

# ЭФФЕКТЫ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ И МНОГОМОДОВОЕ ВЫНУЖДЕННОЕ РАССЕЯНИЕ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ

*М. Г. Гладуш\**, *А. А. Пантелеев*, *Вл. К. Рерих*

*Государственный научный центр РФ ТРИНИТИ  
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 10 февраля 2006 г.

Рассмотрен процесс рассеяния резонансного излучения в плотной двухуровневой среде с учетом эффектов локального поля. Исследование системы проводилось в рамках приближения самосогласованного поля для модифицированной цепочки уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона для редуцированных матриц плотности ансамбля атомов и мод квантованного электромагнитного поля. Проведен последовательный вывод поправки локального поля из начального гамильтониана системы. Численно и теоретически рассмотрена задача о рассеянии короткого прямоугольного импульса на квазиточечном образце. Показана возможность многомодового спектра рассеянного излучения с частотами, кратными частоте Раби, и другими промежуточными частотами. Найдены относительные интенсивности линий в спектре.

PACS: 33.20.Fb, 32.70.Jz, 42.50.Fx, 05.30.-d

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение свойств рассеянного излучения, возникающего при распространении резонансной лазерной волны в плотных средах, относится к числу важнейших вопросов квантовой и нелинейной оптики. При достаточно большой плотности среды отклик одного атома на электромагнитное воздействие существенно зависит от присутствия других атомов. Так, взаимодействие близко расположенных частиц посредством поля излучения объясняет целый ряд хорошо изученных кооперативных эффектов [1, 2]. Данные исследования были начаты в работе Дикке [3], который показал, что спонтанный распад в ансамбле атомов с размерами, меньшими длины волны излучения, может происходить коллективно. При этом создается импульс сверхизлучения с длительностью, обратно пропорциональной количеству атомов, и интенсивностью, пропорциональной его квадрату. К настоящему времени известно, что кроме изменения динамики спонтанного распада этот и другие механизмы межатомного взаимодействия способны также заметно изменять спектр спонтан-

ного излучения по сравнению с одноатомным случаем. Например, групповое поведение атомов обеспечивает условия для возникновения дополнительных резонансов в спектрах поглощения и испускания, что связано с возможностью одновременного возбуждения атомов, а также с обменом возбуждениями [4–8]. Появление дополнительных спектральных линий при сверхизлучении впервые обсуждалось в работах [9–11]. Развитие теории, в частности, предполагали, что дополнительные пики могут возникать на частотах, кратных частоте Раби. Однако интенсивность таких линий оценивалась как крайне низкая: порядка  $10^{-6}$  по сравнению с интенсивностью центральной компоненты спектра.

Важную роль при изучении распространения электромагнитных волн в плотных средах играет необходимость отличать локальное поле, действующее на отдельный атом, от макроскопического среднего [12]. Как известно, поправка, определяющая это отличие, обеспечивает перенормировку резонансной частоты [13]. Ярким проявлением такого эффекта является предсказание и теоретическое описание безрезонаторной оптической бистабильности [14], наблюдавшейся позднее в экспериментах с

\*E-mail: mglad@triniti.ru

легированными стеклами и на примесях в кристаллических структурах [15, 16]. В связи с этим последние теоретические работы в этой области были направлены на исследование оптически активных систем в окружении частиц диэлектрика. Показано, что в данных условиях значительно улучшаются пороговые значения параметров, определяющих режим бистабильности [17, 18], а сами эффекты локального поля могут приводить к изменению скорости спонтанного распада [19–22]. Отдельный интерес здесь представляет возможность участия локального поля в формировании коллективного затухания атомов, приводящего к отклику, по интенсивности аналогичному сверхизлучению [17, 23].

Необходимо отметить, что, несмотря на значительное количество публикуемых работ, нельзя считать решенной проблему последовательного вывода локального поля из начального гамильтониана системы. Для некоторых задач представляется достаточным решение полуклассических уравнений Максвелла–Блоха, где в гамильтониане взаимодействия используется именно локальное поле. Действительно, правомерность феноменологического учета поправок подтверждена множеством теорий. Один из современных подходов основан на исключении дельта-функциональной особенности функции Грина для неоднородного уравнения Максвелла. Данная процедура проводится для того, чтобы исключить либо самовоздействие атома, либо нефизичное взаимодействие двух атомов, находящихся в одной точке [19, 24]. Подробный микроскопический вывод поправок, в том числе для системы излучателей в диэлектрике, был выполнен авторами работы [25], которые основывались на многочастичном гамильтониане и уравнениях Гейзенберга для материальных и полевых операторов. Адиабатическое исключение операторов поля и переменных, характеризующих диэлектрическую среду, позволило получить корректные блоховские уравнения, которые, однако, описывали динамику только атомной подсистемы. Приближенное микроскопическое рассмотрение точечной модели [23] дает вклад локального поля в коллективный распад даже в пределе одиночного рассеивателя, что не согласуется с подходом, основанном на функции Грина.

Цель настоящей работы — последовательный и согласованный вывод поправки локального поля. Отталкиваясь от потенциала взаимодействия атома с модой квантованного электромагнитного поля, возможно построить цепочку уравнений Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ) для описания эволюции атомной системы и электромаг-

нитного поля. Коллективные взаимодействия являются внутренней составляющей цепочки и выражены через потенциалы самосогласованного поля. Это свойство позволяет избежать феноменологических процедур и при минимуме предположений описать коллективные эффекты в атомной подсистеме и связанные с ними оптические явления. В качестве практического применения развитого метода анализируются нестационарные спектры вынужденного рассеянного излучения для плотной среды в случае, когда компоненты локального поля формируют канал коллективного затухания.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим взаимодействие резонансной электромагнитной волны с ансамблем  $N$  невырожденных двухуровневых атомов с переходом из возбужденного в основное состояние  $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ . В дипольном приближении гамильтониан такой системы в единицах  $1/\hbar$  имеет вид

$$H = \sum_{l=1}^N H_a + \sum_{\mathbf{k}, \sigma} H_f + \sum_{l=1}^N \sum_{\mathbf{k}, \sigma} V_{af}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} H_a &= \omega_{21} |2\rangle\langle 2|, & H_f &= \omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}, \\ V_{af} &= -(\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}, \sigma}, \hat{\mathbf{P}}_l), \\ \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}, \sigma} &= i g_k (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{k}, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger), \\ \hat{\mathbf{P}}_l &= \mathbf{d}_{21} (|2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2|) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $H_a$  описывает гамильтониан  $l$ -го невозмущенного атома с частотой перехода  $\omega_{21}$ , а  $|j\rangle$  и  $\langle j|$  ( $j = 1, 2$ ) — проекционные операторы соответствующего состояния,  $H_f$  — гамильтониан свободного квантованного поля с операторами рождения и уничтожения  $\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger$  и  $\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}$  фотона частоты  $\omega_k$  с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и вектором поляризации  $\epsilon_{\mathbf{k}, \sigma}$ . Взаимодействие атома с модой квантованного поля  $V_{af}$  выражено через оператор электрического поля  $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}, \sigma}$  в точке  $\mathbf{r}$ , причем

$$g_k = \sqrt{\frac{2\pi\omega_k}{\hbar W}}$$

— константа связи в объеме квантования  $W$ , и оператор поляризации  $\hat{\mathbf{P}}_l$  с матричным элементом дипольного момента перехода  $\mathbf{d}_{21}$ .

