

# ХАОС В КОМПОЗИТНЫХ БИЛЛИАРДАХ

*В. Г. Барьяхтар*

*Институт магнетизма Национальной академии наук Украины  
03142, Киев, Украина*

*В. В. Яновский\*, С. В. Найденов, А. В. Курило*

*Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины  
61001, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 14 марта 2006 г.

Рассмотрены механизмы и особенности хаотического поведения в бильярдах с расщеплением (преломлением) лучей. Показано, что в композитных бильярдах, в отличие от обычных, детерминированно-хаотическим становится закон движения, который кодируется последовательностью посещения лучами разных сред. Исследование ведется в рамках геометро-динамического подхода, в котором вместо обычного гамильтонового фазового пространства используется симметричное фазовое пространство. Изучены элементы хаотизации в композитных бильярдах общего положения. Рассмотрена динамика лучей в кольцевом бильярде, состоящем из двух концентрических сред с разными коэффициентами преломления.

PACS: 05.45.-a

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Бильярды относятся к важному классу динамических систем [1, 2]. Такие физические системы порождаются свободным движением материальных частиц (или геометрических лучей) внутри некоторой области с простейшим законом зеркального отражения от ее границ. Концепция детерминированного хаоса в классической механике была неразрывно связана с бильярдами [3]. Более того, бильярды оказались полезной теоретической моделью для развития понятия квантового хаоса [4]. Именно с исследованиями бильярдов связан прогресс в понимании эргодичности статистической физики [5]. Хорошо известны и многочисленны физические приложения бильярдов. Среди наиболее известных можно упомянуть резонаторы и волноводы — акустические [6, 7], оптические [8] и микроволновые [9]; квантовые точки [10] и сверхпроводящие андреевские бильярды [11]; газ Лоренца и газ сталкивающихся шаров как популярные модели кинетической теории; нуклоны в короткодействующем потенциале атомного ядра и магнитооптические ловушки «холодных атомов»; светособирание в сцинтилляцион-

ных детекторах [12]. Принципиальный прогресс в понимании динамических свойств бильярдов (эргодичность, локальная неустойчивость [3], перемешивание [13, 14], связь с задачей о собственных колебаниях мембраны [15], хаос в высших размерностях [16] и др.) был достигнут сравнительно недавно, не считая обширных математических исследований бильярдов в многоугольниках [17]. Среди известных бильярдов наибольшую популярность приобрели полностью хаотические — рассеивающие бильярды Синая [13] с отрицательной кривизной границы и фокусирующие бильярды типа «стадиона» Бунимовича [14] с неотрицательной кривизной.

В работе изучается новый тип бильярда — композитный бильярд. Физическим примером системы, приводящей к такому типу, может служить сцинтилляционный детектор, состоящий из двух материалов, имеющих разные коэффициенты преломления. Эта система естественным образом приводит к обобщенной модели бильярда, в которой присутствуют два новых элемента. Это «размножение» лучей при отражении и преломлении на границе сред, а также дополнительный к закону зеркального отражения закон преломления лучей. Оба элемента связаны с появлением проницаемых границ разде-

\*E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

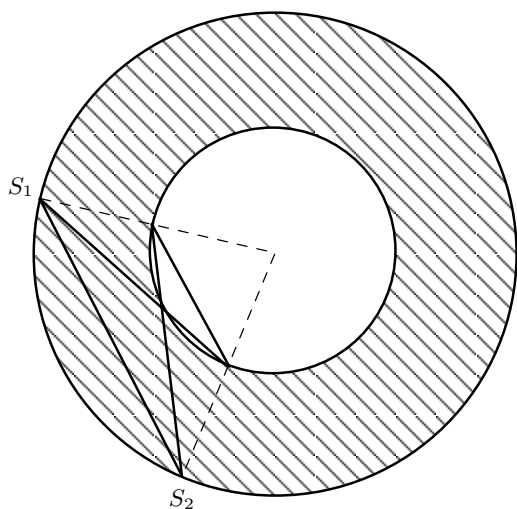


Рис. 1. Показаны четыре сегмента в композитном бильярде, имеющие одинаковые угловые координаты ( $S_1, S_2$ )

ла сред при сохранении обычных (внешних) границ бильярда. В простейшем случае присутствует только одна такая граница. Более сложные композитные бильярды соответствуют, например, сцинтилляционным детекторам, состоящим из нескольких материалов, имеющих разные коэффициенты преломления. Они обладают конечным множеством внутренних границ раздела сред.

Модель композитного бильярда сохраняет многие свойства обычных бильярдов. Например, распространение лучей только в одной из сред полностью совпадает с поведением лучей в обычном бильярде. Однако динамика лучей, переходящих из одной среды в другую, может приобретать необычные свойства. В данной работе показано, что при эволюции таких (преломленных) лучей физически реализуется другая концепция детерминированного хаоса. Детерминированно-хаотическим становится сам закон движения лучей. Кроме того, проявляются новые механизмы обычной хаотизации, связанные со свойствами преломляющих границ. Нами детально рассмотрен простой пример кольцевого композитного бильярда и описаны его динамические свойства. Композитные бильярды — новый тип динамических систем, исследование которых должно существенно расширить область фундаментальных понятий и приложений нелинейной динамики и детерминированного хаоса.

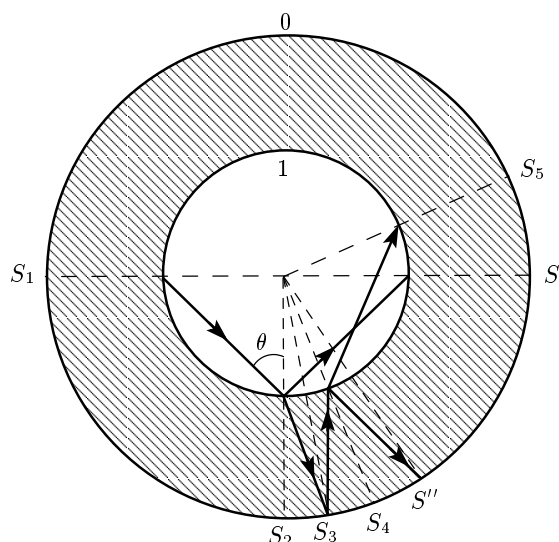


Рис. 2. Пример простого композитного бильярда. Среды с разными коэффициентами преломления отмечены штриховкой, а граница бильярда и граница раздела сред, соответственно, индексами «0» и «1». Показано несколько сегментов лучей после преломлений и отражений. Направление распространения указано стрелкой. Угловые координаты начал и концов сегментов обозначены буквами «S» с соответствующими индексами

## 2. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ КОМПОЗИТНЫХ БИЛЛИАРДОВ

Одной из важных физических задач является анализ механизмов хаотизации световых лучей в детекторах, состоящих из материалов с разными коэффициентами преломления. Для этого естественно использовать идеализированное описание динамики лучей в соответствующих композитных бильярдах. Основными элементами идеализации, используемыми ниже, будут приближение геометрической оптики и пренебрежение потерями света. Возможность учета уменьшения интенсивности лучей достаточно проста и упомянута в заключение статьи.

