

ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОЕ СМЕШЕНИЕ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН И ИМПУЛЬСОВ С ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПОРЯДКА ПЕРИОДА ОСЦИЛЛЯЦИЙ

А. А. Заболотский*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 14 февраля 2006 г.

В двухуровневой среде с запрещенным дипольным переходом выведены модели четырехволнового когерентного смешения двух квазимонохроматических полей накачки и импульсов двухкомпонентного поля Стокса, имеющего эллиптическую поляризацию и длительность порядка периода осцилляций. Показано, что при выполнении условия однонаправленности распространения волн и в отсутствие истощения накачки система уравнений Максвелла – Блоха приводится к новой полностью интегрируемой системе уравнений. В рамках интегрируемой редукции этой модели исследуется несолитонная радиационная динамика генерации импульсов стоксова поля. Развита соответствующая решаемой задаче аппарат метода обратной задачи. Найдено приближенное асимптотическое выражение для переднего фронта генерируемого пакета импульсов для разных начально краевых условий. Обсуждается применение полученных результатов для описания параметрических процессов с участием волн разных типов.

PACS: 02.30.Ik, 42.55.Ye, 42.65.Re, 42.65.Ky

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с развитием лазерной техники генерации импульсов в последние 10 лет возрос интерес к исследованию генерации и взаимодействия со средой импульсов, имеющих длительность, сравнимую с периодом осцилляции. Теоретически взаимодействие таких импульсов с двухуровневой средой изучается с 1971 г. в рамках различных моделей [1, 2], в том числе и интегрируемых [3–9] методом обратной задачи рассеяния [10]. Если дипольный переход запрещен правилами отбора, то гамильтониан взаимодействия становится квадратичным по электромагнитному полю, $H \propto E^2$, т. е. основным резонансным взаимодействием становится двухфотонное взаимодействие. Комбинационное рассеяние (КР) света в двухуровневой среде как один из основных механизмов конверсии частоты является важным и детально изученным явлением нелинейной оптики [11]. Теория оптического КР использует приближение медленных огибающих для взаимодействующих импульсов [11].

При выполнении ряда приближений эволюционные уравнения, описывающие нелинейную стадию комбинационного взаимодействия для квазимонохроматических импульсов, в одномерном случае приводятся к системе полностью интегрируемых уравнений [12–14]. Обобщение этой интегрируемой системы на случай двух пар полей, взаимодействующих с двухфотонно-резонансной двухуровневой средой, т. е. на случай четырехволнового смешения в среде с керровской резонансно-индуцированной нелинейностью, получено в работе [15]. Эта нелинейность возникает при выводе уравнений эволюции полей в резонансной среде, при котором используется адиабатическое исключение виртуальных уровней [16, 17]. При условии неизменности заселенностей уровней или в отсутствие истощения накачки система уравнений КР редуцируется к интегрируемому частному случаю уравнений Максвелла – Блоха для двухуровневой среды, к модели Чу – Скотта [18]. Радиационная динамика генерации квазимонохроматических импульсов стоксова поля изучена в рамках метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) в работе [19].

*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

Взаимодействие импульсов волн, относящихся к

разным спектральным диапазонам, например световых волн и микроволн, давно изучается в разных областях физики. Экспериментальная возможность эффективного параметрического четырехволнового смешения волн, включающего две компоненты светового квазимонохроматического поля накачки и две компоненты стоксовой микроволны в двухуровневой среде, продемонстрирована в работе [20]. Родственному типу взаимодействия соответствует модель, описывающая резонанс длинных и коротких волн, впервые открытый Бенни при описании волн на воде [21]. Подобные модели построены Захаровым при изучении ленгмюровских волн в плазме [22], Давыдовым для анализа возбуждений в молекуле белка [23], а также в других областях физики [24], например, в теории волн в ферромагнетиках [25]. В нелинейной оптике аналогичные модели выведены для описания взаимодействия длинных и коротких волн [24], см., например, [26, 27]. Одним из применений таких моделей, включающих обобщенные системы уравнений шредингеровского типа, является описание эффекта оптического выпрямления [28]. В некоторых случаях эти системы уравнений сводятся к интегрируемым двумерным уравнениям [28] типа уравнений Дави–Стюартсона [29]. При выполнении некоторых условий, например, приближения однонаправленного распространения волн, указанные выше системы уравнений могут быть сведены к одномерным интегрируемым моделям [30–32]. В этих теоретических моделях длинная волна приводит к динамическому изменению диэлектрической проницаемости среды, в которой распространяется короткая волна. В этих моделях отсутствует когерентное смешение полей, аналогичное параметрическому взаимодействию квазимонохроматических полей.

Вне рамок квазимонохроматического приближения эволюция световых полей при параметрическом двухфотонном взаимодействии численно изучалась, например, в недавних работах [33–35]. Теоретически механизм комбинационного рассеяния с участием квазимонохроматической волны поля накачки и импульса стоксова поля без огибающей был исследован в работе [34]. Авторы работы [34] исследовали в линейном приближении генерацию импульса стоксова поля без огибающей сильным неистопающим полем накачки. В работе [27] исследовалась схема комбинационного рассеяния в одноосной оптической среде, в которой квазимонохроматическое поле накачки и стоксово поле, рассматриваемое вне рамок приближения медленной огибающей, имеют ортогональные поляризации. В оптическом диапазоне эти импульсы имеют длительность от единиц до де-

сятков фемтосекунд. Поскольку в работе [27] рассматривались колебательные переходы, возбуждаемые указанными световыми полями, справедливы соотношения

$$\tau_s \Omega_p \lesssim 1, \quad \tau_s \Omega_0 \ll 1, \quad (1)$$

где τ_s — длительность оптического солитона, Ω_p — несущая частота поля накачки и Ω_0 — частота перехода. После применения ряда приближений, включая приближение малых амплитуд полей и с учетом условий (1), авторы работы [27] свели исходную систему уравнений Максвелла–Блоха к системе уравнений типа уравнений Захарова [22].

При построении теории эволюции импульсов в фемтосекундном диапазоне следует учитывать соотношения между длительностями импульсов и их интенсивностями. Например, в рамках систем уравнений моделей Максвелла–Блоха или нелинейного уравнения Шредингера в области выполнения условий (1) солитонные решения отвечают сверхмощным полям, которые приводят к сильному перемешиванию заселенностей уровней электронных и колебательных переходов. Неравенства (1) накладывают достаточно жесткие условия на выбор комбинационно-активных переходов, поскольку при выполнении второго из неравенств (1) в реальной системе необходимо учитывать взаимодействие с многими другими оптическими и колебательными переходами.

Несмотря на полученные в указанных выше работах результаты, теория генерации и эволюции импульсов в параметрических процессах в резонансной протяженной среде с участием световых квазимонохроматических полей и импульсов полей с длительностью порядка периода осцилляции не получила должного развития. В частности, не изучены несолитонные механизмы генерации, отвечающие стандартной постановке задачи при четырехволновом смешении и комбинационном рассеянии [15, 19]. Отчасти это связано со сложностью решения начально-краевой задачи для эволюционных уравнений Максвелла–Блоха. Как известно, наиболее полную информацию об эволюции импульсов можно получить в рамках полностью интегрируемых уравнений [10]. Поэтому целью настоящей работы является вывод и решение интегрируемой модели, описывающей четырехволновое параметрическое взаимодействие такого типа волн в двухуровневой среде. Схема взаимодействия, рассматриваемая в настоящей работе, включает пару квазимонохроматических полей накачки и импульсы стоксова поля, для которых не применяется приближение медленных огиба-

ющих. Предполагается, что период осцилляций стокова поля много больше периода осцилляций полей накачки поля, т. е. поля относятся к разным частотным масштабам (см. ниже).

После применения ряда реалистических приближений построенная модель, состоящая из системы уравнений Блоха для эффективной двухуровневой среды и уравнений Максвелла, сводится к интегрируемой модели четырехволнового смешения, описывающей однонаправленное распространение импульсов стокова поля, имеющих эллиптическую поляризацию. На основании предложенной модели изучается режим усиления импульса затравочного поля Стокса для начальных и краевых условий, отвечающих стандартной постановке эксперимента для наблюдения вынужденного комбинационного рассеяния.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 выводится основная система уравнений. В разд. 3 приводится новая общая интегрируемая модель. Затем в разд. 4 развивается аппарат МОЗР для частного случая модели. В следующем разделе анализируется линейная стадия процесса. Раздел 6 посвящен развитию соответствующей версии аппарата МОЗР. В разд. 7 найдено асимптотическое выражение для переднего фронта генерируемого пакета импульсов. Последний раздел посвящен обсуждению результатов и их возможных применений. В Приложении приводится представление Лакса для новой интегрируемой модели.

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Форма импульсов, генерируемых при когерентном четырехволновом смешении, в процессе, происходящем на временах, меньших релаксационных, определяется видом взаимодействия и начально-краевыми условиями. Начальную или, в ряде случаев, начально-краевую задачу для нелинейных эволюционных уравнений удастся решить только для интегрируемых моделей [10]. Поэтому целью данного раздела будет вывод интегрируемой системы уравнений. Мы построим модель четырехволнового взаимодействия двух квазимонохроматических световых полей и импульсов двухкомпонентного поля без применения к последнему приближения медленной огибающей. Считаем, что интенсивность поля накачки много больше интенсивности стокова поля и истощением накачки можно пренебречь. В то же время при построении модели эволюции импульсов стокова

поля в одномерной двухуровневой среде не применяются другие ограничения на интенсивность полей и учитывается динамическое изменение заселенностей уровней среды. Такая постановка задачи достаточно часто встречается в теории комбинационного рассеяния и четырехволнового смешения [18].

Будем рассматривать случай, когда квазимонохроматическое поле накачки состоит из полей с постоянными амплитудами

$$P_- = \frac{P_x - iP_y}{\sqrt{2}}, \quad Q_+ = \frac{Q_x + iQ_y}{\sqrt{2}}.$$

Здесь и ниже нижние индексы x, y (например, P_x, P_y) означают проекции вектора на соответствующие оси. Поля имеют одинаковую несущую частоту Ω . Тогда электромагнитное поле накачки, распространяющееся в одномерной среде вдоль оси z , имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_- P_- \exp(i\Omega t) + \mathbf{e}_+ Q_+ \exp(i\Omega t) + \text{с.с.}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{e}_\pm = \frac{\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}},$$

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ — орты. Векторы \mathbf{e}_\pm имеют единичную длину и ортогональны друг другу:

$$\mathbf{e}_\pm \cdot \mathbf{e}_\pm = 1, \quad \mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_- = 0. \quad (3)$$

Введем следующие четыре вектора дипольного момента:

$$\mathbf{d}_\pm = \mathbf{e}_x d_x \pm i\mathbf{e}_y d_y, \quad (4)$$

$$\mathbf{g}_\pm = \mathbf{e}_x g_x \pm i\mathbf{e}_y g_y. \quad (5)$$

Векторы \mathbf{d}_\mp — дипольные моменты переходов, взаимодействующих с полями накачки, т. е. переходов $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 4$, соответственно (см. рис. 1), векторы \mathbf{g}_\pm — дипольные моменты переходов, взаимодействующих с полями Стокса, т. е. переходов $2 \leftrightarrow 3$ и $4 \leftrightarrow 3$, соответственно.