Кроме того, следует принять во внимание поглощение излучения на стенках резонатора, связанное

либо с работой детектора, либо с любой другой безвозвратной потерей излучения. Данное обстоятельство может быть учтено с помощью аддитивной добавки в используемые далее уравнения движения слагаемого [26]

$$K_{\mathbf{k},\sigma}(\rho) = -\frac{i\eta_k}{2}(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} \rho - 2\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} \rho \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger + \rho \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}), \quad (3)$$

которое описывает взаимодействие квантованного поля с термостатом при нулевой температуре (константа  $\eta_k$  определяет модовые потери).

Уравнения, описывающие спектр рассеянного излучения, получаются из цепочки ББГКИ для редуцированных матриц плотности и операторов корреляции [27]. Если длительность лазерного импульса достаточно мала, то можно пренебречь процессами спонтанного излучения и столкновительного затухания атомов. В таком случае цепочку ББГКИ достаточно рассматривать в рамках приближения Хартри, в котором все корреляционные операторы и их вклады в уравнения опускаются и эволюция системы описывается с помощью одночастичных матриц плотности. Поведение отдельного атома или моды электромагнитного поля как составляющих системы учитывается с помощью соответствующих самосогласованных полей. Отметим, что компоненты уравнений, связанные с (анти)симметризацией операторов плотности, в данном случае не возникают, в силу того что полевые и атомные операторы коммутируют. Для полевой подсистемы отсутствие спонтанно излученных фотонов предполагается также потому, что их интенсивность мала по сравнению с когерентно рассеянными. Тем не менее здесь следует указать, что радиационная релаксация и спектр спонтанно рассеянного излучения может быть описан цепочкой ББГКИ в пределе борновского приближения [28].

Если начальное состояние системы считать невозбужденным, то при  $t = 0$  полная матрица плотности ансамбля атомов и мод поля  $\rho$  представима в виде произведения  $\rho_a(0)$  и  $\rho_f(0)$  одночастичных матриц атомов и фотонов. Выбирая в качестве внешнего воздействия классическую электромагнитную волну, начальные условия для  $\rho_f$  можно описывать когерентными состояниями [26, 29]:

$$\rho_f(0) = |\alpha_{\mathbf{k},\sigma}\rangle\langle\alpha_{\mathbf{k},\sigma}| = D(\alpha_{\mathbf{k},\sigma})|0_{\mathbf{k},\sigma}\rangle\langle 0_{\mathbf{k},\sigma}|D^\dagger(\alpha_{\mathbf{k},\sigma}), \quad (4)$$

где  $D(\alpha_{\mathbf{k},\sigma})$  — оператор когерентного состояния. Аргумент оператора представляет собой комплексное

число, такое что  $|\alpha_{\mathbf{k},\sigma}|^2$  есть среднее число фотонов в моде  $(\mathbf{k}, \sigma)$ .

Система уравнений ББГКИ в рамках выбранного приближения [27] и с учетом (3) состоит из двух связанных уравнений:

$$\begin{aligned} i\frac{d\rho_a}{dt} - [H_a, \rho_a] &= \sum_{\mathbf{k},\sigma} [\text{Tr}_f V_{af} \rho_f, \rho_a], \\ i\frac{d\rho_f}{dt} - [H_f, \rho_f] - K_{\mathbf{k},\sigma}(\rho_f) &= \sum_{l=1}^N [\text{Tr}_a V_{af} \rho_a, \rho_f], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\text{Tr}_a$  и  $\text{Tr}_f$  обозначают взятие следа по атомным и фотонным переменным, а  $[\cdot, \cdot]$  — коммутатор. Первое уравнение в (5) есть уравнение Блоха для двухуровневого атома, причем правая часть описывает вклад в эволюцию атома самосогласованного поля, определенного потенциалом  $\text{Tr}_f V_{af} \rho_f$ , и учитывает как внешнее лазерное поле, так и поле, рассеянное атомным ансамблем. Второе уравнение представляет собой волновое уравнение, записанное в шредингеровском представлении. Его правая часть с потенциалом  $\text{Tr}_a V_{af} \rho_a$  определяет влияние наведенной полем поляризации среды. Отметим, что в отсутствие оператора  $K_{\mathbf{k},\sigma}(\rho_f)$  эта система остается полностью замкнутой и является консервативной [27].

Воспользуемся преобразованием, предложенным в работе [28], которое позволяет получить тривиальное решение для фотонной матрицы плотности. Заранее укажем, что данное преобразование является точным как в стационарном, так и в нестационарном случае. Итак, в силу (2) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \text{Tr}_a V_{af} \rho_a &\equiv V_f = -\sum_{l=1}^N (\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k},\sigma}, \langle \hat{\mathbf{P}}_l \rangle), \\ \langle \hat{\mathbf{P}}_l \rangle &= \text{Tr}_a (\hat{\mathbf{P}}_l \rho_a) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l). \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку выражение для  $V_{af}$  линейно по операторам рождения и уничтожения фотонов, решение второго уравнения в (5) можно искать в виде когерентного состояния [26]. Операторная экспонента  $\exp(-iV_f)$  является оператором когерентного состояния. Тогда, согласно [26] и с учетом влияния модовых потерь, унитарный оператор  $U(t)$  выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \exp(-iV_f)(t) = \exp(-i\phi(t))D(\beta_{\mathbf{k},\sigma}(t)), \\
 \frac{d\beta_{\mathbf{k},\sigma}}{dt} &= \frac{d\text{Tr}_f(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}\rho_f)}{dt} = -i\left(\omega_k - \frac{i\eta_k}{2}\right)\beta_{\mathbf{k},\sigma} - \\
 &- \sum_{l=1}^N g_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_l} (\epsilon_{\mathbf{k},\sigma}, \langle \hat{\mathbf{P}}_l \rangle), \\
 \frac{d\phi_{\mathbf{k},\sigma}}{dt} &= -\frac{i}{2} \left( \frac{d\beta_{\mathbf{k},\sigma}}{dt} \beta_{\mathbf{k},\sigma}^* - \frac{d\beta_{\mathbf{k},\sigma}^*}{dt} \beta_{\mathbf{k},\sigma} \right),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где величина  $\beta_{\mathbf{k},\sigma}(0) = \alpha_{\mathbf{k},\sigma}$ . Унитарное преобразование

