

ДВУХЖИДКОСТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА: НОВЫЕ АСПЕКТЫ

*А. Ф. Андреев, Л. А. Мельниковский**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 июня 2006 г.

Рассмотрен ряд объектов, допускающих двухжидкостное описание. 1) Сверхтекучие ${}^4\text{He}$ и раствор ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$; в этих системах найден новый аддитивный интеграл движения, изучены общие условия термодинамической устойчивости, обобщающие критерий сверхтекучести Ландау на конечные температуры, и построена теория критических скоростей сверхтекучего движения. 2) Двухкомпонентная система, состоящая из решетки и газа квазичастиц; для нее построена двухскоростная теория упругости, позволяющая объяснить линейный рост гладких граней кристаллического гелия. 3) Сверхтекучая жидкость в однородном поле тяжести, уравнения гидродинамики которой можно получить, используя принцип эквивалентности; с их помощью оказывается возможным исследовать диссипативную теплопередачу в сверхтекучей жидкости в поле тяжести Земли.

PACS: 67.40.Bz, 67.40.Kh, 67.57.Bc, 68.35.Ct, 67.40.Hf

1. ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с общими принципами статистической физики [1] термодинамические (и гидродинамические) свойства системы определяются ее аддитивными интегралами движения. Для «обычных» нормальных систем существуют три независимых локальных закона сохранения: массы, энергии и импульса. Уравнения гидродинамики обычной жидкости однозначно следуют из этих законов сохранения, фактически их вывод сводится к выяснению вида потоков массы, энергии и импульса.

В сверхтекучей жидкости (будем говорить о сверхтекучести в ${}^4\text{He}$) появляется еще один интеграл движения — сверхтекучая скорость. Появление дополнительной переменной приводит к усложнению уравнений гидродинамики и к такому наблюдаемому явлению, как, например, появление двух видов звуковых волн в He II . Термодинамика сверхтекучей жидкости тоже отличается от обычной, ее изучению посвящен разд. 2. В частности, там выводятся термодинамические неравенства для этой системы, являющиеся естественным обобщением критерия сверхтекучести Ландау для конечных температур.

В некоторых системах появление дополнитель-

ной переменной связано с существованием приближенного закона сохранения в однородной системе. Примером может служить кристалл с газом квазичастиц в пренебрежении процессами переброса. Угадать вид дополнительного интеграла движения в этой системе из общих соображений не представляется возможным, поэтому для вывода общих уравнений двухскоростной теории упругости приходится привлекать кинетическую теорию (разд. 3). На основе полученных уравнений оказывается возможным объяснить линейный рост кристаллов гелия с гладкими гранями и предсказать ряд необычных явлений.

Ни один из описанных подходов, вообще говоря, неприменим для системы, находящейся во внешнем поле: законы сохранения в таком случае должны включать и переменные, относящиеся к среде, и переменные, относящиеся к полю. Если попытаться исправить законы сохранения и добавить в них члены, связанные с полем, вид диссипативных членов все равно остается неопределенным: во внешнем поле даже в состоянии равновесия система, вообще говоря, неоднородна. Существует, однако, ситуация, когда эту проблему можно обойти: как известно, включение гравитационного поля эквивалентно переходу в систему отсчета, движущуюся с ускорением. В разд. 4 проводится описанная процедура.

*E-mail: leva@kapitza.ras.ru

Из полученных уравнений видно, что в поле тяжести сверхтекучий гелий характеризуется конечной эффективной теплопроводностью.

2. ТЕРМОДИНАМИКА He II ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

Характерной особенностью сверхтекучей жидкости является одновременное существование двух независимых типов движения. Ее равновесное состояние, таким образом, характеризуется двумя скоростями этих движений. Как уже отмечалось во Введении, термодинамически равновесное состояние системы должно однозначно определяться значениями ее аддитивных интегралов движения. Интегралом движения, соответствующим одной из этих скоростей (скорости «нормальной компоненты»), так же как и в обычной гидродинамике, является импульс.

То, что сверхтекучая скорость оказывается термодинамической переменной, означает появление дополнительного интеграла движения. Этот интеграл может быть найден в явном виде, что позволяет исследовать общие условия термодинамической устойчивости сверхтекучей жидкости и решить проблему критических скоростей [2].

Как известно, гелий II теряет свойство сверхтекучести при достаточно больших скоростях движения. Само существование критической скорости следует из формы энергетического спектра элементарных возбуждений: при больших скоростях нарушается критерий сверхтекучести Ландау. Экспериментально наблюдаемое разрушение сверхтекучести обычно связано с рождением вихрей и происходит при нарушении условия Фейнмана, т. е. при скоростях, значительно меньших, чем критическая скорость Ландау. Поэтому в уравнениях сверхтекучей гидродинамики достаточно ограничиться первыми исчезающими членами в разложении по степеням малых скоростей.

Однако существует ряд экспериментов [3, 4], где это приближение неприменимо. В некоторых из них изучается сверхтекучее движение сквозь узкие отверстия. В этих условиях максимальная скорость является убывающей функцией ширины отверстия и при достаточно малом сечении может достигать значений порядка критической скорости Ландау. Другой тип экспериментов относится к температурам, чрезвычайно близким к фазовому переходу в нормальное состояние. В этой области линейное приближение нарушается при низких скоростях, значитель-

но меньших, чем критическая скорость Фейнмана (которая от температуры не зависит).

Таким образом, все термодинамические величины становятся нетривиальными функциями не малых сверхтекучих скоростей (т. е. они зависят не только от обычных термодинамических переменных, таких как давление и температура). В такой общей постановке, не делая никаких предположений о малости скоростей (используя только изотропию покоящейся жидкости), мы находим (п. 2.1) полный набор термодинамических неравенств, т. е. условий, налагаемых на термодинамические функции требованием устойчивости сверхтекучего состояния. При этом естественным оказывается (п. 2.2), например, обращение в нуль сверхтекучей плотности в λ -точке.

В рамках фононно-ротонной модели (п. 2.3) мы вычисляем максимальную скорость, совместную с полученными термодинамическими неравенствами, и показываем, что ее можно интерпретировать как обобщение критической скорости Ландау на конечные температуры. Такой термодинамический сценарий разрушения сверхтекучести, возможно, имеет место в экспериментах по определению критических скоростей в узких отверстиях и критических теплоток вблизи T_λ . Для оценки поведения критической скорости в окрестности λ -точки мы используем соображения теории масштабной инвариантности (п. 2.4).

2.1. Устойчивость

При выводе общих уравнений сверхтекучей гидродинамики обычно предполагается [5], что каждый малый элемент жидкости находится в локальном равновесии и это равновесие устойчиво. Такое условие устойчивости обычно записывают в виде термодинамических неравенств. Для устойчивости состояния необходимо, чтобы оно реализовывало максимум (по меньшей мере локальный) энтропии для замкнутой системы, т. е. при постоянных значениях аддитивных интегралов движения. Вместо исследования условий максимальной энтропии оказывается более удобным [1] использовать эквивалентное условие — условие минимальности полной энергии системы при постоянных энтропии и аддитивных интегралах движения.

В несверхтекучей системе существует три аддитивных интеграла движения: масса, энергия и импульс. Явление сверхтекучести связано со спонтанным нарушением калибровочной инвариантности. При этом система обладает особым квантовомеханическим параметром порядка — волновой функцией

бозе-эйнштейновского конденсата. С его существованием связано наличие двух независимых скоростей нормального и сверхтекучего движения. Сверхтекучая скорость (с точностью до постоянного множителя) — это градиент фазы волновой функции $\mathbf{v}_s = \nabla\phi$. Аналогичное соотношение можно записать для производной по времени $\dot{\mathbf{v}}_s = \nabla\dot{\phi}$. Последнее уравнение, очевидно, является локальным законом сохранения всех трех компонент вектора $\mathbf{V}_s = \int \mathbf{v}_s d^3r$. Действительно,

$$\dot{v}_s^i = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^j} (\delta^{ij} \dot{\phi}).$$

Другими словами, \mathbf{V}_s — это добавочный аддитивный интеграл движения, специфический для сверхтекучей жидкости.

Полную энергию жидкости E_{tot} можно представить в виде интеграла от плотности энергии E по всему объему: $E_{tot} = \int E d^3r$. Эту плотность энергии можно получить при помощи преобразования Галилея:

$$E = \frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{j}_0 + E_0. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v}_s — сверхтекучая скорость, ρ — плотность массы, а индекс «0» используется для обозначения величин, измеренных в системе отсчета, связанной со сверхтекучей компонентой (т.е. системы, в которой сверхтекучая скорость равна нулю). Таким образом, E_0 и \mathbf{j}_0 — это плотность энергии и плотность импульса относительно сверхтекучей компоненты. Первая величина является функцией ρ , \mathbf{j}_0 и плотности энтропии S . Дифференциал E_0 можно записать в виде

$$dE_0 = T dS + \mu d\rho + \mathbf{w} \cdot d\mathbf{j}_0, \quad (2)$$

а соответствующие частные производные T , μ и \mathbf{w} имеют смысл температуры, химического потенциала и так называемой относительной скорости нормальной и сверхтекучей компонент.

Изотропия жидкости позволяет получить полезное соотношение для частных производных \mathbf{j}_0 по \mathbf{w} :

$$\left(\frac{\partial j_0^k}{\partial w^l}\right)_{T,\rho} = \frac{w^k w^l}{w^2} \left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho} + \left(\frac{\delta^{kl}}{w} - \frac{w^k w^l}{w^3}\right) j_0. \quad (3)$$

Действительно, скорость \mathbf{w} и плотность импульса \mathbf{j}_0 параллельны друг другу:

$$\mathbf{j}_0 \equiv j_0(T, \rho, w) \frac{\mathbf{w}}{w}.$$

Дифференцируя это тождество, получаем равенство (3).

Далее, преобразовывая (1) и используя (2), можно записать dE в виде

$$dE = T dS + \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_n\right) d\rho + (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \cdot d\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_n \cdot d\mathbf{j}, \quad (4)$$

где $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0$ — полная плотность импульса, а $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_s + \mathbf{w}$ — нормальная скорость.

Устойчивость предполагает, что любая «разрешенная» флуктуация увеличивает полную энергию системы E_{tot} . При этом разрешенными являются достаточно быстро убывающие на бесконечности флуктуации, которые оставляют неизменными сохраняющиеся величины. Это означает, что минимальность E_{tot} нужно исследовать при постоянных энтропии и всех аддитивных интегралах движения: массы, импульса и сверхтекучей скорости.

Рассмотрим макроскопическую флуктуацию всех переменных δS , $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}_s$ и $\delta\mathbf{j}$. Сохранение этих величин обеспечивает тождественное равенство нулю первой вариации полной энергии однородной системы:

$$\delta E_{tot} = \int \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{\rho, \mathbf{v}_s, \mathbf{j}} \delta S + \left(\frac{\partial E}{\partial \rho}\right)_{S, \mathbf{v}_s, \mathbf{j}} \delta \rho + \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}_s}\right)_{S, \rho, \mathbf{j}} \delta \mathbf{v}_s + \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{j}}\right)_{S, \rho, \mathbf{v}_s} \delta \mathbf{j} \right\} d^3r \equiv 0.$$

Для выяснения характера экстремума необходимо рассмотреть вторую вариацию полной энергии. Матрица 8×8 квадратичной формы второй вариации — это якобиан

$$\mathfrak{H} = \left\| \frac{\partial(T, \mathbf{v}_n, \mu + v_s^2/2 - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_n, \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n)}{\partial(S, \mathbf{j}, \rho, \mathbf{v}_s)} \right\|.$$

Он положительно определен (в соответствии с критерием Сильвестра), если все главные миноры M_1, M_2, \dots, M_8 положительны. Мы последовательно проверяем условия на эти миноры.

