarrow 0$ , в плоскостях  $c_2 = 0$  и  $c_3 = 0$  ведет себя по-разному. Как следует из уравнений (1) и (26)–(28), в первом случае, когда оптическая ось параллельна поверхности ( $c_2 = 0$ ), падающая и отраженная парциальные волны при  $p_o = 0$  оказываются синфазными и вместе образуют обыкновенную особую объемную волну:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(x, t) \\ \mathbf{H}(x, t) \end{pmatrix} = C_o \begin{pmatrix} \mathbf{E}_o \\ \mathbf{H}_o \end{pmatrix} \exp [ik (\hat{n}_o x - vt)]. \quad (36)$$

Вектор рефракции рассматриваемой волны и ее векторная амплитуда имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_o &= (1, 0, 0)\hat{n}_o, \quad \hat{n}_o = \sqrt{\varepsilon_o}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{E}_o \\ \mathbf{H}_o \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1)\hat{n}_o \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (37)$$

а поток энергии (вектор Пойнтинга) в этой волне,  $\mathbf{P}_o = \mathbf{E}_o \times \mathbf{H}_o$ , лежит на пересечении поверхности кристалла с сагиттальной плоскостью, т.е.  $\mathbf{P}_o \parallel x$  (рис. 3а).

С другой стороны, чистое отражение обыкновенных волн в сагиттальной плоскости, параллельной оптической оси ( $c_3 = 0$ ,  $c_2 \neq 0$ ), при стремлении к скользящему падению ( $p_o \rightarrow 0$ ), согласно формулам (33), дает антифазные падающую и отраженную парциальные волны, которые взаимно уничтожаются. Иными словами, в такой плоскости особый объемный поляритон на ветви обыкновенных волн не возникает.

Обнаруженная качественная разница в поведении скользящего падения в плоскостях  $c_2 = 0$  и  $c_3 = 0$  имеет простую физическую интерпретацию. Для того чтобы предельная волна, возникающая при скользящем падении, существовала, ее поляризация  $\mathbf{E}_o$  в соответствии с граничным условием (9) должна быть ортогональной поверхности кристалла,  $\mathbf{E}_o \parallel \mathbf{n} \parallel y$ . Как видно из соотношений (27), (29), при  $c_2 = 0$  и стремлении  $p_o \rightarrow 0$  это действительно имеет место для обыкновенной волны. Однако в сагиттальной плоскости, содержащей оптическую ось ( $c_3 = 0$ ), падающая и отраженная компоненты в соответствии с формулами (32), (34) дают поляризацию  $\mathbf{E}_o$  не ортогональную, а параллельную поверхности. Отсюда и аннигиляция этих компонент.

## 5.2. Чистые отражения необыкновенных волн при скользящем падении

Рассмотрение скользящего падения необыкновенных волн совершенно аналогично. Оно соответствует стремлению  $n \rightarrow \hat{n}_e$  и, следовательно, (см. (21))  $p_e \rightarrow 0$ . В этом случае все оказывается наоборот: в плоскости  $c_2 = 0$  падающая и отраженная волны антифазны (28) и потому взаимно аннигилируют, а при параллельности оптической оси сагиттальной плоскости ( $c_3 = 0$ ) они синфазны (33), что порождает объемный поляритон:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(x, y, t) \\ \mathbf{H}(x, y, t) \end{pmatrix} = C_e \begin{pmatrix} \mathbf{E}_e \\ \mathbf{H}_e \end{pmatrix} \exp [ik (\hat{n}_e x + \hat{p}y - vt)]. \quad (38)$$

Для рассматриваемой волны имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_e &= (1, \hat{p}, 0)\hat{n}_e, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E}_e \\ \mathbf{H}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1)\hat{n}_e \end{pmatrix}, \\ \hat{n}_e &= \sqrt{\varepsilon_o c_1^2 + \varepsilon_e c_2^2}, \quad \hat{p} = \frac{(\varepsilon_o - \varepsilon_e)c_1 c_2}{\hat{n}_e^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Как видно из формул (39), объемный поляритон (38) действительно поляризован в соответствии с требованием (9):  $\mathbf{E}_e \parallel \mathbf{n} \parallel y$ . Заметим, что вектор рефракции  $\mathbf{n}_e$  (39) в общем случае не параллелен поверхности. В то же время вектор Пойнтинга волны  $\mathbf{P}_e$  по-прежнему лежит на пересечении сагиттальной плоскости и поверхности кристалла,  $\mathbf{P}_e \parallel x$  (рис. 3б).

В частном случае  $c_2 = c_3 = 0$ , отвечающем направлению распространения  $x$  вдоль оптической оси, полости обыкновенных и необыкновенных волн поверхности рефракции соприкасаются. В результате возникает вырождение:

$$\begin{aligned} p_o = p_e = \hat{p} = 0, \quad \hat{n}_o = \hat{n}_e = \sqrt{\varepsilon_o}, \\ \mathbf{n}_o = \mathbf{n}_e = (1, 0, 0), \end{aligned} \quad (40)$$

и решения (36), (38) сливаются, вырождаясь в соответствующую  $TM$ -волну. Заметим, что с учетом поперечной изотропии одноосного кристалла в данном случае выбор ориентации координатной плоскости  $xz$  является произвольным: для любой фиксированной границы, параллельной оптической оси, вдоль последней всегда может распространяться объемная волна с вектором поляризации  $\mathbf{E}_e$ , ортогональным поверхности, и потоком энергии  $\mathbf{P}_e \parallel x$ .