$$\rho_f = U(t)\rho'_f U(t)^{-1},$$

действующее как оператор смещения на  $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}$  и  $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$  [26], преобразует (5) к виду

$$\begin{aligned}
 i\frac{d\rho_a}{dt} - \left[ H_a + \sum_{\mathbf{k},\sigma} V_{af}^p, \rho_a \right] &= \sum_{\mathbf{k},\sigma} [\text{Tr}_f V_{af} \rho'_f, \rho_a], \\
 i\frac{d\rho'_f}{dt} - K_{\mathbf{k},\sigma}(\rho'_f) &= 0, \\
 \rho'_f(0) &= |0_{\mathbf{k},\sigma}\rangle\langle 0_{\mathbf{k},\sigma}|,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где оператор  $\sum_{\mathbf{k},\sigma} V_{af}^p$  описывает действие когерентной части самосогласованного поля на атом. Он также содержит вклад как внешнего поля, так и поля излучения, рассеянного атомами, но уже не содержит полевых операторов:

$$\begin{aligned}
 V_{af}^p &= -(\mathbf{E}_{\mathbf{k},\sigma}^p, \hat{\mathbf{P}}_l), \\
 \mathbf{E}_{\mathbf{k},\sigma}^p &= ig_k (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \beta_{\mathbf{k},\sigma}(t) \epsilon_{\mathbf{k},\sigma} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \beta_{\mathbf{k},\sigma}^*(t) \epsilon_{\mathbf{k},\sigma}).
 \end{aligned} \tag{9}$$

При выбранных начальных условиях получается, что

$$K(\rho'_f) \equiv 0$$

и матрица плотности

$$\rho'_f \equiv |0_{\mathbf{k},\sigma}\rangle\langle 0_{\mathbf{k},\sigma}|.$$

Как следствие, первое уравнение становится независимым, так как

$$[\text{Tr}_f V_{af} \rho'_f, \rho_a] \equiv 0.$$

Возвращаясь к исходному представлению, получаем окончательную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 i\frac{d\rho_a}{dt} - \left[ H_a + \sum_{\mathbf{k},\sigma} V_{af}^p, \rho_a \right] &= 0, \\
 \frac{d\beta_{\mathbf{k},\sigma}}{dt} &= -i\left(\omega_k - \frac{i\eta_k}{2}\right)\beta_{\mathbf{k},\sigma} - \\
 &- \sum_{l=1}^N g_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_l} (\epsilon_{\mathbf{k},\sigma}, \langle \hat{\mathbf{P}}_l \rangle), \\
 \rho_f &= |\beta_{\mathbf{k},\sigma}(t)\rangle\langle \beta_{\mathbf{k},\sigma}(t)|.
 \end{aligned} \tag{10}$$

При этом уравнение для атомной матрицы плотности остается независимым. Нахождение фотонной матрицы плотности сводится теперь к решению уравнения для  $\beta_{\mathbf{k},\sigma}$ , сцепленного с уравнением для  $\rho_a$  через величину  $\langle \hat{\mathbf{P}}_l \rangle$ . Спектр интенсивности рассеянного излучения, поглощаемого детектором, можно легко найти из системы (5), оценивая его как безвозвратные потери:

$$\begin{aligned}
 I_{\mathbf{k},\sigma}(t) &= \hbar\omega_k \text{Tr}_f \{ -iK_{\mathbf{k},\sigma}(\rho_f) \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} \} = \\
 &= \eta_k \hbar\omega_k |\beta_{\mathbf{k},\sigma}(t)|^2.
 \end{aligned} \tag{11}$$

### 3. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ПОПРАВКА ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим систему (10). Она содержит бесконечное число уравнений для  $\beta_{\mathbf{k},\sigma}$ . Данное обстоятельство делает ее малоприменимой для нахождения пространственного распределения излучения. Однако для решения спектроскопической задачи необходимо вычислить атомный оператор плотности  $\rho_a(\mathbf{r})$ , который зависит только от величины поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \mathbf{E}_{\mathbf{k},\sigma}^p \tag{12}$$

в точке  $\mathbf{r}$ . Для нее в пределе непрерывной среды можно получить полевое уравнение в явном виде. Из принципа соответствия такое уравнение должно удовлетворять классическому волновому уравнению для электромагнитного поля. Покажем это. Для простоты изложения будем считать, что влияние детектора мало и  $\eta_k = 0$ . Формально интегрируя второе уравнение в (10) с учетом начального условия, получаем

$$\begin{aligned}
 \beta_{\mathbf{k},\sigma} &= \alpha_{\mathbf{k},\sigma} e^{-i\omega_k t} - \\
 &- \sum_{l=1}^N \int_0^t d\tau g_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_l - i\omega_k(t-\tau)} \epsilon_{\mathbf{k},\sigma} (\epsilon_{\mathbf{k},\sigma}, \langle \hat{\mathbf{P}}_l \rangle).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Из выражений (9) и (12) получаем выражение для полного эффективного поля:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) - \\
 &- i \sum_{\mathbf{k},\sigma} \sum_{l=1}^N \int_0^t d\tau g_k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_l) - i\omega_k(t-\tau)} \times \\
 &\times \epsilon_{\mathbf{k},\sigma} (\epsilon_{\mathbf{k},\sigma}, \langle \hat{\mathbf{P}}_l \rangle) + \text{с.с.},
 \end{aligned} \tag{14}$$

где  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$  определяется первым слагаемым в выражении (13) и описывает внешнее поле в вакууме.