1. Первое условие,

$$M_1 = \frac{\partial(T, \mathbf{j}, \rho, \mathbf{v}_s)}{\partial(S, \mathbf{j}, \rho, \mathbf{v}_s)} = \frac{\partial(T, \mathbf{j}, \rho, \mathbf{v}_s)}{\partial(T, \mathbf{v}_n, \rho, \mathbf{v}_s)} \frac{\partial(T, \mathbf{v}_n, \rho, \mathbf{v}_s)}{\partial(S, \mathbf{j}, \rho, \mathbf{v}_s)} = \left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho} \times \left(\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\rho, w} \left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho} - \left(\frac{\partial j_0}{\partial T}\right)_{\rho, w}^2 \right)^{-1} > 0,$$

является обобщением обычного требования положительности теплоемкости. Ниже будет показано (7), что $(\partial j_0/\partial w)_{T,\rho} > 0$, таким образом последнее неравенство фактически имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\rho,w} \left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho} - \left(\frac{\partial j_0}{\partial T}\right)_{\rho,w}^2 > 0. \quad (5)$$

2. Положительность следующей группы миноров легко проверить при помощи преобразования

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}' &= \left\| \frac{\partial(T, \mathbf{v}_n, \rho, \mathbf{v}_s)}{\partial(S, \mathbf{j}, \rho, \mathbf{v}_s)} \right\| = \\ &= \left\| \frac{\partial(T, \mathbf{j}, \rho, \mathbf{v}_s)}{\partial(S, \mathbf{j}, \rho, \mathbf{v}_s)} \right\| \left\| \frac{\partial(T, \mathbf{v}_n, \rho, \mathbf{v}_s)}{\partial(T, \mathbf{j}, \rho, \mathbf{v}_s)} \right\|. \quad (6) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что положительность миноров M_2, M_3, M_4 будет обеспечена в том и только том случае, если положительны все миноры второго множителя в (6):

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{v}_n}\right)_{T,\rho,\mathbf{v}_s} \right\|^{-1} &= \left\| \left(\frac{\partial j_0}{\partial \mathbf{w}}\right)_{T,\rho} \right\|^{-1} = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} (\partial j_0/w)_{T,\rho} & 0 & 0 \\ 0 & j_0/w & 0 \\ 0 & 0 & j_0/w \end{pmatrix} \right\|^{-1}. \end{aligned}$$

Мы использовали тождество (3) и выбрали направление вектора \mathbf{w} в качестве первой координаты. Таким образом, к нашему набору добавились следующие неравенства:

$$\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{w} \geq 0, \quad (7)$$

Соответствующие неравенства — это

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T,w} > 0, \quad (9)$$

которое является обобщенным (на случай ненулевой относительной скорости w) требованием положительности сжимаемости,

$$j_0 < w\rho \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho} > 0. \quad (8)$$

3. Такое же преобразование, будучи примененным к самому большому минору, дает

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \left\| \frac{\partial(T, \mathbf{v}_n, \mu + v_s^2/2 - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_n, \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n)}{\partial(T, \mathbf{v}_n, \rho, \mathbf{v}_s)} \right\| = \mathfrak{H}' \mathfrak{H}''.$$

Аналогично, положительность миноров M_5, M_6, M_7, M_8 обеспечивается положительностью нетривиальных главных миноров матрицы \mathfrak{H}'' . Используя термодинамическое тождество

$$d\mu = \frac{dp}{\rho} - \frac{S}{\rho} dT - \frac{\mathbf{j}_0}{\rho} \cdot d\mathbf{w},$$

получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\mu + v_s^2/2 - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_n)}{\partial \rho}\right)_{T,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_s} &= \\ &= \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{T,\mathbf{w}} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T,w}. \end{aligned}$$

Ниже приведено явное выражение для подматрицы, соответствующей подпространству $\rho, v_s^x, v_s^y, v_s^z$ матрицы \mathfrak{H}'' . Как и ранее, мы ориентировали ось x в направлении вектора \mathbf{w} . Используя (3), получаем

$$\left\| \begin{pmatrix} (\partial p/\partial \rho)_{T,w}/\rho & (\partial j_0/\partial \rho)_{T,w} - w & 0 & 0 \\ (\partial j_0/\partial \rho)_{T,w} - w & \rho - (\partial j_0/\partial w)_{T,\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho - j_0/w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho - j_0/w \end{pmatrix} \right\|.$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T,w} \left(\rho - \left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho}\right) - \\ - \rho \left(\left(\frac{\partial j_0}{\partial \rho}\right)_{T,w} - w\right)^2 > 0. \quad (11) \end{aligned}$$

Неравенства (5), (7)–(11) представляют полный набор условий термодинамической устойчивости.

2.2. Система нормальной компоненты

В ситуации с «остановленной нормальной компонентой» поток массы \mathbf{f} относительно нормальной компоненты может оказаться более удобной переменной, чем поток относительно сверхтекучей \mathbf{j}_0 . Очевидное соотношение между ними $f = \rho w - j_0$ приводит к следующей переформулировке полученных неравенств:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{w} < 0, \quad f < w\rho, \quad (12)$$

$$0 < \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{\rho, T} < \rho, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\rho, w} \left(\rho - \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{T, \rho}\right) > \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{\rho, w}^2, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T, w} \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{\rho, T} > \rho \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{w, T}^2. \quad (15)$$

Легко убедиться, что неравенство (15) может быть также записано в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{T, p} > f \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{T, w}. \quad (16)$$

Легко интерпретировать выведенные соотношения при $w = 0$. Из неравенств (12), (13), (14) и (15) получаем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\rho, w} > 0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T, w} > 0, \quad (17)$$

$$\rho > \left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T, \rho} > 0. \quad (18)$$

В обычных обозначениях последнее неравенство имеет ясный смысл:

$$\rho_s > 0, \quad \rho_n > 0. \quad (19)$$

2.3. Фононно-ротонная модель

Рассмотрим полученные критерии устойчивости в применении к реальному сверхтекучему ^4He . Для вычисления производных, входящих в неравенства, необходима микроскопическая модель, роль которой с успехом может играть фононно-ротонная теория Ландау, применимая в широком диапазоне температур и скоростей. Мы будем ее использовать для

вычисления вклада квазичастиц в «модифицированную» свободную энергию $\tilde{\mathcal{F}}_0$ в системе покоя сверхтекучей компоненты:

$$\tilde{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{F}_0 - \mathbf{w} \cdot \mathbf{j}_0, \quad d\tilde{\mathcal{F}}_0 = -SdT - \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{w}.$$

Этот термодинамический потенциал можно получить из спектра элементарных возбуждений с помощью обычного выражения

$$\tilde{\mathcal{F}}_0 = T \int \ln \left(1 - \exp \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{w} - \epsilon(p)}{T} \right) \right) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Здесь энергия возбуждения $\epsilon(p)$ для двух ветвей задается выражениями

$$\epsilon_{ph}(p) = cp, \quad \epsilon_r(p) = \Delta + (p - p_0)^2 / (2m).$$

Индексы « ph » и « r » используются для обозначения величин, относящихся соответственно к фононам и ротонам, c — это скорость звука, Δ — ширина ротонной щели, а m и p_0 — соответственно эффективные масса и импульс ротонов (использованные численные данные можно найти в работах [6, 7]: $\rho = 0.145 \text{ г/см}^3$, $\Delta = 8.7 \text{ К}$, $m = 0.16m_{\text{He}}$, $p_0 = 3.673 \cdot 10^8 \text{ г}^{-1/3} \rho^{1/3} \hbar$, $c = 238 \text{ м/с}$, $\partial\Delta/\partial\rho = -0.47 \cdot 10^{-14} \text{ см}^5 \cdot \text{с}^{-2}$, $\partial m/\partial\rho = -0.45 \cdot 10^{-23} \text{ см}^3$, $\partial c/\partial\rho = 467 \cdot 10^3 \text{ см}^4 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}$). Малый безразмерный параметр $m\Delta/p_0^2 \sim 0.03 \ll 1$ обеспечивает, например, тот факт, что критическая скорость Ландау определяется выражением $v_L = \Delta/p_0$.

После интегрирования приведенные соотношения приводят к следующему вкладу в свободную энергию:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_0 = & -\frac{T^4\pi^2}{90\hbar^3c^3} \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-2} - \\ & - \frac{T^{5/2}m^{1/2}}{2^{1/2}\pi^{3/2}\hbar^3} \frac{p_0}{w} \text{sh} \frac{wp_0}{T} \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right). \end{aligned}$$

Дифференцируя этот потенциал, можно получить все термодинамические величины, в частности

$$S = - \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_0}{\partial T}\right)_{w, \rho}, \quad j_0 = - \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_0}{\partial w}\right)_{T, \rho}.$$

Вкладом квазичастиц в производные от давления пренебрегаем.

Для нулевой скорости неравенства (19) нарушаются в λ -точке. При ненулевой скорости первым нарушается неравенство (11). При нулевой температуре критическая скорость (т. е. максимальная скорость, совместная с условиями устойчивости) стре-

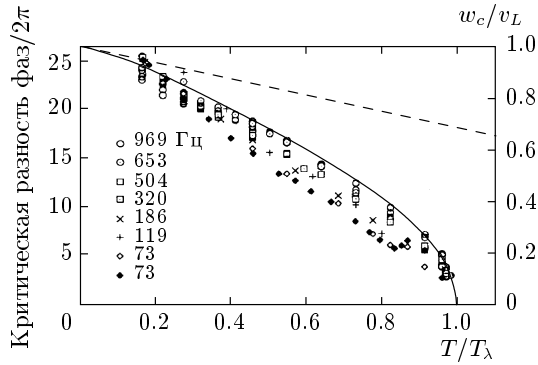


Рис. 1. Критическая скорость w_c в зависимости от температуры T . Штриховая линия соответствует равенству $T = \Delta - p_0 w$, видно, что условие $T < \Delta - p_0 w$ остается верным во всей области устойчивости. При нулевой температуре критическая скорость неустойчивости w_c совпадает с критической скоростью Ландау v_L , а при критической температуре T_c (в λ -точке) обращается в нуль (см. (19)). Кривая совмещена с экспериментальными точками, изображающими критическую разность фаз на отверстии $2 \text{ мкм} \times 2 \text{ мкм}$ в тонкой фольге при различных частотах из работы [8]

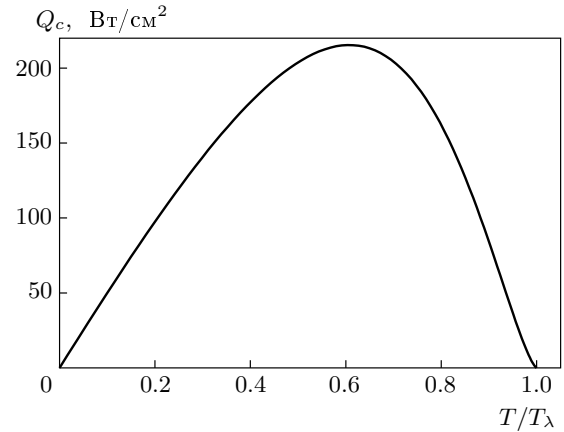


Рис. 2. Критический поток энергии (при условии отсутствия потока массы) Q_c в зависимости от температуры T

мится¹⁾ к критической скорости Ландау v_L . Все множество состояний, удовлетворяющих этому неравенству, изображено на рис. 1, 2. Жидкость теряет устойчивость в области над изображенными кривыми.