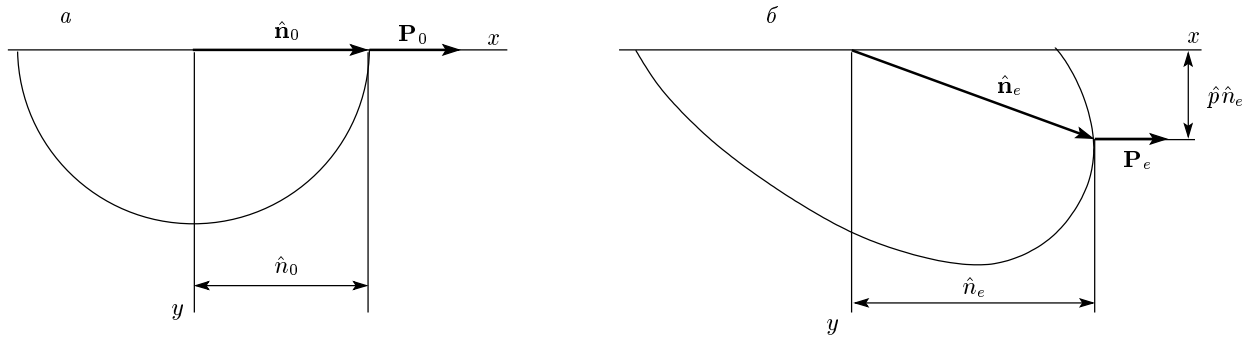


Рис. 3. Характеристики объемных поляритонов обыкновенного (а) и необыкновенного (б) типов, возникающих соответственно при  $c_2 = 0$  и  $c_3 = 0$

### 5.3. Доказательство отсутствия других решений

Таким образом, особые объемные поляритоны обыкновенного типа (36) возникают, когда оптическая ось параллельна поверхности кристалла. Аналогичные собственные волны необыкновенного типа (38) существуют при условии, что оптическая ось параллельна сагиттальной плоскости. Заметим, что в обоих случаях речь идет об однопарциальных решениях *ТМ*-типа с потоком энергии  $\mathbf{P}_{o,e}$ , параллельным одновременно и поверхности кристалла, и сагиттальной плоскости (рис. 3).

Покажем, что дисперсионное уравнение (23), (15),

$$D = (c_1 p_o - c_2)(c_1 g - c_2 p_e) + c_3^2 p_o (p_o^2 + 1) = 0, \quad (41)$$

других собственных решений не имеет. В принципе, особый объемный поляритон не обязательно должен принадлежать семейству чистых отражений. Он мог бы оказаться и двупарциальным, т. е. состоящим из объемной компоненты одной ветви, отвечающей внешней полости рефракции, и примешивающейся локализованной компоненты другой ветви. Примеры подобных смешанных решений известны как для кристаллов с металлизированной поверхностью (в частном случае  $\epsilon_o = 0, \epsilon_e > 0$  [1]), так и на открытой границе кристалла с положительно определенным тензором  $\hat{\epsilon}$  [4, 5]. Очевидно, однако, что любая такая волна с примесью неоднородных компонент или без нее переносит энергию параллельно поверхности, т. е. ее объемная компонента должна характеризоваться нулевым параметром  $p_o$  или  $p_e$  (см. рис. 3).

Рассмотрим уравнение (41) при  $p_o = 0$ :

$$c_2(c_1 g - c_2 p_e) = 0. \quad (42)$$

Подставляя сюда выражения (5), (12) для  $p_e$  и  $g$ , взятые при  $p_o = 0$ , нетрудно видеть, что при  $\gamma < 1$  параметр  $g$  действительный, а параметр  $p_e$  мнимый и уравнение (42), помимо уже известного нам решения  $c_2 = 0$ , других решений не имеет, поскольку при  $c_2 \neq 0$  параметр локализации  $p_e$  (5) в нуль не обращается. При  $\gamma > 1$ , когда и параметр  $p_e$  действителен, уравнение (42) эквивалентно требованию

$$c_2^2(c_2^2 + c_3^2) = 0, \quad (43)$$

что опять приводит к решению  $c_2 = 0$ .

При  $p_e = 0$  уравнение (41) принимает вид

$$c_3^2 [A p_o + (\gamma - 1) c_1 c_2] = 0, \quad (44)$$

где принято во внимание, что  $p_e = 0$  при  $n = \hat{n}_e$  и в соответствии с формулами (20), (21)

$$p_o = \sqrt{(1 - \gamma)(c_2^2 + c_3^2/\gamma)/A}. \quad (45)$$

На этот раз комплексность в дисперсионном уравнении возникает при  $\gamma > 1$ , причем чисто мнимый параметр  $p_o$  при  $c_3 \neq 0$  в нуль не обращается, так что  $c_3 = 0$  является единственным корнем уравнения (44). При  $\gamma < 1$  уравнение (44) удобно переписать в виде

$$c_3^2 \{ \gamma^2 c_2^2 + [1 - (1 - \gamma)^2 c_2^2] \} = 0. \quad (46)$$

Выражение в фигурных скобках положительно при любых направлениях оптической оси, поэтому опять единственным корнем дисперсионного уравнения остается  $c_3 = 0$ .

Таким образом, никаких новых решений для особых объемных поляритонов по сравнению с найденными выше однопарциальными собственными модами (36), (38) в одноосных кристаллах с металлизированной границей не существует.



### 6. КОНВЕРСИЯ МОД ПРИ ОТРАЖЕНИИ

Обратимся теперь к другому, менее привычному типу дупарциальных отражений, когда падающая на поверхность волна конвертируется в отраженную волну «сопряженной» поляризационной ветви (т. е. принадлежащей другой полости рефракции). Поставим вопрос: при каких условиях происходит конверсия мод при отражении и какое место в трехмерном пространстве  $\{n, \theta, \varphi\}$  всех отражений занимают ориентационные конфигурации, допускающие дупарциальное отражение со сменой полости рефракции. Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к решениям (14), (18). При падающей обыкновенной волне конверсия возникает, если подобрать угол падения (или параметр  $n$ ) так, чтобы в (14)  $C_o^r = 0$ , что эквивалентно требованию  $D_o = 0$ . А согласно (18) падающая необыкновенная волна превратится при отражении в обыкновенную, если  $D_e = 0$ .

#### 6.1. Уравнение поверхности конверсии и его численное решение

Здесь следует сделать одно замечание. Очевидно, что дупарциальное конверсионное отражение обратимо, если иметь в виду отражения слева направо и справа налево. Имеется в виду, что одновременное обращение знаков векторов рефракции падающей и отраженной волн автоматически превращает отраженную волну в падающую, а падающую волну в отраженную. Такое обращенное отражение, конечно, математически полностью эквивалентно исходному — так называемый принцип взаимности [9]. Символически это можно записать в форме:  $o \rightarrow e = o \leftarrow e$ . Гораздо менее очевидно, что два конверсионных отражения в одну сторону  $o \rightarrow e$  и  $e \rightarrow o$  (см. рис. 2) тоже удовлетворяют граничным условиям при одной и той же геометрии задачи (т. е. совокупности  $\{\mathbf{c}, n\}$ ). Волновые поля, соответствующие рассматриваемым отражениям, описываются выражениями