Заменим далее суммирование интегрированием согласно следующим правилам:

$$\sum_{\mathbf{k}, \sigma} \rightarrow \int \sum_{\sigma=1,2} \frac{W d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad \sum_l \rightarrow \int_{v-\delta} n(\mathbf{r}_l) d\mathbf{r}_l. \quad (15)$$

Здесь при интегрировании по пространству  $\mathbf{r}_l$  исключается бесконечно малый объем  $\delta$  вокруг точки  $\mathbf{r}$ . Такой прием обычно применяется, чтобы исключить самовоздействие атома, если он находится в точке  $\mathbf{r}$ . Однако, как показано в Приложении, в более высоких порядках модифицированной цепочки уравнений ББГКИ этот нефизичный вклад устраняется автоматически. Преобразуем теперь подынтегральное выражение, используя определение константы связи и то свойство, что интеграл по телесному углу симметричен относительно замены  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = & \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) - \\ & - \int_0^t d\tau \int_{v-\delta} d\mathbf{r}_l n(\mathbf{r}_l) \int \frac{\omega_k d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \times \\ & \times e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_l)} \sin(\omega_k(t - \tau)) \epsilon_{\mathbf{k}, \sigma} (\epsilon_{\mathbf{k}, \sigma}, \langle \hat{\mathbf{P}}_l \rangle). \quad (16) \end{aligned}$$

Запишем это выражение в более компактном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = & \\ = & \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) + \int_0^t d\tau \int_{v-\delta} d\mathbf{r}_l \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l, t - \tau) \mathbf{P}. \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbf{P} = n(\mathbf{r}_l) \langle \hat{\mathbf{P}}_l \rangle$$

— поляризация среды, а функция  $\mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l, t - \tau)$  с учетом соотношения

$$\epsilon_{\mathbf{k}, \sigma} \otimes \epsilon_{\mathbf{k}, \sigma} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{r}, t) = & - \int \frac{\omega_k d\mathbf{k}}{2\pi^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \times \\ & \times \sin(\omega_k(t - \tau)) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = \\ = & \int c \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \right) \frac{d\mathbf{k}}{2\pi^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{\sin(\omega_k t)}{k} = \\ = & -c \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \right) \frac{\delta(r - ct)}{r}. \quad (18) \end{aligned}$$

Выражение (18) совпадает с гриновским тензором для неоднородного уравнения Максвелла [19, 20, 24], а именно:

$$\left( \nabla \otimes \nabla + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c^2} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta(t). \quad (19)$$

Известно, что тензор  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$  имеет особенность при  $\mathbf{r} = 0$ , связанную с тем, что

$$\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \frac{1}{r} = -\frac{4\pi}{3} \delta(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Это явно видно, если выразить  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$  через его фурье-образ  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \omega_k)$  [19]:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \omega_k) = & \frac{4\pi\omega_k^2}{c^2} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{r} \left( \mathfrak{P}(ikr) \mathbf{I} + \right. \\ & \left. + \mathfrak{Q}(ikr) \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) - \frac{4\pi}{3} \delta(\mathbf{r}), \quad (21) \\ \mathfrak{P}(z) = & 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}, \quad \mathfrak{Q}(z) = -1 + \frac{3}{z} - \frac{3}{z^2}. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение в (16) не содержит дельта-функции. Вместе с тем интегрирование по пространству  $v - \delta$  аналогично интегрированию с полной функцией Грина по всему объему за вычетом интеграла по малому объему  $\delta$ . С учетом того, что последний сохраняет лишь вклад от  $\mathbf{P}$ , выражение, определяющее эффективное поле, может быть переписано в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} = & \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) + \\ & + \int_0^t d\tau \int_v d\mathbf{r}_l \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l, t - \tau) \mathbf{P}(\mathbf{r}_l, \tau). \quad (22) \end{aligned}$$

Функция  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$  в правой части должна, согласно своему определению, быть решением однородного волнового уравнения. Последний же член, согласно (19), представляет собой частное решение соответствующего неоднородного уравнения. Следовательно, правая часть

$$\mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}$$

удовлетворяет классическому волновому уравнению

$$-\left( \nabla \otimes \nabla + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} \quad (23)$$

и характеризует макроскопическое среднее поле. Таким образом, мы приходим к известному выражению, определяющему разницу между полем средним и полем локальным, т. е. действующим на атом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}. \quad (24)$$

Однако для резонансных атомов, помещенных в диэлектрическую среду, величина такого локального поля будет несколько отличаться от величины, определяемой выражением (24). Из граничных условий

для уравнения Максвелла следует, что поле, действующее на атом в среде, должно быть в  $\varepsilon(\omega_k)$  раз меньше ( $\varepsilon(\omega_k)$  — комплексная диэлектрическая проницаемость среды). То же самое относится и к величине поправки. Для краткости изложения докажем это для представления поля в переменных  $\mathbf{r}$  и  $\omega_k$ . Действительно, в этом случае

$$\left(\Delta + \frac{\omega_k^2 \varepsilon(\omega_k)}{c^2}\right) \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, \omega_k) = \frac{4\pi\omega_k^2}{c^2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega_k). \quad (25)$$

Функция Грина для уравнения (25) имеет вид [20]

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_\varepsilon(\mathbf{r}, \omega_k) &= \frac{4\pi\omega_k^2}{c^2} \frac{e^{ik\varepsilon(\omega_k)r}}{r} \times \\ &\times \left( \mathfrak{P}(ik\varepsilon(\omega_k)r) \mathbf{I} + \mathfrak{Q}(ik\varepsilon(\omega_k)r) \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \right) - \\ &- \frac{4\pi}{3\varepsilon(\omega_k)} \delta(\mathbf{r}). \quad (26) \end{aligned}$$

Таким образом, действующее на атом поле имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_k) = \mathbf{E}_M(\mathbf{r}, \omega_k) + \frac{4\pi}{3\varepsilon(\omega_k)} \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega_k). \quad (27)$$

В резонансном приближении, используя выражение для константы радиационной релаксации

$$\gamma = \frac{4\omega_{21}^3 |\mathbf{d}_{21}|^2}{3\hbar c^3},$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} V_{af}^p &= -(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \hat{\mathbf{P}}_i) = \\ &= -\left( \frac{|\mathbf{d}_{21}|}{2\hbar} E_M(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} - i\omega_L t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma n(\mathbf{r})}{\varepsilon(\omega_{21}) k_{21}^3} \rho_{21} \right) |2\rangle \langle 1| + \text{h.c.}, \quad (28) \end{aligned}$$

где  $\omega_L$  — несущая частота внешнего поля, а  $E_M(\mathbf{r}, t)$  — огибающая. При выводе выражения (28) учитывались аналитические свойства диэлектрической проницаемости,

$$\varepsilon(-\omega_k) = \varepsilon^*(\omega_k),$$

а также использовалось предположение о слабой зависимости диэлектрической проницаемости от  $\omega_k$  вблизи частоты перехода. Вводя обозначения  $\rho_{21}$