На рис. 1 критическая скорость отмечена сплошной линией как функция температуры. На том же графике можно видеть масштабированные экспериментальные данные [8]. Легко заметить, что результаты, полученные на высоких частотах, неплохо согласуются с теоретической кривой, в то время как низкочастотные данные обнаруживают заметное расхождение. Можно предположить, что это связано со значительным временем, требующимся для образования вихрей, т. е. на высоких частотах в системе наблюдается термодинамический предел устойчивости, в то время как на более низких частотах критическая скорость ограничивается рождением вихрей. Следует, однако, сделать оговорку по поводу сравнения экспериментальных данных по критической разности фаз и наших предсказаний. Предположение, что критическая скорость определяет

ся пределом термодинамической устойчивости, подразумевает существенную нелинейность гидродинамических уравнений внутри отверстия. В частности, нельзя рассматривать сверхтекучую компоненту как отдельную несжимаемую часть жидкости. Иными словами, разность фаз на концах канала не пропорциональна максимальной достигаемой скорости.

На рис. 2 изображен критический поток энергии. Обычно в эксперименте изучается поток энергии, переносимый сверхтекучим противотоком, когда нормальная и сверхтекучая скорости направлены навстречу друг другу, так чтобы обеспечить равенство нулю полного потока массы. В системе отсчета, в которой поток массы равен нулю, $j = 0$, для потока энергии Q получаем

$$Q = TS \left(w - \frac{j_0}{\rho} \right) + \left(w - \frac{j_0}{\rho} \right)^2 j_0. \quad (20)$$

2.4. Окрестность T_λ

Чтобы выяснить поведение критической скорости вблизи λ -точки, необходимо использовать соотношение теории подобия. Предположим, что разложение нерегулярной части термодинамического потенциала по степеням скоростей в окрестности T_λ начинается со следующих членов:

$$At^{2-\alpha} + \rho_s \frac{v_s^2}{2} - Bt^x v_s^4, \quad (21)$$

¹⁾ Отметим, что в системах, где все возбуждения допускают гидродинамическое описание (иными словами, системы без ротонной ветви), неравенство (11) при нулевой температуре подразумевает выполнение условия $(\partial p / \partial \rho)_{T,w} - w^2 > 0$, т. е. $w < c$.

где A и B — константы, $t = (T_\lambda - T)/T_\lambda$ — приведенная температура²⁾, α — критический индекс теплоемкости $C_p \propto t^{-\alpha}$, плотность сверхтекучей компоненты ρ_s подчиняется соотношению Джозефсона [9] $\rho_s \propto t^{(2-\alpha)/3}$, а индекс x будет определен ниже. В соответствии с гипотезой масштабной инвариантности все члены в выражении (21) одного порядка во флуктуационной области. Следовательно, $t^x \propto \rho_s^2 t^{\alpha-2}$ и $x = (\alpha - 2)/3$. С другой стороны, устойчивость теряется при скоростях, при которых перестает выполняться линейное приближение, т. е.

$$w_c \propto \sqrt{\rho_s/t^x} \propto t^{(2-\alpha)/3}. \quad (22)$$

В настоящий момент считается [10], что индекс теплоемкости $\alpha = -0.0127 \pm 0.0003$, т. е. индекс критической скорости 0.671.

Обширные экспериментальные данные по окрестности T_λ имеются в работах по критическому потоку энергии [4]. В окрестности перехода равенство (20) сводится к $Q \approx TS(w - j_0/\rho)$, а критический поток тепла определяется выражением

$$Q_c \propto \rho_s w_c \propto t^{(4-2\alpha)/3} \approx t^{1.342}, \quad (23)$$

что находится в приемлемом согласии с экспериментальным значением соответствующего индекса 1.23.

2.5. Термодинамические неравенства в растворах $^3\text{He}-^4\text{He}$

Термодинамические неравенства в нормальных (не сверхтекучих) растворах определяют область

устойчивости по отношению к расслоению однородного состояния. Известно, что при температурах ниже примерно 0.9 К можно наблюдать расслоение раствора изотопов гелия $^3\text{He}-^4\text{He}$, причем «разбавленная» фаза (с меньшим содержанием ^3He) обладает свойством сверхтекучести³⁾. Представляет интерес выяснить, как выглядят условия устойчивости в такой ситуации⁴⁾.

Выражение для дифференциала плотности энергии легко получить из (4):

$$\begin{aligned} dE = T dS + \left(\mu_4 + \frac{v_s^2}{2} - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_n \right) d\rho_4 + \\ + \left(\mu_3 + \frac{v_s^2}{2} - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_n \right) d\rho_3 + \\ + (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \cdot d\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_n \cdot d\mathbf{j}. \quad (24) \end{aligned}$$

Здесь ρ_3 , ρ_4 и μ_3 , μ_4 — это плотности и химические потенциалы соответственно ^3He и ^4He . Условия устойчивости будут теперь следовать из требования положительности матрицы 9×9 соответствующей квадратичной формы. Ясно, что неравенства (5), (7), (8) и (10) останутся справедливыми и для растворов (в них при дифференцировании нужно считать постоянными обе плотности). Остается исследовать положительную определенность следующей матрицы:

$$\tilde{\mathfrak{H}} = \left\| \frac{\partial(T, \mathbf{v}_n, \mu_4 + v_s^2/2 - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_n, \mu_3 + v_s^2/2 - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_n, j - \rho v_n)}{\partial(T, \mathbf{v}_n, \rho_4, \rho_3, v_s)} \right\|.$$

Вводя обозначения $\rho = \rho_3 + \rho_4$, $x = \rho_3/\rho$ и опуская простые, но громоздкие преобразования, получаем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{T,w,x} > 0, \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial \mu_3}{\partial x} \right)_{T,w,p} > 0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mu_3}{\partial x} \right)_{T,w,p} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)_{T,x,p} - f \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_{T,x,w} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{T,p,w} \left(f \left(\frac{\partial \mu_3}{\partial p} \right)_{T,x,w} - \left(\frac{\partial \mu_3}{\partial w} \right)_{T,p,x} - w \right) > 0. \quad (27) \end{aligned}$$

Напомним, что, как и в п. 2.2, $f = \rho w - j_0$.

²⁾ Использование одной и той же буквы t для обозначения времени и приведенной температуры не должно привести к недоразумению, так как смысл всегда ясен из контекста. Альтернативное принятое обозначение ϵ кажется более опасным из-за совпадения размерностей энергии и температуры.

³⁾ Во избежание недоразумений отметим, что речь здесь идет об «обычной» сверхтекучести с одним конденсатом.

⁴⁾ Этот вопрос был поднят С. Н. Бурмистровым.

3. ДВУХСКОРОСТНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Точные (нелинейные) уравнения двухскоростной гидродинамики сверхтекучей жидкости оказываются возможным (см. [5]) получить из феноменологических соображений с помощью только законов сохранения. Как уже указывалось в разд. 2, наряду с всегда сохраняющимися массой, энергией и импульсом в этой системе имеется еще один интеграл движения, связанный с безвихревым характером сверхтекучего движения. Подобное условие отсутствует в кристалле, и имеющихся интегралов недостаточно (в нелинейном случае не выполняется закон сохранения квазиимпульса, см. (42) ниже) для получения уравнений движения. Поэтому для вывода двухскоростной теории упругости требуется использовать более общий подход (ср. [11–13]). Динамика квазичастиц при этом описывается кинетическим уравнением. В рамках этого подхода, исходя из спектра квазичастиц, мы найдем все гидродинамические потоки и их зависимость от скорости относительного движения⁵⁾.

Следуя работе авторов [14], в п. 3.1 мы вводим основные определения, необходимые для построения требуемой теории, а в п. 3.2 выводим общие уравнения двухскоростной теории упругости. Среди них имеются уравнения как для обычных переменных теории упругости (таких как скорость решетки), так и для квазичастичных степеней свободы (таких как скорость газа квазичастиц).

Так же, как и в обычной линейной фоновой гидродинамике (см. [15, § 71]), процессы переброса, приводящие к изменению полного квазиимпульса в столкновениях, мы считаем редкими (как уже подчеркивалось, это вовсе не означает сохранения квазиимпульса в неоднородной системе). При низких температурах это предположение заведомо выполняется. При выводе уравнений мы также пренебрегаем диссипацией, т. е. ограничиваемся первым порядком по градиентам.

Далее, в п. 3.3 для полученных уравнений мы выведем граничные условия для разных типов поверхностей: шероховатой и гладкой поверхностей раздела между твердой и жидкой фазами гелия (п. 3.3.1)

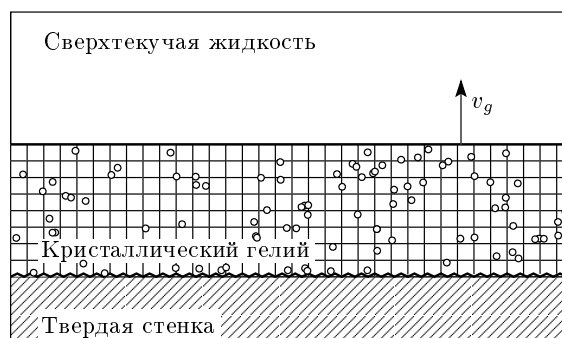


Рис. 3. Рост кристалла «снизу»

и шероховатой и гладкой поверхностей между твердым гелием и стенкой (п. 3.3.2).

На основе предлагаемого формализма оказывается возможным [14] объяснить так называемый «линейный рост» гладких кристаллических граней. Как известно, поверхность кристалла может находиться в двух различных состояниях: гладком и шероховатом (см. обзорную статью [16]). Гладкая поверхность характеризуется дальним порядком и малыми флуктуациями. Шероховатая поверхность, наоборот, не проявляет дальнего порядка, а ее смещение значительно флуктуирует. Различия проявляются не только в равновесных свойствах, но и в различной кинетике. Считается, что шероховатая грань легко растет (и описывается коэффициентом роста), в то время как гладкая (при условии отсутствия дислокаций) характеризуется нулевым коэффициентом роста и растет только за счет образования зародышей новых кристаллических слоев. В соответствии с этим механизмом линейный рост должен отсутствовать при малой неравновесности. На самом деле в экспериментах [17] наблюдается линейный рост гладких кристаллических граней, свободных от винтовых дислокаций. Мы покажем, что это явление можно объяснить наличием в кристалле точечных дефектов решетки (вакансий) и необычным граничным условием на границе кристалл–стенка. Кристалл растет, если вакансии могут рождаться на нижнем крае образца (на границе между кристаллом и стенкой) и исчезать на верхнем (на гладкой поверхности раздела кристалл–жидкость). Предлагаемый механизм близок к обсуждавшемуся в работах [18, 19] при объяснении пластичности поликристаллов: поток массы в объеме кристалла (т. е. сквозь кристалл) связан с движением вакансий.

Действительно, поскольку гладкая кристаллическая грань (верхняя на рис. 3) неподвижна относительно решетки, она движется вверх вместе с ре-

⁵⁾ Принципиальная возможность такой процедуры для более простой системы — сверхтекучей жидкости — указывалась в [15, § 77]. При этом скорости решетки и газа квазичастиц в наших уравнениях играют роль скоростей соответственно сверхтекучей и нормальной компонент в теории сверхтекучести.

шеткой. Пустоты, появляющиеся в результате на нижнем крае кристалла, превращаются в дефекты решетки (обычные вакансии, на рисунке изображены кружками) и движутся вверх сквозь (и быстрее чем) твердый гелий. На гладкой верхней грани образца они исчезают. Другими словами, кристалл растет на поверхности между твердым гелием и стенкой, а не на гладкой поверхности раздела кристалл–жидкость (которая, тем не менее, является источником массы для роста).