Начнем с простейшего кругового планарного детектора с внешней оболочкой толщиной  $(R - r)$  из вещества с другим коэффициентом преломления. Здесь  $R$  — радиус всего детектора,  $r$  — радиус его внутренней части (рис. 1). Для описания динамики лучей используем подход, предложенный в работах [18, 19]. В его рамках динамика описывается отображениями, переводящими каждый выделенный сегмент  $(S_1, S_2)$  в последующий сегмент  $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$  луча. Координаты

наты  $(S_1, S_2)$  характеризуют выбранный сегмент. Ими могут быть, например, угловые координаты его начала и конца. В работах [18, 19] симметричное фазовое пространство планарного бильярда было тором  $S^1 \times S^1 = T^2$ . В рассматриваемом случае оно устроено сложнее. Это легко понять, заметив, что фиксированным угловым координатам  $(S_1, S_2)$  отвечает уже не один, а четыре различных луча (рис. 2). Поэтому фазовое пространство рассматриваемого композитного бильярда состоит из четырех листов  $T^2$ . Если обозначить границу детектора индексом «0», а границу раздела индексом «1», то каждый лист соответствует лучам, концы которых лежат на соответствующих границах:  $|11|$ ,  $|00|$ ,  $|10|$  или  $|01|$ . Первый индекс относится к началу луча, а второй — к его концу (в соответствии с направлением распространения луча).

Второе важное отличие от обычных детекторов (или их математической модели — бильярдов), в которых динамика лучей определялась только одним законом (отображением), состоит в том, что в композитных детекторах полное описание достигается при задании нескольких отображений. Например, падающий сегмент  $(S_1, S_2)$  преломляется на границе 1 в сегмент  $(S_2, S_3)$  и частично отражается в сегмент  $(S_2, S')$  (рис. 2). Так возникают отображение  $(S_1, S_2) \xrightarrow{F_{01}} (S_2, S_3)$  и отображение  $(S_1, S_2) \xrightarrow{F_{11}} (S_2, S')$ . Они определяют сегмент луча,

прошедшего в другую среду, и сегмент, отраженный от границы раздела. Однако их недостаточно. Проследим за преломленным лучом далее, предполагая, как обычно, полное отражение луча от внешней границы бильярда. Для описания динамики теперь необходимо привлечь отображение, которое определяет по сегменту  $(S_2, S_3)$  отраженный сегмент  $(S_3, S_4)$ , т. е.  $(S_2, S_3) \xrightarrow{F_{00}} (S_3, S_4)$ . Наконец, падающий сегмент  $(S_3, S_4)$  на границе раздела сред вновь распадается на преломленный и отраженный лучи. Эти процессы описываются отображениями

$$(S_3, S_4) \xrightarrow{F_{10}} (S_4, S_5); \quad (S_3, S_4) \xrightarrow{\bar{F}_{00}} (S_4, S'').$$

Дальнейшая эволюция лучей определяется всеми перечисленными выше отображениями. Таким образом, набор элементарных отображений  $F_{01}, F_{00}, \bar{F}_{00}, F_{10}$  и  $F_{11}$  является полным для описания динамики лучей в композитном бильярде.

Получим эти элементарные отображения для кольцевого бильярда. Необходимые для этого физические принципы — это закон «угол падения равен углу отражения» и закон преломления Декарта. Фактически вывод отображений сводится к геометрической задаче. Выбрав в качестве обозначений для угловых координат входного сегмента пару  $(x, y)$  и для выходного сегмента — пару  $(\bar{x}, \bar{y})$ , получим

$$F_{01} : \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = x + \arcsin \left[ \frac{n_1 \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)}{n_0} \right] - \arcsin \left[ \frac{r n_1 \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)}{R n_0} \right] \pmod{2\pi}, \\ \bar{y} = x \pmod{2\pi}, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$F_{00} = F_{11} = \bar{F}_{00} : \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = 2x - y \pmod{2\pi}, \\ \bar{y} = x \pmod{2\pi}, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$F_{10} : \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = x + \left\{ \pi - 2 \arcsin \left[ \frac{n_0}{n_1} \sin \left( \frac{r \sin |x-y|}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(x-y)}} \right) \right] \right\} \pmod{2\pi}, \\ \bar{y} = x \pmod{2\pi}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Обратим внимание, что их якобианы равны 1. Следовательно, эти отображения и любая их композиция консервативны.

Пусть номер границы одновременно характеризует номер среды, примыкающей к ней. По определе-

нию, среде будем приписывать номер границы, ограничивающий ее. В данном случае внутренняя часть имеет номер 1, а внешняя — 0. Для описания всех лучей в композитном бильярде симметричное фазовое пространство необходимо расширить. Действи-

тельно, каждому отдельному лучу можно однозначно поставить в соответствие бесконечную последовательность (маршрут) из 0 и 1 в соответствии с местонахождением луча в одной из сред при его распространении. Например, маршрут 100111001... Каждой такой последовательности соответствует бесконечное количество лучей, посещающих среды в одном и том же порядке. Это приводит к разделению лучей на классы эквивалентности  $[L]$ , «занумерованные» этими последовательностями. Каждому классу эквивалентности соответствует свой закон движения. Закон, определяющий динамику лучей, однозначно восстанавливается по этой последовательности. Например, для последовательности 100111001... закон движения определяется следующей бесконечной композицией элементарных отображений:

$$\dots \circ F_{10} \circ F_{00} \circ F_{01} \circ F_{11} \circ F_{11} \circ F_{10} \circ F_{00} \circ F_{01} .$$

Укажем, что для кольцевого бильярда в качестве маршрутов лучей допустимы не все  $(0, 1)$ -последовательности. Запрещены последовательности, в которых встречается блок 101. Это связано с тем, что, попав из среды 1 в среду 0, луч должен еще раз пройти среду 0, отразившись от границы 0, для того чтобы достичь среды 1. Фактически это топологическое правило запрета. Подобные запреты существуют и для других типов композитных бильярдов.

Введем расширенное фазовое пространство композитных бильярдов. Как обычно, под ним понимается пространство, которое однозначно определяет состояние системы и ее дальнейшую эволюцию. В случае композитного бильярда кроме состояния луча нужно задать и класс его эквивалентности. Следовательно, расширенным фазовым пространством является трубчатое объединение четырех торов:  $([0, 1]) \otimes \{T^2 \cup T^2 \cup T^2 \cup T^2\}$ , где  $\otimes$  обозначает прямое произведение, а  $\cup$  — объединение множеств. Значение  $q \in [0, 1]$  определяет класс эквивалентности лучей или бесконечную  $(0, 1)$ -последовательность при записи в двоичной системе исчисления. Особенность этой динамической системы в том, что уже один начальный луч  $(S_1, S_2)$  порождает бесконечное число лучей, принадлежащих разным классам эквивалентности.

