

# ЛАВИНООБРАЗНАЯ ДИНАМИКА МАГНИТНОГО ПОТОКА В ДВУМЕРНОМ ДИСКРЕТНОМ СВЕРХПРОВОДНИКЕ

*С. Л. Гинзбург, А. В. Накин, Н. Е. Савицкая\**

*Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова  
188300, Гатчина, Россия*

Поступила в редакцию 21 мая 2006 г.

В работе изучено критическое состояние двумерного дискретного сверхпроводника, помещенного во внешнее магнитное поле. Обнаружено, что критическое состояние такой системы является самоорганизованным в обобщенном смысле, т. е. представляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством лавин. Лавина характеризуется вхождением в систему магнитного потока. Размеры возникающих лавин, т. е. величины изменений магнитного потока, демонстрируют степенное распределение. Также показано, что размер возникающей в критическом состоянии лавины и величина вызвавшего его изменения внешнего магнитного поля являются статистически независимыми величинами.

PACS: 05.65.+b, 74.50.+r

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в ряде экспериментов по изучению критического состояния жестких сверхпроводников второго рода, а также дискретных сверхпроводников (многоконтактных СКВИДов) была обнаружена лавинообразная динамика магнитного потока [1–3]. Это означает, что при равномерном изменении внешнего магнитного поля магнитный поток в образце менялся скачкообразно, причем скачки эти были случайны во времени и имели различную величину. Изучение статистики данных скачков показало, что функция распределения их размеров является степенной с показателем степени, близким к единице. Полученные данные позволили провести параллели между критическим состоянием сверхпроводников и явлением самоорганизованной критичности (СОК).

Концепция самоорганизованной критичности была предложена для объяснения общих черт поведения гигантских диссипативных динамических систем [4]. Согласно ее основным положениям, под воздействием малых внешних возмущений такие системы приходят в самоподдерживающееся самоорганизованное критическое состояние, которое представ-

ляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством динамических процессов — лавин. Лавины могут быть различны по размеру, и классическим математическим критерием реализации в системе СОК является степенное поведение функции распределения размеров лавин. Тип поведения, называемый СОК, присущ многим системам от земной коры до рынков акций [4], для теоретического и численного изучения поведения таких систем был разработан ряд математических моделей (например, [5]).

Попытки применить концепцию самоорганизованной критичности для объяснения лавинообразной динамики в жестких сверхпроводниках второго рода были предприняты в целом ряде работ (см., например, обзор [6] и ссылки к нему). При этом отмечается, что концепция СОК в ее классической формулировке может дать объяснение лавинообразной динамики магнитного потока лишь в случае, если считать, что лавина возникает только за счет изменения внешнего магнитного поля. Поскольку концепция СОК не учитывает влияния температурных факторов на поведение системы, она неприменима для объяснения природы гигантских лавин, возникающих за счет термомагнитных неустойчивостей, которые изучались, например, в работе [7]. В настоящей работе мы будем рассматривать только лавины,

\*E-mail: savitska@thd.pnpi.spb.ru

возникающие за счет изменения внешнего магнитного поля.

В этом случае привлечение концепции самоорганизованной критичности к объяснению лавинообразной динамики потока в жестких сверхпроводниках второго рода привело к созданию математической модели движения вихрей в такой системе [8, 9]. Однако, как указывают сами авторы данной модели, она является феноменологической, представляя движение вихря в жестком сверхпроводнике как результат суммарного воздействия на него сил магнитного отталкивания и сил пиннинга, учитывая таким образом лишь основные особенности вихревой динамики, не рассматривая всех деталей явления.

В то же время с момента открытия высокотемпературной сверхпроводимости активно изучаются магнитные свойства гранулированных сверхпроводников. Эти дискретные системы представляют собой так называемую джозефсоновскую среду [10] — отдельные сверхпроводящие гранулы, соединенные джозефсоновскими переходами. Будучи помещенной в магнитное поле, величина которого меньше первого критического поля гранул, такая дискретная система ведет себя как жесткий сверхпроводник второго рода [11]. В этом случае гранулированный сверхпроводник хорошо воспроизводит все магнитные свойства жестких сверхпроводников второго рода. Это утверждение справедливо также и для искусственно созданных дискретных сверхпроводников, таких как решетки джозефсоновских контактов (многоконтактные СКВИДы) [12, 13].

Как известно, магнитные свойства дискретных сверхпроводников зависят от основного параметра системы  $V \sim j_c a^3 / \Phi_0$  (где  $j_c$  — плотность критического тока в контактах,  $\Phi_0$  — квант магнитного потока,  $a$  — среднее межконтактное расстояние) [12, 13]. В случае, когда  $V \ll 1$ , система может рассматриваться как сверхпроводник без пиннинга. Если же условие  $V \ll 1$  не соблюдено, то гранулированный сверхпроводник, благодаря дискретности своей структуры, обладает свойством внутреннего пиннинга. В случае же  $V \gg 1$  мы имеем систему с сильным пиннингом и критическое состояние в ней может быть описано моделью Бина [12].

Более того, динамические свойства дискретного сверхпроводника описываются системой дифференциальных уравнений для калибровочно-инвариантной разности фаз на контактах системы [12, 14]. Данные уравнения выводятся непосредственно из уравнений Максвелла и соотношений Джозефсона, поэтому возникающая математическая модель учитывает все особенности критического поведения физи-

ческой системы. Это и является основным преимуществом модели, которой мы будем пользоваться в данной статье для описания магнитных свойств дискретного сверхпроводника, по сравнению, например, с феноменологической моделью [8]. Кроме того, описывающие модель уравнения достаточно просты для анализа.

Таким образом, основываясь на предположении об универсальности критического поведения для жестких сверхпроводников второго рода и дискретных сверхпроводников, мы надеемся, что результаты, полученные нами для дискретной системы при  $V > 1$ , могут быть также применены для описания критической динамики и вихрей в сверхпроводниках второго рода, которая наблюдалась в экспериментах [1, 2].

Основной задачей настоящей работы является теоретическое и численное изучение критического состояния в модели двумерного дискретного сверхпроводника (многоконтактного СКВИДа), помещенного во внешнее магнитное поле. Главный вопрос, рассматриваемый в данной статье, таков: является ли критическое состояние дискретного сверхпроводника в поставленных условиях самоорганизованным.