и  $\rho_{12}$  для элементов атомной матрицы плотности, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} V_{af}^p &= V_a + V_a^p, \\ V_a &= -\frac{|\mathbf{d}_{21}|}{2\hbar} \left( E_M(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} - i\omega_L t} |2\rangle \langle 1| + \right. \\ &\quad \left. + E_M(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} + i\omega_L t} |1\rangle \langle 2| \right), \\ V_a^p &= -\frac{\gamma}{2} \frac{\pi n(\mathbf{r})}{k_{21}^3} \left( (\tilde{\varepsilon}' + i\tilde{\varepsilon}'') |2\rangle \langle 1| \rho_{21} + \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{\varepsilon}' - i\tilde{\varepsilon}'') \rho_{12} |1\rangle \langle 2| \right), \\ \tilde{\varepsilon}' &= \frac{\text{Re}(\varepsilon(\omega_{21}))}{|\varepsilon(\omega_{21})|^2}, \quad \tilde{\varepsilon}'' = -\frac{\text{Im}(\varepsilon(\omega_{21}))}{|\varepsilon(\omega_{21})|^2}. \quad (29) \end{aligned}$$

Здесь  $V_a$  описывает действие среднего макроскопического поля, а  $V_a^p$  определяет нелинейный вклад поправки локального поля, причем действительная часть ответственна за динамическую перенормировку частоты перехода, а мнимая часть обуславливает процесс коллективной релаксации. Комплексный коллективный оператор рассматривался в работах [23, 25, 30]. Однако в этих работах общие соотношения (24) и (27) не выводились, авторы ограничивались получением известного результата лишь для геометрии бесконечного тонкого слоя [30]. Подходы, использованные в этих работах, не позволяли проводить прямого расчета нестационарных спектров излучения.

#### 4. СПЕКТР РАССЕЯННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ТОЧЕЧНОГО ОБРАЗЦА, ВОЗБУЖДАЕМОГО КОРОТКИМ ИМПУЛЬСОМ

В этом разделе рассматривается спектр излучения точечного образца, возбуждаемого коротким лазерным импульсом. Основное внимание мы уделим возможности появления дополнительных линий, обусловленных поправкой локального поля. С этой целью среду, в которую внедрены резонансные частицы, необходимо выбрать такой, что  $\tilde{\varepsilon}'' \gg \tilde{\varepsilon}'$ , поэтому в операторе  $V_a^p$  доминирует «сверхизлучательная» часть. Для объекта с размерами, меньшими длины волны излучения, можно пренебречь неоднородностью макроскопического среднего поля вследствие рассеяния на резонансных атомах и считать, что  $E_M(\mathbf{r}, t)$  определяется лишь внешним лазерным полем. Также в уравнении для  $\beta_{\mathbf{k}, \sigma}$  можно пренебречь зависимостью от пространственной переменной  $\mathbf{r}_l$ , которая приводила бы в данном случае

к несущественному изменению зависимости углового распределения интенсивности рассеянного излучения от размера образца.

Перейдем к резонансному приближению и приближению вращающейся волны, используя подстановку

$$\rho_{21} \rightarrow \rho_{21} e^{i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} - \omega_L t)}, \quad \rho_{12} \rightarrow \rho_{12} e^{-i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} - \omega_L t)}.$$

Для простоты изложения будем считать лазерный импульс прямоугольным с длительностью  $T$ , т.е. частота Раби  $R(t) = R$  при  $0 < t < T$ , и рассматривать случай точного резонанса. Спектр рассеянного излучения «регистрируется» в направлении, ортогональном к векторам  $\mathbf{E}_L$  и  $k_L$  возбуждающего излучения. Используя такие предположения, систему (10) можно свести к системе

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho_a}{dt} - [V_a + V_a^p, \rho_a] &= 0, \\ \frac{d\beta_{\mathbf{k},\sigma}}{dt} &= -i \left( \nu_k - \frac{i\eta_k}{2} \right) \beta_{\mathbf{k},\sigma} - N g_k d_{21} \rho_{21}, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\nu_k = \omega_k - \omega_L$ , а  $N = n(\mathbf{r})v$  — характерное число резонансных атомов в образце. Решение нелинейной системы уравнений (10) для атомной матрицы будем искать методом последовательных приближений, ограничиваясь его первым порядком. В нулевом приближении, т.е. для  $V_a^p = 0$ , решение для атомной матрицы плотности хорошо известно:

$$\rho_a^{(0)}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos(2Rt) & i \sin(2Rt) \\ -i \sin(2Rt) & 1 + \cos(2Rt) \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Уравнение для первого приближения имеет вид

$$i \frac{d\rho_a^{(1)}}{dt} - [V_a + V_a^p(\rho_a^{(0)})] = 0, \quad (32)$$

оно также интегрируется:

$$\rho_a^{(1)}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sin(V(t)) & i \sin(V(t)) \\ -i \sin(V(t)) & 1 + \cos(V(t)) \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$V(t) = 2Rt + B(1 - \cos(2Rt)).$$

Здесь

$$B = \frac{\pi n(\mathbf{r}) \tilde{\varepsilon}''}{k_{21}^3} \frac{\gamma}{4R}.$$

Подставляя решение (31) в (10) для вычисления

$\beta_{\mathbf{k},\sigma}(t)$  и пренебрегая запаздыванием сигнала, получаем

$$\begin{aligned} \beta_{\mathbf{k},\sigma}(t) &= M e^{-i\zeta_k U} \times \\ &\times \left[ \int_0^{U_e} du e^{i\zeta_k u} \sin(u + B(1 - \cos u)) + \right. \\ &\left. + \int_{U_e}^U du e^{i\zeta_k u} \sin(U_e + B(1 - \cos U_e)) \right], \quad (34) \end{aligned}$$

$$u = 2R\tau, \quad U = 2Rt, \quad U_e = 2RT,$$

$$M = i \frac{N}{2R} \sqrt{\frac{\pi\omega_k}{\hbar W}} d_{21}, \quad \zeta_k = \frac{\nu_k - i\eta_k/2}{2R}.$$

Второе слагаемое в квадратных скобках в выражении (34) описывает излучение остаточной поляризации среды, возникающей после прохождения импульса, и носит характер обычного рэлеевского рассеяния. Для целей нашего исследования оно интереса не представляет и в дальнейшем будет опущено. Используя разложения через функции Бесселя [31],

$$\begin{aligned} \cos(B \cos u) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j J_{|2j|}(B) e^{i2ju}, \\ \sin(B \cos u) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j J_{|2j+1|}(B) e^{i(2j+1)u}, \end{aligned} \quad (35)$$

интеграл (34) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \beta_{\mathbf{k},\sigma}(t) &= M e^{-i\zeta_k U} \times \\ &\times \int_0^{U_e} du e^{i\zeta_k u} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{iju} Y_j, \\ Y_{2m+1} &= (J_{|2m|} e^{iB} + J_{|2m+2|}(B) e^{-iB}), \\ Y_{2m} &= (J_{|2m|+1}(B) e^{iB} - J_{|2m|+3}(B) e^{-iB}), \\ Y_{-2m} &= Y_{2m}^*, \quad Y_0 = 2J_1(B) \cos B. \end{aligned} \quad (36)$$