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}_{o \rightarrow e} = C \left\{ \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_o^i \times \mathbf{c} \\ \mathbf{n}_o^i \times (\mathbf{n}_o^i \times \mathbf{c}) \end{pmatrix} \times \right. \\ \left. \times \exp(-ip_o k n y) - \frac{c_2 + c_1 p_o}{c_3} \begin{pmatrix} \mathbf{c} - \mathbf{n}_e^r (\mathbf{n}_e^r \cdot \mathbf{c}) / \varepsilon_o \\ \mathbf{n}_e^r \times \mathbf{c} \end{pmatrix} \times \right. \\ \left. \times \exp(i(p + p_e) k n y) \right\} \exp(ik(nx - vt)), \quad (47)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}_{e \rightarrow o} = C \left\{ \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_o^r \times \mathbf{c} \\ \mathbf{n}_o^r \times (\mathbf{n}_o^r \times \mathbf{c}) \end{pmatrix} \times \right. \\ \left. \times \exp(ip_o k n y) - \frac{c_2 - c_1 p_o}{c_3} \begin{pmatrix} \mathbf{c} - \mathbf{n}_e^i (\mathbf{n}_e^i \cdot \mathbf{c}) / \varepsilon_o \\ \mathbf{n}_e^i \times \mathbf{c} \end{pmatrix} \times \right. \\ \left. \times \exp(i(p - p_e) k n y) \right\} \exp(ik(nx - vt)), \quad (48)$$

переходящими друг в друга при замене знаков у параметров  $p_o$  и  $p_e$ . Как видно из формул (16), (19), при такой замене уравнения  $D_o = 0$  и  $D_e = 0$ , определяющие форму суперпозиций (47) и (48), соответственно, тоже обмениваются местами. Тем не менее уравнения

$$D_o \equiv (c_1 p_o + c_2)(c_1 g - c_2 p_e) + c_3^2 p_o (p_o^2 + 1) = 0, \quad (49)$$

$$D_e \equiv (c_1 p_o - c_2)(c_1 g + c_2 p_e) + c_3^2 p_o (p_o^2 + 1) = 0 \quad (50)$$

не тождественны между собой и, казалось бы, должны задавать две разные полости  $n = n_{o \rightarrow e}(\mathbf{c})$  и  $n = n_{e \rightarrow o}(\mathbf{c})$  поверхности конверсии мод. Однако это не так. Как будет показано ниже, указанные полости сливаются в одну общую поверхность конверсии  $n = n(\mathbf{c})$ .

Искомую поверхность конверсии мод удобно изображать как геометрическое место точек, удаленных от начала координат вдоль каждого  $\mathbf{c}$  на расстояние  $n$ , отвечающее корням уравнений (49) и (50). При этом из физических соображений эта поверхность не должна выходить за пределы области I (22). Докажем, что физические корни уравнений (49), (50), принадлежащие области I, являются общими.

После некоторых преобразований уравнения (49) и (50) могут быть приведены к виду

$$D_{o,e} = \frac{g - p_o p_e}{1 - \gamma} \{f(z) \mp c_1 c_2 (\gamma - 1)\} = 0, \quad (51)$$

где верхний знак отвечает первому индексу, функция  $f(z)$  определена выражением

$$f(z) = \frac{[A(1 - c_2^2)p_o^2 + \gamma c_2^2 + c_3^2](g + p_o p_e)}{[c_1^2 g + c_3^2(p_o^2 + 1)]p_o + c_2^2 p_e}, \quad (52)$$

а  $p_o$ ,  $p_e$  и  $g$  — известные функции (5), (12) переменной  $z = n/\sqrt{\varepsilon_o}$ . Можно показать, что положительная функция  $f(z)$  монотонно убывает в областях своего существования  $0 < z < 1$  (при  $\gamma > 1$ ) или  $0 < z < A/B < 1$  (при  $\gamma < 1$ ). В верхнем пределе она по модулю больше второго члена в правой части (51), т. е.  $f(z_{max}) > |c_1 c_2 (\gamma - 1)|$ , поэтому фигурная скобка в (51) физических корней не имеет. Таким

образом, два сложных иррациональных уравнения (49), (50) сводятся к одному простому:

$$g - p_o p_e = 0. \quad (53)$$

Это значит, что поверхность конверсии мод действительно является однополостной и процессы  $o \rightarrow e$  и  $e \rightarrow o$  отображаются в пространстве одной и той же указательной поверхностью.

В рассматриваемой области изменения переменной  $z = n/\sqrt{\epsilon_o}$  всегда  $g + p_o p_e > 0$ , а также выполняется тождество

$$\begin{aligned} \frac{g - p_o p_e}{1 - \gamma} &= \frac{g^2 - p_o^2 p_e^2}{(1 - \gamma)(g + p_o p_e)} = \\ &= \frac{A^2 [(c_1^2 + c_2^2)z^4 - (c_1^2 + A)z^2 + A(c_1^2 + c_3^2)]}{g + p_o p_e}, \end{aligned} \quad (54)$$

поэтому уравнение (53) оказывается эквивалентным биквадратному уравнению

$$(c_1^2 + c_2^2)z^4 - (c_1^2 + A)z^2 + A(c_1^2 + c_3^2) = 0. \quad (55)$$

Таким образом, мы приходим к достаточно компактному точному аналитическому представлению поверхности конверсии  $n = n(\mathbf{c})$ :

$$\begin{aligned} n = n_{\pm}(\mathbf{c}) &= \left\{ \frac{\epsilon_o}{2(1 - c_3^2)} \times \right. \\ &\times \left. \left[ c_1^2 + A \pm \sqrt{(c_1^2 - A)^2 - 4Ac_2^2 c_3^2} \right] \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (56)$$

на которое, однако, наложено дополнительное условие I (22). Как видно из этого решения, исследуемая поверхность значительно более симметрична, чем конверсионные волновые поля (47), (48). Она инвариантна относительно смены знака любой из компонент вектора  $\mathbf{c}$ , т. е. имеет три взаимно ортогональные плоскости симметрии, совпадающих с координатными плоскостями. Но главное свойство этой поверхности состоит в том, что каждая ее точка описывает два разных конверсионных отражения  $o \rightarrow e$  (47) и  $e \rightarrow o$  (48). Иными словами, справедливо следующее утверждение.

Если в данной геометрии существует двупарциальное отражение волны со сменой полости рефракции (например,  $o \rightarrow e$ ), то при тех же ориентациях границы ( $\theta$ ) и плоскости отражения ( $\varphi$ ) и том же значении индекса рефракции ( $n$ ) должно быть и другое конверсионное отражение ( $e \rightarrow o$ ).