Заметим, что ранее мы уже изучали критическое состояние двумерного многоконтактного СКВИДа, который представлял собой квадратную решетку джозефсоновских контактов, соединенных двумя сверхпроводящими пластинами [15]. Мы установили, что критическое состояние в такой системе может считаться самоорганизованным в классическом смысле [4]. Это значит, что оно представляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством лавин, а распределение проинтегрированных по времени лавины импульсов напряжения, являющихся аналогом размера лавины, носит степенной характер.

В настоящей работе мы рассматриваем двумерную систему иной геометрии, имеющую вид решетки из сверхпроводящих ребер, на которых расположены джозефсоновские контакты. Такой вид системы больше соответствует экспериментально изучаемым дискретным сверхпроводникам. Также, в отличие от работы [15], в данной работе мы будем характеризовать лавину не импульсом напряжения, а величиной скачка магнитного потока, которая является аналогом изменения полной массы системы в классической модели СОК — модели кучи песка [5]. Это также связано с тем, что в экспериментах изучается именно эта характеристика [1–3].

Основываясь на ранее высказанном утвержде-

нии [16], что критическая динамика дискретных сверхпроводников, помещенных в достаточно малые внешние поля, подобна критическому поведению жестких сверхпроводников второго рода, мы надеемся, что полученные результаты будут применимы и для объяснения лавинообразной динамики в сверхпроводниках второго рода, которая наблюдается в экспериментах.

В данной работе мы стремились максимально точно смоделировать условия, в которых экспериментально изучается критическое состояние сверхпроводников. В связи с этим, помимо основной задачи изучения статистики изменений магнитного потока в критическом состоянии, возник ряд новых проблем, ранее не рассматривавшихся ни при изучении критического состояния сверхпроводников, ни при исследовании математических моделей СОК.

Первая из таких новых задач связана с режимом возмущения изучаемой системы.

Известно, что при численном изучении моделей систем с СОК применяется «нестационарный» метод возмущения системы. Это означает, что система возмущается вновь только после того, как лавина, вызванная предыдущим возмущением, закончилась, т. е. система пришла в метастабильное состояние [4, 5].

При экспериментальном же изучении критического состояния сверхпроводников используются два стационарных способа изменения внешнего магнитного поля  $H_{ext}$ : непрерывный и ступенчатый [1, 2].

При непрерывном изменении имеется некоторая скорость  $v = dH_{ext}/dt$ , с которой возрастает внешнее магнитное поле [1].

При ступенчатом изменении поля имеется некоторый фиксированный период времени  $T$ , когда поле не изменяется, а затем за пренебрежимо малый отрезок времени оно меняется скачком на определенную величину  $\delta h$  [2].

Известно, что в системах с самоорганизованным критическим состоянием длительности лавин представляют собой набор случайных времен и для конечной системы можно найти максимальную длительность лавины  $T_{max}$ . Таким образом, если в режиме стационарного ступенчатого изменения поля выбрать  $T \gg T_{max}$ , то любая лавина успеет завершиться до следующего изменения поля. При таком условии стационарный ступенчатый способ изменения поля эквивалентен «нестационарному» режиму, обычно используемому при изучении систем с СОК. При этом «нестационарный» режим является более экономичным по времени в смысле компьютер-

ных расчетов, так как нам не приходится каждый раз ждать время  $T_{max}$ , прежде чем вновь изменить внешнее поле, а можно произвести изменение, как только закончится очередная лавина.

С другой стороны, из определения стационарного ступенчатого способа изменения магнитного поля видно, что поле меняется с эффективной скоростью  $v_{eff} = \delta h/T$ . Таким образом, если бы имелось такое минимальное значение приращения поля  $\delta h_{min}$ , что при изменении поля на  $\delta h < \delta h_{min}$  лавины бы не возникали, это означало бы, что при стационарном непрерывном способе возмущения системы существует такая скорость изменения внешнего поля, при которой лавины отделены одна от другой, т. е. не перекрываются. Тогда и в случае стационарного непрерывного способа изменения внешнего поля мы могли бы ввести понятие одиночной лавины конечной длительности, а значит, и понятие самоорганизованного критического состояния в его классическом определении [4]. Кроме того, тогда стационарное непрерывное изменение внешнего поля и ступенчатое изменение внешнего магнитного поля с эффективной скоростью  $v_{eff} \ll v_{cr} = \delta h_{min}/T_{max}$  были бы эквивалентны.

Таким образом, первой ранее не рассматривавшейся задачей стал поиск для нашей системы  $\delta h_{min}$ . Мы учли то, что в условиях конечной системы стационарный ступенчатый способ эквивалентен «нестационарному» методу возмущения, и использовали последний как более экономичный для расчетов.

Возникающее в системе при таком методе возмущения критическое состояние состоит из большого числа метастабильных состояний, переход между которыми сопровождается лавинообразным проникновением в систему магнитного потока. Если величина изменения магнитного потока  $\Delta\Phi$  после очередного приращения внешнего магнитного поля на  $\delta h$  оказывалась больше некоторого фиксированного значения  $\Delta\Phi_{min}$ , то мы считали, что имела место  $n$ -я лавина, и вызвавшее ее изменение внешнего поля обозначали через  $\Delta h_n$ . Заметим, что величина  $\Delta h_n$  может быть больше  $\delta h$ , так как не всякое изменение внешнего поля на  $\delta h$  приводит к лавине размера, большего  $\Delta\Phi_{min}$  (точное математическое определение величин  $\Delta\Phi$  и  $\Delta h$  будет дано ниже, в разд. 2.2). После набора достаточной статистики мы изучили плотность вероятности этих изменений  $f_1(\Delta h)$ . В результате было обнаружено, что данная функция демонстрирует рост при уменьшении  $\Delta h$  вплоть до значения  $\delta h = 10^{-4}$ . Это означает, что в рассмотренных нами пределах для  $\delta h$  такого  $\delta h_{min}$ , при котором в системе не возникали бы лавины, не

существует. Таким образом в случае непрерывного стационарного изменения внешнего магнитного поля мы не можем определить понятие одиночной лавины, так как любое используемое нами изменение поля порождает в системе динамический процесс и возникающие лавины будут перекрываться.

Таким образом, будем рассматривать вопрос о наличии самоорганизации критического состояния в дискретном сверхпроводнике только в случае стационарного ступенчатого режима изменения внешнего магнитного поля, используемого, например, в работе [2] с  $T \gg T_{max}$ . В настоящей работе для оптимизации по времени компьютерных расчетов мы использовали эквивалентный ему «нестационарный» режим возмущения системы.