Интегрирование полученного выражения дает

$$\begin{aligned} \beta_{\mathbf{k},\sigma}(t) &= M e^{-i\zeta_k U} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j S(j) Y_j, \\ S(m) &= \frac{e^{i(\zeta_k+m)U_e} - 1}{i(\zeta_k+m)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя выражение (37) в формулу (11) и пре-

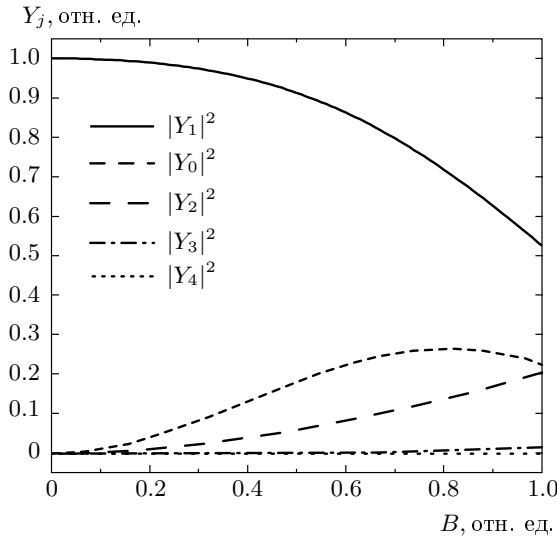


Рис. 1. Относительные интенсивности спектральных линий  $Y_j(B)$

небрегая перекрестными нерезонансными членами, получим спектр рассеянного излучения:

$$\begin{aligned}
 I_{\mathbf{k},\sigma}(t) &= \eta_k \hbar \omega_k |\beta_{\mathbf{k},\sigma}(t)|^2 = \\
 &= N^2 G_k e^{-\eta_k t'} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |S(j)|^2 |Y_j|^2, \\
 |S(m)|^2 &= \\
 &= \frac{1 + e^{-\eta_k T} - 2e^{-\eta_k T/2} \cos((\nu_k + 2mR)T)}{(\nu_k + 2mR)^2 + \eta_k^2/4}, \\
 G_k &= \eta_k \hbar \omega_k \frac{\pi \omega_k}{\hbar W} d_{21}^2,
 \end{aligned} \tag{38}$$

где

$$t' = \begin{cases} 0, & t < T, \\ t - T, & t > T. \end{cases}$$

Проанализируем полученное выражение в двух предельных случаях.

1.  $\eta_k T \gg 1$ . В этом случае на больших временах вкладом членом, содержащих  $e^{-\eta_k T}$ , можно пренебречь. Тогда выражение (38) сводится к

$$\begin{aligned}
 I_{\mathbf{k},\sigma}(t) &= N^2 G_k e^{-\eta_k t_1} \times \\
 &\times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|Y_j|^2}{(\nu_k + 2jR)^2 + \eta_k^2/4}. \tag{39}
 \end{aligned}$$

Спектр рассеянного излучения будет представлять собой набор линий, кратных частоте Раби, с шириной линии порядка  $\eta_k^2/4$  и интенсивностями, пропорциональными  $|Y_j|^2$ . Зависимости этих величин от

$B$  для нескольких центральных линий приведены на рис. 1. Необходимо отметить, что анализ имеет смысл проводить при значении параметра  $B \ll 1$ , так как результаты данного раздела получены с помощью метода последовательных приближений по параметру  $B$ . Как видно из рисунка, интенсивность линий быстро убывает с ростом  $j$  при  $j > 1$ , что следует из асимптотического разложения для функций Бесселя:

$$J_j(B) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \left( \frac{eB}{2j} \right)^j.$$

2.  $\eta_k T \ll 1$ . В этом случае в выражении для спектра интенсивности можно положить

$$e^{-\eta_k T} \sim 1.$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}
 I_{\mathbf{k},\sigma}(t) &= N^2 G_k e^{-\eta_k t_1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2|Y_j|^2 V(j), \\
 V(m) &= \frac{1 - \cos((\nu_k + 2mR)T)}{(\nu_k + 2mR)^2 + \eta_k^2/4}. \tag{40}
 \end{aligned}$$

Здесь на больших временах спектр рассеянного излучения также будет представлять собой набор линий, кратных частоте Раби, и с интенсивностями, пропорциональными  $|Y_j|^2$ , однако, в отличие от предыдущего случая, они будут промодулированы с частотой, обратной длительности импульса. Вследствие этой модуляции ширины линий рассеянного излучения будут порядка  $1/T$ , что можно показать, используя выражение<sup>1)</sup>:

$$\frac{1 - \cos(\nu_k T)}{\nu_k^2 + \eta_k^2/4} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} (\nu_k T)^{2i} / (2i)!}{\nu_k^2 + \eta_k^2/4}. \tag{41}$$

При больших  $\nu_k \gg \eta_k$  оно может быть аппроксимировано:

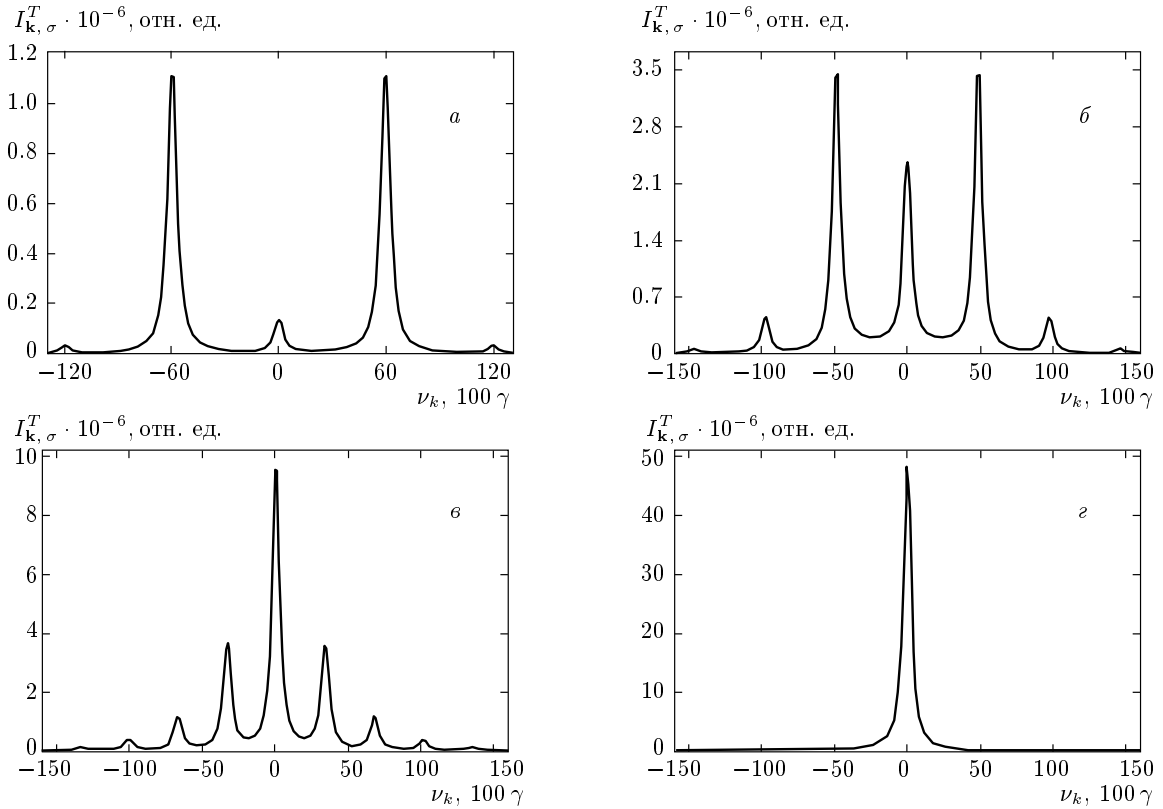
$$\frac{1 - \cos(\nu_k T)}{\nu_k^2 + \eta_k^2/4} \approx \frac{T^2}{2!} - \frac{\nu_k^2 T^4}{4!} + O(\nu_k^4), \tag{42}$$

откуда следует, что ширина линии порядка  $1/T$ . Отметим, что интенсивность излучения в центре линии всегда отлична от нуля. Действительно, при  $\nu_k \rightarrow 0$  имеем

$$\frac{1 + e^{-\eta_k T} - 2e^{-\eta_k T/2} \cos(\nu_k T)}{\nu_k^2 + \eta_k^2/4} = T^2 + O(T^4). \tag{43}$$

<sup>1)</sup> Аналогично для остальных линий.





**Рис. 2.** Спектры интегральной по времени интенсивности рассеянного излучения  $I_{k,\sigma}^T$ . Величины  $I_{k,\sigma}^T$  даны в относительных единицах и пропорциональны  $N^2$ . Скорость радиационной релаксации принята за единицу,  $\Delta = 0$ ,  $R = \pi 10^3 \gamma$ ,  $\eta_k = 500 \gamma$ ,  $T = 0.019 \gamma^{-1}$ ,  $B = 0.32$  (а), 0.64 (б), 0.85 (в), 1.2 (г)

**5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

В предыдущем разделе были получены явные выражения для спектра интенсивности рассеянного излучения в случае, когда параметр  $B \ll 1$ , что соответствует небольшой плотности атомов. Это ограничение связано с использованием метода последовательных приближений. В случае большей плотности он неприменим, и для анализа спектров при ее произвольном значении требуется решать нелинейную систему уравнений (10).

Для оценки области параметров, при которых возможно наблюдение многомодового рассеяния, в систему уравнений были введены операторы радиационного и столкновительного затуханий [29]:

$$\begin{aligned} \Gamma_r[\rho_a] &= \\ &= -\frac{i\gamma}{2} (|2\rangle\langle 2|\rho_a + \rho_a|2\rangle\langle 2| - 2|1\rangle\langle 2|\rho_a|2\rangle\langle 1|), \quad (44) \\ \Gamma_c[\rho_a] &= -i\gamma_{\perp} (|1\rangle\langle 2|\rho_{12} + |2\rangle\langle 1|\rho_{21}). \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma_{\perp}$  — константа поперечной релаксации. Для

анализа возможности экспериментальной проверки полученных результатов вычислим интегральный по времени спектр интенсивности рассеянного излучения:

$$I_{k,\sigma}^T = \int_0^{\infty} I_{k,\sigma}(t) dt. \quad (45)$$

Численное решение системы уравнений (10) проводилось с использованием пакета программ «DUMKA», разработанных в группе В. И. Лебедева (ИАЭ) [32].

На рис. 2 приведены спектры интенсивности рассеянного излучения для длинного (по сравнению со временем затухания излучения в моде) импульса<sup>2)</sup>,  $\eta_k T \gg 1$ , при различных значениях параметра  $B$ . При малых  $B$  (рис. 2а) относительные интенсивности линий в целом совпадают с результатами предыдущего раздела. Исключение составляет центральная линия с  $\nu_k = 0$ . Это связано с остаточным, после

<sup>2)</sup> Этот случай разобран в пункте 1 разд. 4.

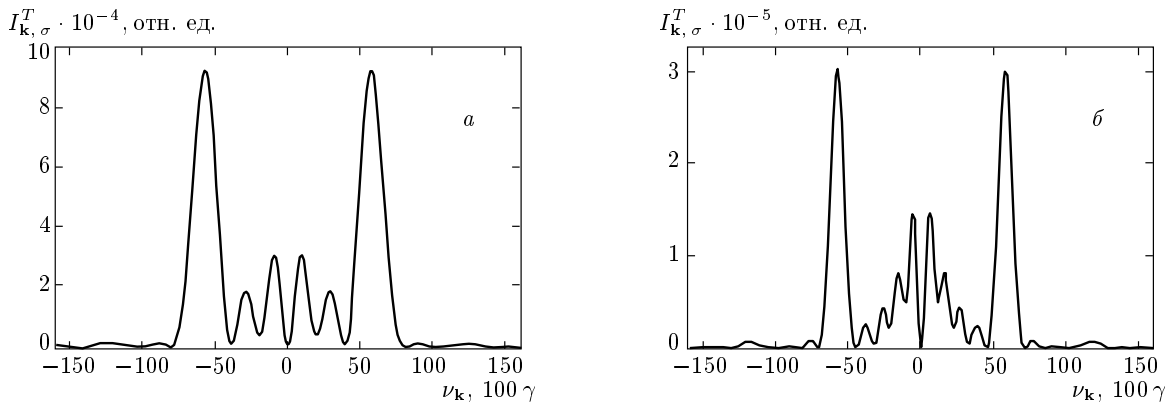


Рис. 3. То же, что на рис. 2. Значения параметров:  $\Delta = 0$ ,  $R = \pi 10^3 \gamma$ ,  $\eta_k = 10 \gamma$ ,  $T = 0.003 \gamma^{-1}$ ,  $B = 0.28$  (а),  $T = 0.005 \gamma^{-1}$ ,  $B = 0.28$  (б)

прохождения импульса, свечением среды, которое в выражении (39) не учитывается. Относительная интенсивность пиков на частотах Раби убывает, при этом они сдвигаются к центру спектра, см. рис. 2б и в. Кроме того, проявляются пики, кратные трем и четырем частотам Раби, сильно сдвинутые к центру спектра. При очень больших плотностях  $B \sim 1$  все линии сливаются в центральный пик, см. рис. 2г.