Важно подчеркнуть, что реалистичность такого сценария обусловлена возможностью вылета вакансий из нижней поверхности кристалла. Такая возможность заведомо имеется на стенке с неровностями или на стенке, образующей малый угол с базисной плоскостью кристалла (и образующей вицинальную грань). В определенном смысле эта граница атомно-шероховата — на ней могут появляться новые атомные слои.

Атомно-гладкая стенка, строго параллельная базисной плоскости, должна, наоборот, вести себя как обычная гладкая поверхность, т. е. быть неподвижной относительно решетки. Кристалл в этой ситуации растет только за счет появления зародышей новых слоев.

В п. 3.4 на основании уравнений двухскоростной теории упругости мы вычисляем коэффициент роста кристалла гелия с гладкой верхней гранью, связанный с предлагаемым механизмом.

3.1. Определения

Следуя работам [11–13], будем использовать эйлерово описание решетки. Введем три «номера узла» N^α ($\alpha = 1, 2, 3$), являющиеся функциями пространственных координат \mathbf{r} и времени t , $N^\alpha = N^\alpha(\mathbf{r}, t)$. Далее в этой главе греческие индексы (как « α » в выражении N^α) будут использоваться для нумерации компонент в пространстве решетки, а латинские (например, « i » в x_i для обозначения компонент \mathbf{r}) — в реальном пространстве. Если определить векторы обратной решетки как $\mathbf{a}^\alpha = \partial N^\alpha / \partial \mathbf{r}$, то векторы элементарных трансляций \mathbf{a}_β удовлетворяют соотношению $\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha$. Дифференцирование по времени дает скорость решетки $\mathbf{w} = -\mathbf{a}_\alpha \dot{N}^\alpha$. Упругая энергия решетки E_l является функцией деформации, причем, поскольку она зависит лишь от относительного расположения векторов a_i^α , а не от пространственной ориентации малого участка тела, можно записать $E_l = E_l(g^{\alpha,\beta})$. Здесь $g^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta$ — симметричный метрический тензор пространства решетки.

Приступим к описанию квазичастичных степеней свободы системы. Конкретный тип квазичастиц несуществен: это могут быть и фононы, и вакансии (как в работе [13]), и электроны (как в работе [11]). Фактически, ниже в уравнениях подразумевается суммирование по всем ветвям возбуждений, для краткости знак суммы писать не будем. Квазичастицы будут характеризоваться массой m (нулевой для фононов, положительной для электронов и отрицательной для вакансий), координатой и квазиимпульсом. Их энергия в системе отсчета, связанной с решеткой, $\epsilon = \epsilon((\mathbf{p} - m\mathbf{w}) \cdot \mathbf{a}_\alpha, g^{\alpha\beta})$, является периодической функцией квазиимпульса \mathbf{p} (с периодом $2\pi\hbar\mathbf{a}^\beta$). В лабораторной системе отсчета энергия квазичастицы определяется выражением (см. [11])

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon + m\mathbf{w} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} + m \frac{w^2}{2}.$$

Нам также потребуются «приведенные» переменные $\mathbf{k} = \mathbf{p} - m\mathbf{w}$ и $k_\alpha = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{k}$. Динамика квазичастиц диктуется функцией Гамильтона

$$H = \epsilon + \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} - mw^2/2.$$

Введем функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ (также являющуюся периодической функцией квазиимпульса \mathbf{p}). Уравнение Больцмана задает ее эволюцию

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \text{St } f. \quad (28)$$

Из функции распределения можно получить макроскопические величины, такие как, например, плотность массы:

$$\rho = \rho_l + \langle mf \rangle = M \det(g^{\alpha\beta})^{1/2} + mn,$$

где угловые скобки обозначают интегрирование по пространству квазиимпульсов, $\langle \rangle = \int d^3p / (2\pi\hbar)^3$, ρ_l — плотность решетки, M — масса элементарной ячейки, а $n = \langle f \rangle$.

Рассмотрим квазиравновесную функцию распределения. Полный набор величин, сохраняющихся в столкновениях, таков:

энергия;

масса, которая пропорциональна количеству квазичастиц для «реальных» частиц, таких как электроны и вакансии, и тождественно равна нулю для фононов;

квазиимпульс (процессами переброса в низкотемпературной области можно пренебречь).

Следовательно, самое общее квазиравновесное распределение — это функция от

$$z = \frac{\epsilon - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - m\mu_0}{T} = \frac{\epsilon - (\mathbf{p} - m\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} - m\mu_0}{T} = \\ = \frac{\epsilon - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - m\mu_0 + m\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}{T} = \frac{\epsilon - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - m\phi}{T},$$

где $\mu_0 - \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \phi$. Лагранжевы коэффициенты T , \mathbf{v} и μ_0 имеют смысл соответственно температуры, скорости относительно решетки и химического потенциала газа квазичастиц. Для определенности будем считать, что возбуждения подчиняются статистике Бозе. В этом случае функция распределения имеет вид

$$f = \frac{1}{e^z - 1} = \left(\exp \frac{\epsilon - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - m\phi}{T} - 1 \right)^{-1}, \quad (29)$$

$\ln((f+1)/f) = z^6$.

Вычислим теперь остальные макроскопические параметры этой функции распределения. Для потока массы имеем

$$\mathbf{J} = \rho_l \mathbf{w} + \mathbf{w} m n + \mathbf{j} = \rho \mathbf{w} + \mathbf{j} = \rho \mathbf{w} + m n \mathbf{v}, \quad (30)$$

где поток массы по отношению к решетке

$$\mathbf{j} = m \left\langle f \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle = m n \mathbf{v}.$$

Используя \mathbf{J} , можно записать закон сохранения массы

$$\dot{\rho} + J_{i,i} = 0.$$

Количество реальных (массовых) частиц также не меняется в объеме. Соответствующий закон сохранения имеет вид

$$\dot{\rho}_l + (\rho_l w_i)_{,i} = 0.$$

Аналогично, плотность энергии задается выражением

$$E = \rho_l \frac{w^2}{2} + E_l(g^{\alpha\beta}) + \langle \tilde{\epsilon} f \rangle = \\ = \rho \frac{w^2}{2} + E_l(g^{\alpha\beta}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{j} + \langle \epsilon f \rangle. \quad (31)$$

⁶⁾ Для удобства приведем необходимый в дальнейшем результат интегрирования функции распределения:

$$\int f dz = \ln \frac{e^z - 1}{e^z} = -\ln(f+1).$$

Это равенство дает возможность определить, каким макроскопическим величинам соответствуют микро-скопические величины, введенные выше. Полную плотность энергии кристалла можно получить при помощи преобразования Галилея

$$E = E_0 + \frac{\rho w^2}{2} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}, \quad (32)$$

где $E_0 = E_0(\mathbf{a}^\alpha, S, \rho, \mathbf{K})$ — энергия в системе покоя решетки, а $\mathbf{K} = \langle \mathbf{k} f \rangle$ характеризует плотность квазиимпульса. Естественное выражение для дифференциала E_0

$$dE_0 = \lambda_{ij} a_{\nu j} da_i^\nu + T dS + \mu d\rho + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{K} \quad (33)$$

получаем из стандартного определения плотности энтропии бозе-газа:

$$S = \langle (f+1) \ln(f+1) - f \ln f \rangle = \langle f z + \ln(f+1) \rangle.$$

Ее дифференциал равен

$$dS = \langle (\ln(f+1) + 1 - \ln f - 1) df \rangle = \langle z df \rangle.$$

Вычитая дифференциалы равенств (31) и (32) друг из друга, получаем

$$0 = \lambda_{ij} a_{\nu j} da_i^\nu + T dS + \mu d\rho + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{K} - \\ - dE_l(g^{\alpha\beta}) - d\langle \epsilon f \rangle = \\ = \lambda_{ij} a_{\nu j} da_i^\nu + T \langle z df \rangle + \mu d\rho + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{K} - \\ - dE_l(g^{\alpha\beta}) - \langle \epsilon df \rangle - \langle f d\epsilon \rangle = \\ = \lambda_{ij} a_{\nu j} da_i^\nu + \langle (Tz - \epsilon + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) df \rangle + \mu d\rho - \\ - dE_l(g^{\alpha\beta}) + \mathbf{v} \cdot \langle f d\mathbf{k} \rangle - \langle f d\epsilon \rangle. \quad (34)$$

Преобразуем часть этого выражения, связанную с деформацией решетки:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu}{2} \rho_l g_{\alpha\beta} dg^{\alpha\beta} - dE_l (g^{\alpha\beta}) + \mathbf{v} \cdot \langle f d\mathbf{k} \rangle - \langle f d\epsilon \rangle = \\
 & = \frac{\mu}{2} \rho_l g_{\alpha\beta} dg^{\alpha\beta} - \frac{\partial E_l}{\partial g^{\alpha\beta}} dg^{\alpha\beta} - m\mathbf{v} \cdot \langle f d\mathbf{w} \rangle - \\
 & - \left\langle f \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial k_\alpha} ((\mathbf{p} - m\mathbf{w}) \cdot d\mathbf{a}_\alpha - m\mathbf{a}_\alpha \cdot d\mathbf{w}) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial g^{\alpha\beta}} \right)_{k_\alpha} dg^{\alpha\beta} \right) \right\rangle = \\
 & = - \left(\frac{\partial E_l}{\partial g^{\alpha\beta}} + \left\langle f \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial g^{\alpha\beta}} \right)_{k_\alpha} \right\rangle \right) dg^{\alpha\beta} + \\
 & + \left(\mu \rho_l \delta_{ij} - \left\langle f \frac{\partial (Tx + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v})}{\partial p_j} (p_i - m w_i) \right\rangle a_j^\alpha \right) da_{\alpha i} = \\
 & = - \left(\frac{\partial E_l}{\partial g^{\alpha\beta}} + \left\langle f \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial g^{\alpha\beta}} \right)_{k_\alpha} \right\rangle \right) 2a_i^\alpha a_j^\beta a_{\nu j} da_i^\nu + \\
 & + (\delta_{ij} (T \ln(f+1)) + \mu \rho_l + v_i P_j - mn v_i w_j) a_{\nu j} da_i^\nu = \\
 & = \left\{ \delta_{ij} \left(TS + \rho \frac{w^2}{2} + E_l - E + \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \mu \rho_l + mn \mu_0 \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \Lambda_{ij} + v_i P_j - mn v_i w_j \right\} a_{\nu j} da_i^\nu.
 \end{aligned}$$

Окончательно из (34) получаем

$$\begin{aligned}
 0 & = (\mu - \mu_0) m dn + \\
 & + \left\{ \lambda_{ij} - \Lambda_{ij} + \delta_{ij} \left(TS + E_l - E + \mu \rho + \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \rho \frac{w^2}{2} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + v_i P_j - mn v_i w_j \right\} a_{\nu j} da_i^\nu, \quad (35)
 \end{aligned}$$

где введено обозначение $P_i = \langle p_i f \rangle$ и

$$\Lambda_{ij} = 2a_i^\alpha a_j^\beta \left(\frac{\partial E_l}{\partial g^{\alpha\beta}} + \left\langle f \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial g^{\alpha\beta}} \right)_{k_\alpha} \right\rangle \right). \quad (36)$$

Слагаемые в (35) независимы и, следовательно, равны нулю по отдельности. Другими словами,

$$\mu = \mu_0,$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij} & = \Lambda_{ij} - \delta_{ij} \left(TS + E_l - E + \mu \rho + \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \rho \frac{w^2}{2} \right) - \\
 & \quad - v_i P_j + mn v_i w_j. \quad (37)
 \end{aligned}$$

3.2. Уравнения и потоки

Здесь мы получим потоки и уравнения, определяющие динамику системы. Если считать, что энтропия сохраняется (в пренебрежении диссипацией), то закон ее сохранения имеет вид

$$\dot{S} + F_{i,i} = 0,$$

где поток энтропии F_i определяется соотношением

$$\mathbf{F} = S(\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Далее, запишем закон сохранения импульса [11],

$$\dot{J}_i + \Pi_{ik,k} = 0, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Pi_{ik} & = \rho w_i w_k - E_l \delta_{ik} + 2a_i^\alpha a_k^\beta \times \\
 & \times \left(\frac{\partial E_l}{\partial g^{\alpha\beta}} + \left\langle f \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial g^{\alpha\beta}} \right)_{k_\alpha} \right\rangle \right) + w_i j_k + w_k j_i = \\
 & = \rho w_i w_k - E_l \delta_{ik} + mn (w_i v_k + w_k v_i) + \\
 & + 2a_i^\alpha a_k^\beta \left(\frac{\partial E_l}{\partial g^{\alpha\beta}} + \left\langle f \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial g^{\alpha\beta}} \right)_{k_\alpha} \right\rangle \right) = \\
 & = \rho w_i w_k - E_l \delta_{ik} + mn (w_i v_k + w_k v_i) + \Lambda_{ik}. \quad (39)
 \end{aligned}$$

Здесь мы использовали определение (36) для Λ_{ik} .