Нашей второй и основной задачей было рассмотрение статистики скачков магнитного потока  $\Delta\Phi$  в системе в критическом состоянии. В результате было установлено, что плотность вероятности размеров скачков потока в системе имеет степенной участок, что говорит о реализации в нашей модели самоорганизованного критического состояния в обобщенном смысле. Это означает, что критическое состояние представляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством лавин. Лавина же, в отличие от классического определения [4], характеризуется не импульсами напряжения, а изменениями магнитного потока в системе, и эти изменения демонстрируют степенное распределение [16].

После того как стало понятно, что даже малое изменение внешнего поля вызывает лавины, возник третий также ранее не изученный вопрос о зависимости размера лавины от величины изменений магнитного поля, вызвавшего данную лавину. Для того чтобы ответить на него, мы изучили вероятность возникновения лавин разных размеров при различных изменениях внешнего магнитного поля. В результате было выяснено, что размер лавины не зависит от того изменения внешнего поля, которое вызвало данную лавину.

Работа состоит из пяти разделов и Заключение. Во втором разделе приводятся основные уравнения, описывающие динамику двумерного дискретного сверхпроводника, а также подробно рассматриваются основные физические характеристики системы, изучаемые в работе. Третий раздел посвящен изучению статистики изменений внешнего магнитного поля. В четвертом разделе подробно рассматривается статистика размеров лавин в критическом состоянии системы. Пятый раздел посвящен изучению зависимости размеров лавин от вызывающих

их изменений внешнего магнитного поля. В Заключение сформулированы основные результаты работы.

## 2. МОДЕЛЬ ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО СВЕРХПРОВОДНИКА

### 2.1. Основные уравнения

Двумерный дискретный сверхпроводник можно представить как сечение плоскостью  $(x, y)$  полый сверхпроводящей системы, бесконечной по оси  $z$ . Сечение имеет вид решетки из сверхпроводящих ребер с поперечным размером  $l$ , на которых расположены джозефсоновские контакты (рис. 1). Будем рассматривать такую систему, помещенную во внешнее магнитное поле  $H_{ext}$ , направленное вдоль оси  $z$ . Изменение внешнего поля индуцирует в системе токи, которые имеют две составляющие, направленные по соответствующим ребрам решетки. Для плотности токов в контактах можно написать дискретные уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} 4\pi j_{ij}^{(i)} &= \frac{H_{ij} - H_{ij-1}}{l}, \\ 4\pi j_{ij}^{(j)} &= \frac{H_{i-1j} - H_{ij}}{l}, \end{aligned} \tag{1}$$

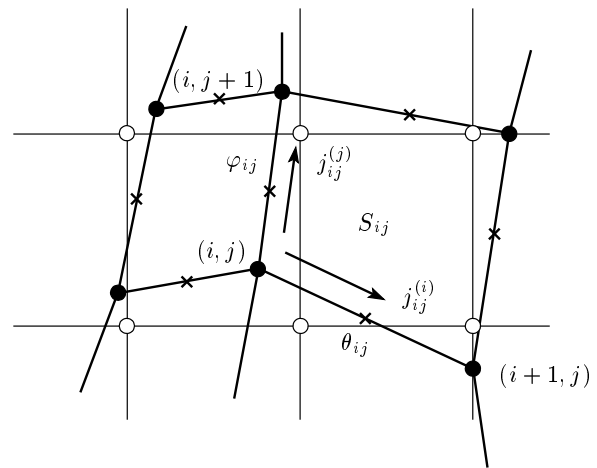


Рис. 1. Сечение плоскостью  $(x, y)$  двумерного дискретного сверхпроводника. На рисунке показана деформация решетки. Светлые кружки обозначают узлы недеформированной решетки, темные — узлы решетки после деформации, крестами показаны места расположения джозефсоновских контактов. Стрелками указаны возможные направления токов

где  $j_{ij}^{(i)}$  — компонента плотности тока, направленная вдоль ребра, соединяющего узлы  $(ij)$  и  $(i+1, j)$ , а  $j_{ij}^{(j)}$  — компонента плотности тока, направленная вдоль ребра, соединяющего узлы  $(ij)$  и  $(i, j+1)$ ,  $H_{ij}$  — магнитное поле в  $ij$ -й ячейке системы. Ячейкой мы будем называть пространство, ограниченное ребрами решетки между узлами  $(i, j)$ ,  $(i, j+1)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i+1, j+1)$ . Нумерация ячеек проводится по левому нижнему узлу решетки.

Токи в системе, текущие вдоль ребер, определяются токами в джозефсоновских контактах и, следуя резистивной модели джозефсоновского перехода, без учета тепловых флуктуаций, мы можем представить плотность тока  $j_{ij}^{(i)}$  следующим образом:

$$j_{ij}^{(i)} = j_c \sin \theta_{ij} + \frac{\Phi_0}{2\pi\rho} \frac{d\theta_{ij}}{dt}, \quad (2)$$

где  $j_c$  — плотность критического тока в контактах,  $\rho$  — поверхностное сопротивление контактов. Для  $j$ -компоненты плотности тока имеем аналогичное выражение. Переменные  $\varphi_{ij}$  и  $\theta_{ij}$  — калибровочно-инвариантные разности фаз, которые связаны с величиной  $\Phi_{ij} = H_{ij}S_{ij}$  магнитного потока в  $ij$ -й ячейке следующим образом:

$$\frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi_{ij} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \varphi_{ij} + \theta_{ij+1} - \varphi_{i+1j} - \theta_{ij}, \quad (3)$$

где  $S_{ij}$  — площадь соответствующей ячейки (см. рис. 1). Подставив уравнения (2) и (3) в уравнение (1), получим следующие уравнения для калибровочно-инвариантной разности фаз:

$$\begin{aligned} V \sin \theta_{ij} + \tau \frac{d\theta_{ij}}{dt} &= s_{ij}(\varphi_{ij} + \theta_{ij+1} - \varphi_{i+1j} - \theta_{ij}) - \\ &\quad - s_{ij-1}(\varphi_{ij-1} + \theta_{ij} - \varphi_{i+1j-1} - \theta_{ij-1}), \\ V \sin \varphi_{ij} + \tau \frac{d\varphi_{ij}}{dt} &= \\ &= s_{i-1j}(\varphi_{i-1j} + \theta_{i-1j+1} - \varphi_{ij} - \theta_{i-1j}) - \\ &\quad - s_{ij}(\varphi_{ij} + \theta_{ij+1} - \varphi_{i+1j} - \theta_{ij}), \\ V &= \frac{8\pi^2 a^2 l}{\Phi_0} j_c, \quad \tau = \frac{4\pi a^2 l}{\rho}, \\ s_{ij} &= \frac{a^2}{S_{ij}}, \quad a^2 = \langle S_{ij} \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Так же получим следующие граничные условия для нашей системы:

$$\begin{aligned} V \sin \theta_{i1} + \tau \frac{d\theta_{i1}}{dt} &= \\ &= s_{i1}(\varphi_{i1} + \theta_{i2} - \varphi_{i+11} - \theta_{i1}) - 2\pi h_{ext}, \\ V \sin \varphi_{1j} + \tau \frac{d\varphi_{1j}}{dt} &= \\ &= 2\pi h_{ext} - s_{1j}(\varphi_{1j} + \theta_{1j+1} - \varphi_{2j} - \theta_{1j}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $h_{ext} = H_{ext}a^2/\Phi_0$ . Аналогичные условия имеются для оставшихся двух границ.