Для векторов дипольных моментов справедливы равенства

$$(\mathbf{d}_\pm \cdot \mathbf{e}_\pm) = \frac{d_x + d_y}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{d}_\mp \cdot \mathbf{e}_\pm = \frac{d_x - d_y}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

и т. д.

Во многих физических ситуациях выполняется равенство

$$|d_x| = |d_y|.$$

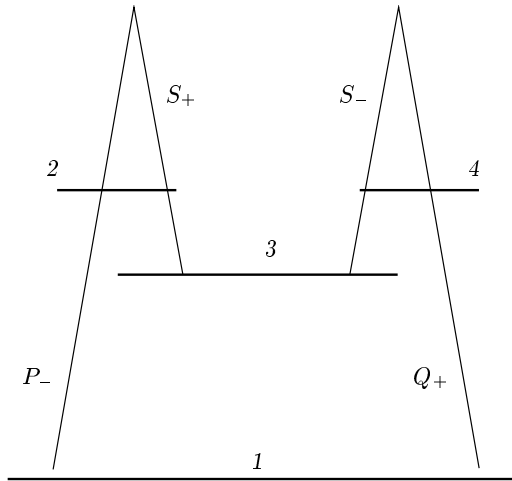


Рис. 1. Схема двойного комбинационного рассеяния полей в двухуровневой среде. P_- , Q_+ — амплитуды поля накачки, S_{\pm} — компоненты поля Стокса, 2 и 4 — виртуальные уровни

Например, при распространении света в изотропных средах без дополнительных полей, в схемах взаимодействия, не приводящих к нарушению симметрии, связанной с вращением поляризации поля на $\pi/2$. В этом случае дипольный момент \mathbf{d}_+ (\mathbf{d}_-) в точности отвечает переходу с изменением проекции магнитного момента $\Delta M = 1$ (-1), т. е. переход взаимодействует только с полем, имеющим правую (левую) циркулярную поляризацию, так как справедливы соотношения

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_+ = \frac{(d_x + d_y)Q_+ + (d_x - d_y)P_-}{\sqrt{2}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_- = \frac{(d_x - d_y)Q_+ + (d_x + d_y)P_-}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

Если, например, $d_x = d_y$, то циркулярно поляризованное поле Q_+ взаимодействует только с переходом $1 \leftrightarrow 4$, а поле P_- — с переходом $1 \leftrightarrow 2$.

Поле Стокса \mathbf{S} включает импульсы двух ортогонально поляризованных полей Стокса, не имеющих несущей частоты:

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_x S_x + \mathbf{e}_y S_y = \mathbf{e}_- S_- + \mathbf{e}_+ S_+, \quad (9)$$

где

$$S_{\pm} = \frac{S_x \pm i S_y}{\sqrt{2}}.$$

Одним из основных отличий от большинства известных моделей четырехволнового смешения является рассматриваемое здесь соотношение между

частотами поля накачки и стоксова поля. Считаем, что для характерных частот поля накачки Ω , стоксова поля ω_s и частоты перехода $\omega_0 = \omega_3 - \omega_1$ справедливы соотношения

$$\omega_s \ll \Omega - \omega_0, \quad \omega_s \ll \omega_0, \quad \omega_s \approx \omega_2 - \omega_3. \quad (10)$$

Здесь $\hbar\omega_k$ — энергия уровня $k = 1, 2, 3, 4$, см. рис. 1, на котором показана четырехуровневая схема взаимодействия.

Неравенства (10) могут быть выполнены как для микроволнового [20], так и для оптического диапазонов стоксова поля. Такое соотношение частот позволяет с достаточным физическим основанием пренебрегать вкладом других уровней, помимо рассматриваемых в работе, и переходов между ними. Поэтому ограничимся рассмотрением двухуровневого комбинационного перехода с запрещенным дипольным переходом.

В качестве полей S_x, S_y могут быть выбраны поля со спектром, лежащим в диапазоне от инфракрасного (десятки терагерц) до микроволнового (сотни гигагерц), см. ниже. Считаем, что ширина спектра импульса \mathbf{S} без огибающей много меньше отстройки $\Omega_0 = \Omega - \omega_2 = \Omega - \omega_4$ частоты Ω от частот уровней 2 и 4, соответственно. Применим известный прием адиабатического исключения к уровням 2 и 4. В работах [16, 17] показано, что адиабатическое исключение, например, уровня 2 возможно при условии $g_{lm}/\Omega_2 \ll 1$, где g_{lm} — коэффициент связи между полем и средой. Это условие согласуется с примененным ниже приближением однонаправленного распространения импульсов. Получающийся в результате такой операции гамильтониан содержит по полю нелинейность четвертого порядка, которая называется резонансно-индуцированной керровской нелинейностью [11].

Пусть ψ_k — амплитуда заселенности уровня k . В двухуровневой среде уравнения взаимодействия полей при четырехволновом смешении могут быть выведены для произвольного числа виртуальных уровней так же, как это делается при выводе уравнений квазимонохроматического КР [11, 18]. Учет дополнительных виртуальных уровней приводит лишь к переопределению коэффициентов взаимодействия, поэтому для построения теории ограничимся учетом только двух виртуальных уровней, 2 и 4.

Уравнения эволюции амплитуд заселенностей четырехуровневой среды имеют вид

$$\hbar(\partial_t - i\omega_1)\psi_1 = i(\mathbf{d}_- \cdot \mathbf{E})^* \psi_2 + i(\mathbf{d}_+ \cdot \mathbf{E})^* \psi_4, \quad (11)$$

$$\hbar(\partial_t - i\omega_3)\psi_3 = i(\mathbf{g}_+ \cdot \mathbf{S})^* \psi_2 + (\mathbf{g}_- \cdot \mathbf{S})^* \psi_4, \quad (12)$$

$$\hbar(\partial_t - i\omega_2)\psi_2 = i(\mathbf{d}_- \cdot \mathbf{E})\psi_1 + (\mathbf{g}_+ \cdot \mathbf{S})\psi_3, \quad (13)$$

$$\hbar(\partial_t - i\omega_2)\psi_4 = i(\mathbf{d}_+ \cdot \mathbf{E})\psi_1 + (\mathbf{g}_- \cdot \mathbf{S})\psi_3. \quad (14)$$

Здесь \mathbf{d}_\pm , \mathbf{g}_\pm — векторы дипольных моментов на переходах $1 \leftrightarrow 2, 4 (\Delta M \pm 1)$, $3 \leftrightarrow 2, 4 (\Delta M = \pm 1)$; ΔM — изменение проекции магнитного момента. Релаксацией мы пренебрегаем.

Выберем $\omega_1 = 0$. Применим приближение медленных огибающих для полей накачки и приближение вращающейся волны для волновых функций среды:

$$\psi_1 = \tilde{\psi}_1 \exp(i(\Omega_0/2)t), \quad (15)$$

$$\psi_2 = \tilde{\psi}_2 \exp(i\Omega t), \quad (16)$$

$$\psi_3 = \tilde{\psi}_3 \exp[i(\omega_3 - \Omega_0/2)t], \quad (17)$$

$$\psi_4 = \tilde{\psi}_4 \exp(i\Omega t). \quad (18)$$

Полагаем

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t} \frac{1}{\Omega_0 \psi_k} \approx \epsilon_0, \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \frac{1}{\Omega_0 \mathbf{S}} \approx \epsilon_0,$$

где $\Omega_0 = \Omega - \omega_0$ и ϵ_0 — малый параметр. Считаем, что выполняются условия квазирезонанса

$$\Omega_0 \ll \Omega, \omega_0. \quad (19)$$

Поскольку для импульсов поля Стокса приближение медленной огибающей не используется, спектральная ширина этих импульсов может быть порядка $\omega_3 - \omega_2$. В этих условиях интегрирование по частям уравнений (13) и (14), проводимое после подстановки выражений (15)–(18), показывает, что производной по времени от $\tilde{\psi}_2$ и $\tilde{\psi}_4$ можно пренебречь с точностью $O(\epsilon_0^2)$. Это позволяет применить стандартную процедуру адиабатического исключения $\tilde{\psi}_2$ и $\tilde{\psi}_4$ [11, 16, 17]. В итоге получаем систему уравнений для волновых функций эффективной двухуровневой среды:

$$\hbar^2 \Omega_0 \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial t} = i [|\mathbf{d}_- \cdot \mathbf{E}|^2 + |\mathbf{d}_+ \cdot \mathbf{E}|^2 + \Omega_0/2] \tilde{\psi}_1 + [(\mathbf{d}_- \cdot \mathbf{E})^*(\mathbf{g}_+ \cdot \mathbf{S}) + (\mathbf{d}_+ \cdot \mathbf{E})^*(\mathbf{g}_- \cdot \mathbf{S})] \tilde{\psi}_3, \quad (20)$$

$$\hbar^2 \Omega_0 \frac{\partial \tilde{\psi}_3}{\partial t} = i [|\mathbf{g}_- \cdot \mathbf{S}|^2 + |\mathbf{g}_+ \cdot \mathbf{S}|^2 - \Omega_0/2] \tilde{\psi}_3 + [(\mathbf{d}_- \cdot \mathbf{E})(\mathbf{g}_+ \cdot \mathbf{S})^* + (\mathbf{d}_+ \cdot \mathbf{E})(\mathbf{g}_- \cdot \mathbf{S})^*] \tilde{\psi}_1. \quad (21)$$

Далее, вводим функции — компоненты вектора поперечного эффективного поля $\mathbf{E}_\perp = (E_x, E_y)^T$ и «продольную» компоненту E_z :

$$E_x = \text{Re} \frac{[(\mathbf{d}_- \cdot \mathbf{E})(\mathbf{g}_+ \cdot \mathbf{S})^* + (\mathbf{d}_+ \cdot \mathbf{E})(\mathbf{g}_- \cdot \mathbf{S})^*]}{\hbar^2 \Omega_0 \nu_0}, \quad (22)$$

$$E_y = \text{Im} \frac{[(\mathbf{d}_- \cdot \mathbf{E})(\mathbf{g}_+ \cdot \mathbf{S})^* + (\mathbf{d}_+ \cdot \mathbf{E})(\mathbf{g}_- \cdot \mathbf{S})^*]}{\hbar^2 \Omega_0 \nu_0}. \quad (23)$$

$$E_z = \frac{|\mathbf{g}_- \cdot \mathbf{S}|^2 + |\mathbf{g}_+ \cdot \mathbf{S}|^2 - |\mathbf{d}_- \cdot \mathbf{E}|^2 - |\mathbf{d}_+ \cdot \mathbf{E}|^2}{\hbar^2 \Omega_0 \nu_0}. \quad (24)$$

Здесь

$$\nu_0 = \Omega_0 - E_z \approx \Omega_0 - \frac{|\mathbf{d}_- \cdot \mathbf{E}|^2 + |\mathbf{d}_+ \cdot \mathbf{E}|^2}{\hbar^2 \Omega_0}. \quad (25)$$

Поскольку поле накачки предполагается достаточно мощным, чтобы можно было пренебречь его истощением, в выражении (25) для ν_0 мы пренебрегли частями, содержащими амплитуду стоковского поля, т. е. ν_0 — константа.