Рассмотрим теперь вопрос о том, сколько лучей распространяется в детекторе на  $n$ -м этапе эволюции, если на начальном этапе в среде 1 присутствовал только один луч. Для этого введем число лучей  $N_n^1$  в первой среде и  $N_n^0$  — в среде 0 на  $n$ -м ша-

ге эволюции. Полное число лучей  $N_n = N_n^0 + N_n^1$ . Используя древесную структуру рождения лучей и учитывая топологическое правило запрета, можно получить систему разностных уравнений (второго порядка)

$$\begin{cases} N_{n+1}^0 = N_n^1 + N_n^0, & n \geq 1, \\ N_{n+1}^1 = N_n^0, & n \geq 2. \end{cases} \quad (4)$$

Ее легко решить, используя в качестве начальных условий равенства

$$N_1^0 = 0; \quad N_n^0 = 1.$$

Решение для числа лучей в среде 0 имеет вид

$$N_n^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \tau \right)^n - \left( -\frac{1}{\tau} \right)^n \right\}, \quad (5)$$

где  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$  — золотое сечение. Используя формулу (4), легко получить и полное число лучей на  $n$ -м шаге эволюции исходного луча. Как видим, число лучей, порожденных одним начальным сегментом, растет экспоненциально со временем или, точнее, с поколением. Инкремент нарастания  $\gamma$  на больших временах  $n \gg 1$  равен

$$\gamma = \ln \tau. \quad (6)$$

Анализировать механизмы хаотизации лучей следует с учетом введенных классов эквивалентности. При этом, естественно, хаотизация может присутствовать в одних классах и отсутствовать в других. Например, для кольцевого бильярда хаотизация в классе эквивалентности, закодированном последовательностью 111...1..., заведомо отсутствует. Их динамика сводится к распространению лучей в интегрируемом круговом бильярде. Для любых композитных бильярдов типа кольцевого классы эквивалентности 111...1... и 000...0... соответствуют двум обычным бильярдам, т.е. обычные бильярды соответствуют специальным классам эквивалентности композитных бильярдов. Для каждого класса можно ввести показатели Ляпунова и в соответствии с принятыми подходами в теории динамических систем (каскадов) определить степень хаотичности этого класса лучей. Вопрос о корректности введения показателя Ляпунова для таких систем требует дополнительного обоснования. Тем не менее такой подход наиболее близок к традиционному для обычных бильярдов, где все траектории соответствуют одному классу эквивалентности.

Существует принципиальное отличие композитных бильярдов от обычных. В композитных бильярдах детерминированно-хаотическими могут быть уже сами законы движения. Общая причина этого в том, что всегда существуют сложные (или, эквивалентно, хаотические)  $(0, 1)$ -последовательности, а следовательно, существуют классы эквивалентности лучей, закодированные этими последовательностями. Для таких классов сложными, или хаотическими, являются сами детерминированные законы движения, которые однозначно определяются этими последовательностями. Единственная причина, по которой этот новый элемент хаотизации может отсутствовать, сводится к появлению возможных правил запрета на хаотические  $(0, 1)$ -маршруты лучей.

Очевидно следует проверить, существуют ли среди допустимых  $(0, 1)$ -маршрутов лучей сложные в смысле Колмогорова [20] последовательности. Докажем их существование для композитных бильярдов. Для этого рассмотрим подмножество допустимых последовательностей, у которых любые входящие в них блоки нулей содержат только четное число нулей, например, маршруты вида  $100100001110011\dots$ . Для кольцевого композитного бильярда все допустимые последовательности имеют такой специальный вид. Выберем алфавит из двух символов  $a = 1$  и  $b = 00$ . В новом алфавите можно однозначно записать любую допустимую последовательность, принадлежащую этому подмножеству. Следовательно, можно установить взаимно-однозначное соответствие между допустимыми последовательностями и действительными числами, принадлежащими отрезку  $[0, 1]$ . Но тогда доказанные факты о действительных числах [20, 21] переносятся на исходные допустимые последовательности. В частности, отсюда следует, что мощность множества сложных или случайных допустимых маршрутов любого композитного бильярда имеет мощность континуума.

Таким образом, возникает новая концепция детерминированного хаоса, связанная с непредсказуемостью закона движения, а не отдельной траектории. Аналогия этой концепции можно обнаружить на стандартном примере статистической физики — простейшей модели одномерных броуновских блужданий. Пусть длина их элементарного скачка, для простоты, равна единице. Частица совершает скачки вправо или влево случайным образом. На этот процесс можно взглянуть иначе, как на движение частицы под действием двух отображений  $F_+$  и  $F_-$ , смещающих ее на единицу соответственно вправо или влево. Последовательность этих отображений

определяет закон движения частицы. Если эта последовательность сложна по Колмогорову [20, 21], то траектория частицы неотличима от траектории обычной броуновской частицы. Подчеркнем, что начальное положение частицы в этой модели не играет никакой роли для хаотизации. В отличие от известной концепции детерминированного хаоса в динамических системах, хаотичность возникает из-за сложности последовательности указанных одношаговых отображений. При таком взгляде на броуновское блуждание аналогия с новой концепцией детерминированного хаоса в композитных бильярдах становится очевидной. Разумеется, вопрос о допустимых последовательностях важен и для выяснения существования периодических орбит лучей в композитных бильярдах. Например, с учетом запрета на блок  $101$  в кольцевом композитном бильярде следует, что здесь всегда отсутствуют смешанные периодические орбиты периода три для лучей, которые обязательно посещают обе среды.