Рассмотрим подробнее параметры системы, которые определяют ее поведение. Основным параметром, определяющим магнитные свойства дискретного сверхпроводника, является величина  $V$ . Как неоднократно отмечалось ранее [16, 17], в случае, если данный параметр мал,  $V \ll 1$ , дискретный сверхпроводник, является системой без пиннинга и демонстрирует обратимую магнитную динамику [12]. В случае невыполнения этого условия система благодаря своей дискретности способна пиннинговать магнитный поток, а в случае  $V \gg 1$  является системой с сильным пиннингом, критическое состояние которой может быть описано моделью Бина [12]. Кроме того, ранее было показано, что в этом случае уравнения, описывающие систему, могут быть преобразованы к алгоритмам, аналогичным тем, которые описывают модели систем с самоорганизацией [14]. Также было продемонстрировано, что в одномерном дискретном сверхпроводнике с  $V \gg 1$  реализуется самоорганизованное критическое состояние [16, 17]. В нашей работе будем рассматривать описанный дискретный сверхпроводник при условии  $V = 40 \gg 1$ .

Следующим набором параметров, определяющим магнитную динамику системы, являются величины  $s_{ij}$ , зависящие от площадей ячеек. Как видно на рис. 1, они характеризуют степень неупорядоченности системы. Если все коэффициенты  $s_{ij}$  одинаковы, то система является квадратной решеткой джозефсоновских контактов. Необходимость введения деформаций была показана нами в работе [17], где изучался одномерный многоконтактный СКВИД. В этом случае критическое состояние системы становилось самоорганизованным, только если в величинах межконтактных расстояний имелся разброс, привнесший в систему необходимую для реализации СОК случайность. Помимо этого, наличие беспорядка в системе делает модель более реалистичной, так как даже искусственно созданные дискретные сверхпроводники не являются идеально упорядоченными системами.

В настоящей работе мы рассмотрели наиболее простую деформацию двумерной решетки, при которой каждый узел регулярной решетки с координатами  $(x, y)$  смещается в точку с координатами  $(i = x+a_x, j = y+b_y)$ , величины  $a_x, b_y$  для всех узлов случайны, независимы и равномерно распределены на отрезке  $[-d, d]$ . Задавая различные величины разброса  $d$ , мы можем получить решетки с разной степенью разупорядоченности по сравнению с регулярной системой. В нашей работе будем рассматривать

$d = 0.4$ .

## 2.2. Основные исследуемые величины

Для моделирования критической динамики двумерного дискретного сверхпроводника мы использовали деформированную квадратную решетку размером  $N \times N$ ,  $N = 25$ . На такой решетке рассматривались динамические уравнения (4) с соответствующими граничными условиями (5). Как было сказано ранее, мы использовали при изучении системы «нестационарный» режим возмущения. Это означает, что моделирование происходило по следующей схеме. Начиная с невозмущенной системы, в которой все  $\varphi_{ij} = \theta_{ij} = h_{ext} = 0$ , мы возмущали ее, увеличивая внешнее магнитное поле  $h_{ext}$  в уравнениях (5) на величину  $\delta h = 10^{-4}$ . Затем система релаксировала к очередному метастабильному состоянию. В процессе релаксации величина  $h_{ext}$  не изменялась. Мы считали релаксацию оконченной, если все  $|d\varphi/dt|, |d\theta/dt| < 10^{-7}$ , затем мы вновь увеличивали внешнее поле на  $\delta h$  и так далее. Для интегрирования использовалась схема Эйлера с шагом  $\delta t = 0.01$  и  $V = 40$ .

Проводя моделирование в описанном выше режиме, мы наблюдали, что по прошествии некоторого времени изучаемый дискретный сверхпроводник приходит в критическое состояние, которое представляет собой набор метастабильных состояний, переход между которыми сопровождается лавинообразным входением в систему магнитного потока. Величина изменения полного магнитного потока  $\Delta\Phi$  в сверхпроводнике рассчитывалась следующим образом. Когда система достигала очередного метастабильного состояния, мы рассчитывали полный магнитный поток в ней, затем происходило очередное изменение внешнего магнитного поля на  $\delta h$ , в системе происходила релаксация, а после ее окончания мы вновь рассчитывали полный магнитный поток. Тогда изменение полного магнитного потока в системе после очередного изменения внешнего поля вычислялось по формуле

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\Phi_0} \Delta\Phi &= \frac{2\pi}{\Phi_0} [\Phi(t_{em}) - \Phi(t_{bm})] = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} (\theta_{iN}(t_{em}) - \theta_{i1}(t_{em}) - \theta_{iN}(t_{bm}) + \theta_{i1}(t_{bm})) + \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} (\varphi_{1j}(t_{em}) - \varphi_{Nj}(t_{em}) - \\ &- \varphi_{1j}(t_{bm}) + \varphi_{Nj}(t_{bm})), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $t_{bm}$  — момент начала релаксационного процесса, вызванного  $m$ -м изменением внешнего поля, а  $t_{em}$  — момент окончания релаксационного процесса, вызванного  $m$ -м изменением внешнего поля. Заметим, что индекс « $m$ » нумерует изменения внешнего магнитного поля, т. е. значение  $h_{ext}$  после  $m$ -го изменения  $h_{ext}^m = m\delta h$ .