Подставляя необходимые выражения для потока энергии из [11], получаем

$$\dot{E} + Q_{i,i} = 0, \quad (40)$$

где

$$Q_i = w_i E_l + \left\langle \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} f \right\rangle - \frac{w^2}{2} J_i + w_k \Pi_{ik}.$$

Чтобы найти второй член, опять используем функцию распределения в виде (29),

$$\begin{aligned}
 \left\langle \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} f \right\rangle & = \left\langle \epsilon \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p_i} + w \right) f \right\rangle = \\
 & = \left\langle \epsilon \left(T \frac{\partial z}{\partial p_i} + v_i + w_i \right) f \right\rangle = \\
 & = (v_i + w_i) \langle \epsilon f \rangle + T \left\langle (Tx + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \phi) \frac{\partial z}{\partial p_i} f \right\rangle = \\
 & = (v_i + w_i) \langle \epsilon f \rangle - T \left\langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial \ln(1+f)}{\partial p_i} \right\rangle = \\
 & = (v_i + w_i) \langle \epsilon f \rangle + T v_i \langle \ln(1+f) \rangle = \\
 & = (v_i + w_i) \langle \epsilon f \rangle + T v_i \left\langle \ln(1+f) + f \ln \left(\frac{f+1}{f} \right) \right\rangle - \\
 & \quad - T v_i \left\langle f \frac{\epsilon - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - m\phi}{T} \right\rangle = \\
 & = (v_i + w_i) \langle \epsilon f \rangle + T v_i S - v_i \langle f \epsilon \rangle + v_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} + mn \phi = \\
 & = w_i \langle \epsilon f \rangle + v_i (TS + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} + mn \phi).
 \end{aligned}$$

Отсюда окончательно получаем поток энергии

$$\begin{aligned}
Q_i &= w_i \langle \epsilon f \rangle + v_i (TS + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} + mn\phi) - \frac{w^2}{2} (\rho w_i + mnv_i) + \\
&\quad + w_k (\rho w_i w_k + mn(w_i v_k + w_k v_i) + \Lambda_{ik}) = \\
&= w_i \langle \epsilon f \rangle + v_i (TS + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} + mn\phi) + \frac{w^2}{2} (\rho w_i + mnv_i) + \\
&\quad + w_k (mnw_i v_k + \Lambda_{ik}) = \\
&= w_i \left(\langle \epsilon f \rangle + \mathbf{w} \cdot \mathbf{j} + \rho \frac{w^2}{2} \right) + \\
&\quad + v_i \left(TS + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} + mn \left(\phi + \frac{w^2}{2} \right) \right) + w_k \Lambda_{ik} = \\
&= v_i \left(TS + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} + mn \left(\phi + \frac{w^2}{2} \right) \right) + \\
&\quad + w_i (E - E_l) + w_k \Lambda_{ik}. \quad (41)
\end{aligned}$$

Этой формулой завершается набор уравнений обычной теории упругости. Для определения поведения квазичастичных степеней свободы требуется дополнительное уравнение. Найдем временную зависимость P_i . Для этого умножим уравнение Больцмана (28) на p_i и проинтегрируем по импульсному пространству. Квазиимпульс \mathbf{p} сохраняется в (нормальных) столкновениях и, следовательно, член, содержащий интеграл столкновений, тождественно равен нулю. Из уравнения Больцмана получаем

$$\begin{aligned}
\dot{P}_i &= \left\langle p_i \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) \right\rangle = \\
&= \left\langle p_i \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{r}} + (p_j - mw_j) \frac{\partial w_j}{\partial \mathbf{r}} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{w} \right) \right) \right\rangle = \\
&= \left\langle -f \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + (\mathbf{p} - m\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \right) - \right. \\
&\quad \left. - f p_i \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} \right) - p_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} - p_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{w} \right\rangle = \\
&= - \left\langle f \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + f p_i \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} + p_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle + \langle f \rangle m \mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} - \\
&\quad - \left\langle \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} f + p_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} f + p_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{w} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Первый член можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\left\langle f \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + f p_i \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} + p_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle = \\
&= \left\langle f p_i \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} + f \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \left(T \frac{\partial z}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{v} \right) \right\rangle = \\
&= \left\langle f p_i \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} + f \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \right. \\
&\quad \left. + p_i \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{r}} - p_k \frac{\partial v_k}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - z \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right) \right\rangle = \\
&= \left\langle p_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + m f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + f \mathbf{p} \frac{\partial v}{\partial x_i} + f z \frac{\partial T}{\partial x_i} + \right. \\
&\quad \left. + p_i f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} + p_i f \frac{\partial z}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle = nm \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \\
&\quad + \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (P_i \mathbf{v}) + \left\langle \delta_{ik} f z + p_i f \frac{\partial z}{\partial p_k} \right\rangle \frac{\partial T}{\partial x_k} = \\
&= nm \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (P_i \mathbf{v}) + \\
&\quad + \left\langle \delta_{ik} f \ln \frac{1+f}{f} - p_i \frac{\partial z}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial z} \ln(f+1) \right\rangle \frac{\partial T}{\partial x_k} = \\
&= nm \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (P_i \mathbf{v}) + \\
&\quad + \left\langle f \ln \frac{1+f}{f} + \ln(f+1) \right\rangle \frac{\partial T}{\partial x_i} = \\
&= nm \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (P_i \mathbf{v}) + S \frac{\partial T}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\dot{P}_i &= nm \mathbf{w} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} - \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} P_i \mathbf{w} - nm \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \\
&\quad - \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (P_i \mathbf{v}) - S \frac{\partial T}{\partial x_i} = \\
&= nm \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{w^2}{2} - \phi \right) - S \frac{\partial T}{\partial x_i} - \mathbf{P} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{w} + \mathbf{v}) - \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (P_i (\mathbf{w} + \mathbf{v})). \quad (42)
\end{aligned}$$

Искомый полный набор уравнений двухскоростной теории упругости состоит из уравнений (42), (40) (где Q определяется из (41)) и (38) (где Π_{ij} выражается из (39)).

3.3. Граничные условия

Граничные условия для полученных уравнений следуют из законов сохранения, которые должны выполняться на поверхности. Удобнее всего их получать в системе отсчета, связанной с самой границей. Все скорости далее, таким образом, будут от-

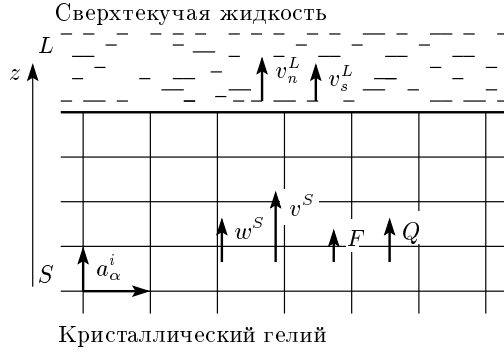


Рис. 4. Граница кристалл–жидкость

считываться относительно поверхности. Мы упростим задачу, считая ее одномерной. Все потоки (и ось z) будут перпендикулярны границе раздела. Будем считать поверхность плоской, пренебрежем капиллярными эффектами и ограничимся линейным приближением.

Очевидно, граничные условия зависят от типа границы и от среды, находящейся по другую сторону границы. Начнем с детально рассмотренной в литературе [16] поверхности раздела между кристаллом и жидкостью. Однако, в связи с рассматриваемой возможностью потока вещества сквозь границу, результат будет отличаться.

3.3.1. Граница кристалл–жидкость

Жидкость, будучи сверхтекучей, характеризуется химическим потенциалом, μ^L , плотностями нормальной и сверхтекучей компонент, ρ_n^L и ρ_s^L , скоростями нормального и сверхтекучего движений, v_n^L и v_s^L , температурой T^L , давлением p^L и плотностью энтропии S^L (см. рис. 4):

$$\begin{cases} R + S^S(v^S + w^S) = S^L v_n^L, \\ w^S(E^S - E_l^S + \Lambda_{zz}^S) + \\ + v^S(T^S S^S + m^S n^S \phi^S) = \\ = \mu^L(\rho_s^L v_s^L + \rho_n^L v_n^L) + S^L T^L v_n^L, \\ v^S m^S n^S + \rho^S w^S = \rho_s^L v_s^L + \rho_n^L v_n^L, \\ \Lambda_{zz}^S - E_l^S = p^L. \end{cases} \quad (43)$$

Индекс S будет обозначать величины, относящиеся к кристаллу. Первое равенство представляет условие роста энтропии, где R — поверхностная диссипативная функция. Последние три уравнения в (43) отвечают за сохранение на поверхности соответственно энергии, массы и импульса. Поверхностная диссипативная функция должна быть поло-

жительно определенной квадратичной формой. Используя (43) и (37), ее можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} RT^L &= v^S (S^S(T^S - T^L) + m^S n^S(\phi^S - \mu^L)) + \\ &+ w^S (E^S - E_l^S + \Lambda_{zz}^S - \rho^S \mu^L - T^L S^S) = \\ &= v^S (m^S n^S(\phi^S - \mu^L) + S^S(T^S - T^L)) + \\ &+ w^S (\lambda_{zz}^S + \rho^S(\phi^S - \mu^L) + S^S(T^S - T^L)). \end{aligned}$$

Как уже указывалось, в зависимости от температуры граница кристалл–жидкость может быть либо атомно-шероховатой, либо атомно-гладкой. Природа поверхности может накладывать (или не накладывать) определенные ограничения на ее динамику. Для обоих типов поверхности выполняется соотношение

$$\Lambda_{zz}^S - E_l^S = p^L. \quad (44)$$

Шероховатая граница. Используя принцип Онсагера, получаем

$$\begin{aligned} v^S &= \alpha (m^S n^S(\phi^S - \mu^L) + S^S(T^S - T^L)) + \\ &+ \eta (\lambda_{zz}^S + \rho^S(\phi^S - \mu^L) + S^S(T^S - T^L)), \\ w^S &= \eta (m^S n^S(\phi^S - \mu^L) + S^S(T^S - T^L)) - \\ &+ \nu (\lambda_{zz}^S + \rho^S(\phi^S - \mu^L) + S^S(T^S - T^L)), \end{aligned} \quad (45)$$

причем матрица кинетических коэффициентов $\begin{pmatrix} \alpha & \eta \\ \eta & \nu \end{pmatrix}$ положительно определена.