### 3. ЭЛЕМЕНТЫ ХАОТИЗАЦИИ В КОМПОЗИТНЫХ БИЛЛИАРДАХ

Изучим общие особенности возникновения хаоса в композитных бильярдах. Естественно, если говорить о классах лучей типа  $111\dots$  или  $000\dots$ , то их механизмы хаотизации совпадают с хорошо известными в обычных бильярдах [14, 21]. Специфи-

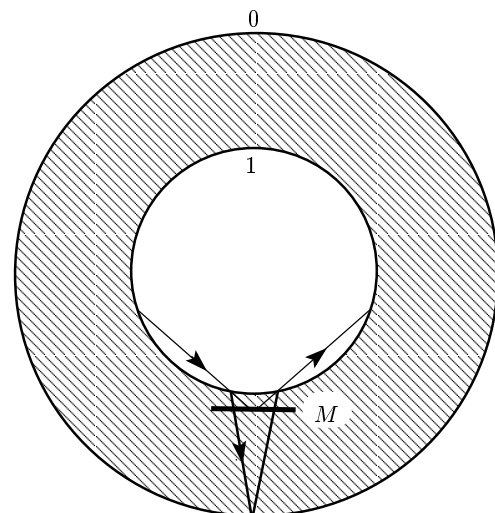


Рис. 3. Рисунок демонстрирует принцип введения эффективной границы  $M$ , в результате отражения от которой имитируется выходной луч, испытавший преломление в композитном бильярде

ческие механизмы могут возникать только для лучей, переходящих из одной среды в другую. Поэтому сосредоточим внимание на них. Рассмотрим, что происходит с лучами, содержащими блок 1001. Для понимания этого удобно перейти к описанию в терминах, близких к обычным бильярдам. Этого можно достичь, введя понятие эффективной границы. В результате отражения входного луча [11] от нее должен получаться выходной луч [11] в соответствии с динамикой в композитном бильярде (рис. 3). Введение эффективной границы позволяет исследовать поведение пучков лучей в композитных бильярдах в сравнении с обычными. Для кольцевого композитного бильярда такую эффективную границу легко найти явно. Она представляет собой окружность, радиус  $R$  которой зависит только от угла  $(S_2 - S_1)$ :

$$R = r \cos \left( \frac{S_2 - S_1}{2} \right) \times \left\{ \cos \left( \frac{S_2 - S_1}{2} + \arcsin \left( \frac{n_1 \cos \left( \frac{S_2 - S_1}{2} \right)}{n_0} \right) - \arcsin \left( \frac{rn_1 \cos \left( \frac{S_2 - S_1}{2} \right)}{Rn_0} \right) \right) \right\}^{-1}$$

Таким образом, лучи, имеющие разные значения  $(S_2 - S_1)$ , отражаются от эффективных границ в форме окружностей разного радиуса. Для композитных бильярдов в случае общего положения эффективная граница зависит как от  $S_1$ , так и от  $S_2$ . В ее терминах удобно изучать хаотизацию, связанную с преломлением лучей. Разумеется, каждому падающему на границу раздела сред лучу можно поставить в соответствие свою эффективную границу. Локально она представляет собой элементарную площадку, заданную положением и направлением ее нормали. Рассмотрим, что происходит с пучком лучей, вышедшим из среды 1, прошедшим в среду 0, а затем вернувшимся в среду 1. Построим семейство эффективных границ для пучка. Важно, что каждый луч отразится от своей эффективной границы. При этом существенно взаимное положение эффективных границ. Они, в частности, могут быть параллельны друг другу или, в случае общего положения, расположены под некоторым углом. Начнем со случая, когда эффективные границы параллельны, но лежат на разной глубине (рис. 4). Легко видеть, что параллельные лучи в этом случае останутся параллельными после отражений от эффективных гра-

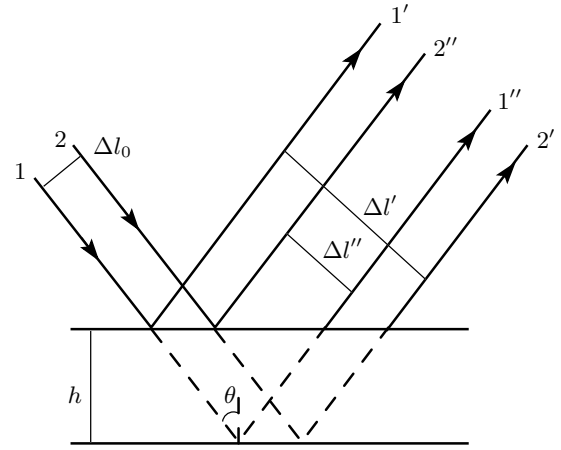


Рис. 4. Отражение и угловое расширение плоскопараллельного пучка лучей от эффективной границы. Показаны только две эффективные границы, соответствующие крайним лучам пучка. Остальные границы располагаются между ними. Отраженные лучи помечены штрихами

ниц. Обозначим лучи, ограничивающие пучок, номерами 1 и 2, а соответствующие выходящие лучи пометим штрихами.

Априори возможны два варианта. Луч 1 отражается от эффективной границы, расположенной выше, чем эффективная граница для второго, или наоборот. Вычислим ширину пучка  $\Delta l$  после возвращения в среду 1. Пусть ширина падающего пучка была  $\Delta l_0$ . Связь между  $\Delta l$  и  $\Delta l_0$  определяется геометрическим уравнением

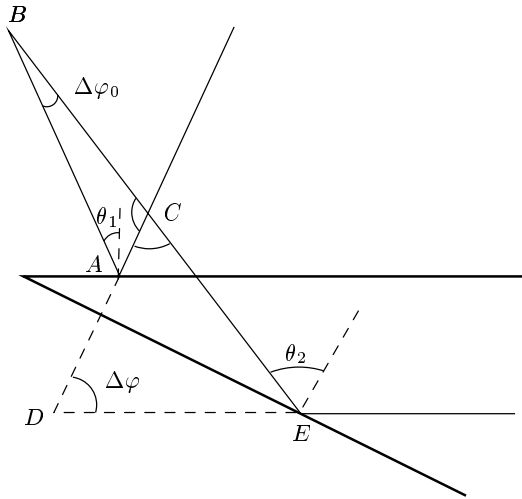
$$\Delta l = 2h \sin \theta \pm \Delta l_0 .$$

Здесь знак «+» относится к переходам  $(1 \rightarrow 1', 2 \rightarrow 2')$ , а знак «-» — к переходам  $(1 \rightarrow 1'', 2 \rightarrow 2'')$  (рис. 4). Параметр  $h = h(\Delta l_0, \theta)$  зависит как от  $\theta$ , так и от положения эффективной границы. От вида последней зависит также, будет реализован вариант  $(1 \rightarrow 1', 2 \rightarrow 2')$  или  $(1 \rightarrow 1'', 2 \rightarrow 2'')$ .

Критерий (мультипликативного) увеличения ширины пучка при элементарном акте преломления можно представить в виде

$$\left| 2 \frac{\partial h}{\partial \Delta l_0} \Big|_{\Delta l_0=0} \sin \theta \pm 1 \right| > 1. \tag{7}$$

Выполнение этого условия означает, что акт прохождения через среду 0 будет сопровождаться расширением пучка параллельных лучей  $\Delta l = K \Delta l_0$  с коэффициентом  $|K| > 1$ . Как следствие, это может



**Рис. 5.** Геометрическая иллюстрация возможности увеличения угла расхождения пучка после отражения от непараллельных эффективных границ

приводить к возникновению хаоса преломленных лучей. В некотором смысле этот критерий аналогичен критерию хаотизации в обычных бильярдах с границами отрицательной кривизны. В случае общего положения эффективные границы будут непараллельными. Это требует модификации геометрических построений, приведенных выше. При этом после прохождения через среду 0 параллельный пучок перестает быть параллельным, но аналогичный критерий расширения пучка можно сформулировать в терминах его угловых размеров (рис. 5).