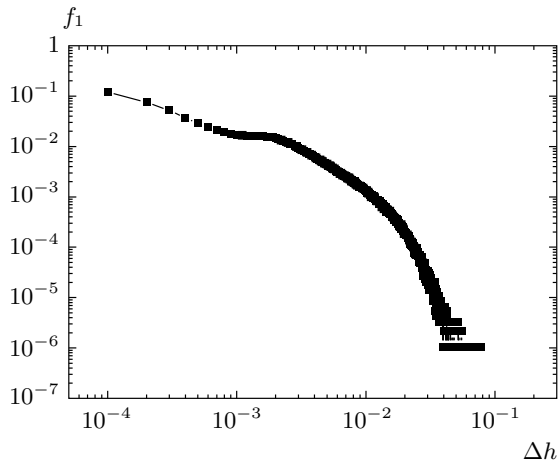
Как было сказано во Введении, первой задачей настоящей работы был поиск такого значения приращения внешнего поля  $\delta h_{min}$ , при котором в системе не возникала бы лавина. Для того чтобы найти  $\delta h_{min}$ , необходимо было рассчитать для каждой лавины то изменение внешнего поля, которое ее вызвало. Это осуществлялось следующим образом.

Мы увеличивали внешнее поле на  $\delta h$ , дожидаясь окончания релаксации и рассчитывали  $\Delta\Phi$ . Если величина магнитного потока, проникнувшего в систему после очередного увеличения внешнего магнитного поля на  $\delta h$ , была меньше фиксированного значения  $\Delta\Phi_{min} = 0.5\Phi_0$ , то мы считали, что лавины не произошло. Далее мы вновь увеличивали внешнее поле на  $\delta h$  и ждали окончания релаксации, и так до тех пор, пока изменение магнитного потока после очередного увеличения поля не оказывалось больше  $\Delta\Phi_{min}$ . Тогда мы считали, что произошла  $n$ -я лавина, и обозначали ту величину внешнего магнитного поля, при котором она началась, через  $h_{ext_n}$ . После этого мы продолжали моделирование по описанной схеме до тех пор, пока величина магнитного потока, проникнувшего в систему после очередного увеличения поля, вновь не превысит значение  $\Delta\Phi_{min}$ . Тогда мы считали, что произошла  $(n+1)$ -я лавина. Разницу в значениях внешнего магнитного поля, при которых начались  $n$ -я и  $(n+1)$ -я лавины, мы и считали тем изменением внешнего поля, которое вызвало  $(n+1)$ -ю лавину. Тогда  $n$ -я лавина вызывается изменением внешнего поля, которое можно вычислить как

$$\Delta h_n = h_{ext_n} - h_{ext_{n-1}}. \quad (7)$$

Еще раз подчеркнем, что, поскольку не всякое изменение магнитного потока мы считаем лавиной, нумерация лавин осуществляется индексом « $n$ », а не « $m$ ».

Таким образом, в данной работе основными исследуемыми величинами являются изменения величины магнитного потока  $\Delta\Phi$  в дискретном сверхпроводнике за время лавины и вызвавшее данную лавину изменение внешнего магнитного поля  $\Delta h$ .



**Рис. 2.** Плотность вероятности изменений внешнего магнитного поля  $\Delta h$ , вызвавших лавины в системе. Наличие роста функции на малых значениях  $\Delta h$  означает, что вплоть до  $\Delta h = 10^{-4}$  в системе нет такого значения  $\delta h_{min}$ , при котором, когда  $\delta h < \delta h_{min}$ , лавины бы не возникали

### 3. СТАТИСТИКА ИЗМЕНЕНИЙ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Чтобы ответить на вопрос, существует ли такое значение приращения внешнего магнитного поля  $\delta h_{min}$ , при котором в системе не возникают лавины, мы рассмотрели плотность вероятности для изменений внешнего магнитного поля, рассчитанных, согласно формуле (7), для всех изменений  $\Delta\Phi$  с размером, большим  $\Delta\Phi_{min} = 0.5\Phi_0$ . Расчет проводился примерно по  $10^6$  лавинам. В результате мы получили зависимость, представленную на рис. 2.

Как видно на рисунке, полученная плотность вероятности  $f_1(\Delta h)$  демонстрирует рост при уменьшении  $\Delta h$  вплоть до  $\Delta h = 10^{-4}$ . Это означает, что вероятность возникновения лавины при малых значениях  $\Delta h$  велика. Следовательно, в рассмотренном нами диапазоне  $\Delta h$  мы не можем указать такое значение  $\delta h_{min}$ , при котором в системе не возникали бы лавины.

Необходимо заметить, что то, что мы не обнаружили  $\delta h_{min}$ , не означает, что его нет в реальных экспериментах, поскольку минимальное рассматриваемое нами  $\delta h = 10^{-4}$ . В реальных экспериментах внешнее поле меняется достаточно медленно, и перекрытия лавин довольно редки, так что там вполне можно говорить об одиночных лавинах, распределение размеров которых и рассматривается, например, в работах [1, 3]. Однако по проведенным

нами оценкам, для того чтобы численно смоделировать такую ситуацию, нам необходимо было бы увеличивать внешнее магнитное поле со скоростью  $v = dh_{ext}/dt = 10^{-8}$ , что потребовало бы больших затрат машинного времени.

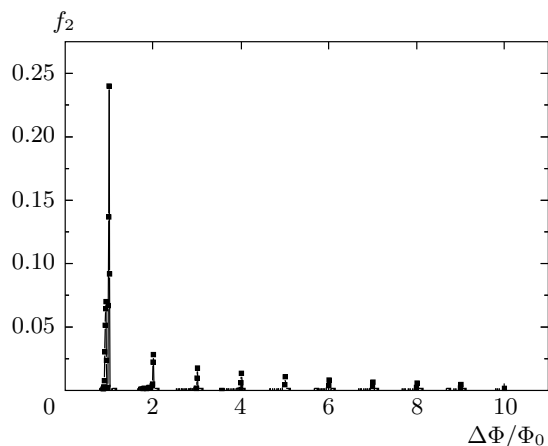
К сожалению, отсутствие  $\delta h_{min}$  не позволяет нам моделировать стационарное непрерывное изменение внешнего магнитного поля с помощью его ступенчатого изменения, поскольку, как уже говорилось ранее, стационарное ступенчатое изменение сводится к приращению поля с эффективной скоростью  $v_{eff} = \delta h/T$ . Если бы имелось такое минимальное значение приращения поля  $\delta h_{min}$ , что при изменении поля на  $\delta h < \delta h_{min}$  лавины бы не возникали, то при ступенчатом изменении внешнего магнитного поля с эффективной скоростью  $v_{eff} \ll v_{cr} = \delta h_{min}/T_{max}$  этот способ изменения был бы эквивалентен стационарному непрерывному изменению.