Гладкая граница. Гладкость поверхности подразумевает ее неподвижность относительно решетки:

$$w^S = 0.$$

Для скорости газа возбуждений получаем усеченный вариант (45):

$$v^S = \alpha (m^S n^S(\phi^S - \mu^L) + S^S(T^S - T^L)) \quad (46)$$

и кинетический коэффициент $\alpha > 0$.

3.3.2. Граница кристалл–стенка

Здесь мы получим граничные условия для поверхности раздела между кристаллом гелия и некоторым нормальным твердым телом (как, например, кварц в эксперименте [17]), иначе говоря, «стенкой». Под стенкой будем подразумевать макроскопически плоскую бесструктурную среду. Стенка характеризуется отсутствием в ней потока массы (т. е. потока массы сквозь границу). Стенка, однако, может обеспечивать произвольный поток тепла, обозначим его

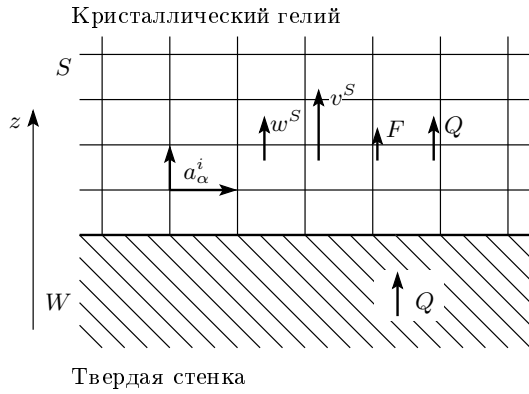


Рис. 5. Граница кристалл-стенка

Q , а температуру стенки T^W (см. рис. 5). Для описания стенки требуется меньше переменных, чем для жидкости, неудивительно поэтому, что получающиеся уравнения несколько проще.

Так же, как и для границы кристалл-жидкость, фактические граничные условия зависят от микроскопической структуры поверхности. Имеются две качественно различные возможности.

Гладкая граница. Легко себе представить гладкую базисную плоскость, прилегающую к атомно-гладкой соизмеримой стенке. Эта плоскость будет неподвижна относительно стенки, так как для ее движения потребовалось бы образование зародышей новых кристаллических слоев. Такая граница аналогична гладкой границе между кристаллом и жидкостью, естественно назвать ее тоже гладкой. Граничное условие на ней тривиально: $w^S = v^S = 0$.

Шероховатая граница. Другая, гораздо более интересная ситуация, реализуется, например, если поверхность слегка наклонена по отношению к базисной плоскости. Такие плоскости могут двигаться за счет образования новых узлов на крае. Это означает, что на скорость решетки у поверхности не наложено никаких связей. Другими словами, вакансии могут свободно рождаться и исчезать на такой поверхности (в этом смысле такую поверхность можно рассматривать как лист дислокаций, расположенный в плоскости раздела, который служит источником или стоком вакансий; ср. с рассуждениями, используемыми в работе [19] для описания механизма пластичности поликристаллов). Назовем такую поверхность шероховатой.

Таким образом, граница кристалл-стенка тоже может быть гладкой или шероховатой. Предлагаемый механизм роста возможен только при наличии шероховатой границы. В этом случае, применяя под-

ход, аналогичный использованному для жидкости, запишем законы сохранения:

$$\begin{cases} S^S(v^S + w^S) = R + Q/T^W, \\ w^S(E^S - E_l^S + \Lambda_{zz}^S) + v^S(T^S S^S + m^S n^S \phi^S) = Q, \\ v^S m^S n^S + \rho^S w^S = 0. \end{cases}$$

Здесь снова R — поверхностная диссипативная функция,

$$\begin{aligned} RT^W &= v^S \left(\frac{m^S n^S}{\rho^S} (E^S - E_l^S + \Lambda_{zz}^S - \right. \\ &\quad \left. - \rho^S \phi^S - T^W S^S) + S^S (T^W - T^S) \right) = \\ &= v^S \left(\frac{m^S n^S}{\rho^S} \lambda_{zz}^S + \left(1 - \frac{m^S n^S}{\rho^S} \right) S^S (T^W - T^S) \right). \end{aligned}$$

Она должна быть положительной, скорость газа квазичастиц на поверхности тогда определится выражением

$$v^S = \beta \left(\frac{m^S n^S}{\rho^S} \lambda_{zz}^S + \left(1 - \frac{m^S n^S}{\rho^S} \right) S^S (T^W - T^S) \right), \quad (47)$$

причем $\beta > 0$.

3.4. Скорость роста

Применим полученные уравнения к задаче о росте граней кристаллического гелия. В этой системе два типа элементарных возбуждений — фононы и вакансии. Вакансии при этом играют решающую роль носителей массы, масса каждой из них равна массе атома гелия с обратным знаком: $m = -m_{He}$. По-прежнему ограничимся линейным приближением в одномерном случае.

Плотность квазиимпульса тогда (индекс « S » писать не будем) пропорциональна скорости: $K = \rho_K v$, где

$$\rho_K \sim \frac{\hbar}{a^4} \frac{T^4}{\Theta_D^4 c}. \quad (48)$$

Здесь Θ_D — температура Дебая, c — скорость звука в кристалле, a — период решетки. Последнее равенство связано с тем, что при низких температурах количество вакансий экспоненциально мало и квазиимпульс определяется в основном фононами. Поэтому ρ_K с точностью до коэффициента совпадает с плотностью нормальной компоненты в сверхтекучей жидкости, $\rho_K \sim \rho_n \sim T^4/\hbar^3 c^5$ (см. [20]).

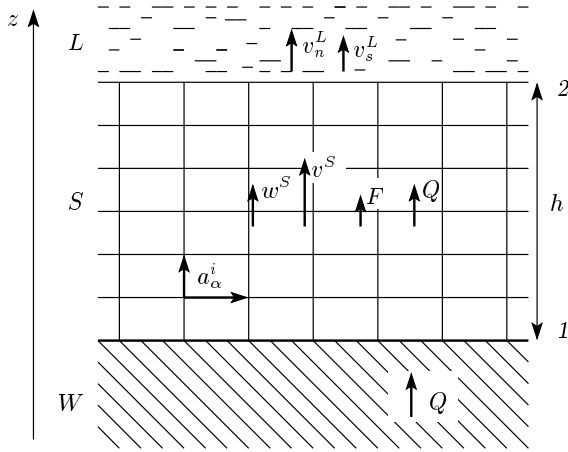


Рис. 6. Рост кристалла

Далее нам потребуется принять во внимание трение между газом возбуждений и решеткой, т.е. учесть (редкие) процессы переброса. Для их описания в τ -приближении введем соответствующее время релаксации τ_U — «время пробега между столкновениями с перебросом». Соответствующий член необходимо добавить в формулу (42):

$$0 = \dot{K} = -mn\nabla\phi - S\nabla T - \frac{K}{\tau_U} = -mn\nabla\phi - S\nabla T - \rho_K \frac{v}{\tau_U}.$$

Необходимо отметить, что τ_U , вообще говоря, определяется столкновениями и фононов, и вакансий, хотя концентрация последних значительно ниже. Например, если ширина вакансионной зоны достаточно мала, то вероятность переброса в вакансионном столкновении значительно выше, чем в фононном. Этот эффект может оказаться более существенным, чем различие в концентрациях.

Чтобы оценить скорость роста гладкой грани, запишем градиент температуры в виде $\nabla T = (T_2 - T_1)/h$, где индексы «1» и «2» будут обозначать соответственно границы со стенкой и с жидкостью (см. рис. 6). Аналогично для химического потенциала $\nabla\phi = (\phi_2 - \phi_1)/h$. Используем граничные условия (46) и (47):

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)v &= \alpha\beta \left(mn(\phi_2 - \mu^L) + S(T_2 - T^L) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{mn}{\rho} \lambda_{zz1} + \left(1 - \frac{mn}{\rho} \right) S(T^W - T_1) \right) = \\ &= \alpha\beta \left\{ mn(\phi_2 - \phi_1) + S(T_2 - T_1) + S(T^W - T^L) + \right. \\ &\quad \left. + mn \left(\phi_1 - \mu^L + \frac{1}{\rho} (\lambda_{zz1} - S(T^W - T_1)) \right) \right\} = \\ &= \alpha\beta \left\{ -\rho_K h \frac{v}{\tau_U} + S(T^W - T^L) + \right. \\ &\quad \left. + mn \left(\frac{1}{\rho} (\lambda_{zz1} - S(T^W - T_1)) + \phi_1 - \mu^L \right) \right\}. \end{aligned}$$

Другими словами,

$$v \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{\rho_K h}{\tau_U} \right) = S(T^W - T^L) + mn \left(\frac{1}{\rho} (\lambda_{zz1} - S(T^W - T_1)) + \phi_1 - \mu^L \right),$$

где (согласно формулам (37) и (44))

$$\begin{aligned} \lambda_{zz1} &= \Lambda_{zz1} - T_1 S_1 - E_{11} + E_1 - \phi_1 \rho_1 = \\ &= p^L - T_1 S_1 + E_1 - \phi_1 \rho_1. \end{aligned}$$

В состоянии равновесия $\lambda_{zz1} = 0$, $\phi_1 = \mu^L$, $T^W = T^L = T_1$. Если температура и давление отличаются от равновесных на ΔT и Δp , то скорость роста v_g определяется выражением

$$\begin{aligned} -v_g \frac{\rho}{mn} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{\rho_K h}{\tau_U} \right) &= -S\Delta T + \\ &+ mn \left(\frac{1}{\rho} (\Delta p - S\Delta T_1 - T\Delta S_1 + \Delta E_1 - \right. \\ &\quad \left. - \rho\Delta\phi_1 - \phi\Delta\rho_1 + S\Delta T_1) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta\phi_1 + \frac{S^L\Delta T - \Delta p}{\rho^L} \right) = \\ &= -S\Delta T + mn \left(\frac{\Delta p}{\rho} + \frac{S^L\Delta T - \Delta p}{\rho^L} \right) = \\ &= - \left(S - S^L \frac{mn}{\rho^L} \right) \Delta T + mn \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^L} \right) \Delta p, \quad (49) \end{aligned}$$

где использованы формула (33), термодинамическое тождество для жидкости $d\mu = (dp - SdT)/\rho$ и очевидное соотношение $v_g = -v_{mn}/\rho$.

Положим теперь в этом уравнении второй член в правой части равным нулю: это стандартная постановка эксперимента по измерению теплопроводности. Поток тепла $Q = vTS$ можно выразить как

$$Q = -\frac{\Delta T}{R_{K1} + R_{K2} + h/\kappa},$$

где R_{K1} и R_{K2} — поверхностные тепловые сопротивления Капицы на границах кристалл–стенка и кристалл–жидкость, а κ — объемная теплопроводность самого кристалла. Учитывая, что $R_{K2} \ll R_{K1}$, $mn \ll \rho$ и $\rho - \rho^L \ll \rho$, сразу получаем

$$R_{K1} = \frac{1}{\beta TS^2}, \quad \kappa = \frac{\tau_U TS^2}{\rho_K}.$$

Следовательно, скорость роста определяется выражением

$$v_g = \frac{mn}{\rho(TS^2 R_K + TS^2 h/\kappa)} \left(S\Delta T + mn \frac{\rho - \rho^L}{\rho^2} \Delta p \right).$$

Строго говоря, последнее равенство подразумевает, что термодинамические свойства кристалла в основном определяются фононами, в то время как участие вакансий в рассматриваемом эффекте ограничивается переносом массы. Мы видим, что скорость роста определяется как отличием давления от равновесного, так и разностью температур жидкости и стенки.