Как показывает анализ, форма поверхности конверсии мод оказывается существенно различной для оптически положительных ( $\gamma > 1$ ) и отрицательных

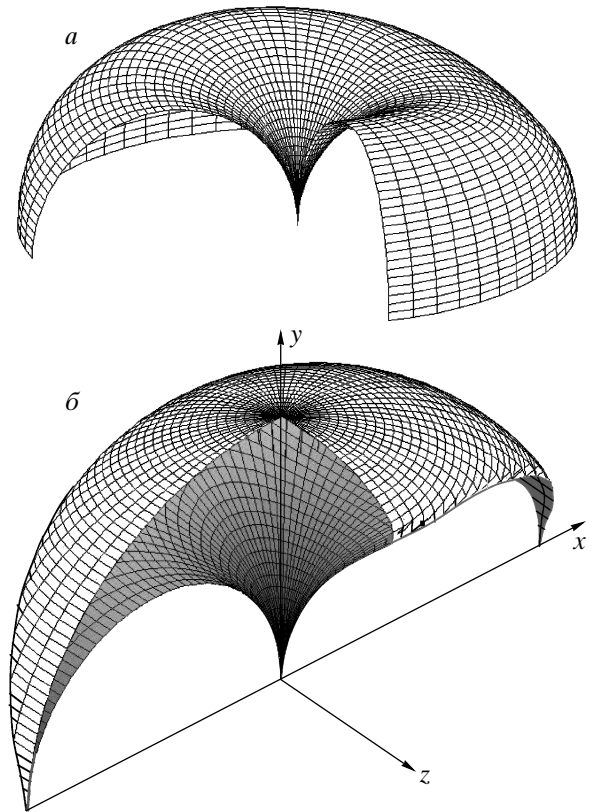


Рис. 4. Поверхности конверсии для оптически положительного кристалла с параметром  $\gamma = 1.5$  (а) и оптически отрицательного кристалла с параметром  $\gamma = 0.8$  (б)

( $\gamma < 1$ ) кристаллов. Это хорошо видно из рис. 4, где поверхность (56) построена численно при  $\gamma = 1.5$  (а) и  $\gamma = 0.8$  (б). Ввиду симметрии показаны только верхние половины ( $c_2 > 0$ ) соответствующих поверхностей, из которых для наглядности вырезаны четвертушки ( $0 < \varphi < \pi/2$ ). Для оптически положительного кристалла поверхность конверсии имеет форму аксиально несимметричного тора, в котором отверстие стянуто в точку, совпадающую с началом координат. Эта поверхность является однослойной в том смысле, что луч вдоль каждого вектора  $\mathbf{c}$  имеет с ней единственное пересечение. Аналогичная поверхность для отрицательного кристалла радикально иная: она двуслойная (луч вдоль  $\mathbf{c}$  встречает ее дважды), при этом верхняя половина поверхности напоминает вытянутый гриб со шляпкой, с двух сторон спускающейся к оси  $x$ , и ножкой, заостряющейся к низу.

Для более детального анализа геометрии поверхностей конверсии указанных двух типов удобно рас-

смотреть их сечения координатными плоскостями  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$  и  $c_3 = 0$ .

**6.2. Сечение поверхности конверсии координатной плоскостью  $c_1 = 0$**

В этом сечении азимут  $\varphi$  фиксирован ( $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ ), а решение (56) принимает вид

$$n = n_{\pm}(\theta) = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{2 \sin^2 \theta} \left( A \pm \sqrt{A(A - \sin^2(2\theta))} \right)},$$

$$A = 1 + (\gamma - 1) \sin^2 \theta. \tag{57}$$

При этом в соответствии с условием I (22) замкнутые кривые  $n = n_{\pm}(\theta)$  не должны выходить за пределы круга:

$$n \leq \min \{ \sqrt{\varepsilon_o}, \sqrt{\varepsilon_e} \}. \tag{58}$$

Нетрудно проверить, что для оптически положительных кристаллов ( $\gamma > 1$ ) при любых углах  $\theta$  величина  $n_+$  лежит за пределами области (58), т.е.  $n_+(\theta) > \sqrt{\varepsilon_o}$ , а величина  $n_-$ , напротив, принадлежит этой области при всех  $\theta$ :  $n_-(\theta) < \sqrt{\varepsilon_o}$ . Таким образом, при  $\gamma > 1$  корень  $n_+$  должен быть отброшен — это и объясняет однослойность поверхности конверсии плоскостью  $c_1 = 0$  имеет форму

$$n = n_-(\theta) = \sqrt{\frac{\varepsilon_o A}{2 \sin^2 \theta} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2(2\theta)}{A}} \right)}. \tag{59}$$

Любопытно, что с ростом параметра  $\gamma = \varepsilon_e/\varepsilon_o$  (с повышением анизотропии кристалла) решение (59) стремится к предельной функции, не зависящей от  $\gamma$ :

$$n \approx n_{-}^{\gamma \gg 1}(\theta) = \sqrt{\varepsilon_o} |\cos \theta|, \tag{60}$$

и изображаемой двумя окружностями радиуса  $\sqrt{\varepsilon_o}/2$ , касающимися друг друга в начале координат с общей касательной вдоль оси  $y$  (см. рис. 5а). Впрочем, большинство кристаллов характеризуются не большой, а скорее малой анизотропией, когда  $\gamma - 1 \ll 1$  и решение (59) близко к другой предельной функции:

$$n \approx n_{-}^{\gamma \approx 1}(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon_o}, & |\theta| \leq \pi/4, \\ \sqrt{\varepsilon_o} |\operatorname{ctg} \theta|, & |\theta| \geq \pi/4, \end{cases} \tag{61}$$

которая в области  $|\theta| \leq \pi/4$  совпадает с большой окружностью  $\hat{n}_o(\theta) = \sqrt{\varepsilon_o}$ , а вблизи начала координат приближается к малым окружностям (60) (см.

рис. 5а). Как видно из того же рисунка, кривые  $n(\theta)$ , отвечающие значениям  $\gamma = 4$  и  $\gamma = 1.1$ , действительно имеют тенденцию стремления к предельным кривым (60), (61).