Пусть углы наклона падающих лучей к их эффективным границам равны соответственно  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Тогда легко получить зависимость между угловой характеристикой  $\Delta\varphi_0$  падающего пучка и угловой характеристикой  $\Delta\varphi$  пучка, прошедшего через среду 0. Но теперь уже возможны четыре варианта взаимного расположения краевых лучей пучка и их эффективных границ. В частности, как и в случае параллельных эффективных границ, первый луч 1 может отразиться от границы, расположенной выше второй (рис. 5), или наоборот. Угловая ширина  $\Delta\varphi$  пучка, отраженного от эффективных границ, при любом расположении эффективных границ определяется равенством

$$\Delta\varphi = 2(\theta_2 - \theta_1) \pm \Delta\varphi_0,$$

где выбор знака зависит от расположения эффективных границ для лучей 1 и 2 друг относительно друга. Легко записать геометрический критерий рас-

ширения пучка ( $\Delta\varphi = K\Delta\varphi_0$ ) после возвращения из среды 0:

$$\left| 1 \pm 2 \frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial\Delta\varphi_0} \Big|_{\Delta\varphi_0=0} \right| > 1.$$

При выполнении этого условия каждый акт посещения среды 0 будет сопровождаться увеличением угла  $\Delta\varphi$  как  $\overline{\Delta\varphi} = K\Delta\varphi$ , где  $|K| > 1$ . При многократном прохождении среды 0 угол возрастает мультипликативным образом. Вследствие этого возможна хаотизация лучей, испытывающих преломление на границах раздела сред. Здесь существенно появление двух эффективных границ, от которых отражаются внешние лучи пучка, что невозможно реализовать в обычных бильярдах.

Проверим этот критерий для кольцевого композитного бильярда. Угловое расширение пучка

$$\Delta\varphi = 2(\theta_1 - \theta_2) + \Delta\varphi_0.$$

Углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  для данного случая находятся явно:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{R}{2} - \frac{S_2 - S_1}{2} - \left( \arcsin \left[ \frac{n_1}{n_0} \cos \left( \frac{S_2 - S_1}{2} \right) \right] - \arcsin \left[ \frac{v n_1}{R n_0} \cos \left( \frac{S_2 - S_1}{2} \right) \right] \right), \\ \theta_2 &= \frac{R}{2} - \frac{S'_2 - S'_1}{2} - \left( \arcsin \left[ \frac{n_1}{n_0} \cos \left( \frac{S'_2 - S'_1}{2} \right) \right] - \arcsin \left[ \frac{v n_1}{R n_0} \cos \left( \frac{S'_2 - S'_1}{2} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Легко видно, что коэффициент расширения пучка равен 1, так как  $\theta_1 - \theta_2$  не зависит от  $\Delta\varphi_0$ . Это соответствует тому, что при заданных  $S_2 - S_1$  и  $S'_2 - S'_1$  угол  $\Delta\varphi_0$  может быть произвольным. Таким образом, в этом примере отсутствует угловое расширение  $\Delta\varphi$  и, следовательно, отсутствует хаотизация преломленных.

Обсудим особенности эффективной границы композитных бильярдов в случае общего положения. Как отмечалось, эффективная граница зависит от обеих координат падающего луча. Поэтому можно считать, что имеется однопараметрическое множество эффективных границ. Только при фиксации связей между этими координатами выделяется определенная эффективная граница. При изменении выбора связи изменится и эффективная граница. В результате эффективные границы могут обладать различными дефектами, нарушением гладкости и даже разрывами. Следует ожидать, что их роль в некотором смысле аналогична каустикам в обычных бильярдах.

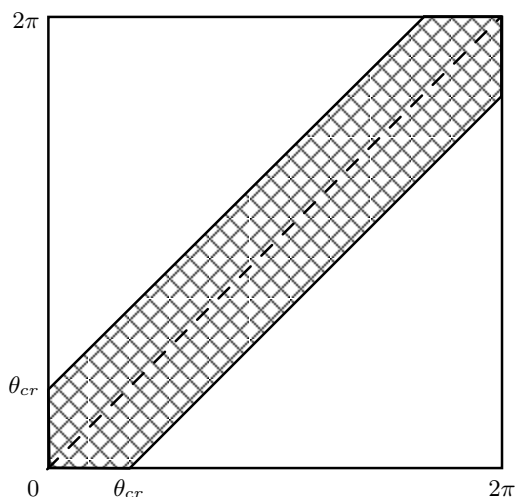


Рис. 6. Заштрихованная часть фазового пространства  $P$  соответствует начальным условиям, при которых угол падения на границу раздела меньше критического  $\theta_{cr}$  при первом ее достижении

Рассмотрим теперь следствие физического правила запрета, связанного с достижением угла полного внутреннего отражения. Предположим, что анализируемый луч относится к классу эквивалентности, определяемой допустимой последовательностью  $A = 10010011001001\dots$ . Среди начальных могут быть лучи, которые на  $n$ -м шаге этого маршрута падают на границу раздела с углом падения  $\theta_n > \theta_{cr}$ , большим угла полного внутреннего отражения (при условии, что показатель преломления у внутренней среды больше, чем у внешней). Такой луч не может пройти в среду 0 и, следовательно, не сможет дальше посещать среды в указанном порядке. Он пройдет только часть последовательности  $A$ . Далее он должен сменить порядок посещения сред. Это означает, что на соответствующем листе  $T^2$  фазового пространства в фиксированном классе эквивалентности существуют запрещенные области или лакуны. Другими словами, начальный сегмент, принадлежащий такой лакуне, не способен посещать среды в порядке, предписанном классом эквивалентности. Таким образом, физическое правило запрета ( $\theta_n \leq \theta_{cr}$ ) приводит к более тонкой дискриминации лучей и может оказаться экспоненциально чувствительным к начальным условиям.