В существующих экспериментах [17] температура ниже 100 мК. В этой области длина пробега фононов существенно больше размера образца и влияние фононов на ротоны пропорционально высокой степени малого отношения T/Θ_D . Следовательно, мы можем рассматривать вакансионный газ независимо и пренебречь влиянием фононов. Таким образом, для сравнения с экспериментом необходимо подставить вакансионные величины в формулу (49). Никаких данных о градиентах температур в обсуждаемой экспериментальной работе не приводится, поэтому будем считать систему изотермичной: $\Delta T = 0$.

Кинетические коэффициенты α и β определяются вероятностью поглощения вакансий при рассеянии на границе. В этом случае скорость газа вакансий v на поверхности должна быть выражена через коэффициент аккомодации W (отношение числа поглощенных вакансий к полному числу падающих):

$$v \sim \frac{\Delta f}{f} V_T W, \quad (50)$$

где $\Delta f \sim f m \Delta \mu / T$ — разность между функциями распределения падающих и отраженных частиц, а $V_T \sim \sqrt{T/m^*}$ — тепловая скорость. Здесь m^* — эффективная масса вакансии вблизи дна разрешенной зоны, по порядку величины она может быть выражена через ширину зоны Δ :

$$m^* \sim \hbar^2 / (a^2 \Delta).$$

Коэффициент аккомодации W как вероятность любого неупругого процесса при взаимодействии

квазичастицы с поверхностью примерно равен квадрату отношения периода решетки к длине волны де Бройля возбуждения [21]:

$$W \sim \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \sim \frac{T}{\Delta}.$$

Сравнивая теперь формулы (50), (46) и (47), получаем значения коэффициентов

$$\alpha \sim \beta \sim \frac{a}{n\hbar} \sqrt{\frac{T}{\Delta}}.$$

Оценить время релаксации по отношению к нормальным (без переброса) вакансионным столкновениям можно следующим образом:

$$\tau_N \sim \frac{1}{n\sigma V_T},$$

где $\sigma \sim a^2$ — сечение рассеяния вакансий друг на друге. Время релаксации с процессами переброса экспоненциально больше: $\tau_U \sim \tau_N \exp(\Delta_U/T)$, где характерная энергия $\Delta_U < \Delta$.

Используя очевидное соотношение $\rho_K = m^* n$ и формулу (49), получаем скорость роста

$$\begin{aligned} v_g &\sim \frac{m^2 n^2 (\rho - \rho^L)}{(1/\alpha + 1/\beta + m^* n / \tau_U) \rho^3} \Delta p \sim \\ &\sim \frac{m^2 n^2 (\rho - \rho^L)}{\left(\sqrt{\Delta/T} n \hbar / a + \hbar m^* n^2 a^2 V_T \exp(-\Delta_U/T) \right) \rho^3} \Delta p \sim \\ &\sim \frac{a^4 (\rho - \rho^L)}{\hbar \rho} \left(\sqrt{\frac{\Delta}{T}} e^{\epsilon_0/T} + \frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{T}{\Delta}} e^{-\Delta_U/T} \right)^{-1} \Delta p. \end{aligned}$$

Здесь для оценки мы положили $\rho a^3 \sim m$ и $n a^3 \sim \exp(-\epsilon_0/T)$, где ϵ_0 — энергия дна зоны вакансий. Подвижность грани (величина, введенная в работе [17] формулой $\mu_f^* = v_g / \Delta p$) оказывается равной

$$\begin{aligned} \mu_f^* &\sim \frac{a^4}{\hbar} \frac{\rho - \rho^L}{\rho} \times \\ &\times \left(\sqrt{\frac{\Delta}{T}} e^{\epsilon_0/T} + \frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{T}{\Delta}} e^{-\Delta_U/T} \right)^{-1}. \quad (51) \end{aligned}$$

Наилучшее соответствие с экспериментальными данными, приведенными в этой работе, достигается, если считать $\epsilon_0 \sim \Delta \sim 2\Delta_U \sim 100$ мК.

4. ГИДРОДИНАМИКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Обычная процедура вывода гидродинамических уравнений, основанная на использовании законов сохранения, неприменима для системы, находящейся

во внешнем поле. Однако для гравитационного поля оказывается возможным [22] легко найти точные уравнения. Это непосредственно связано с общим принципом относительности, т. е. с возможностью исключить гравитационное поле подходящей заменой координат. Для рассматриваемого ниже однородного поля Земли эта замена эквивалентна переходу в свободно падающую систему отсчета.

В п. 4.1 таким образом обобщим стандартные гидродинамические уравнения сверхтекучей жидкости: обычные уравнения будут записаны в свободно падающей системе координат, а затем все члены преобразованы в лабораторную систему.

Нужно отметить, что попытка угадать правильные уравнения, искусственно добавив члены, связанные с полем тяжести, чревата проблемами. В частности, не представляется возможным получить вид диссипативных членов: в присутствии поля среда неоднородна даже в состоянии равновесия.

Из полученных уравнений следует неожиданный результат: общеизвестно [23], что сверхтекучая жидкость обладает свойством «сверхтеплопроводности». Мы покажем, что сверхтекучая жидкость, будучи помещенной в гравитационное поле, в некотором смысле теряет эту исключительность.

Сверхтеплопроводность объясняется своеобразным конвективным механизмом переноса тепла — всякая разность температур в гелии II приводит к возникновению в нем противотока нормального и сверхтекучего движений, компенсирующих друг друга по количеству переносимой ими массы. Тепло при этом переносится нормальным движением и поток тоже может иметь конечную величину при сколь угодно малой разности температур. Таким образом, в отличие от описываемой законом Фурье теплопроводности в обычных жидкостях, перенос тепла происходит без диссипации [24]. Экспериментально наблюдаемое иногда отклонение от этого правила при больших потоках тепла обычно связывается с рождением вихрей. Такой механизм [25] приводит к сложной нелинейной зависимости градиента температуры от потока тепла. Оказывается, что в поле тяжести Земли гелий II при пропускании через него тепла неизотермичен даже при отсутствии вихрей.

Следуя работе одного из авторов [22], покажем, что в поле тяжести теплопередача даже в сверхтекучей жидкости описывается законом Фурье. В п. 4.2 мы определим «эффективную теплопроводность» гелия II. Понять это явление можно следующим образом. Поле тяжести Земли нарушает однородность системы, создавая, в частности, градиент давления по высоте. Эта неоднородность и явля-

ется причиной диссипации нормального движения. Другими словами, гравитация является механизмом трения между нормальной компонентой и Землей. Из-за этого трения в жидкости появляется конечный градиент температуры, пропорциональный (в линейном приближении) потоку энергии⁷⁾. Для простоты ограничимся одномерной задачей, когда влиянием стенок можно пренебречь, а поток энергии направлен вертикально. При помощи линеаризованных гидродинамических уравнений найдем градиент температуры, связанный с потоком тепла.

Найденное эффективное тепловое сопротивление увеличивается по мере приближения к температуре сверхтекучего перехода. В п. 4.3 покажем, что оно расходится в λ -точке, и вычислим его критическое поведение.

4.1. Уравнения

Уравнения сверхтекучей гидродинамики для системы, помещенной во внешнее поле, отличаются от уравнений, описывающих изолированную жидкость. Для нахождения изменений, связанных с полем тяжести, воспользуемся принципом общей относительности. В однородном поле тяжести Земли \mathbf{g} определим неинерциальную свободно падающую систему отсчета \tilde{K} . Она движется с постоянным ускорением \mathbf{g} по отношению к лабораторной системе $K(t, x^i)$. Потребуем, чтобы при $t = 0$ эти системы совпадали и их относительная скорость была равна нулю. Это обеспечит совпадение всех гидродинамических переменных⁸⁾ в этот момент. В системе \tilde{K} гравитация отсутствует, поэтому (в ньютоновском пределе) жидкость описывается обычными уравнениями [5]

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= -\frac{\partial \tilde{j}^i}{\partial x^i}, \\ \frac{\partial \tilde{j}^k}{\partial t} &= -\frac{\partial \tilde{\Pi}^{ik}}{\partial x^i}, \\ \frac{\partial \tilde{v}_s^k}{\partial t} &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x^k}, \\ \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} &= -\frac{\partial \tilde{Q}^i}{\partial x^i}, \end{aligned} \right. \quad (52)$$

где величины с тильдой относятся к \tilde{K} , ρ — плотность жидкости, \mathbf{j} — поток массы, \mathbf{v}_s — скорость

⁷⁾ Заметим, что естественная конвекция в обычной жидкости законом Фурье не описывается.

⁸⁾ Являющихся функциями ρ , \mathbf{j} , \mathbf{v}_s и E , но не их производных по времени.

сверхтекучего движения, E — плотность энергии. Потoki в уравнениях (52) определяются выражениями

$$\tilde{\Pi}^{ik} = v_s^i j^k + v_n^k j^i - \rho v_n^k v_s^i + p \delta_{ik} + \tilde{\pi}^{ik}, \quad (53)$$

$$\tilde{\pi}^{ik} = -\eta \left(\frac{\partial v_n^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_n^k}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_n^l}{\partial x^l} \delta^{ik} \right) - \delta^{ik} \left(\zeta_1 \frac{\partial(j^i - \rho v_n^i)}{\partial x^i} + \zeta_2 \frac{\partial v_n^l}{\partial x^l} \right), \quad (54)$$

$$\tilde{\Phi} = \mu + v_s^2/2 + \tilde{\phi}, \quad (55)$$

$$\tilde{\phi} = -\zeta_3 \frac{\partial(j^i - \rho v_n^i)}{\partial x^i} - \zeta_1 \frac{\partial v_n^i}{\partial x^i} \quad (56)$$

и

$$\tilde{Q}^i = \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) j^i + ST v_n^i + v_n^i v_n^k (j^k - \rho v_s^k) + (j^i - \rho v_n^i) \tilde{\phi} + v_n^k \tilde{\pi}^{ik} - \kappa \frac{\partial T}{\partial x^i}. \quad (57)$$

Здесь \mathbf{v}_n — скорость нормального движения, p — давление, μ — химический потенциал, S — плотность энтропии, T — температура, η , ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , κ — кинетические коэффициенты. Как обычно, мы выписываем не все возможные кинетические коэффициенты, а лишь наибольшие. Вообще говоря, диссипация в сверхтекучей жидкости описывается тринадцатью кинетическими коэффициентами, а не пятью (отмечено А. Кларком в 1963 г., см. обсуждение этого вопроса в работе [24]).