В случае оптически отрицательного кристалла ( $\gamma < 1$ ) отнюдь не любые ориентации вектора  $\mathbf{s}$  удовлетворяют требованию вещественности выражения (57) и условию (58), которое теперь сводится к неравенству  $n_{\pm} \leq \hat{n}_e = \sqrt{\varepsilon_e}$ . С другой стороны, в этом случае в области разрешенных углов  $\theta$  верны обе ветви решения (57),  $n_-(\theta)$  и  $n_+(\theta)$ , так что поверхность становится двухслойной. Естественно, при этом конфигурация сечения поверхности конверсии существенно отличается от конфигурации в рассмотренном выше случае  $\gamma > 1$  (см. сечения  $c_1 = 0$  на рис. 5б).

Рассмотрим теперь выражение (57) в частном случае малой анизотропии  $0 < 1 - \gamma \ll 1$ , что, как уже говорилось, практически реализуется в большинстве кристаллов. Формально указанное решение очень похоже на (61):

$$n \approx n_{\pm}(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon_o}, & |\theta| \geq \pi/4, \\ \sqrt{\varepsilon_o} |\operatorname{ctg} \theta|, & |\theta| \leq \pi/4. \end{cases} \tag{62}$$

Однако на этот раз предельное решение существует лишь в области  $|\theta| \geq \pi/4$ , где внутренняя ветвь  $n_-(\theta)$  повторяет выражение (61). При  $|\theta| = \pi/4$  опять происходит переход на большую окружность (рис. 5б), но не вниз, как в (61), а вверх — на внешнюю ветвь  $n_+(\theta)$ . Здесь следует оговориться, что с нашей точностью нулевого приближения по параметру  $1 - \gamma$  мы не отличаем в (62)  $\varepsilon_o$  от  $\varepsilon_e$ . Однако можно показать, что учет следующих членов разложения обеспечивает выполнение неравенства  $n_{\pm} \leq \hat{n}_e = \sqrt{\varepsilon_e}$ .

Отметим попутно еще одно важное для дальнейшего обстоятельство. Как показывает проверка, кривизна рассматриваемого сечения  $c_1 = 0$  для отрицательного кристалла в верхней и нижней точках ( $\theta = \pm\pi/2$ ) во всей области  $0 < \gamma < 1$  остается положительной.

**6.3. Сечения поверхности конверсии плоскостями чистого отражения и их физический смысл**

Любопытно, что исследуемая поверхность конверсии пересекается и с двумя другими координатными плоскостями  $c_3 = 0$  и  $c_2 = 0$ , которые, как мы знаем, являются плоскостями чистого отражения. Физическая интерпретация парадоксального со-

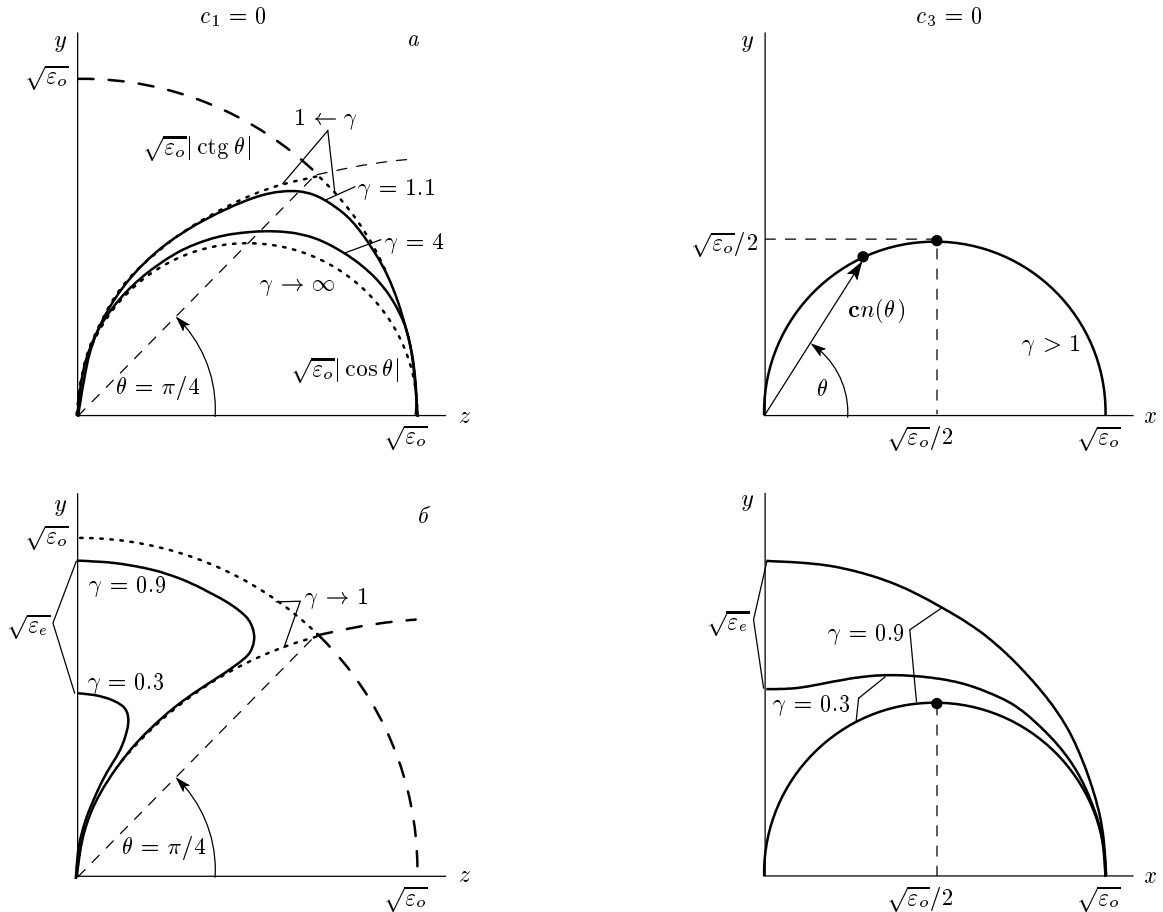


Рис. 5. Сечение поверхностей конверсии  $n(c)$  плоскостями  $c_1 = 0$  и  $c_3 = 0$  для оптически положительных (а) и оптически отрицательных (б) кристаллов (с учетом симметрии поверхностей  $n(c)$  относительно координатных плоскостей область изображения ограничена интервалом  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ )

существования столь «антагонистических» мод отражения будет дана ниже.