Важен вопрос о том, какова мера таких лучей или мера начальных условий, соответствующих таким лучам. Рассмотрим лучи, стартующие в среде 1. Пусть число (мера) таких начальных лучей определяется площадью области на соответствующем ли-

сте фазового пространства. Выделим область, которая соответствует лучам, падающим на границу раздела под углами меньше  $\theta_{cr}$  (рис. 6). Запрещенная область — это полоса, разделенная пополам диагональю квадрата. Попадание в нее на любом шаге означает невозможность на следующем шаге перейти в среду 0. Тогда мера лучей, непродолжаемых в среду 0 при первом попадании на границу раздела, равна

$$\mu_1 = \mu(P),$$

где  $P$  — полоса (рис. 6) при  $|S_1 - S_2| \leq \theta_{cr}$ . Вычислим, какая мера лучей не пройдет в среду 0 после второго попадания на границу раздела. Она равна

$$\mu_2 = \mu(P \cup F_1^{-1}(P)),$$

где  $F_1$  — отображение, построенное из элементарных отображений согласно выбранной допустимой последовательности. Например, если  $A = 1001001\dots$ , то  $F_1 = F_{10}F_{00}F_{01}$ . В общем случае  $F_1 = F_{10}\{F_{00}, \bar{F}_{00}\}F_{01}$ , где фигурными скобками отмечен блок, содержащий только  $F_{00}$  и  $\bar{F}_{00}$ . Аналогично вычисляется мера лучей, не продолжаемых в среду 0 после не более чем  $n$  падений на границу раздела:

$$\mu_n = \mu(P \cup F_1^{-1}(P) \cup F_2^{-1}(P) \cup \dots \cup F_n^{-1}(P)),$$

где  $F_i$  — отображения, построенные в соответствии с маршрутом элементарных отображений (луча). Мера лучей, принадлежащих выбранному классу  $A$ , равна

$$\mu_{[A]} = \mu(\Omega) - \mu_\infty,$$

где  $\Omega$  — лист расширенного фазового пространства. Без потери общности можно принять  $\mu(\Omega) = 1$ .

Определим меру  $\mu_{[A]}$  для кольцевого композитного бильярда. Для него угол падения на границу раздела сред сохраняется вдоль всего луча. Поэтому в таком бильярде область начальных положений лучей, падающих на границу раздела с углами  $\theta_n < \theta_{cr}$ , в точности совпадает с полосой  $P$  (рис. 6). Соответственно  $\mu_{[A]} \equiv \mu(\Omega) - \mu(P)$ . В случае общего положения такая область имеет значительно более сложную фрактальную структуру.

#### 4. КОЛЬЦЕВОЙ КОМПОЗИТНЫЙ БИЛЛИАРД. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ

Остановимся на особенностях фазовой динамики кольцевого композитного бильярда (рис. 2). Динамика лучей класса  $[11\dots 1\dots]$  полностью повторяет динамику лучей обычного кругового бильярда.



Это — хорошо изученный пример интегрируемого билиарда. Перейдем к классу [1001001...1001...]. Такие лучи посещают обе среды. Их динамика уже зависит от закона преломления, и они обладают свойствами, специфичными для композитных билиардов. Поскольку последовательность, характеризующая этот класс лучей, периодическая, анализ их фазовых траекторий ведется стандартными методами.

Итак, последовательность [1001001...1001...] однозначно определяет порядок посещения листов фазового пространства. Для данного класса лучей это следующий порядок:

$$|11| \xrightarrow{F_{01}} |10| \xrightarrow{F_{00}} |01| \xrightarrow{F_{10}} |11| \xrightarrow{F_{01}} |10| \xrightarrow{F_{00}} |01| \xrightarrow{F_{10}} |11| \dots$$

Важно, что лист |00| вовсе не заполнен траекториями данного класса. Лучи переходят с листа на лист в указанном периодическом порядке. Периодичность позволяет изучить фазовые портреты на каждом фазовом листе отдельно, прореживая полную фазовую траекторию, что соответствует сечению фазового каскада на каждом из четырех фазовых листов. Другими словами, это, в известной мере, аналог сечения Пуанкаре для каскада в расширенном фазовом пространстве. Для анализа динамики на каждом из листов достаточно рассмотреть композицию отображений, отображающую (в естественном порядке) выбранный лист в себя.

Например, изучим свойства лучей в среде 1. Это соответствует одному листу фазового пространства — листу  $T_{|11|}^2$ . Здесь и далее добавим к обозначению тора нижний индекс, соответствующий определенному листу фазового пространства. Динамика лучей сводится к каскаду  $T_{|11|}^2 \rightarrow T_{|11|}^2$  с полученным ранее (1)–(3) отображением  $F = F_{10} \circ F_{00} \circ F_{01}$ :

$$\begin{cases} \bar{x} = 2(x + \sigma(x - y)) - y \pmod{2\pi}, \\ \bar{y} = x + 2\sigma(x - y) \pmod{2\pi}, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\sigma(x - y) \equiv \arcsin \left[ \frac{n_1 \cos \left( \frac{x - y}{2} \right)}{n_0} \right] - \arcsin \left[ \frac{r n_1 \cos \left( \frac{x - y}{2} \right)}{R n_0} \right]$$

— угол между радиусами, проведенными в точку падения луча на границу 1 и в точку отражения от границы 0. Отображение (8) обладает специальными свойствами. Существует инвариант движения

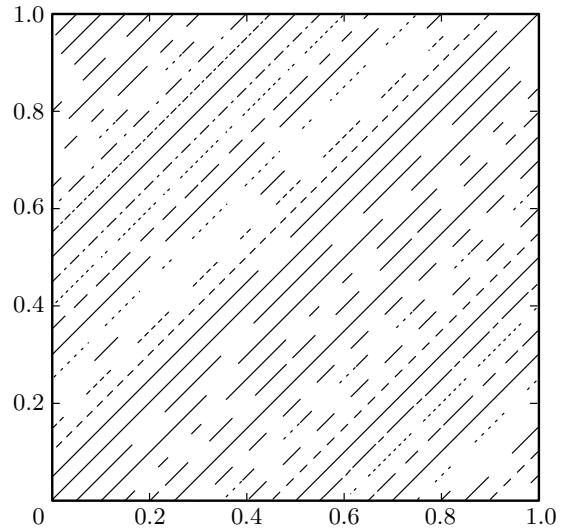


Рис. 7. Фазовый портрет билиарда на листе |11| фазового пространства. Показана развертка тора  $T_{|11|}^2$ . Координаты для удобства нормированы на  $2\pi$ . Орбиты соответствуют разным начальным сегментам. Видны периодические и квазипериодические орбиты

$$(\bar{x} - \bar{y}) \pmod{2\pi} = (x - y) \pmod{2\pi} = \text{const.}$$

Следовательно, фазовая траектория эволюционирует на одномерном многообразии, топологически эквивалентном окружности  $S^1$ . Весь лист  $T_{|11|}^2$  раслаивается на инвариантные кривые  $S^1$  (рис. 7), каждая из которых задана уравнением

$$(x - y) \pmod{2\pi} = x_0 - y_0 = \text{const.} \quad (9)$$

Динамика сегментов на них определяется более простым одномерным отображением:

$$\bar{x} = (x + 2\sigma(x_0 - y_0) + x_0 - y_0) \pmod{2\pi}, \quad (10)$$

которое легко получить из (8). Здесь в качестве фазовой координаты на инвариантной кривой выбрана координата  $x$ . Каждая инвариантная кривая определяется значением  $x_0 - y_0$ , а отображение (10) сдвигает фазовые точки на ней. Другими словами, лучи с одинаковой угловой разностью  $x_0 - y_0$  распространяются с одним и тем же законом движения:

$$\bar{x} = x + D(x_0 - y_0) \pmod{2\pi}, \quad (11)$$

где  $D \equiv 2\sigma(x_0 - y_0) + (x_0 - y_0)$  — постоянная на инвариантной кривой. Динамика фазовых точек (лучей) сводится к постоянному сдвигу  $D$  вдоль одной из инвариантных линий. Это позволяет найти точное решение для их одномерных орбит:

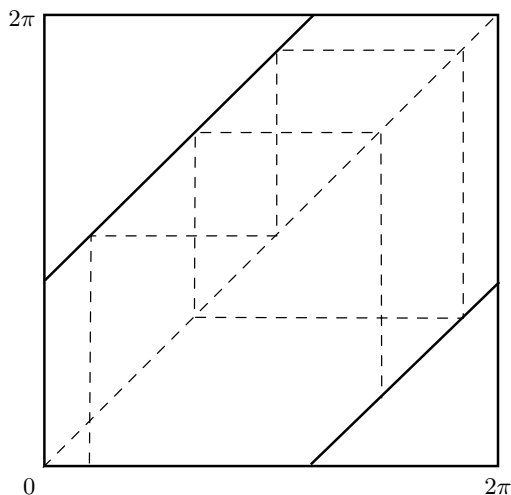


Рис. 8. Диаграмма Ламерея. Жирной линией показана инвариантная кривая. Штриховой линией — несколько шагов итераций

$$x_n = (nD(x_0 - y_0) + x_0) \bmod 2\pi. \quad (12)$$

Теперь опишем общую структуру лучей. Она зависит, прежде всего, от того, является ли  $D(x_0 - y_0)/2\pi$  рациональным или иррациональным числом. Если  $D/2\pi = q/p$  — рациональное число (где  $q$  и  $p$  — взаимно простые целые числа), то орбита периодическая с периодом  $p > 1$ . Лучи, соответствующие таким фазовым орбитам, замкнуты и содержат  $(p + 2p)$  сегментов, причем  $2p$  сегментов лежат в среде 0. Если  $D/\pi$  — иррациональное число, то орбита будет квазипериодической. Она всюду плотно покрывает одномерное инвариантное многообразие. Соответствующие лучи имеют бесконечное число сегментов и не замкнуты. В целом лист  $T^2_{|11|}$  стратифицирован на одномерные инвариантные многообразия, каждое из которых состоит из множества периодических орбит с периодом  $p > 1$  и квазипериодических орбит (в зависимости от значения инварианта  $D$ ).

Исследуем разбегание фазовых орбит класса  $[1001001 \dots 1001 \dots]$ . На рис. 8 приведена диаграмма Ламерея одномерного отображения (11). Наклон инвариантной кривой везде одинаковый (параллелен диагонали), за исключением точки разрыва  $x = 2\pi - D(x_0 - y_0)$ . Орбиты, принадлежащие выбранной инвариантной кривой, не расходятся в одномеризованном фазовом пространстве, т.е.  $\Delta x = \Delta x_0$ . Как изменяется расстояние между орбитами, принадлежащими двум разным инвариантным кривым? На рис. 9 показана диаграмма Ламе-

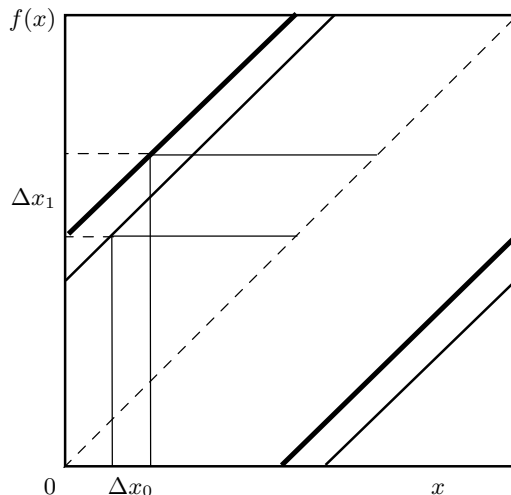


Рис. 9. Иллюстрация расширения пучка лучей в фазовом пространстве. Начальное расстояние между орбитами, принадлежащими двум разным инвариантным многообразиям, увеличивается. Это соответствует геометрическому критерию (7)

рея для таких траекторий. Из геометрических соображений следует, что расстояние между орбитами увеличивается линейно с ростом итераций. Этот факт соответствует угловому расширению пучка. Точное решение дает  $\Delta x_n = (\Delta x_0 + n\Delta D) \bmod 2\pi$ , т.е. разбегание фазовых траекторий в силу специфики рассматриваемого биллиарда носит линейный, а не экспоненциальный характер. Поэтому оно не приводит к возникновению хаоса.

Также можно изучить фазовый портрет на других листах фазового пространства, например, на листе  $|01|$ . Динамика точек здесь определяется отображением  $F : T^2_{|01|} \rightarrow T^2_{|01|}$ , т.е. композицией элементарных отображений  $F = F_{00} \circ F_{01} \circ F_{10}$ . Этот тор также стратифицирован на одномерные инвариантные многообразия  $(x - y) \bmod 2\pi = \text{const}$ , которые топологически эквивалентны окружностям. Фазовая динамика сводится к сдвигу вдоль них. Отличие заключается только в изменении начальных условий, которые теперь должны выбираться на соответствующем листе  $|01|$ . Поэтому для выбранной траектории (с начальным условием  $(y_0, x_0)$  на листе  $|11|$ ) на листе  $|01|$  соответствует переход  $(y_0, x_0) \xrightarrow{F_{00} \circ F_{01}} (y'_0, x'_0)$ . Таким образом, лучи класса  $[1001001 \dots 1001 \dots]$  последовательно переходят с листа на лист в указанном порядке и сдвигаются вдоль соответствующих инвариантных кривых на каждом из них.