Подставляя значения (7), (8), получаем из уравнений (22), (23) следующие выражения:

$$E_x = \frac{2}{\hbar^2 \Omega_0 \nu_0} \times [d_x g_x (Q_x + P_x) S_x - d_y g_y (Q_y + P_y) S_y], \quad (26)$$

$$E_x = \frac{2}{\hbar^2 \Omega_0 \nu_0} \times [d_x g_x (Q_y - P_y) S_x + d_y g_y (Q_x - P_x) S_y]. \quad (27)$$

Вводим также компоненты вектора Блоха $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ в виде

$$R_x = \tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_3^* + \tilde{\psi}_1^* \tilde{\psi}_3, \quad (28)$$

$$R_y = i (\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_3^* - \tilde{\psi}_1^* \tilde{\psi}_3), \quad (29)$$

$$R_z = \tilde{\psi}_3 \tilde{\psi}_3^* - \tilde{\psi}_1^* \tilde{\psi}_1. \quad (30)$$

Поперечные компоненты вектора Блоха представим отдельно в виде

$$\mathbf{R}_\perp = (R_+, R_-)^T. \quad (31)$$

Для того чтобы определить поперечные компоненты поляризации среды, найдем эффективный гамильтониан взаимодействия, сведя задачу к полуклассической теории взаимодействия излучения

с двухуровневой средой. Последняя изучалась для анизотропных сред, в частности, в работах [36–38]. Отбрасывая члены с быстродействующими множителями, находим эффективный гамильтониан взаимодействия, отвечающий правым частям уравнений (20), (21). Динамика вектора Блоха описывается усредненными по квантовым состояниям уравнениями Гейзенберга для оператора \hat{R} , соответствующего эффективной двухуровневой среде,

$$i\hbar \frac{\partial \hat{R}}{\partial t'} = [\hat{R}, \hat{H}], \quad (32)$$

где

$$\hat{H} = \hbar\nu_0 \left[\frac{1}{2} \hat{\sigma}_3 - E_x \hat{\sigma}_1 - E_y \hat{\sigma}_2 \right]. \quad (33)$$

Здесь E_x, E_y — проекции эффективного поля на направления осей x, y ; $t' = (t - z/c)$ — время запаздывания, $\hat{\sigma}_n, n = 1, 2, 3$ — матрицы Паули.

Систему уравнений Блоха получаем из (32), (33) стандартным образом (см., например, [38]). Уравнения Блоха (которые в рассматриваемом случае с учетом обозначений (26)–(30) могут быть также получены непосредственно из уравнений (20), (21)) имеют вид

$$\frac{\partial R_x}{\partial \tilde{\tau}} = -R_y + E_y R_z, \quad (34)$$

$$\frac{\partial R_y}{\partial \tilde{\tau}} = R_x - E_x R_z, \quad (35)$$

$$\frac{\partial R_z}{\partial \tilde{\tau}} = (E_x R_y - E_y R_x), \quad (36)$$

где

$$\tilde{\tau} = t' \nu_0.$$

Поскольку истощением накачки мы пренебрегаем, нам осталось найти уравнения Максвелла для компонент поля Стокса S_x, S_y , которые получаем проекцией на соответствующую ось:

$$\frac{\partial^2 S_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi n}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}_x}{\partial t^2}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 S_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S_y}{\partial t^2} = \frac{4\pi n}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}_y}{\partial t^2}. \quad (38)$$

Здесь c — скорость света в среде с плотностью n , $\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y$ — проекции поляризуемости среды, которые определены ниже, на оси x, y .

Для того чтобы упростить систему уравнений (37), (38), воспользуемся известным из

гидродинамики приближением однонаправленного распространения волн, которое при выводе интегрируемых редуцированных уравнений теории самоиндуцированной прозрачности в двухуровневой среде впервые применялось в работе [3] для линейно поляризованного светового поля без огибающей. Суть этого приближения в следующем. Плотность активных примесных атомов или молекул в реальных средах нередко можно считать малой. Малой плотности активных атомов отвечает приближенное формальное равенство

$$\frac{\partial}{\partial z} \approx -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + O(\epsilon),$$

где ϵ — малый параметр. Другими словами, нормированная плотность двухуровневых атомов или молекул имеет тот же порядок малости, что и производная

$$\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

компонент поляризации поля. Как следствие, влиянием волны, распространяющейся налево, на динамику волны, бегущей вправо, можно пренебречь. Полученная в результате система уравнений описывает динамику импульсов, бегущих вправо, без учета волн, бегущих в противоположном направлении. Групповая скорость таких импульсов близка к скорости света в среде. Оценки, выполненные для параметров примесных атомов, находящихся в прозрачной твердой среде, показали, что условие однонаправленности выполняется во многих физических схемах наблюдения явления самоиндуцированной прозрачности для значений плотности примесных атомов вплоть до значений порядка 10^{18} см^{-3} [1, 38].

В приближении однонаправленного распространения волн получаем из (37), (38) систему уравнений

$$\frac{\partial S_x}{\partial z} = -\frac{2\pi n}{c} \frac{\partial \mathcal{P}_x}{\partial t'}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial S_y}{\partial z} = -\frac{2\pi n}{c} \frac{\partial \mathcal{P}_y}{\partial t'}. \quad (40)$$

Используя эффективный гамильтониан (33), получаем x - и y -проекции поляризуемости среды:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_x} = \\ &= \frac{g_x d_x}{\hbar \Omega_0} [(P_x + Q_x) R_x - (P_y - Q_y) R_y], \quad (41) \end{aligned}$$

$$P_y = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_y} = -\frac{g_y d_y}{\hbar \Omega_0} [(P_y + Q_y) R_x + (P_x - Q_x) R_y]. \quad (42)$$

Здесь \mathcal{H} — усредненный по квантовым состояниям гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$.

В итоге, в приближении однонаправленного распространения импульсов уравнения Максвелла могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial \chi} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} \hat{J} \mathbf{R}_\perp, \quad (43)$$

где

$$\chi = \frac{2D_+ \pi n}{c \hbar}$$

и \hat{J} — симметричная действительная матрица, имеющая вид

$$\hat{J} = \frac{1}{\hbar^4 \Omega_0^4 D_+} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & J_{22} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$J_{11} = [g_x d_x (P_x + Q_x)]^2 + [g_y d_y (P_y + Q_y)]^2, \quad (45)$$

$$J_{12} = -(d_x g_x)^2 (P_x + Q_x) (P_y - Q_y) + (d_y g_y)^2 (P_y + Q_y) (P_x - Q_x), \quad (46)$$

$$J_{22} = [g_x d_x (P_y - Q_y)]^2 + [g_y d_y (P_x - Q_x)]^2, \quad (47)$$

$$D_\pm^2 = \frac{[d_x g_x d_y g_y (P_x^2 + P_y^2 \pm Q_x^2 \pm Q_y^2)]^2}{\hbar^4 \Omega_0^4}. \quad (48)$$

Детерминант матрицы \hat{J} имеет вид

$$\det \hat{J} = \frac{D_-^2}{D_+^2}. \quad (49)$$

3. ЧАСТНЫЕ И ОБЩИЙ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОЙ МОДЕЛИ

В случае, если $\det \hat{J}$ равен нулю, нетрудно показать, что система уравнений (34)–(36), (43) приводится к виду, формально эквивалентному давно известной системе уравнений Максвелла–Блоха, описывающей эволюцию импульса линейно поляризованного электромагнитного поля в двухуровневой среде без применения приближения медленной огибающей [3]. Ниже рассматривается только случай невырожденной матрицы \hat{J} , т. е. $\det \hat{J} \neq 0$.

Оказывается, что система уравнений (34)–(36), (43) интегрируема для произвольных значений действительных коэффициентов (45)–(47), входящих в матрицу \hat{J} (44). Перепишем элементы матрицы \hat{J} , введя обозначения

$$a_x = \frac{J_{11}}{\hbar^4 \Omega_0^4 D_+}, \quad a_y = \frac{J_{22}}{\hbar^4 \Omega_0^4 D_+}, \quad (50)$$

$$r = \frac{J_{12}}{\hbar^4 \Omega_0^4 D_+}.$$

Введем также новую вектор-функцию

$$\mathbf{W} = (W_x, W_y)^T,$$

где

$$\mathbf{W} = \hat{J} \mathbf{E}_\perp. \quad (51)$$

В итоге получаем следующую новую интегрируемую систему уравнений эволюции импульсов электромагнитного поля в анизотропной двухуровневой среде:

$$\frac{\partial R_x}{\partial \tilde{\tau}} = -R_y + (a_y W_y + r W_x) R_z, \quad (52)$$

$$\frac{\partial R_y}{\partial \tilde{\tau}} = R_x - (r W_y + a_x W_x) R_z, \quad (53)$$

$$\frac{\partial R_z}{\partial \tilde{\tau}} = (r W_y + a_x W_x) R_y - (a_y W_y + r W_x) R_x, \quad (54)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial \chi} = -\frac{\partial R_x}{\partial \tilde{\tau}}, \quad (55)$$

$$\frac{\partial W_y}{\partial \chi} = -\frac{\partial R_y}{\partial \tilde{\tau}}. \quad (56)$$

Представление Лакса системы уравнений (52)–(56) с эллиптическим спектральным параметром достаточно громоздко и вынесено в Приложение.

Рассмотрим нетривиальные редукции системы (52)–(56). Пусть среда анизотропна и имеется только одно линейно поляризованное поле накачки:

$$d_x g_x \neq d_y g_y, \quad Q_x = Q_y = P_y = 0, \quad P_x \neq 0. \quad (57)$$

Тогда находим

$$a_x = \frac{d_x g_x}{d_y g_y} = a_y^{-1}, \quad r = 0. \quad (58)$$

С точки зрения физических приложений представляет интерес нахождение модели, в рамках которой возможно управление параметрами импульса стоксова поля посредством изменения фаз или

амплитуд полей накачки. В анизотропной среде изменение фаз и амплитуд полей приводит к изменению элементов матрицы \hat{J} , что позволяет управлять динамикой и параметрами генерируемых импульсов поля Стокса. Однако развитие и применение аппарата метода обратной задачи к общей модели (52)–(56) представляет собой достаточно сложную задачу, требующую отдельного изучения. Поэтому рассмотрим случай изотропной среды. Анализ матрицы \hat{J} показывает, что фаза полей накачки не влияет на ее параметры при эволюции полей в изотропной среде. В то же время изменять параметры матрицы \hat{J} можно, меняя амплитуды полей накачки. Пусть эти амплитуды пропорциональны, т. е. выполняются условия:

$$d_x g_x = d_y g_y, \quad Q_x = \gamma_0 P_x, \quad Q_y = \gamma_0 P_y, \quad (59)$$

где $\gamma_0 \neq \pm 1$ — некоторая действительная константа. В этом случае находим

$$a_x = \frac{(1 + \gamma_0)^2}{1 + \gamma_0^2}, \quad a_y = \frac{(1 - \gamma_0)^2}{1 + \gamma_0^2}, \quad r = 0. \quad (60)$$

В случае изотропной среды и $O_x = O_y = 0$ находим

$$a_x = a_y = 1, \quad r = 0. \quad (61)$$

Представление Лакса для этого частного случая включает известную спектральную задачу Каупа–Ньювелла [6] с квадратичной зависимостью от спектрального параметра, в отличие от случаев (57) и (59) и, очевидно, общего случая, которым отвечают новые спектральные задачи.