Следовательно, можно сделать вывод, что ввести классическое определение СОК [4] в случае стационарного непрерывного изменения внешнего поля невозможно, поэтому использование нами «нестационарного» способа изменения внешнего поля, эквивалентного стационарному ступенчатому способу [2], вполне оправдано. Кроме того, мы видим, что даже малое внешнее возмущение порождает в системе динамический процесс, что позволяет говорить о высокой чувствительности системы в критическом состоянии к внешним воздействиям.

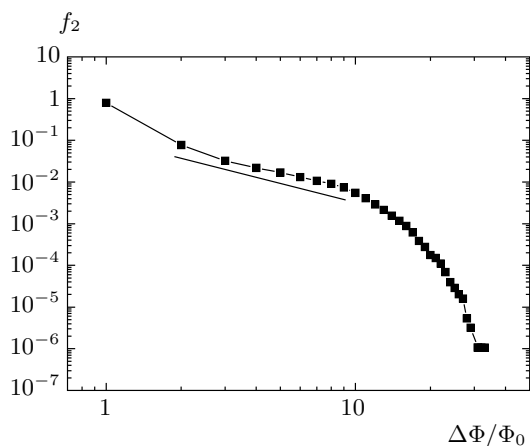
### 4. СТАТИСТИКА РАЗМЕРОВ ЛАВИН МАГНИТНОГО ПОТОКА В КРИТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Нашей основной задачей было изучение статистики размеров лавин в критическом состоянии исследуемого дискретного сверхпроводника. Для этого мы рассчитывали изменения магнитного потока в системе по формуле (6). Как уже говорилось ранее, мы считали, что произошла лавина, если изменение полного потока превышало значение  $\Delta\Phi_{min} = 0.5\Phi_0$ . После набора достаточной статистики, около  $10^6$  лавин, мы рассмотрели плотность вероятности для величин  $\Delta\Phi$ .

На рис. 3 представлена плотность вероятности для размеров лавин,  $f_2(\Delta\Phi)$ . Как видно на рис. 3, размер каждой лавины примерно равен целому числу квантов потока. Однако имеется небольшое число лавин, размер которых несколько отклоняется от целочисленного, но эти отклонения малы, и



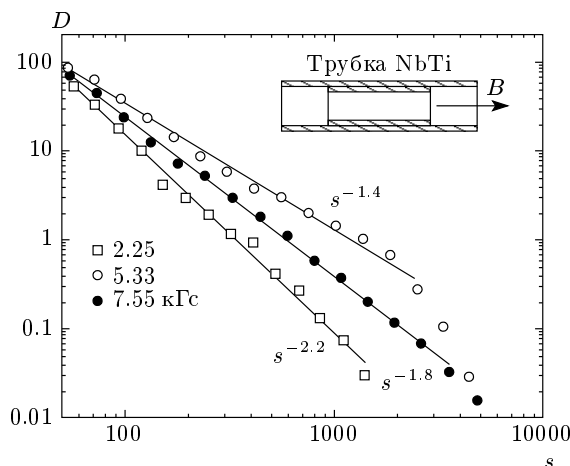
**Рис. 3.** Плотность вероятности размеров лавин  $\Delta\Phi$ . Большинство возникающих лавин имеют размеры, равные целому числу квантов потока, однако имеется незначительное число лавин, размер которых несколько отличается от целочисленного



**Рис. 4.** Сглаженная плотность вероятности размеров лавин  $\Delta\Phi$ . Наличие в распределении степенного участка говорит о том, что критическое состояние исследуемого двумерного дискретного сверхпроводника является самоорганизованным в обобщенном смысле

таких событий относительно немного. Установленная нами пороговая величина для размера лавины  $\Delta\Phi_{min} = 0.5\Phi_0$  не меняет картину данного распределения, так как отсекает лишь события, когда изменений потока не происходит, либо они незначительны.

На рис. 4 представлена сглаженная плотность вероятности размеров лавин  $\Delta\Phi$  в логарифмическом масштабе. При вычислении данной плотности вероятности мы выбрали такое разбиение для множества



**Рис. 5.** Плотности вероятности размеров лавин магнитного потока, полученные в работе [1],  $s$  — число вихрей в лавине

размеров лавин  $\Delta\Phi_n$  на интервалы величины  $2\delta$ , что любое целочисленное и близкие к нему нецелочисленные значения размеров лавин (рис. 3) попадали в один тот же промежуток  $\Delta\Phi_m \pm \delta$ . На рисунках видно, что функция плотности вероятности имеет участок степенного поведения, он не очень велик, что связано с небольшим размером системы. Наличие участка со степенным поведением говорит о том, что в исследуемой системе реализуется самоорганизованное критическое состояние в обобщенном смысле, как было определено в работе [16], т. е., помимо классических признаков самоорганизованного критического состояния, таких как наличие у системы большого числа метастабильных состояний и лавинообразной динамики, имеется степенное поведение плотности вероятности скачков магнитного потока. Такое поведение в случае дискретных сверхпроводников является более общим, чем наличие степенного участка в плотности вероятности интегральных напряжений, которые являются аналогом размеров лавин для классических моделей систем с СОК [4, 5]. Дело в том, что, как было показано в работе [18], при переходных и малых значениях основного параметра  $V$ , характеризующего магнитные свойства дискретных сверхпроводников, плотность вероятности напряжений перестает вести себя степенным образом, однако скачки магнитного потока продолжают демонстрировать степенное распределение.

Полученные нами результаты качественно совпадают с распределением размеров лавин, полученным в экспериментальной работе [1], где изучалась лавинообразная динамика магнитного потока



в трубках NbTi. На рис. 5 представлены функции распределения размеров лавин в такой системе. Три графика относятся к трем фиксированным значениям внешнего магнитного поля. Магнитное поле изменялось в интервале  $30 \text{ Э}$  вокруг данных фиксированных значений со скоростью  $5 \text{ Э/с}$ .