Аналогично можно исследовать другие классы эквивалентности лучей и их фазовую динамику на разных листах фазового пространства. Необходимые отображения определяются заданной последовательностью элементарных отображений на участке периодичности и являются их композицией. Рассмотрим, например, фазовую динамику в классе периодических последовательностей на листе  $T_{|11|}^2$ . Этого достаточно для описания динамики лучей с бесконечным периодическим маршрутом. Для построения отображения рассмотрим соответствующий (минимальный) периодический участок любой периодической последовательности. Этот участок состоит из четного числа нулей и любого числа единиц, другими словами, из блоков двух типов:

$$1 \overbrace{0 \dots 0}^{2k} 001 ; \overbrace{1 \dots 1}^n .$$

Здесь  $k$  и  $n$  — целые положительные числа. Начнем с блока  $1 \overbrace{0 \dots 0}^{2k} 001$ . Этот блок индуцирует отображение  $F_k : T_{|11|}^2 \rightarrow T_{|11|}^2$  в соответствии с композицией элементарных отображений:

$$F_k = F_{10} \circ (F_{00} \circ \bar{F}_{00})^k \circ F_{00} \circ F_{01}.$$

Легко получить, что

$$F_k = \begin{cases} \bar{x} = 2x - y + 2(k+1)\sigma(x-y) \pmod{2\pi}, \\ \bar{y} = x + 2(k+1)\sigma(x-y) \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, отображение  $F_k : T_{|11|}^2 \rightarrow T_{|11|}^2$ , связанное с этим блоком, сохраняет разность  $(x - y) \pmod{2\pi}$ . Таким же свойством обладает отображение  $F_{11} : T_{|11|}^2 \rightarrow T_{|11|}^2$  и любая его степень  $F_{11} \circ \dots \circ F_{11} : T_{|11|}^2 \rightarrow T_{|11|}^2$ . Ясно, что любая композиция отображений  $F_k$  и  $F_{11} \circ \dots \circ F_{11}$  также сохраняет это свойство.

Суммируя, для любого класса эквивалентности, закодированного периодической последовательностью (рациональным числом),  $T_{|11|}^2$  расслаивается на инвариантные многообразия, эквивалентные  $S^1$ . Динамика сводится к сдвигам вдоль соответствующего одномерного многообразия и описывается одномерными отображениями. Аналогично можно проанализировать фазовые портреты на листах  $T_{|01|}^2$  и  $T_{|10|}^2$ , которые также стратифицированы на одномерные многообразия, эквивалентные  $S^1$ . Таким образом, поведение траекторий этих классов эквивалентности устроено одинаково. Это периодические

переходы с листа на лист согласно маршруту, определяемому классом эквивалентности, со сдвигами вдоль соответствующих одномерных инвариантных многообразий.

Перейдем теперь к описанию фазовых портретов в классах эквивалентности, определяемых иррациональными числами (непериодическими последовательностями). Начнем с листа  $T_{|11|}^2$ . Отображения, задающие динамику на этом листе, определяются только последовательностью отображений  $F_k$  (с разными значениями  $k$ ) и  $F_{11}$ . Следовательно, для этих классов эквивалентности  $T_{|11|}^2$  также стратифицирован на одномерные инвариантные многообразия, вдоль которых в процессе эволюции смещается фазовая точка. Легко показать, что и остальные фазовые листы стратифицированы на одномерные инвариантные многообразия. Главное отличие заключается в правилах перехода с листа на лист. Для новых классов они уже не периодические. Более того, если последовательность переходов сложна по Колмогорову [21], то не существует способа указать по любой ее конечной подпоследовательности порядок дальнейших переходов. Другими словами, переходы с листа на лист становятся детерминированно-случайными. Таким образом, в рассмотренном примере кольцевого композитного бильярда реализуется только одна концепция детерминированного хаоса, связанная с непредсказуемостью закона движения. Обратим внимание на то, что эта непредсказуемость нечувствительна к выбору начальных условий на соответствующем листе. Все траектории выбранного «сложного» класса эквивалентности одинаково детерминированно-хаотичны. Однако, если принять в качестве начального условия выбор точки в полном фазовом пространстве, то чувствительность появляется в смысле выбора посещаемого листа в процессе ее эволюции. Такой детерминированный хаос присутствует во всех композитных бильярдах независимо от их геометрии. Исключительность кольцевого композитного бильярда в том, что в нем нет других типов хаотичности. Это вырожденный случай. Любая деформация его формы приведет к проявлению других механизмов хаоса, например в случае смещения центров двух его окружностей друг относительно друга.

В заключение обсудим учет затухания интенсивности лучей в композитных детекторах. Физически изменение интенсивности вызвано распространением лучей в средах с затуханием, отражением и преломлением лучей на границах сред. Зная координаты сегментов, легко установить их длины. Предполагая среды однородными, легко понять, что умень-

шение интенсивности при распространении в соответствующей среде будет определяться длинами сегментов и свойствами сред. Тогда для интенсивности луча легко записать простое сопровождающее отображение для распределения интенсивностей при переходе от каждого предыдущего сегмента к последующему с учетом свойств сред и изменения интенсивности на границах их раздела. Это отображение фактически определяется (управляется) изученными выше отображениями для геометрических координат сегментов. Оно и будет определять изменение интенсивности луча в дискретном времени. Поэтому учет уменьшения интенсивности лучей легко выполнить, оставаясь в рамках геометро-динамической модели композитных бильярдов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Гостехиздат, Москва (1941).
2. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности*, Наука, Москва (1988), с. 109, 308.
3. Н. С. Крылов, *Работы по обоснованию статистической физики*, Изд-во АН СССР, Москва (1950).
4. М. С. Gutzwiller, *Chaos in Classical Quantum Mechanics*, Springer, New York (1990).
5. *Dynamical Systems II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. 2, ed. by Ya. G. Sinai, Springer-Verlag, Berlin (1989).
6. С. Ellegaard, T. Guhr et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 1546 (1995).
7. С. С. Абдуллаев, Г. М. Заславский, ЖЭТФ **85**, 1573 (1985).
8. J. U. Nocol and A. D. Stone, Nature **385**, 45 (1997).
9. H. Alt, H. D. Graf et al., Phys. Rev. E **54**, 2303 (1996).
10. С. М. Marcus, A. J. Rimberg et al., Phys. Rev. Lett. **69**, 506 (1992).
11. К. М. Fram, P. W. Brower, J. A. Melsen, and C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **76**, 2981 (1996).
12. S. V. Naydenov and V. V. Yanovsky, Functional Materials **7**, № 4, 434 (2000).
13. Я. Г. Синай, ДАН **153**, 1261 (1963).
14. Л. А. Бунимович, ЖЭТФ **89**, 1452 (1985).
15. В. Ф. Лазуткин, *Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа*, ЛГУ, Ленинград (1981).
16. L. Bunimovich, G. Casati, and I. Guarneri, Phys. Rev. Lett. **77**, 2941 (1996).
17. E. Gutkin, J. Stat. Phys. **83**, 7 (1996).
18. С. В. Найденов, В. В. Яновский, ТМФ **127**, 500 (2001); **129**, 116 (2001).
19. С. В. Найденов, В. В. Яновский, А. В. Тур, Письма в ЖЭТФ **75**, 499 (2002).
20. А. Н. Колмогоров, *Теория информации и теория алгоритмов*, Наука, Москва (1987).
21. В. А. Успенский, А. Л. Семенов, *Теория алгоритмов: основные открытия и приложения*, Наука, Москва (1987).
22. N. Chernov and R. Markarian, *Introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards* (2002).