Уравнения Максвелла–Блоха (52)–(56) в случаях (57) и (59) приводятся к виду, формально эквивалентному найденной автором недавно [7] системе уравнений самоиндуцированной прозрачности импульсов электромагнитного поля без огибающей в анизотропной среде. В указанных выше частных случаях (57), (59) и (61) система уравнений (52)–(56) изучалась в рамках МОЗР в работах автора [6–9]. Эти работы были посвящены нахождению солитонных решений в двухуровневой среде с дипольным переходом, отвечающих явлению самоиндуцированной прозрачности. В отличие от этих работ, в настоящей работе рассматривается более общая система уравнений. Кроме того, при выводе уравнений метода обратной задачи здесь делается акцент на применение специфических свойств симметрии этих уравнений. Это позволяет вывести простую систему интегральных уравнений типа уравнений Марченко. И наконец, здесь исследуется процесс двойного комбинационного рассеяния. Для стандартной постановки

эксперимента этот процесс отвечает чисто радиационной, не солитонной динамике. Поэтому решение модели требует дополнительного соответствующего развития теории метода обратной задачи.

4. ОБОБЩЕНИЕ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ОБЩЕЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ МОДЕЛИ

В этом разделе приводится обобщение частных случаев общей модели, отвечающих условиям (57) и (59), т. е. для случая

$$a_x \neq a_y, \quad a_x a_y \neq 0, \quad r = 0.$$

Введем новые функции в системе уравнений (52)–(56)

$$W_x = \mathcal{E}_x a_x^{-3/4} a_y^{-1/4}, \quad (62)$$

$$W_y = \mathcal{E}_y a_y^{-3/4} a_x^{-1/4} \quad (63)$$

и заменим

$$R_z \rightarrow -R_z. \quad (64)$$

Запишем

$$f = \sqrt{a_y/a_x}$$

и пусть $f \geq 1$ без потери общности. Для $f = 1$ получается изотропный вариант взаимодействия, который здесь не рассматривается.

После замен (62)–(64) система уравнений (52)–(56) для $r = 0$ записывается в виде

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \chi} = \frac{R_y}{\sqrt{f}} + \mathcal{E}_y R_z, \quad (65)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial \chi} = -R_x \sqrt{f} - \mathcal{E}_x R_z, \quad (66)$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial \tilde{\tau}} = -\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \chi} \sqrt{f}, \quad (67)$$

$$\frac{\partial R_y}{\partial \tilde{\tau}} = -\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial \chi} \frac{1}{\sqrt{f}}, \quad (68)$$

$$\frac{\partial R_z}{\partial \tilde{\tau}} = R_x \mathcal{E}_y \sqrt{f} - \frac{R_y \mathcal{E}_x}{\sqrt{f}}. \quad (69)$$

Введем новые параметры

$$f_{\pm} = \frac{f \pm f^{-1}}{2}, \quad h = \frac{f_-}{2f_+} \quad (70)$$

и комплексные поля

$$E = \frac{\mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y}{\sqrt{f_+}}, \quad (71)$$

$$R = \frac{R_x\sqrt{f} + iR_y/\sqrt{f}}{\sqrt{f_+}} \quad (72)$$

и изменим масштаб временной переменной $\tilde{\tau}$:

$$\theta = f_+\tilde{\tau}. \quad (73)$$

Запишем более общую, чем (65)–(69), интегрируемую систему уравнений, имея в виду также другие применения модели

$$\frac{\partial E}{\partial \chi} = -i(R + ER_z), \quad (74)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = i(S + FR_z). \quad (75)$$

$$\frac{\partial R_z}{\partial \theta} = \frac{i}{2}(RF - SE), \quad (76)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = -\frac{\partial(E + 2hF)}{\partial \chi}, \quad (77)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -\frac{\partial(F + 2hE)}{\partial \chi}. \quad (78)$$

Считаем, что

$$F = -pE^*, \quad S = -pR^*, \quad R_z \in \mathbb{R}, \quad (79)$$

где звезда означает комплексное сопряжение и $p = \pm 1$. Система (74)–(78) становится эквивалентной системе (65)–(69) после редукции $p = -1$.

В рассматриваемой модели (74)–(78) длина вектора Блоха $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ не зависит от времени,

$$\frac{\partial(R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)}{\partial \theta} = 0, \quad (80)$$

или, с учетом преобразования (72),

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{(R + S)^2}{4(1 + 2h)} - \frac{(R - S)^2}{4(1 - 2h)} + R_z^2 \right] = 0. \quad (81)$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(EF)}{\partial \chi} + \frac{\partial R_z}{\partial \theta} = 0. \quad (82)$$

5. ЛИНЕЙНОЕ РЕШЕНИЕ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Найдем линейное автомодельное решение системы (74)–(78), описывающее поведение поля E вблизи основного и полностью инвертированного состояний системы. Пусть

$$\epsilon = R_z(t = 0) = \pm 1.$$

Знак «+(-)» отвечает начальному основному (инвертированному) состоянию среды.

Система (74)–(78) в линейном приближении, т. е. при $R_z(\chi, \tau) \equiv \epsilon$, сводится к системе

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \chi \partial \theta} = i \left[\frac{\partial}{\partial \chi} (E + 2hF) - \epsilon \frac{\partial}{\partial \theta} E \right], \quad (83)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \chi \partial \theta} = i \left[-\frac{\partial}{\partial \chi} (F + 2hE) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \theta} F \right]. \quad (84)$$

Подставив выражения

$$E = U \exp(i\tau - i\epsilon\chi), \quad F = -pU^* \exp(-i\tau + i\epsilon\chi)$$

в систему (83), (84), получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \chi \partial \theta} = \epsilon U + 2ihp \frac{\partial U^*}{\partial \chi} - 2hp\epsilon U^*. \quad (85)$$

Начально-краевые условия имеют следующий вид:

$$U(0, \chi) = U_0, \quad \frac{\partial U}{\partial \chi}(0, \chi) = 0. \quad (86)$$

Эти условия отвечают случаю, когда поляризуемость среды в начальный момент равна нулю и в торец образца ($z = 0$) инжектируются постоянные поля Стокса и поле накачки. Предположим, что $U(\theta, \chi)$ зависит только от автомодельной переменной $\eta = \sqrt{4\chi\theta}$, т. е.

$$U(\theta, \chi) = U(\eta).$$

Тогда уравнение (85) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} U + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} U &= \\ &= \epsilon U - 2hp\epsilon U^* + 2ihp \sqrt{\frac{\theta}{\chi}} \frac{\partial}{\partial \eta} U^*, \end{aligned} \quad (87)$$

из которого следует, что предположение о такой автомодельной зависимости справедливо лишь для асимптотики $\chi/\theta \rightarrow \infty$.

Асимптотические действительные решения уравнения (87) в этом случае имеют вид

$$U(\theta, \chi) = \begin{cases} I_0(\gamma_0(\eta - \eta_0)) \left(1 + O\sqrt{\frac{\theta}{\chi}}\right), & \epsilon = 1, \\ J_0(\gamma_0(\eta - \eta_0)) \left(1 + O\sqrt{\frac{\theta}{\chi}}\right), & \epsilon = -1, \end{cases} \quad (88)$$

$$U_0 = \begin{cases} I_0(-\gamma_0\eta_0), & \epsilon = 1, \\ J_0(-\gamma_0\eta_0), & \epsilon = -1. \end{cases} \quad (89)$$

Здесь I_0, J_0 — функции Бесселя, $\gamma_0 = \sqrt{1 - 2hp}$, причем γ_0 всегда действительна.

Пусть $p = -1$. Решение (88) показывает, что при инжектировании сильного поля накачки и для начального основного состояния среды система оказывается неустойчивой, амплитуда затравочного импульса поля Стокса на линейной стадии процесса экспоненциально растет. Решение при $\chi \rightarrow \infty$ стремится к автомодельному. Вблизи состояния равновесия ($\epsilon = -1$) поле затухает асимптотически, осциллируя. Отметим аналогию с известной моделью комбинационного рассеяния для квазимонохроматических импульсов [19]. Решение (88) описывает линейную стадию усиления стоксова (пробного) поля, как и в случае квазимонохроматического КР.

Целью настоящей работы является описание нелинейной стадии эволюции поля Стокса и среды в рамках интегрируемой модели. Мы исследуем задачу об усилении слабого затравочного стоксова поля на фоне сильного длинного импульса квазимонохроматического поля накачки в двухуровневой среде, находящейся первоначально в основном состоянии. Поэтому начально-краевые условия для системы уравнений (74)–(78) имеют следующий вид

$$E(0, \tau) = E_0, \quad |E_0| \ll 1, \quad (90)$$

$$R(\chi, 0) = 0, \quad R_z(\chi, 0) = 1. \quad (91)$$

Подчеркнем, что эти условия отвечают несолитонной динамике генерации импульсов, которая описывается, как и случае квазимонохроматического КР, непрерывным спектром соответствующей спектральной задачи [19]. Поэтому ниже внимание будет уделено изучению вклада непрерывного (радиационного) спектра в решение задачи. В случае квазимонохроматического КР при аналогичных начально краевых условиях решение также выходит на автомодельную асимптотику [19]. Однако сравнить аналитические решения, описывающие нелинейные ста-

дии процессов, не удается, поскольку в такой же анизотропной среде уравнения Максвелла–Блоха, отвечающие квазимонохроматическому КР, не интегрируемы.

Как следует из линейного решения (88), (89), нелинейная стадия процесса вынужденного комбинационного рассеяния или четырехволнового смешения должна включать элементы автомодельной асимптотики. Как будет видно из дальнейшего, в изучаемой здесь модели эта автомодельность проявляется в очень протяженной среде.

6. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ ЗАДАЧИ

Система эволюционных уравнений (74)–(78) является условием интегрируемости следующих двух линейных систем уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \hat{U} \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = \hat{V} \Phi. \quad (92)$$

Здесь Φ — матричнозначная 2×2 -функция, а \hat{U}, \hat{V} — 2×2 -матрицы:

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i(\zeta^2 - h^2\zeta^{-2}) & E\zeta + hF/\zeta \\ -F\zeta - hE/\zeta & i(\zeta^2 - h^2\zeta^{-2}) \end{pmatrix}, \quad (93)$$

$$\hat{V} = -\frac{1}{2m} \times \begin{pmatrix} -i(\zeta^2 - h^2\zeta^{-2})R_z & R\zeta + hS/\zeta \\ -S\zeta - hR/\zeta & i(\zeta^2 - h^2\zeta^{-2})R_z \end{pmatrix}, \quad (94)$$

где

$$m = 1 + \zeta^2 + h^2\zeta^{-2},$$

ζ — спектральный параметр. Система (92)–(94) представляет собой новую спектральную задачу, требующую развития соответствующего аппарата МОЗР.

Заметим, что в изотропном пределе $h \rightarrow 0$. Все уравнения метода обратной задачи могут быть развиты для пары Лакса и для изотропного случая могут быть получены предельным переходом $h \rightarrow 0$.