### 6.3.1. Сечение $c_3 = 0$ ( $\varphi = 0, \varphi = \pi$ )

В координатной плоскости  $c_3 = 0$  уравнения (49) и (50), факторизуясь, упрощаются, хотя выглядят различными. Впрочем, с учетом тождества

$$c_1 g \pm c_2 p_e = \frac{p_e (c_1^2 p_o^2 - c_2^2)}{c_1 p_e \mp c_2 \gamma / A}, \quad (63)$$

справедливого при  $c_3 = 0$ , в этой плоскости оба уравнения (49) и (50) приводятся к виду

$$p_e (c_1^2 p_o^2 - c_2^2) = 0. \quad (64)$$

Первый из корней этого уравнения, отвечающий требованию  $p_e = 0$  и равный

$$n = \hat{n}_e(\theta) = \sqrt{\epsilon_o \cos^2 \theta + \epsilon_e \sin^2 \theta}, \quad (65)$$

принадлежит области I (22) (являясь ее границей) лишь при  $\gamma < 1$ . Речь идет об однопарциальном собственном решении (38), которое при определенных малых возмущениях геометрии задачи может превратиться в двупарциальную суперпозицию, отвечающую либо чистому отражению при скользком падении, либо конверсионному отражению. В последнем случае к слабозмущенной исходной компоненте необыкновенного типа подмешивается с малой амплитудой обыкновенная объемная волна (падающая или отраженная).

Для оптически положительных кристаллов ( $\gamma > 1$ ) решение (65) находится за пределами области I (22), ограниченной окружностью радиуса  $n = \hat{n}_o = \sqrt{\epsilon_o}$ , и является посторонним, поскольку при  $n > \hat{n}_o$  параметр  $p_o$  — чисто мнимая величина и рассматриваемый особый объемный поляритон ни при каком малом возмущении в конверсионное

отражение превратиться не может (т.е. (65) не является частью поверхности конверсии).

Обращение в нуль двух других факторов в уравнении (64),  $c_1 p_o - c_2 = 0$  и  $c_1 p_o + c_2 = 0$ , приводит к объединенному решению:

$$n = \sqrt{\varepsilon_o} |\cos \theta|, \quad \varphi = 0, \pi. \quad (66)$$

Оно совпадает с асимптотическим решением (60) в сечении  $c_1 = 0$  и имеет весьма простое графическое изображение в полярных координатах  $(n, \theta)$  в виде двух окружностей радиуса  $\sqrt{\varepsilon_o}/2$ , симметричных относительно координатных осей  $x, y$  и касающихся друг друга в начале координат (см. сечение  $c_3 = 0$  на рис. 5а). Таким образом, при больших  $\gamma$  поверхность конверсии имеет одинаковые круговые сечения в плоскостях  $c_1 = 0$  и  $c_3 = 0$ . Проверка показывает, что при  $\gamma \gg 1$  любые другие сечения поверхности конверсии плоскостями, проходящими через ось  $y$ , описываются тем же уравнением (66). Иными словами, соответствующая предельная поверхность  $n(c)$  должна иметь форму идеального кругового тора.

Нетрудно убедиться, что пара окружностей (66) целиком принадлежит области I (22) при любых  $\gamma$ . Для оптически положительных кристаллов ( $\gamma > 1$ ) это тривиально вытекает из сравнения выражения (66) с равенством  $\hat{n}_o = \sqrt{\varepsilon_o}$  (см. (20)). Но и для оптически отрицательных кристаллов ( $\gamma < 1$ ), для которых условие I (22) сводится к более обязывающему неравенству  $n < \hat{n}_e(\theta)$ , оно выполняется при любых  $\theta$ , что становится очевидным, если записать это условие в виде

$$\sqrt{\varepsilon_o} |\cos \theta| < \sqrt{\varepsilon_o \cos^2 \theta + \varepsilon_e \sin^2 \theta}. \quad (67)$$

Конечно, при  $\gamma < 1$  решение (66) должно быть дополнено полученным выше корнем (65), что находится в соответствии с двуслойностью поверхности конверсии. Как видно из рис. 5б ( $c_3 = 0$ ), внешняя часть сечения, описываемая функцией (65), меняет знак кривизны в верхней и нижней точках ( $\theta = \pm\pi/2$ ) при переходе параметром  $\gamma$  некоторого критического значения  $\gamma_0$ . Простой расчет дает для параметра нулевой кривизны значение  $\gamma_0 = 1/2$ . Как мы видели, для оптически отрицательных кристаллов в сечении  $c_1 = 0$  в окрестности того же направления кривизна остается универсально положительной при любых  $\gamma$ . Это значит, что поверхность конверсии в направлении  $\mathbf{c} \parallel y$  сохраняет выпуклость лишь при  $1/2 < \gamma < 1$ , а в области  $0 < \gamma < 1/2$  имеет седловую точку.

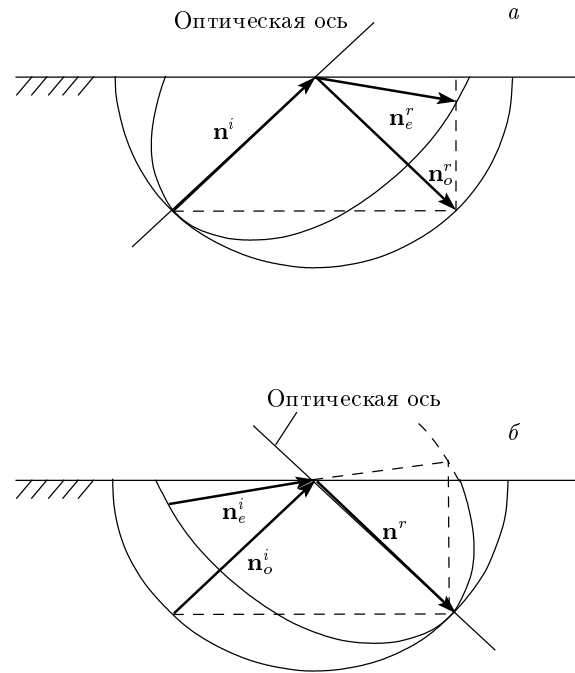


Рис. 6. Двупарциальные отражения в плоскости  $c_3 = 0$  при совпадении падающей (а) и отраженной (б) волны с оптической осью

Физический смысл решений (65) и (66) существенно различен. В отличие от пограничного однопарциального решения, отвечающего (65), уравнение (66) задает двупарциальное отражение, которое, однако, имеет свою специфику. Условие  $c_3 = 0$  означает, что оптическая ось принадлежит плоскости падения, а отражения, описываемые уравнением (66), соответствуют двум конкретным ситуациям, когда направление либо падающей, либо отраженной волны совпадает с оптической осью (см. рис. 6). В первом случае удовлетворяется уравнение  $c_1 p_o - c_2 = 0$ , во втором — уравнение  $c_1 p_o + c_2 = 0$ . Такого рода двупарциальные отражения, одна из компонент которых принадлежит обеим полостям рефракции, в каком-то смысле являются одновременно и чистыми, и конверсионными. Поэтому пересечение поверхности конверсии с плоскостью  $c_3 = 0$  по линиям (66) не содержит в себе никакого парадокса.