Чтобы переписать эти уравнения в лабораторной системе, необходимо перевести все члены в левых частях равенств (52) в K . Это достигается преобразованием

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho, \\ \tilde{\mathbf{j}} &= \mathbf{j} - \mathbf{g}t\rho, \\ \tilde{\mathbf{v}}_s &= \mathbf{v}_s - \mathbf{g}t, \\ \tilde{E} &= E - \mathbf{j} \cdot \mathbf{g}t + \rho g^2 t^2/2. \end{aligned}$$

При $t = 0$ получаем

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} &= 0, \\ \frac{\partial j^k}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Pi}^{ik}}{\partial x^i} &= \rho g^k, \\ \frac{\partial v_s^k}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x^k} &= g^k, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{Q}^i}{\partial x^i} &= j^k g^k. \end{aligned} \right. \quad (58)$$

4.2. Эффективная теплопроводность

При стационарном течении все временные производные в уравнениях (58) исчезают. Рассмотрим одномерную систему, в которой все скорости и потоки вертикальны. Направим ось z вниз по \mathbf{g} . В типичном эксперименте [26] тепло переносится в сверхтекучем противотоке, при котором нормальная и сверхтекучая скорости направлены навстречу друг другу и обеспечивают нулевой суммарный поток массы. Условие $j = 0$, таким образом, выполняется по всей высоте ячейки. В этой ситуации первое уравнение в (58) тривиализуется, а оставшиеся три имеют вид

$$\begin{cases} \Pi' = \rho g, \\ \phi' = g, \\ Q' = 0, \end{cases} \quad (59)$$

где штрих обозначает производную $\partial/\partial z$.

В линейном (по скоростям и градиентам температуры) приближении потоки в уравнениях (59) выглядят следующим образом:

$$\Pi = p + \zeta_1 (\rho v_n)' - \zeta_2 v_n' - \frac{4}{3} \eta v_n', \quad (60)$$

$$\phi = \mu + \zeta_3 (\rho v_n)' - \zeta_1 v_n', \quad (61)$$

$$Q = TS v_n - \kappa T'. \quad (62)$$

Удерживая младшие по градиентам нетривиальные члены (таким образом, считая влияние \mathbf{g} малым) и исключая μ' при помощи термодинамического тождества $\rho d\mu = dp - SdT$ из формул (59), (60) и (61), получаем

$$A' v_n' + B v_n + ST' = 0,$$

где мы обозначили

$$A = 2\rho\zeta_1 - \frac{4}{3}\eta - \zeta_2 - \rho^2\zeta_3,$$

$$B = (\zeta_1' - \rho\zeta_3')\rho' + (\zeta_1 - \rho\zeta_3)\rho''.$$

Окончательно, используя формулы (59) и (62), получаем равенство, формально имеющее вид закона Фурье:

$$T' = -\varrho Q, \quad (63)$$

где роль эффективного теплового сопротивления играет величина

$$\varrho = \frac{1}{TS^2} \left(B - \frac{S'}{S} A \right). \quad (64)$$

Мы видим, что в линейном приближении градиент температуры пропорционален потоку тепла. Коэффициент ϱ имеет второй порядок по неоднородности системы, т. е. $\varrho \propto g^2$. При учете членов более высокого порядка один и тот же поток тепла, направленный вверх и вниз, приводит к различающимся градиентам температуры.

Окрестность T_λ

Эффект, обсуждавшийся в предыдущем параграфе, проявляется сильнее в окрестности λ -точки. Для определения критического поведения эффективной теплопроводности нам потребуется оценить кинетические коэффициенты, входящие в формулу (64).

Это может быть сделано с использованием идей динамического подобия [27]. Как уже указывалось, индекс теплоемкости в гелии очень мал, будем ниже считать его равным нулю. Плотность сверхтекучей компоненты в этом случае $\rho_s \propto r_c^{-1} \propto t^{2/3}$, где r_c — корреляционная длина (см. п. 2.4), а t — приведенная температура, $t = T_\lambda - T$.

Затухание второго звука [5] на границе критической области обратно пропорционально корреляционной длине:

$$r_c^{-1} \propto \text{Im} \frac{\omega}{u_2} = \frac{\omega^2}{2\rho u_2^3} \times \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\rho \zeta_1 \right) + \frac{\kappa \rho}{T} \frac{\partial T}{\partial S} \right). \quad (65)$$

Здесь $\rho_n = \rho - \rho_s$, ω и u_2 — соответственно комплексная частота и скорость второго звука. Последняя определяется выражением

$$u_2 = \frac{S}{\rho^{1/2}} \sqrt{\frac{\partial T}{\partial S} \frac{\rho_s}{\rho_n}} \propto t^{1/3}.$$

Далее, полагая, что на краю критической области все члены в выражении (65) вносят одинаковый вклад в затухание второго звука, находим кинетические коэффициенты:

$$\eta \propto \zeta_1 \propto \zeta_2 \propto \zeta_3 \propto r_c u_2 \rho_s^{-1} \propto t^{-1}. \quad (66)$$

Для нахождения главного члена в пространственных производных в формуле (64) заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \propto \rho g \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)_T \propto -\frac{\rho g}{T} \frac{dT_\lambda}{dp} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_p.$$

Здесь производная dT_λ/dp берется по кривой фа-

зового перехода. Подставляя последнее выражение в (64) и используя (66), получаем⁹⁾

$$\varrho \propto \frac{g^2}{t^2}. \quad (67)$$

Показав, что в сверхтекучей жидкости может присутствовать конечный градиент температуры, интересно выяснить его максимальное значение. Строго говоря, полученное значение эффективной теплопроводности (выведенное в линейном приближении) относится только к малым скоростям и градиентам. Поэтому они неприменимы вблизи критической скорости. Для оценки, однако, воспользуемся полученными результатами вне их области применимости. Как было показано в разд. 2, критический поток тепла Q_c в окрестности λ -точки ведет себя по закону $Q_c \propto t^{4/3}$. Из формулы (67) видно, что максимальный градиент температуры T'_c увеличивается по мере приближения к T_λ :

$$T'_c \propto t^{-2/3}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Двухжидкостная гидродинамика имеет давнюю историю плодотворного применения к исследованию квантовых жидкостей и кристаллов. Тем не менее остался ряд явлений, прояснить которые можно с ее помощью. Среди них критические скорости, линейный рост гладких кристаллических граней и диссипативная теплопередача в сверхтекучей жидкости.

Считалось, что разрушение сверхтекучести в узких отверстиях имеет следующую природу [3]. Пока сечение не слишком мало, критическая скорость не зависит от температуры и увеличивается по мере сужения отверстия. Именно такое поведение характерно для фейнмановской критической скорости, связанной с рождением вихрей.

В достаточно узких отверстиях или при температурах, достаточно близких к T_λ , «вихревая» критическая скорость становится столь большой, что механизм разрушения сверхтекучести и его свойства меняются: критическая скорость больше не зависит от сечения отверстия, но уменьшается с ростом температуры. Такое поведение обычно связывают [3] с механизмом Иорданского – Лангера – Фишера [28]. Однако из-за отсутствия надежной информации о профиле отверстий серьезному численному сравнению с экспериментом эта теория не подвергалась.

⁹⁾ Необходимо отметить, что с нашей точностью нельзя отличить T_λ от $T_c(Q)$, вводимой некоторыми исследователями [4]. В линейном приближении эти температуры совпадают.

С другой стороны, экспериментально наблюдаемое поведение критической скорости можно связать с описанным в разд. 2 критерием устойчивости. Другими словами, мы предлагаем альтернативное объяснение экспериментальных результатов, предполагая, что в таких условиях достигается термодинамический предел w_c .

Необходимо отметить, что использованный нами подход к критической скорости как к пределу устойчивости, схож с подходом, применявшимся в работе Кремера [29]. Фактически, однако, предлагаемые там неравенства не являются термодинамическими. Но численные значения критической скорости, полученные Кремером на основе фононно-ротонной модели, близки к изображенным на рис. 1.

Предлагаемое в разд. 3 объяснение линейного роста гладких граней неплохо согласуется с экспериментом [17]. Кроме этого, из него следует несколько новых предсказаний.

Подвижность граней имеет максимум при некоторой положительной температуре. Конечную подвижность при нулевой температуре (если она будет обнаружена экспериментально) следует считать сильным аргументом в пользу существования нулевых вакансий (см. [30, 31]¹⁰).

Скорость роста должна зависеть от высоты образца.

Кристалл растет на границе со стенкой. Этот факт можно было бы обнаружить экспериментально, наблюдая за маленькими телами, замороженными в кристалл в его верхней части.

Мы благодарны Р. В. Данкану, К. О. Кешишеву, В. И. Марченко, А. Я. Паршину, Д. А. Сергацкову и И. А. Фомину за полезное обсуждение. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 06-02-17369-а, 06-02-17281-а), а также в рамках программы поддержки ведущих научных школ (НШ-7018.2006.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1995).
2. A. F. Andreev and L. A. Melnikovsky, *J. Low Temp. Phys.* **135**, 411 (2004).
3. E. Varoquaux, W. Zimmermann, and O. Avenel, in *Excitations in Two-Dimensional and Three-Dimensional Quantum Fluids*, ed. by A. F. C. Wyatt and H. J. Lauter, NATO ASI Series, Plenum Press, New York – London (1991), p. 343.
4. R. V. Duncan, G. Ahlers, and V. Steiberg, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1522 (1988).
5. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
6. R. J. Donnelly and P. H. Roberts, *J. Low Temp. Phys.* **27**, 687 (1977).
7. R. J. Donnelly, J. A. Donnelly, and R. N. Hills, *J. Low Temp. Phys.* **44**, 471 (1981).
8. J. A. Flaten, C. A. Lindesmith, and W. Zimmermann, *J. Low Temp. Phys.* **101**, 743 (1995).
9. B. D. Josephson, *Phys. Lett.* **21**, 608 (1966).
10. J. A. Lipa, J. A. Nissen, D. A. Stricker, D. R. Swanson, and T. C. P. Chui, E-print archives, cond-mat/0310163.
11. А. Ф. Андреев, Д. И. Пушкаров, *ЖЭТФ* **89**, 1883 (1985).
12. А. Ф. Андреев, Я. Б. Базалий, *ЖЭТФ* **98**, 1480 (1990).
13. A. F. Andreev, Ya. B. Bazaliy, and A. D. Savishchev, *J. Low Temp. Phys.* **88**, 101 (1992).
14. A. F. Andreev and L. A. Melnikovsky, *ЖЭТФ* **120**, 1457 (2001).
15. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Физматлит, Москва (1979).
16. P. Nozières, in *Solids Far From Equilibrium*, ed. by C. Godrèche, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1991), p. 1.
17. J. P. Ruutu, P. J. Hakonen, A. V. Babkin, A. Ya. Parshin, J. S. Penttilä, J. P. Saramäki, and G. Tvalashvili, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4187 (1996).
18. C. Herring, *J. Appl. Phys.* **21**, 437 (1950).
19. И. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **44**, 1349 (1963).
20. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (2000).
21. А. Ф. Андреев, *УФН* **105**, 113 (1971).
22. L. A. Melnikovsky, *J. Low Temp. Phys.* **138**, 61 (2005).

¹⁰ Недавно появились экспериментальные данные [32], указывающие на то, что «неклассическое вращение» твердого гелия [31] не связано с существованием нулевых вакансий.

23. J. S. Langer and J. D. Reppy, *Progr. Low Temp. Phys.*, Vol. VI, ed. by C. J. Gorter, North-Holland, Amsterdam (1970), ch. 1.
24. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
25. C. J. Gorter and J. H. Mellink, *Physica* **15**, 285 (1949).
26. D. A. Sergatskov, A. V. Babkin, S. T. P. Boyd, R. A. M. Lee, and R. V. Duncan, *J. Low Temp. Phys.* **134**, № 1/2, 517 (2004).
27. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).
28. L. Kramer, *Phys. Rev.* **179**, 149 (1969).
29. W. H. Keesom and A. P. Keesom, *Physica* **III**, 359 (1936).
30. G. A. Lengua and J. M. Goodkind, *J. Low Temp. Phys.* **79**, 251 (1990).
31. E. Kim and M. H. W. Chan, *Nature* **427**, 225 (2004).
32. A. S. Rittner and J. D. Reppy, E-print archives, cond-mat/0604528.