Однако далее мы положим, что $h > 0$, и рассмотрим более симметричную форму пары Лакса. Введем параметр $q = \sqrt{h}$. Пусть $\lambda = \zeta/q$ — новый спектральный параметр. Тогда уравнения (92)–(94) примут вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \hat{U} \Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i(\lambda^2 - \lambda^{-2}) & \mathcal{E}\lambda + \mathcal{F}/\lambda \\ -\mathcal{F}\lambda - \mathcal{E}/\lambda & (\lambda^2 - \lambda^{-2}) \end{pmatrix} \Phi, \quad (95)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = \widehat{V} \Phi = \frac{-q}{2w(\lambda)} \times \begin{pmatrix} -iq(\lambda^2 - \lambda^{-2})R_z & R\lambda + S/\lambda \\ -S\lambda - R/\lambda & iq(\lambda^2 - \lambda^{-2})R_z \end{pmatrix} \Phi, \quad (96)$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{E}{h}, \quad \mathcal{F} = \frac{F}{h}, \\ \tau = h\theta, \quad w(\lambda) = 1 + h(\lambda^2 + \lambda^{-2}).$$

Матричные функции $\widehat{U}(\lambda)$ и $\widehat{V}(\lambda)$ имеют следующие свойства симметрии:

$$\widehat{U}(1/\lambda) = \sigma_1 \widehat{U}(-\lambda) \sigma_1, \quad \widehat{V}(1/\lambda) = \sigma_1 \widehat{V}(-\lambda) \sigma_1, \quad (97)$$

$$\widehat{U}(-\lambda) = \sigma_3 \widehat{U}(\lambda) \sigma_3, \quad \widehat{V}(-\lambda) = \sigma_3 \widehat{V}(\lambda) \sigma_3. \quad (98)$$

Здесь σ_1 и σ_3 — стандартные матрицы Паули. При выполнении условия (79) получаем дополнительное свойство симметрии

$$\widehat{U}^*(-p/\lambda^*) = \widehat{U}(\lambda), \quad \widehat{V}^*(-p/\lambda^*) = \widehat{V}(\lambda), \quad (99)$$

или, комбинируя со свойством (97), получаем

$$\widehat{U}^*(p\lambda^*) = \sigma_1 \widehat{U}(\lambda) \sigma_1, \quad \widehat{V}^*(p\lambda^*) = \sigma_1 \widehat{V}(\lambda) \sigma_1. \quad (100)$$

Решения линейной системы (95), (96) обладают такими же свойствами симметрии.

Стандартным способом вводим функции Йоста Φ^\pm — решения уравнения (95) с асимптотиками

$$\Phi^\pm = \exp(-i\Lambda \widehat{\sigma}_3 \tau), \quad \tau \rightarrow \pm\infty, \quad (101)$$

где

$$\Lambda(\lambda) = \lambda^2 - \lambda^{-2}.$$

Свойства симметрии (98), (99) отвечают следующей матричной форме функций Йоста:

$$\Phi^\pm = \begin{pmatrix} \phi_1^\pm & p\phi_2^{\pm*} \\ \phi_2^\pm & \phi_1^{\pm*} \end{pmatrix}.$$

Представим фундаментальные решения в виде

$$\Phi^- = (\phi, \tilde{\phi}), \quad \Phi^+ = (\tilde{\psi}, \psi), \quad (102)$$

где

$$\phi = \phi(\chi, \tau, \lambda), \quad \tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\chi, \tau, \lambda), \dots$$

— столбцы функций. Эти решения связаны матрицей рассеяния \widehat{T} :

$$\Phi^- = \Phi^+ \widehat{T}, \quad \widehat{T} = \begin{pmatrix} a(\lambda) & p\lambda^* b^*(\lambda^*) \\ \lambda b(\lambda) & a^*(\lambda^*) \end{pmatrix}. \quad (103)$$

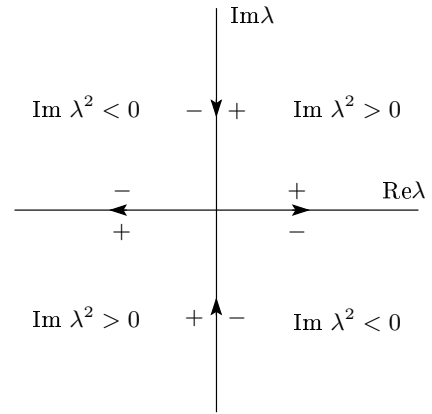


Рис. 2. Контур интегрирования Γ в комплексной плоскости λ

Выбор матрицы \widehat{T} в виде (103) обусловлен свойствами симметрии спектральной задачи. С учетом свойств симметрии (97)–(100) находим следующие свойства компонент матрицы T :

$$a^*(\lambda^*) = a(1/\lambda), \quad (104)$$

$$|\lambda|^2 b^*(\lambda^*) = p b(1/\lambda), \quad (105)$$

где $\lambda \in \Gamma$, Γ — непрерывный спектр, показанный на рис. 2.

Для того чтобы найти связь между решениями спектральной задачи и данными рассеяния, введем новые функции

$$\mathbf{M}(\lambda, \tau) := \phi(\lambda, \tau) \exp(i\Lambda\tau), \quad (106)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\lambda, \tau) := \tilde{\phi}(\lambda, \tau) \exp(-i\Lambda\tau),$$

$$\mathbf{N}(\lambda, \tau) := \psi(\lambda, \tau) \exp(-i\Lambda\tau), \quad (107)$$

$$\widetilde{\mathbf{N}}(\lambda, \tau) := \tilde{\psi}(\lambda, \tau) \exp(i\Lambda\tau),$$

имеющие следующие асимптотики:

$$\mathbf{M}(\lambda, \tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{M}}(\lambda, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (108) \\ \tau \rightarrow -\infty,$$

$$\mathbf{N}(\lambda, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{N}}(\lambda, \tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (109) \\ \tau \rightarrow \infty.$$

Перепишем систему (95) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\phi_1 \exp(i\Lambda\tau)) = \left(\lambda \mathcal{E} + \frac{\mathcal{F}}{\lambda} \right) \phi_2 \exp(i\Lambda\tau), \quad (110)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\phi_2 \exp(-i\Lambda\tau)) = - \left(\lambda \mathcal{F} + \frac{\mathcal{E}}{\lambda} \right) \phi_1 \exp(-i\Lambda\tau). \quad (111)$$

Функции \mathbf{M} , \mathbf{N} , $\widetilde{\mathbf{M}}$, $\widetilde{\mathbf{N}}$ имеют следующие интегральные представления, которые получаются после их подстановки в (110), (111) и последующего интегрирования полученной системы с учетом асимптотик (108), (109):

$$\mathbf{M}(\lambda, \tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_+(\lambda, \tau - s) \mathbf{Q}(\lambda) \mathbf{M}(\lambda, s) ds, \quad (112)$$

$$\mathbf{N}(\lambda, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{G}}_-(\lambda, \tau - s) \mathbf{Q}(\lambda) \mathbf{N}(\lambda, s) ds, \quad (113)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\lambda, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{G}}_+(\lambda, \tau - s) \mathbf{Q}(\lambda) \widetilde{\mathbf{M}}(\lambda, s) ds, \quad (114)$$

$$\widetilde{\mathbf{N}}(\lambda, \tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_-(\lambda, \tau - s) \mathbf{Q}(\lambda) \widetilde{\mathbf{N}}(\lambda, s) ds. \quad (115)$$

Здесь

$$\mathbf{Q}(\lambda, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \mathcal{E} + \mathcal{F}/\lambda \\ -\lambda \mathcal{F} - \mathcal{E}/\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad (116)$$

$$\mathbf{G}_{\pm}(\lambda, \tau) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(2i\Lambda\tau) \end{pmatrix} \theta(\pm\tau), \quad (117)$$

$$\widetilde{\mathbf{G}}_{\pm}(\lambda, \tau) = \pm \begin{pmatrix} \exp(-2i\Lambda\tau) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \theta(\pm\tau). \quad (118)$$

Функция $\mathbf{G}_{\pm}(\widetilde{\mathbf{G}}_{\pm})$ аналитична в первом и третьем (втором и четвертом) квадрантах комплексной плоскости λ ; $\theta(\tau)$ — тэта-функция. Коэффициенты рассеяния $a(\lambda), b(\lambda)$ могут быть представлены в виде интегралов от потенциалов \mathcal{E} и \mathcal{F} . Введем функцию

$$\Delta(\lambda, \tau) = \mathbf{M}(\lambda, \tau) - a(\lambda) \widetilde{\mathbf{N}}(\lambda, \tau) \quad (119)$$

и, используя выражения (112)–(118), найдем из первого столбца (103):

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \tau) - \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{G}}_-(\lambda, \tau - s) \mathbf{Q}(s) \Delta(\lambda, s) ds = \\ = (1 - a(\lambda)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(2i\Lambda(\tau - s)) \end{pmatrix} \times \\ \times \mathbf{Q}(s) \mathbf{M}(\lambda, s) ds. \end{aligned} \quad (120)$$

Для $\Delta(\lambda, \tau)$ также справедливо представление, следующее из (103),

$$\Delta(\lambda, \tau) = p \lambda^* b^*(\lambda^*) \exp(2i\Lambda\tau) \mathbf{N}(\lambda, \tau), \quad (121)$$

и имеет место интегральное представление

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \tau) - \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{G}}_-(\lambda, \tau - s) \mathbf{Q}(s) \Delta(\lambda, s) ds = \\ = p \lambda^* b^*(\lambda^*) \exp(2i\Lambda\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (122)$$

Сравнивая (120) и (122), находим

$$a(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda \mathcal{E}(\tau) + \frac{\mathcal{F}(\tau)}{\lambda} \right) M_2(\tau, \lambda) d\tau. \quad (123)$$

Аналогично, используя уравнения для второго столбца функций из системы уравнений (103), находим

$$\begin{aligned} b(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{E}(\tau) + \frac{\mathcal{F}(\tau)}{\lambda^2} \right) \times \\ \times \exp(2i\Lambda\tau) \widetilde{M}_2(x, \lambda) d\tau. \end{aligned} \quad (124)$$

Здесь M_2 и \widetilde{M}_2 — компоненты вектор-функций \mathbf{M} и $\widetilde{\mathbf{M}}$, соответственно.

В линейном приближении имеем $\widetilde{M}_2 \approx 1$, $M_2 \ll 1$, и из уравнения (124) находим

$$b(\lambda) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{E}(\tau) + \frac{\mathcal{F}(\tau)}{\lambda^2} \right] \exp(2i\Lambda\tau) d\tau. \quad (125)$$

Для слабого затравочного импульса поля $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ выражение (125) определяет значение коэффициента рассеяния b^*/a , поскольку при этом $a(\lambda) \approx 1$.

Справедливы следующие условия полноты:

$$\int_{\Gamma} \lambda^m \exp(i\Lambda\tau) d\lambda = 4\pi\delta(\tau), \quad m = 1, -3, \quad (126)$$

$$\int_{\Gamma} \lambda^{2m} \exp(i\Lambda\tau) d\lambda = 0, \quad (127)$$

$$m = -1/2, 0, \pm 1, \pm 2.$$

Контур интегрирования Γ показан на рис. 2.