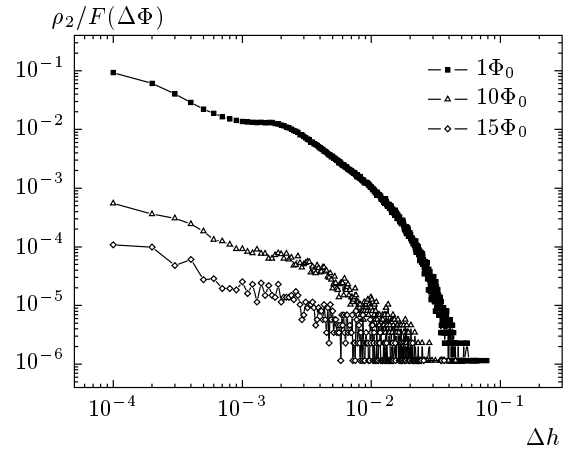
Следует также отметить интересный факт, касающийся внутренней стохастичности в нашей системе. Мы рассматривали дискретные сверхпроводники с разной степенью упорядоченности, т. е. при разных значениях сдвига узлов решетки  $d$ . В результате было замечено, что, в отличие от одномерного дискретного сверхпроводника, изучаемого, например, в [19], в двумерном случае достаточно гораздо меньшей степени внутренней разупорядоченности системы, чтобы в ней возникло самоорганизованное критическое состояние. Степенной участок в плотности вероятности скачков магнитного потока появляется уже при  $d = 10^{-4}$ , в то время как в одномерном случае система ведет себя подобно упорядоченной еще при  $d = 0.1$ . Этот факт говорит о том, что двумерная система является гораздо более чувствительной даже к малым изменениям.

Таким образом, мы можем заключить, что в исследуемом двумерном дискретном сверхпроводнике при нестационарном способе возмущения, а следовательно, и при стационарном ступенчатом возмущении [2] возникает явление самоорганизации критического состояния в обобщенном смысле [16].

## 5. НЕЗАВИСИМОСТЬ РАЗМЕРА ЛАВИНЫ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ, ЕЕ ВЫЗВАВШЕГО

Как видно на рис. 3 и 4, возникающие в исследуемом дискретном сверхпроводнике в критическом состоянии лавины могут иметь различные размеры, от самых малых, около одного кванта потока, до достаточно больших, включающих более  $30$  квантов потока.

Согласно классическому определению СОК [4], размер лавины, возникающей в системе, не зависит от того внешнего возмущения, которое ее вызвало, т. е. даже самые большие, охватывающие всю систему, катастрофические лавины могут быть вызваны малыми внешними возмущениями. Как мы видели ранее, при исследовании изменений внешнего магнитного поля  $\Delta h$ , которые порождают лавины, последние могут возникать после различных возмущений. Поэтому естественно встал вопрос, лавины ка-



**Рис. 6.** Сечения совместной плотности вероятности изменений внешнего магнитного поля  $\Delta h$  и размеров лавин  $\Delta\Phi$  при фиксированных значениях  $\Delta\Phi = 1\Phi_0, 10\Phi_0, 15\Phi_0$ . На рисунке видно, что характер поведения рассмотренных функций качественно совпадает

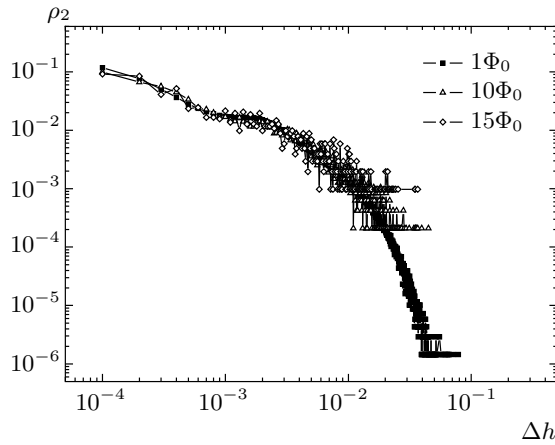
кого размера порождаются большими, а какого — малыми изменениями внешнего магнитного поля.

Чтобы ответить на этот вопрос, мы рассчитали совместную плотность вероятности  $\rho_2(\Delta h, \Delta\Phi)$  изменений внешнего магнитного поля  $\Delta h$  и размеров лавин  $\Delta\Phi$ . На рис. 6 представлены сечения плотности вероятности  $\rho_2(\Delta h, \Delta\Phi)$  при  $\Delta\Phi = 1\Phi_0, 10\Phi_0, 15\Phi_0$ .

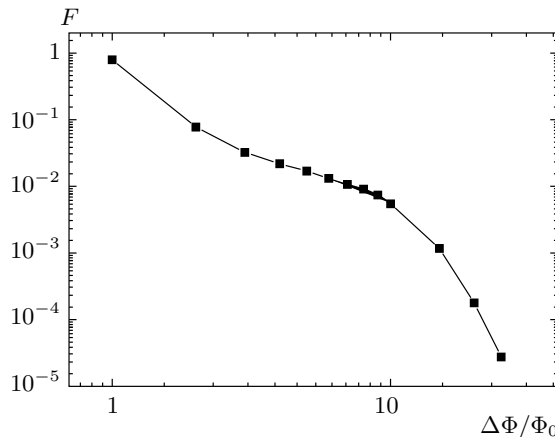
Из данного рисунка видно, что плотности вероятности изменений внешнего магнитного поля для лавин различных размеров качественно демонстрируют одинаковое поведение. Более того, для каждой функции  $\rho_2(\Delta h, \Delta\Phi)$  нашелся такой коэффициент  $F(\Delta\Phi)$ , что «отнормированные» плотности вероятности  $\rho_2(\Delta h, \Delta\Phi)/F(\Delta\Phi)$  для различных значений  $\Delta\Phi$  совпали (см. рис. 7). Некоторый разброс в значениях функций распределения для  $\Delta\Phi = 10\Phi_0$  и  $\Delta\Phi = 15\Phi_0$  на больших значениях  $\Delta h$  связан с недостаточной статистикой по лавинам больших размеров.

На рис. 8 представлена «нормировочная» функция  $F(\Delta\Phi)$ , полученная в результате расчетов «нормировочных» коэффициентов для различных сечений  $\rho_2(\Delta h, \Delta\Phi)$ . Сравнивая ее с плотностью вероятности для изменений магнитного потока, представленной на рис. 4, мы получили, что две эти функции совпадают, т. е.  $F(\Delta\Phi) = f_2(\Delta\Phi)$ .