Как видно из рис. 6а, при фиксированном индексе рефракции  $n$ , отвечающем волне, падающей вдоль оптической оси, могут реализоваться две разные двупарциальные комбинации. Они различаются выбором одной отраженной волны из двух возможных, которые принадлежат разным полостям рефракции и имеют различные как направления распространения, так и поляризации. Для этого требу-

ется лишь подобрать соответствующим образом поляризацию волны, падающей вдоль оптической оси. Как известно, в подобных вырожденных направлениях кристалл допускает распространение волн с поляризацией, произвольно ориентированной в плоскости ортогональной оптической оси. В частности, в этом направлении может быть брошена на поверхность и волна с поляризацией, отличной от двух возможных значений, отвечающих упомянутым выше двупарциальным отражениям. В таком случае в кристалле реализуется обычное трехпарциальное отражение.

Точно так же волне, отраженной вдоль оптической оси (рис. 6б), может сопутствовать любая из двух возможных падающих волн, отвечающих одному и тому же фактору  $n$  (66). При этом кристалл сам выберет такую поляризацию отраженной вырожденной волны, чтобы совокупная суперпозиция двупарциального отражения удовлетворяла граничному условию (9).

При определенных малых возмущениях геометрии отражения, показанной на рис. 6, очевидно, можно получить четыре разных двупарциальных отражения: два чистых  $o \rightarrow o$  и  $e \rightarrow e$  и два конверсионных  $o \rightarrow e$ ,  $e \rightarrow o$ . Это окончательно снимает парадокс удивительного сосуществования в плоскости  $c_3 = 0$  чистых и конверсионных отражений.

### 6.3.2. Сечение $c_2 = 0$ ( $\theta = 0$ )

В координатной плоскости  $c_2 = 0$  уравнения (49) и (50) опять совпадают:

$$p_o(p_o^2 + c_3^2) = 0. \quad (68)$$

Уравнение (68) имеет единственное решение  $p_o = 0$ , т. е.

$$n = \hat{n}_o = \sqrt{\varepsilon_o}, \quad (69)$$

отвечающее однопарциальной собственной волне (36) обыкновенного типа. При  $\gamma > 1$  окружность (69) является границей области I (22). Особый объемный поляритон (36) был нами ранее получен с помощью предельного перехода к скользящему падению  $n \rightarrow \hat{n}_o$  на семействе чистых отражений. При обратном возмущении индекса рефракции  $n \leftarrow \hat{n}_o$  с сохранением оптической оси в плоскости  $c_2 = 0$  поляритон (36), естественно, вновь расщепляется в двупарциальное решение, отвечающее чистому отражению. Однако при определенных согласованных возмущениях ориентации оптической оси и индекса  $n$ , отвечающих перемещению по поверхности конверсии, тот же обыкновенный

поляритон, слегка искажившись, присоединит к себе с малой амплитудой необыкновенную компоненту (падающую или отраженную), что и соответствует конверсии отражения.

В оптически отрицательном кристалле ( $\gamma < 1$ ) окружность (69) лежит за пределами области I (22), за исключением двух ее точек на пересечении с осью  $x$  (где «шляпка гриба» на рис. 4б касается «земли»). В последнем случае речь идет об объемном поляритоне, распространяющемся вдоль оптической оси, параллельной  $x$ , и характеризуемом параметрами (40). Те же точки видны также на сечении  $c_3 = 0$  (см. рис. 5б).

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в оптически одноосном кристалле с металлизированной границей и положительно определенным тензором диэлектрической проницаемости могут реализоваться четыре возможных типа волновых электромагнитных полей.

1) *Трехпарциальные отражения общего положения* (см. уравнения (14), (18)). Геометрически множество отражений общего положения занимает два домена в трехмерном пространстве, образованном ориентациями оптической оси  $\mathbf{c}$  и скалярным индексом рефракции  $n(\mathbf{c})$  (задающим угол падения). При произвольном направлении  $\mathbf{c}$  эти домены заданы условиями I и II (22). В области I (22) все три парциальные волны объемны — падающая и две отраженные, причем последние принадлежат разным полостям поверхности рефракции. В области II (22) одна из отраженных волн превращается в неоднородную компоненту, локализованную у поверхности. В результате в области II получаем трехпарциальный аналог чистого отражения, когда имеются две объемные волны, падающая и отраженная, принадлежащие одной и той же полости поверхности рефракции. В оптически положительном кристалле ( $\gamma > 1$ ) в области  $\hat{n}_o < n < \hat{n}_e(\mathbf{c})$  обе волны необыкновенные, а в оптически отрицательном кристалле ( $\gamma < 1$ ) в области  $\hat{n}_e(\mathbf{c}) < n < \hat{n}_o$  они обе обыкновенные (см. уравнения (20) и рис. 2).

2) *Двупарциальные чистые отражения* (см. решения (26)–(28) и (31)–(33)). Поверхность чистых отражений в пространстве  $\{\mathbf{c}, n\}$  задана совокупностью плоскостей  $c_2 = 0$  и  $c_3 = 0$ , отвечающих оптической оси, параллельной либо границе кристалла, либо плоскости падения. В этих случаях любая волна, обыкновенная или необыкновенная, порождает только одну отраженную волну, принадлежащую

той же полости рефракции, что и падающая. При этом угол падения на границу в обоих случаях оказывается произвольным, что отвечает соответственно континуумам  $n \leq \hat{n}_o$  или  $n \leq \hat{n}_e(\mathbf{c})$ .

3) *Двупарциальные конверсионные отражения* (см. уравнение (56)). Падающая и отраженная волны принадлежат разным полостям поверхности рефракции. Поверхности конверсионных отражений в том же пространстве  $\{\mathbf{c}, n\}$  значительно сложнее, чем для чистых отражений, и существенно различаются для оптически положительных и отрицательных кристаллов (рис. 4). В отличие от плоскостей чистого отражения, где индекс  $n$  лишь ограничен сверху, поверхности конверсии описывают отражения, в которых каждой ориентации оптической оси  $\mathbf{c}$  отвечают фиксированные значения индекса рефракции  $n$  — одно при  $\gamma > 1$  или два при  $\gamma < 1$ .