Интегрируя уравнение (125) по λ с весом $\exp(2i\Lambda\tau)$ и используя условия (126), (127), находим

$$\mathcal{E}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} b(\lambda) \exp(2i\Lambda\tau) d\lambda. \quad (128)$$

Аналогичное выражение для $\mathcal{F}(\tau)$ получается при интегрировании уравнения (125) по λ с весом $\lambda^{-2} \exp(2i\Lambda\tau)$ после замены интегрирования по λ на интегрирование по $1/\lambda$ и учета свойств симметрии (104), (105).

Для задачи, решаемой на бесконечном интервале, зависимость данных рассеяния от χ дается формулой

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \chi} = & -\hat{T} \exp(-i\hat{\sigma}_3 \Lambda \tau) \hat{V}(\tau = -\infty) \exp(i\hat{\sigma}_3 \Lambda \tau) + \\ & + \exp(-i\hat{\sigma}_3 \Lambda \tau) \hat{V}(\tau = \infty) \exp(i\hat{\sigma}_3 \Lambda \tau) \hat{T}. \end{aligned} \quad (129)$$

Представим функцию Йоста в виде

$$\begin{aligned} \Phi^+(\tau) = & \exp\{-i\hat{\sigma}_3 [\Lambda\tau + \mu(\tau)]\} + \\ & + \int_{-\infty}^{\tau} \begin{bmatrix} K_0(\tau, s) \exp(-i\mu(\tau)) & [\lambda K_1(\tau, s) + \lambda^{-1} K_2(\tau, s)] \exp(-i\mu(\tau)) \\ p [\lambda K_1^*(\tau, s) + \lambda^{-1} K_2^*(\tau, s)] \exp(i\mu(\tau)) & K_0^*(\tau, s) \exp(i\mu(\tau)) \end{bmatrix} \times \\ & \times \exp(-i\hat{\sigma}_3 \Lambda s) ds. \end{aligned} \quad (130)$$

Здесь $\mu(\tau)$ — функция, не зависящая от спектрального параметра, которая будет определена ниже. При выборе представления (130) использовались свойства симметрии функций Йоста. Ядра $K_{0,1,2}$ должны удовлетворять условиям

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K_{0,1,2}(\tau, s) = 0. \quad (131)$$

Подставив выражение (130) в уравнение (95), находим соотношения, связывающие потенциал и ядра:

$$\mathcal{E}(\tau, \chi) = 2K_1(\tau, \tau, \chi) \exp(-2i\mu), \quad (132)$$

$$\mathcal{F}(\tau, \chi) = 2K_2(\tau, \tau, \chi) \exp(-2i\mu). \quad (133)$$

Подставляем значения компонент матричной функции Φ^+ из представления (130) в формулу (103) и интегрируем полученные выражения по λ с весами $\lambda^m \exp(i\Lambda\tau)$, $m = 0, -1, -2$ вдоль контура Γ , показанного на рис. 2. Используя условия

(126) и (127), находим интегральные уравнения типа уравнений Марченко:

$$\begin{aligned} -pK_1(\tau, y) = & F_0(\tau + y) + \\ & + \int_{-\infty}^{\tau} K_0(\tau, s) F_0(s + y) ds, \end{aligned} \quad (134)$$

$$\begin{aligned} -pK_2(\tau, y) = & F_{-1}(\tau + y) + \\ & + \int_{-\infty}^{\tau} K_0(\tau, s) F_{-1}(s + y) ds, \end{aligned} \quad (135)$$

$$\begin{aligned} K_0^*(\tau, y) = & - \int_{-\infty}^{\tau} [K_1^*(\tau, s) F_1(s + y) + \\ & + K_2^*(\tau, s) F_0(s + y)] ds. \end{aligned} \quad (136)$$

Ядра $F_m(y)$ имеют вид

$$F_m(y, \chi) = \int_{\Gamma} \frac{-b^*(\chi, \lambda^*)}{a(\chi, \lambda)} \frac{\lambda^{2m+1} \exp(-i\Lambda y)}{2\pi} d\lambda + i \sum_k \frac{\lambda_k^{2m+1} b^*(\chi, \lambda_k^*) \exp(-i\Lambda_k y)}{(a^*)'(\chi, \lambda_k)}, \quad (137)$$

где

$$\Lambda_k = \lambda_k^2 - \lambda_k^{-2}, \quad (a^*)'(\chi, \lambda_k^*) = \left. \frac{da(\chi, \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_k^*}.$$

Здесь учтена зависимость коэффициентов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ от переменной χ .

Система уравнений (134), (135) отвечает решаемой задаче, если ядро F_m обладает свойством

$$F_0 = pF_{-1}^*. \quad (138)$$

Для солитонной части спектра равенство (138) вытекает из свойств симметрии (99) и из того, что полюсы, расположенные в области аналитичности (первый и четвертый квадранты плоскости λ), входят парами: $(\lambda_k^*, 1/\lambda_k)$. Для «радиационной» части решения это свойство является следствием симметрии (104), (105).

С учетом свойства симметрии (138), найдем ограничения на ядра:

$$K_1 = pK_2^*. \quad (139)$$

Из уравнений (132), (133) и (139) находим

$$\mu(\tau) \equiv \frac{\pi}{4}. \quad (140)$$

В итоге система уравнений (134) — (136) упрощается до двух интегральных уравнений (134), (136).

7. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВИД ЯДЕР И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Ниже мы ограничимся случаем $p = -1$. Поскольку выбраны начально-краевые условия (90), (91), при которых солитонные решения не возникают, мы будем учитывать вклад в решение задачи только непрерывного спектра. Для определения «радиационного» вклада в решение вычислим асимптотическое выражение для ядра $F_m(\xi, \tau)$, $\xi \in \Gamma$. Условия симметрии (138) удовлетворяются, если наряду с вкладом в интеграл окрестности точки λ учесть вклад окрестности точки $1/\lambda^*$, даже если в рассматриваемой области параметров вклад последней области мал.

Обозначим $\rho = -b^*/a$. Вычислим интеграл в выражении (137), учитывая вклады в интеграл в окрестности $|\lambda| \gg 1$ и в окрестности $|\lambda| \ll 1$:

$$F_m(\tau, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{2m+1} \rho \times \exp \left\{ i \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left[\tau - \frac{\epsilon h \chi}{1+q(\lambda^2 + \lambda^{-2})} \right] \right\} d\lambda \approx \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda \in \mathcal{C}} \rho \lambda^{2m+1} \exp \left[i \left(\lambda^2 \tau - \frac{\epsilon h \lambda^2 \chi}{1+q\lambda^2} \right) \right] d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda \in \mathcal{C}'} \rho \lambda^{2m+1} \times \exp \left[-i \left(\frac{1}{\lambda^2} \tau - \frac{\epsilon h \chi}{q + \lambda^2} \right) \right] d\lambda. \quad (141)$$

Здесь $\epsilon = \pm 1$, см. разд. 5.

Учтем свойства симметрии (104), (105) и сделаем в последнем интеграле в правой части (141) замену λ на $1/\lambda^*$. Вычислим второй и третий интегралы в (141) для двух значений параметров, таких что $\sqrt{\tau/\chi} \ll 1$ и $\sqrt{\tau/\chi} \gg 1$, соответственно. Из-за свойств симметрии задачи следует одновременно учитывать вклады обеих областей. Контур интегрирования деформирован так, что в предпоследнем интеграле в правой части (141) интегрирование ведется по контуру \mathcal{C} вокруг точки

$$\lambda_-^2 = -i\sqrt{\tau/\chi},$$

а в последнем интеграле — по контуру \mathcal{C}' вокруг точки

$$\lambda_+^2 = i\sqrt{\chi/\tau}.$$

При вычислении интегралов считаем для простоты, что $\rho(\lambda) = \rho_0$, т. е. не зависит от λ .

В итоге получаем выражение для ядра F_m :

$$F_m(\tau, \chi) \approx \frac{1}{4\pi} \int_{v \in \tilde{\mathcal{C}}} \rho_0 v^m \times \exp \left[i \left(v\tau - \frac{\epsilon \chi}{v} + \frac{\tau}{q} - \epsilon q \chi \right) \right] dv - \frac{1}{4\pi} \int_{v' \in \tilde{\mathcal{C}}'} \frac{\rho_0^*}{v'^{m+1}} \times \exp \left[-i \left(v'\tau - \frac{\epsilon \chi}{v'} + \frac{\tau}{q} - \epsilon q \chi \right) \right] dv', \quad (142)$$

где

$$v = \lambda^2 - q^{-1}, \quad v' = \lambda^{-2} - q^{-1}.$$

В множителях, стоящих перед экспонентами под интегралами, мы пренебрегли константами q^{-1} по сравнению с v и v' :

$$(v + q^{-1})^m \approx v^m$$

и т.д. Контуры \tilde{C} и \tilde{C}' огибают точки $-i\sqrt{\chi/\tau}$ и $i\sqrt{\chi/\tau}$, соответственно.

Ниже будет найдено растущее выражение для ядра при $\epsilon = 1$, отвечающее основному состоянию среды в начальный момент. Случай $\epsilon = -1$ описывает затухание начального слабого возмущения среды, вызванного затравочным импульсом поля и не представляет физического интереса. При частичном возбуждении среды, т.е. при $R_{\pm}(0, \chi) \sim 1$, необходимо решать смешанную начально-краевую задачу [19], требующую отдельного изучения.

Интегрирование в выражении (142) при $\epsilon = 1$ дает

$$F_m(\tau, \chi) \approx \frac{\rho_0 \chi^{(m+1)/2}}{2\tau^{(m+1)/2}} \times \exp\left\{\frac{i\pi}{2} + \frac{i\tau}{q} - i\chi q\right\} I_{-m-1}(2\sqrt{\tau\chi}) - \frac{\rho_0^* \tau^{m/2}}{2\chi^{m/2}} \exp\left\{-\frac{i\pi}{2} - \frac{i\tau}{q} + i\chi q\right\} \times I_m(2\sqrt{\tau\chi}), \quad (143)$$

где I_m — функции Бесселя. Найденное выражение (143) для ядра $F_m(\tau, \chi)$ удовлетворяет свойству симметрии (138).

В выражении для ядра $F_m(\tau + s, \chi)$ (143) сделаем замену переменных

$$\xi = \sqrt{4\tau\chi}, \quad \xi' = \sqrt{4s\chi}$$

и представим ядро $F_m(\tau + s, \chi)$ в виде

$$F_m(\tau + s, \chi) = f_{-m-1}(\tau + s, \chi)\mathcal{F}_{-m-1}(\eta) - f_m^*(\tau + s, \chi)\mathcal{F}_m(\eta), \quad (144)$$

где

$$\eta = \sqrt{\xi^2 + \xi'^2},$$

$$f_m(\tau + s, \chi) = \frac{\rho_0}{2^{m+1}\chi^m} \times \exp\left[i\frac{\pi}{2} + i\frac{\tau + s}{q} - i\chi q\right], \quad (145)$$

$$\mathcal{F}_m(\eta) = \eta^m I_m(\eta). \quad (146)$$

Для большого η основной вклад в интегралы, стоящие в правых частях (134)–(136), дает область

вблизи $\xi' \sim \xi$. Для оценки интегралов используем разложение Ломмеля для функций Бесселя по параметру $y = \xi^2 - \xi'^2$:

$$(2\xi^2 - y)^{-\nu/2} I_{\nu}(\sqrt{2\xi^2 - y}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(y/2)^m}{m!} (2\xi^2)^{-(\nu+m)/2} I_{\nu+m}(\sqrt{2}\xi) \approx (2\xi^2)^{-\nu/2} \left[I_{\nu}(\sqrt{2}\xi) + \left(\frac{y}{2\sqrt{2}\xi}\right) I_{\nu+1}(\sqrt{2}\xi) \right] \approx \frac{\exp \eta}{2\xi\sqrt{\pi}} \left[1 + O\left(\frac{y}{2\sqrt{2}\xi^2}\right) \right]. \quad (147)$$

Здесь и ниже $\eta = \sqrt{2}\xi$.