Тогда представленная на рис. 7 функция являет-



**Рис. 7.** Сечения совместной плотности вероятности изменений внешнего магнитного поля  $\Delta h$  и размеров лавин  $\Delta\Phi$  при фиксированных значениях  $\Delta\Phi = 1\Phi_0, 10\Phi_0, 15\Phi_0$ , «отнормированные» на коэффициент  $F(\Delta\Phi)$ . На рисунке видно, что в результате «перенормировки» рассматриваемые плотности вероятности совпадали между собой



**Рис. 8.** «Нормировочная» функция  $F(\Delta\Phi)$ , совпадающая с плотностью вероятности  $f_2(\Delta\Phi)$

ся условной вероятностью:

$$\rho(\Delta h|\Delta\Phi) = \frac{\rho_2(\Delta h, \Delta\Phi)}{f_2(\Delta\Phi)}. \tag{8}$$

Сравнивая плотности вероятности  $f_1(\Delta h)$ , представленную на рис. 2, и  $\rho(\Delta h|\Delta\Phi)$ , представленную на рис. 7, мы видим, что эти две функции совпадают, т. е.  $f_1(\Delta h) = \rho(\Delta h|\Delta\Phi)$ . Согласно формуле (8), это означает, что  $\rho(\Delta h, \Delta\Phi) = f_1(\Delta h)f_2(\Delta\Phi)$ , т. е. величины  $\Delta h$  и  $\Delta\Phi$  статистически независимы.

Таким образом, показано, что в исследуемом дву-

мерном дискретном сверхпроводнике размер лавины не зависит от того изменения внешнего магнитного поля, которое вызвало данную лавину. И даже гигантские лавины могут быть вызваны малыми внешними возмущениями. Этот факт согласуется с положением концепции СОК о том, что в системах с самоорганизованным критическим состоянием лавины различных размеров вызываются малыми внешними возмущениями [4]. Кроме того, это показывает, что изучаемый дискретный сверхпроводник является системой, чувствительной к малым внешним воздействиям.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучено критическое состояние двумерного дискретного сверхпроводника, помещенного во внешнее магнитное поле, которое изменяется «нестационарным» образом, т. е. очередное изменение поля происходит лишь после того, как все динамические процессы, вызванные предшествующим изменением, остановились. Такой метод возмущения системы эквивалентен ступенчатому возрастанию внешнего магнитного поля, применяемому в экспериментах и описанному, например, в работе [2].

Мы обнаружили, что критическое состояние такой системы является самоорганизованным в обобщенном смысле, т. е. представляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством лавин. Лавина характеризуется входением в систему магнитного потока. Размеры возникающих лавин, т. е. величины изменений магнитного потока за время лавины, демонстрируют степенное распределение.

Основываясь на положении об универсальности критических явлений в жестких сверхпроводниках второго рода и дискретных сверхпроводниках [11, 12], мы надеемся, что полученные результаты могут быть применены для объяснения лавинообразной динамики в жестких сверхпроводниках второго рода, наблюдаемой в экспериментах.

Кроме того, размер возникающей лавины и величина вызвавшего ее изменения внешнего магнитного поля являются статистически независимыми величинами. Это означает, что лавина любого размера может быть вызвана как малым, так и большим изменением внешнего магнитного поля. Таким образом, можно заключить, что поведение системы соответствует одному из принципов классической концепции самоорганизованной критичности [4], согласно которому малые и большие лавины в системе воз-

никают под воздействием одинаково малых внешних возмущений.

Также было обнаружено, что плотность вероятности изменений внешнего магнитного поля  $\Delta h$ , вызывающих лавины, демонстрирует рост при уменьшении  $\Delta h$ , вплоть до  $\Delta h = 10^{-4}$ . Это означает, что в рассмотренных нами пределах для  $\delta h$  такого  $\Delta h_{min}$ , при котором в системе не возникали бы лавины, не существует. Таким образом, в случае непрерывного стационарного изменения внешнего магнитного поля мы не можем определить понятие одиночной лавины, а следовательно, и понятие самоорганизованного критического состояния.

Теоретическое и численное изучение методов и характеристик изменения внешнего магнитного поля и их влияния на динамику магнитного потока в дискретном сверхпроводнике было предпринято впервые. Полученные результаты очень важны для обобщения наших исследований на случай экспериментального изучения критического состояния жестких сверхпроводников, поскольку, согласно высказанному ранее утверждению, картина критического поведения универсальна для дискретных сверхпроводников и жестких сверхпроводников второго рода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-17626), а также в рамках программ ОФН РАН «Макрофизика» и «Сильнокоррелированные электроны в полупроводниках, металлах, сверхпроводниках и магнитных материалах».

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. Field, J. Witt, F. Nori, and X. Ling, Phys. Rev. Lett. **74**, 1206 (1995).
2. C. M. Aegerter, M. S. Welling, and R. J. Wijngaarden, Europhys. Lett. **65**, 753 (2004).
3. С. М. Ишикаев, Э. В. Матизен, В. В. Рязанов, В. А. Обознов, А. А. Веретенников, Письма в ЖЭТФ **72**, 39 (2000).
4. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
5. D. Dhar, Phys. Rev. Lett. **64**, 1613 (1990).
6. E. Altshuler and T. N. Johansen, Rev. Mod. Phys. **76**, 471 (2004).
7. D. V. Shantsev, A. V. Bobyl, Y. M. Galperin, T. N. Johansen, and S. I. Lee, Phys. Rev. B **72**, 024541 (2005).
8. K. E. Bassler and M. Paczuski, Phys. Rev. Lett. **81**, 3761 (1998).
9. K. E. Bassler, M. Paczuski, and E. Altshuler, Phys. Rev. B **64**, 224517 (2001).
10. J. R. Clem, Physica C **50**, 153 (1988).
11. S. L. Ginzburg, V. P. Khavronin, G. Yu. Logvinova, I. D. Lusyanin et al., Physica C **174**, 109 (1991).
12. D.-X. Chen, J. J. Moreno, and A. Hernando, Phys. Rev. B **53**, 6579 (1996).
13. A. Majhofer, T. Wolf, and W. Dieterich, Phys. Rev. B **44**, 9634 (1991).
14. С. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **106**, 607 (1994).
15. С. Л. Гинзбург, Н. Е. Савицкая, ЖЭТФ **117**, 227 (2000).
16. S. L. Ginzburg, A. V. Nakin, and N. F. Savitskaya, Physica C **436/1**, 17 (2006).
17. S. L. Ginzburg and N. E. Savitskaya, J. Low Temp. Phys. **130**, № 3/4, 333 (2003).
18. С. Л. Гинзбург, Н. Е. Савицкая, Сборник расширенных тезисов Первой международной конференции «Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости» ФПС'04 18-22 октября (2004), Звенигород, с. 172.
19. S. L. Ginzburg and N. E. Savitskaya, Phys. Rev. E **66**, 026128 (2002).