4) *Однопарциальные объемные поляритоны*, переносящие энергию параллельно металлизированной поверхности. На поверхности кристалла, содержащей оптическую ось, это поляритоны обыкновенного типа, которые разрешены для любого направления распространения. Впрочем, объемные поляритоны (необыкновенные) могут существовать и на границе, произвольно ориентированной относительно оптической оси, но лишь в одном направлении — вдоль проекции оптической оси на данную поверхность. Как показано в п. 5.3, указанные линии решений  $c_2 = 0, n = \hat{n}_o$  и  $c_3 = 0, n = \hat{n}_e$  для однопарциальных волн соответственно, обыкновенной (36) и необыкновенной (38), исчерпывают спектр собственных решений в рассматриваемом полупространстве.

Нетривиальным обстоятельством является то, что поверхности конверсионных и чистых отражений пересекаются. Это происходит, когда либо падающая, либо отраженная волна распространяется вдоль оптической оси (см. уравнение (66) и рис. 6), а также на линиях решений (65) и (69) для особых объемных поляритонов. Факт пересечения поверхностей конверсионных и чистых отражений по линиям этих собственных решений указывает на существование непрерывного перехода к ним не только от чистых отражений при стремлении к скользящему падению, но и от конверсионных отражений путем постепенного уменьшения до нуля одной из компонент волнового пакета.

Как мы видели, условия существования как чистых отражений, так и объемных поляритонов не зависят от того, является ли кристалл оптически положительным или отрицательным. Этот результат представляется довольно естественным, поскольку речь идет о волновых модах, которые существуют

в пределах одной полости рефракции и ничего не «знают» о второй полости. С другой стороны, конверсионные отражения строятся на волновых суперпозициях компонент, принадлежащих обоим полостям рефракции. Именно поэтому топология поверхностей конверсии для положительных и отрицательных кристаллов существенно разная.

Заметим, что изученные волновые моды, их свойства и сопутствующие явления всецело обусловлены металлизацией границы. При открытой границе с диэлектрической средой (вакуумом) волновое поле в кристалле с необходимостью сопровождается полем в прилегающей среде. Это радикально изменяет задачу не только в плане сложности описания определенных объектов или свойств, но и в смысле самого их существования.

Предполагаемое нами полное «запирание» электромагнитных полей в кристалле сохраняется до тех пор, пока толщина  $h$  металлического покрытия существенно превышает характерную глубину  $d$  проникновения волнового поля в металл ( $h \gg d$ ). Глубина проникновения  $d$ , в свою очередь, обратно пропорциональна мнимой части показателя преломления металла (оценки для ряда металлов приведены в работе [11]). Например, для меди в диапазоне длин волн  $\lambda = 10^{-5} - 10^{-3}$  см, перекрывающем интервал от ультрафиолетовой до инфракрасной области, глубина проникновения  $d$  изменяется в пределах одного порядка:  $d \approx 6 \cdot (10^{-8} - 10^{-7})$  см, оставаясь малой величиной по сравнению с длиной волны, т. е.  $d \ll \lambda$ . Таким образом, условие  $h \gg d$  несложно обеспечить.

Отметим также, что для экспериментальной реализации таких эффектов как двупарциальные отражения необходимо использовать хорошо сколлимированные и соответствующим образом поляризованные волновые пучки. Особенно высокие требования к коллимации и ориентации падающего пучка возникают при специальных конверсионных отражениях вблизи резонансного возбуждения особого объемного поляритона, когда отраженная волна распространяется почти параллельно поверхности. Как показывают оценки, оптимизация последнего процесса предполагает минутную точность юстировки ориентации падающего пучка.

Исследованные нами волновые моды и явления, такие как объемные поляритоны и двупарциальные отражения, не являются специфическими для оптики одноосных кристаллов. Как показывает предварительный анализ, линии решений для объемных поляритонов и поверхности чистых и конверсионных отражений должны существовать и в оптически двухосных кристаллах с металли-

зированной поверхностью. На это указывают и известные аналогии из акустики кристаллов. Так, в работе [12] доказана теорема существования линий решений для особых (exsertional) объемных акустических волн в полубесконечных упругих средах произвольной анизотропии. Применительно к акустике триклинных кристаллов найдены также уравнения поверхностей чистых отражений [13, 14]. Наконец, конверсионные отражения акустических волн описаны в работе [15] на примере гексагональных кристаллов.

Авторы признательны Т. Г. Головиной за помощь в проведении численных расчетов. Работа выполнена в рамках договора о сотрудничестве между Институтом кристаллографии РАН и Технологическим университетом Кельце (Польша). В. И. А. поддержан Польско-Японским институтом информационных технологий (Варшава) (грант № PJ/МКТ/02/2006).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ЖЭТФ **128**, 904 (2005).
2. A. N. Furs and L. M. Barkovsky, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. **1**, 109 (1999).
3. Ф. Н. Марчевский, В. Л. Стрижевский, С. В. Стрижевский, ФТТ **26**, 501 (1984).
4. М. И. Дьяконов, ЖЭТФ **94**(4), 119 (1988).
5. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ФТТ **44**, 371 (2002); **44**, 1895 (2002).
6. *Поверхностные поляритоны. Электромагнитные волны на поверхностях и границах раздела*, сб. статей под ред. В. М. Аграновича и Д. Л. Миллса, Наука, Москва (1985).
7. Н. Л. Дмитрук, В. Г. Литовченко, В. Л. Стрижевский, *Поверхностные поляритоны в полупроводниках и диэлектриках*, Наукова думка, Киев (1989).
8. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, Л. А. Шувалов, ФТТ **43**, 1322 (2001).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
10. Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов, *Отражение и преломление света прозрачными кристаллами*, Наука и техника, Минск (1976).
11. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).
12. В. И. Альшиц, Е. Лоте, Кристаллография **24**, 1122 (1979).
13. L. Wang and J. Lothe, Wave Motion **16**, 89 (1992).
14. J. Lothe and L. Wang, Wave Motion **21**, 163 (1995).
15. В. Н. Любимов, В. И. Альшиц, Кристаллография **27**, 851 (1982).