Для вычисления асимптотической формы переднего фронта цепочки генерируемых импульсов при больших η достаточно оставить в разложении выражения для первых членов в правых частях уравнений (134)–(136) только первый член в разложении (147).

Ищем асимптотическое решение уравнений Марченко (134)–(136) для $\eta \gg 1$. Учитывая, что в уравнения Марченко ядро F_m входит с индексами $m = -1, 0, 1$, и симметрию (138), приходим к выводу, что достаточно ограничиться нахождением ядер $F_{\pm 1}$, которые представим в виде

$$F_{-1}(2\tau, \chi) = 2f(\eta, \chi) \operatorname{sh} \left[-\frac{1}{2} \ln \gamma(\eta, \chi) + i\phi(\tau, \chi) \right], \quad (148)$$

$$F_1(2\tau, \chi) = 2f(\eta, \chi) \operatorname{sh} \left[\frac{3}{2} \ln \gamma(\eta, \chi) + i\phi(\tau, \chi) \right], \quad (149)$$

где

$$f(\eta, \chi) = \frac{\exp \eta |\rho_0| \sqrt{\chi}}{4\eta\sqrt{\pi\eta}}, \quad (150)$$

$$\gamma(\tau, \chi) = \frac{2\chi}{\eta}, \quad (151)$$

$$\phi(\tau, \chi) = \arg \rho_0 + \frac{\pi}{2} + \frac{2\tau}{q} - \chi q. \quad (152)$$

Подставим приближенные выражения для ядер F_m (148), (149) в уравнения Марченко (134)–(136). Учитывая первые члены в разложении Ломмеля (147) и свойства симметрии (139), вычислим интегралы в правых частях уравнений (134)–(136) в

окрестности $y \sim \tau$ по частям. Интегралы оцениваем в окрестности границы интервала $y \sim \tau$ [39]. В итоге получаем простую приближенную алгебраическую систему уравнений:

$$K_1(\xi, \xi) = F_0(\sqrt{2}\xi) + \tilde{\gamma}K_0(\xi, \xi)F_0(\sqrt{2}\xi) + O(\gamma^{-2}), \quad (153)$$

$$K_0^*(\xi, \xi) = -\tilde{\gamma}K_1^*(\xi, \xi)F_1(\sqrt{2}\xi) - \tilde{\gamma}K_2^*(\xi, \xi)F_0(\sqrt{2}\xi) + O(\gamma^{-2}), \quad (154)$$

где

$$\tilde{\gamma}(\tau, \chi) = -\frac{\sqrt{2}}{\gamma(\tau, \chi)}.$$

Решение для импульса эффективного поля Стокса \mathcal{E} находим из выражений (132) и (153), (154). Полное решение для \mathcal{E} состоит из пакета связанных нелинейных осцилляций или знакопеременных импульсов. Учитывая вклад отброшенных членов в интегральные уравнения Марченко для малых γ^{-1} с помощью итераций, можно найти форму последующих импульсов. В известных случаях радиационного режима излучения при двухфотонном взаимодействии квазимонохроматических импульсов из-за релаксационных и поперечных эффектов основная доля энергии сосредоточена в первом импульсе, см. ссылки в работе [19]. Приближенное решение для формы первого импульса из цепочки импульсов, составляющих этот пакет, вычисленное с точностью $\sim \gamma^{-2}$, имеет вид

$$\mathcal{E}(\chi, \tau) \approx -\frac{4if \operatorname{sh}[\frac{1}{2} \ln \gamma + i\phi]}{(1 + 2f^2)[1 + 2f^2(1 - \gamma^{-1} \cos 2\phi)]} \times \{1 + 2f^2[1 + \gamma^{-1}(1 + e^{2i\phi})]\} \times [1 + O(\gamma^{-2})], \quad (155)$$

где $\gamma^2 \gg 1$, а f, γ и ϕ — действительные функции переменных τ и χ (150)–(152).

Из полученного решения следует, что форма импульса меняется со временем по мере его распространения. Временная зависимость модуля поля (155) для разных χ показана на рис. 3. Решение (155) описывает только форму переднего фронта и вершину первого пика. Форма переднего фронта зависит от формы и начальной фазы затравочного импульса поля Стокса, см. рис. 4. Связь между коэффициентом рассеяния ρ , который определяется фазой и формой начального слабого импульса Стокса поля, дается формулой (125).

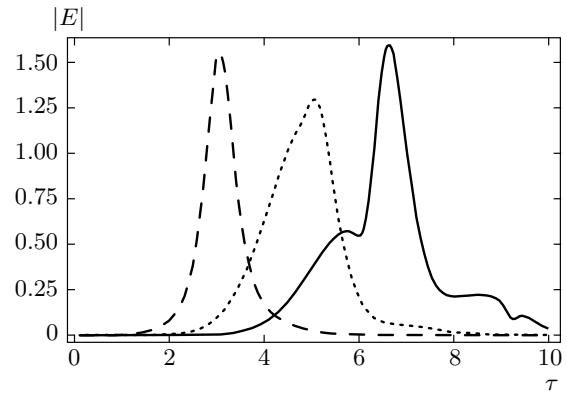


Рис. 3. Временная зависимость формы импульса поля $|E|$ для $\varphi_0 = \arg \rho = -\pi/3$, $|\rho_0| = 10^{-5}$, $h = 0.5$ и разных длин среды $\chi = 15$ (сплошная линия), 20 (пунктирная линия), 25 (штриховая линия). Единицы произвольны

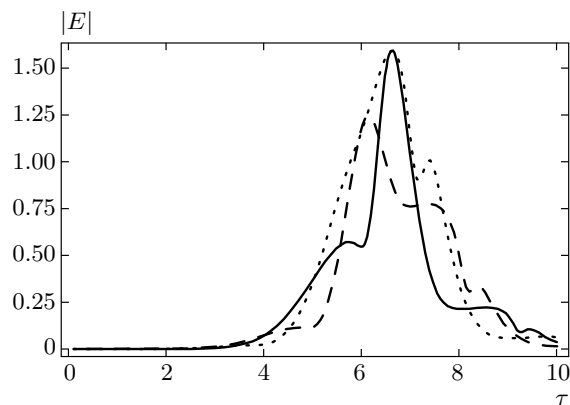


Рис. 4. Временная зависимость формы импульса поля $|E|$ для разных фаз $\varphi_0 = \arg \rho$ пробного стоксова импульса; $\varphi_0 = -\pi/3$ (сплошная линия), 0 (пунктирная линия), $\varphi_0 = \pi/3$ (штриховая линия), $\chi = 15$. Единицы произвольны

Для меньших χ форма импульса Стокса поля изрезана больше и в большей степени зависит от начальной фазы, см. рис. 4. Специфика комбинационного рассеяния в протяженной среде проявляется в том, что система асимптотически «теряет» информацию о начальной фазе. Это видно уже из того, что интенсивность импульса в очень протяженной среде, т. е. при $\gamma \gg 1$, не зависит от начальной фазы. Действительно, вычисляя решение (155) с точ-

ностью $\sim \gamma^{-1}$, находим

$$\mathcal{E}(\chi, \tau) \approx -\frac{i\sqrt{\gamma}e^{i\phi}}{\text{ch}(\sqrt{8\chi\tau}-\eta_1-\eta_0)} [1+O(\gamma^{-1})], \quad (156)$$

где

$$\eta_0 = -\ln|\rho_0| \gg 1$$

— задержка импульса, определяемая затравочным импульсом поля Стокса,

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \ln(8\pi\tau\sqrt{\chi\tau}). \quad (157)$$

Решение (156) показывает, что амплитуда импульса растет с длиной нелинейной среды как $\chi^{1/4}$ и имеет классическую ch^{-1} -форму. Квазиавтомодельная асимптотика решения согласуется с линейным решением (88), найденным ранее. Эффективная длина среды растет с ростом d_0 , т.е. с ростом интенсивности поля накачки и дипольных моментов переходов с виртуальным уровнем. Условие $\eta \gg 1$ в рассматриваемой модели КР требует выполнения условия $\gamma \gg 1$. Тем не менее аппарат МОЗР, развитый в работе, позволяет исследовать область $\gamma \sim 1$.

8. ВОЗМОЖНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Параметрическое взаимодействие волн, включающее квазимонохроматические импульсы светового поля и импульсы других типов волн, не имеющие огибающей, таких как акустические, плазменные или другие, представляет собой актуальную задачу и изучается в различных областях физики.

Возможность когерентного параметрического смешения световых волн и микроволн экспериментально показана в работе [20], в которой применялась схема взаимодействия, включающая две пары полей накачки и стоксовых импульсов. Постановка эксперимента в этой работе принципиально отличается от предыдущих экспериментов по наблюдению смешения волн, в которых частоты участвующих полей имели один порядок. Относительно высокая эффективность конверсии частоты, достигнутая в этой работе, связывается с явлением электромагнитно-индуцированной прозрачности, поскольку сильная дисперсия, связанная с ней, приводит к синхронизации фаз в двойном комбинационном рассеянии и образованию ультракоротких импульсов света. Это явление имеет большое значение для управления такими сильно невырожденными нелинейными процессами, как контроль гамма-лучей светом [41], управление светом микроволнами [42–44] или генерация микроволн и акустических импульсов.

Схема комбинационного рассеяния, включающая квазимонохроматическое сильное поле и слабый стоксов импульс, недавно предлагалась в работе [34] для получения широкого оптического спектра. В этой работе показывается, что возможен гибкий контроль фазы импульса поля Стокса из-за высокой степени когерентности, достигаемый вследствие контроля параметров затравочного импульса и адиабатического выстраивания молекул. Для упрощения уравнений Максвелла в работе применяется приближение однонаправленности распространения электромагнитного поля. В работе [34] численно показано, как управление формой импульсов поля накачки и пробного импульса стоксова поля позволяет генерировать импульс стоксова поля определенной формы.

Использование разности фаз двух лазерных полей для контроля над процессом возбуждения привлекает интерес на протяжении последних 15 лет [40]. К таким процессам можно отнести генерацию акустических пикосекундных импульсов двумя лазерными импульсами с разностью частот, близкой к частоте электронного перехода в квантовой яме [45, 46]. Аналогичный аппарат может быть использован для изучения параметрических процессов с участием световых волн и акустических волн пикосекундной длительности. В последнее время особое внимание исследователей уделяется определению и изучению абсолютной фазы одиночного лазерного импульса без огибающей, см. ссылки в работе [47]. Обнаружено, что если импульс состоит из нескольких оптических циклов, то поле сильно чувствительно к абсолютной фазе. Показано, что различные явления зависят от абсолютной фазы, например, генерация гармоник [48], атомная ионизация [49] и заселенность молекулярных состояний [50]. В оптическом диапазоне в эксперименте для генерации таких импульсов требуются большие интенсивности ($>10^{14}$ В/см²) и импульсы длительностью в несколько оптических циклов (например, длительностью порядка 5 фс для длины волны 800 нм).

В настоящей работе построена одна из интегрируемых моделей параметрического смешения волн в двухуровневой среде. Построенная модель позволяет детально изучить влияние начальных фаз полей. Аналитическое решение, описывающее двойное комбинационное рассеяние в схеме с участием квазимонохроматических волн накачки и импульсов стоксова поля без огибающей, которое мы здесь выводим, позволяет изучать нелинейную стадию эволюции мощного стоксова импульса, в том числе и в схемах

взаимодействия в указанных выше работах. Нелинейная стадия характеризуется новыми чертами, в частности, сильной зависимостью формы стокова импульса от начальной фазы в короткой ($\gamma \lesssim 1$) среде, нелинейными осцилляциями и пр. В рамках нелинейного решения можно исследовать влияние формы импульсов на возбуждение среды и контролировать форму импульса в протяженной среде. В то же время из полученного решения следует, что в очень длинной среде, такой что вкладом частей порядка γ^{-1} можно пренебречь, абсолютная фаза при КР не играет роли, в отличие от случая солитонной динамики самоиндуцированной прозрачности [9].

В недавней работе [51] предложен сценарий взаимодействия монохроматического поля накачки и импульса пробного поля без огибающей с двухуровневой средой, в которой конечное возбужденное состояние системы, т. е. заселенность верхнего уровня после взаимодействия полей со средой, зависит только от абсолютной фазы пробного поля. Несущая частота поля накачки выбрана на порядок большей частоты пробного поля. В этой работе в рамках численного решения уравнений Блоха показано, что в такой схеме абсолютная фаза не играет роли в средах без постоянного дипольного момента и что конечное состояние среды не зависит от фазы поля накачки и разности фаз между полями накачки и Стокса. Полученное в настоящей работе аналитическое решение показывает, что в анизотропной среде без постоянного дипольного момента абсолютная фаза поля Стокса или пробного поля существенно влияет на форму генерируемого в двухуровневой среде импульса и на динамику заселенности верхнего уровня среды. При этом фаза поля накачки не оказывает влияния на форму импульса и возбуждение среды в рамках изученной модели. Абсолютная фаза импульса поля Стокса определяется начальным условием (125), в правую часть которого следует подставить значение затравочного импульса стокова импульса (пробного поля). Как показано на рис. 3, влияние начальной фазы поля Стокса проявляется в изменении формы импульса при изменении начальной фазы. Причем эта зависимость более сильная в более короткой среде. Это свойство может быть использовано для контроля излучения и индуцированной заселенности верхнего уровня в средах и без постоянного дипольного момента.

Результаты работы могут применяться для описания динамики несолитонных ультракоротких импульсов в волоконных световодах [52] и в анизотропных фотонных кристаллах.

Автор благодарен Х. Штойделю (H. Steudel) за ценные комментарии отдельных результатов этой работы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-02-81020-Бел2004) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (грант № 8-2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представление Лакса для общей системы уравнений

Система уравнений (52)–(56) представима в виде условия совместности двух следующих линейных систем с эллиптическим спектральным параметром:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} \Phi &= \\ &= \begin{pmatrix} -i\lambda & \gamma_x W_+ + \gamma_y W_- \\ \gamma'_x W_+ + \gamma'_y W_- & i\lambda \end{pmatrix} \Phi, \end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi} \Phi &= \\ &= - \begin{pmatrix} i\lambda \sigma R_3 & \beta_x R_+ + \beta_y R_- \\ \beta'_x R_+ + \beta'_y R_- & -i\lambda \sigma R_3 \end{pmatrix} \Phi. \end{aligned} \quad (159)$$

Здесь $\Phi(\chi, \tau, \zeta)$ — 2×2 -матричнозначная функция. Коэффициенты в правых частях (158), (159) могут быть представлены в виде алгебраических выражений от эллиптических функций Якоби, зависящих от спектрального параметра ζ : $\text{sn}(\zeta, l)$, $\text{dn}(\zeta, l)$, $\text{cn}(\zeta, l)$, ($\text{cn}^2 + \text{sn}^2 = 1$, $\text{dn}^2 + l^2 \text{sn}^2 = 1$) с модулем l :

$$l^2 = \frac{L_+^2}{L_-^2}, \quad L_{\pm}^2 = \frac{2(a_x a_y - r^2)}{a_x + a_y \pm \sqrt{(a_x - a_y)^2 + 4r^2}}. \quad (160)$$

Коэффициенты в правых частях (158), (159) имеют следующий вид:

$$2\lambda = \text{cn dn}, \quad (161)$$

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \frac{r - i \text{cn dn } a_y}{1 + \sqrt{a_y} \text{sn } L_-^{-1}}, \quad (162)$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \frac{r + i \text{cn dn } a_x}{1 + \sqrt{a_x} \text{sn } L_-^{-1}}, \quad (163)$$

$$\gamma'_y = -\frac{1}{2} \frac{r + i \text{cn dn } a_y}{1 - \sqrt{a_y} \text{sn } L_-^{-1}}, \quad (164)$$

$$\gamma'_x = -\frac{1}{2} \frac{r - i \text{cn dn } a_x}{1 - \sqrt{a_x} \text{sn } L_-^{-1}}, \quad (165)$$

$$\sigma\lambda = -\frac{L_-^2 \operatorname{cn} \operatorname{dn}}{2 \operatorname{sn}^2}, \quad (166)$$

$$\beta_y = \frac{1}{2 \operatorname{sn}^2} \frac{r \operatorname{sn}^2 - iL_-^2 \operatorname{cn} \operatorname{dn}}{1 + \sqrt{a_y} \operatorname{sn} L_-^{-1}}, \quad (167)$$

$$\beta_x = \frac{1}{2 \operatorname{sn}^2} \frac{r \operatorname{sn}^2 + iL_-^2 \operatorname{cn} \operatorname{dn}}{1 + \sqrt{a_x} \operatorname{sn} L_-^{-1}}, \quad (168)$$

$$\beta'_y = -\frac{1}{2 \operatorname{sn}^2} \frac{r \operatorname{sn}^2 + iL_-^2 \operatorname{cn} \operatorname{dn}}{1 - \sqrt{a_y} \operatorname{sn} L_-^{-1}}, \quad (169)$$

$$\beta'_x = -\frac{1}{2 \operatorname{sn}^2} \frac{r \operatorname{sn}^2 - iL_-^2 \operatorname{cn} \operatorname{dn}}{1 - \sqrt{a_x} \operatorname{sn} L_-^{-1}}. \quad (170)$$

Вклад компонент поля с коэффициентом $r \neq 0$ аналогичного вида хорошо известен, например, в теории магнитных волн, распространяющихся в магнетиках с орторомбической симметрией.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. K. Bullough and F. Akhmad, Phys. Rev. Lett. **27**, 330 (1971).
2. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
3. J. K. Eilbeck, J. Phys. A: Math. Gen. **5**, 1355 (1972).
4. J. K. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, J. Phys. A: Math. Gen. **6**, 1337 (1973).
5. P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, J. Phys. A: Math. Gen. **6**, L53 (1973).
6. H. Steudel and A. A. Zabolotskii, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 5047 (2004).
7. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **77**, 558 (2003).
8. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **125**, 1220 (2004).
9. H. Steudel, A. A. Zabolotskii, and R. Meinel, Phys. Rev. E **72**, 056608 (2005).
10. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
11. Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley, New York (1984) [И. Р. Шен, *Принципы нелинейной оптики*, Наука, Москва (1989)].
12. H. Steudel, Physica D **6**, 155 (1983).
13. D. J. Kaup, Physica D **6**, 143 (1983).
14. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
15. A. A. Zabolotskii, Physica D **40**, 283 (1989).
16. C. C. Gerry and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **42**, 6805 (1990).
17. M. Alexanian and S. K. Bose, Phys. Rev. A **52**, 2218 (1995).
18. H. Steudel, Ann. der Phys. **34**, 188 (1977).
19. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **115**, 1168 (1999).
20. A. S. Zibrov, A. B. Matsko, and M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **89**, 103601 (2002).
21. D. J. Benney and G. J. Roskes, Stud. Appl. Math. **48**, 377 (1969).
22. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1745 (1972).
23. А. С. Давыдов, *Солитоны в молекулярных системах*, Наук. думка, Киев (1988).
24. R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Waves Equations*, Academic, New York (1982).
25. H. J. Leblond, Phys. A: Math. Gen. **32**, 7907 (1999).
26. H. J. Leblond, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 3041 (1998).
27. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, ЖЭТФ **123**, 1160 (2003).
28. M. J. Ablowitz, G. Biondini, and S. Blair, Phys. Lett. A **236**, 520 (1997).
29. A. Davey and K. Stewartson, Proc. R. Soc. A **338**, 101 (1974).
30. N. Yadjima and M. Oikawa, Prog. Theor. Phys. **56**, 1719 (1976).
31. A. C. Newell, SIAM J. Appl. Math. **35**, 650 (1978).
32. J.-C. Ma, Stud. Appl. Math. **59**, 201 (1978).
33. A. Nazarkin and G. Korn, Phys. Rev. A **58**, R61 (1998).
34. V. Kalosha, M. Spanner, J. Herrmann, and M. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **88**, 103901 (2002).
35. V. P. Kalosha and J. Herrmann, Phys. Rev. A **67**, 031801(R) (2003).
36. R. P. Feynman, F. L. Vernon, and R. W. Hellwarth, J. Appl. Phys. **28**, 49 (1957).
37. H. M. Gibbs and R. E. Slusher, Phys. Rev. Lett. **24**, 638 (1970); Phys. Rev. A **6**, 2326 (1972).

38. L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Dover, New York (1987).
39. М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, Москва (1977).
40. M. Shapiro and P. Brumer, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 287 (2000).
41. O. Kocharovskaya, R. Kolesov, and Y. Rostovtsev, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3593 (1999).
42. Y. Zhao et al., *Phys. Rev. Lett.* **79**, 641 (1997).
43. A. Godone, F. Levi, and J. Vanier, *Phys. Rev. A* **59**, R12 (1999); A. Godone et al., *Phys. Rev. A* **62**, 053402 (2000).
44. D. McGloin and M. H. Dunn, *J. Mod. Opt.* **47**, 1887 (2000).
45. O. B. Wright, B. Perrin, O. Matsuda, and V. E. Gusev, *Phys. Rev. B* **64**, 081202(R) (2001).
46. O. L. Muskens, A. V. Akimov, and J. I. Dijkhuis, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 035503 (2004).
47. D. Jones et al., *Science* **288**, 635 (2000).
48. R. M. Potvliege, N. J. Kylstra, and C. J. Joachin, *J. Phys. B* **33**, L743 (2000).
49. P. Dietrich, F. Krausz, and P. B. Corkum, *Opt. Lett.* **25**, 16 (2000).
50. A. Brown and W. J. Meath, *J. Chem. Phys.* **109**, 9351 (1998).
51. A. Brown and W. J. Meath, *Phys. Rev. A* **65**, 060702(R) (2002).
52. G. Zumofen, F. R. Graf, A. Renn, and U. P. Wild, *J. Lumin.* **83–84**, 379 (1999).