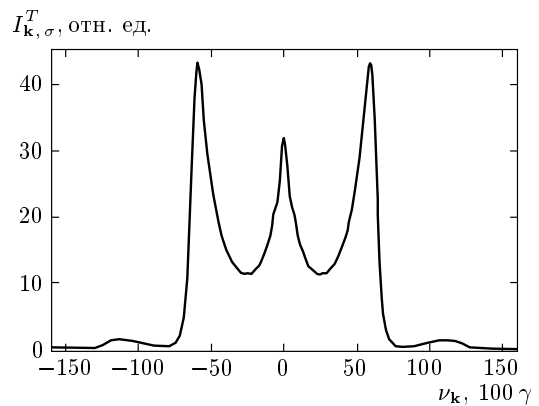


Рис. 4. То же, что на рис. 2. Значения параметров:  $\Delta = 0$ ,  $R = 20 \pi \gamma$ ,  $\gamma_{\perp} = 9 \gamma$ ,  $\eta_k = \gamma$ ,  $T = \gamma^{-1}$ ,  $B = 0.74$

На рис. 3 приведены спектры интенсивности рассеянного излучения для короткого импульса  $\eta_k T \ll 1$  при различных значениях плотности. На рис. 3а и б хорошо видны дополнительные пики, вызванные модуляцией вида (42) для  $6\pi$  и  $10\pi$  импульсов, соответственно. Общее поведение спектра с ростом плотности такое же, как и в предыдущем случае: линии сдвигаются к центру и при  $B \sim 1$  объединяются в одну линию. Расчеты, проведенные при различных  $\gamma$  и  $\gamma_{\perp}$ , показали, что с уменьшением времени релаксации спектральная картина «смазывается». При  $\gamma$  и  $\gamma_{\perp} \sim 2/T$  дополнительные пики, вызванные модуляцией, практически исчезают. Однако пики, кратные  $\pm 4R$ , сохраняются вплоть до  $\gamma_{\perp} T \sim 9$ , см. рис. 4. Исследование зависимости спектров от отстройки показали, что картина очень чувствительна к величине  $\Delta$ . Уже при  $\Delta \sim 0.1R$  она сильно искажается, при этом увеличивается интенсивность линий около центра. При  $\Delta \sim 0.8R$  многокомпонентная структура спектра полностью пропадает и излучение рассеивается на частоте возбуждающего излучения.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование рассеяния резонансного излучения в плотной двухуровневой среде. Представлен метод описания эволюции взаимодействующих ансамблей атомов и мод электромагнитного поля для плотных сред на основе модифицированной цепочки уравнений ББГ-КИ. Применение аппарата когерентных состояний и использование свойств фотонной функции Грина позволило получить явные выражения для потенциалов самосогласованного поля. Таким образом, на основании только потенциала взаимодействия атома с электромагнитным полем осуществлен последовательный вывод согласованных уравнений движения системы, учитывающих поправку локального поля. Проведен аналитический и численный

расчеты спектра излучения атомов, помещенных в поглощающую диэлектрическую среду и возбуждаемых коротким прямоугольным лазерным импульсом. Показана возможность генерации серии пиков рассеянного излучения на частотах, кратных частоте Раби, которая обусловлена влиянием нестационарного локального поля. Найдены относительные интенсивности линий в спектре рассеяния. Кроме того, показана возможность возникновения в спектре дополнительных линий, связанных с модуляцией рабиевских компонент, вследствие конечной длины импульса. Численный анализ спектров показал, что в случае небольшой плотности среды аналитические результаты совпадают с расчетными. Для значений плотности, такой что  $B > 0.3$ , приведенный теоретический анализ становится неприменимым. С ростом плотности наблюдается сильный сдвиг линий к центру спектра, при этом могут наблюдаться линии, кратные трем и четырем частотам Раби. Многомодовый спектр объясняется наличием диэлектрика, который обуславливает дополнительный нелинейный вклад локального поля, приводящий к коллективному затуханию атомного ансамбля.

Авторы благодарят А. Н. Старостина за полезные обсуждения и замечания, высказанные к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ № МК-2214.2005.2 и № НШ-1257.2003.02.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

Поскольку уравнения цепочки ББГКИ весьма громоздки, вопрос об их построении для данной задачи заслуживает отдельного рассмотрения. Для обсуждения вопроса о самовоздействии и, следовательно, об исключении рассматриваемого атома из суммирования, определяющего действующее на него самосогласованное поле, приведем необходимое приближение ББГКИ без вывода. Более того, для доказательства необходимого здесь свойства достаточно рассмотреть упрощенную систему, т.е. в гамильтониане, определенном в первом разделе, учитывать всего один атом. При учете корреляции атом + фотон и использовании преобразований и допущений второго раздела следующим приближением относительно системы (10) будет система из трех уравнений

$$\begin{aligned}
 i \frac{d\rho_a}{dt} - \left[ H_a + \sum_{\mathbf{k}, \sigma} V_{af}^p, \rho_a \right] &= \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \text{Tr}_f [V_{af}, g_{af}], \\
 i \frac{dg_{af}}{dt} - \left[ H_a + \sum_{\mathbf{k}, \sigma} V_{af}^p + H_f, g_{af} \right] &= \\
 &= [V_{af} - V'_f, \rho_a \rho_f], \\
 \rho_f &= |0_{\mathbf{k}, \sigma}\rangle \langle 0_{\mathbf{k}, \sigma}|.
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

где  $g_{af}$  — корреляционный оператор. В правой части этого уравнения присутствует величина

$$V'_f = \text{Tr}_a V_{af} \rho_a,$$

аналогичная входящей в (6) для одного атома. Появление этого члена обусловлено тем, что упрощения, связанные с бесконечным числом частиц и обычно используемые в ББГКИ, не применяются для корректного описания рассматриваемых систем. Именно такое, более полное, приближение цепочки позволяет последовательно вывести поправку, связанную с локальным полем. Оператор  $V_{af}^p$  определен в выражении (9). Уравнение для  $\beta_{\mathbf{k}, \sigma}$  в данном случае упрощается,

$$\frac{d\beta_{\mathbf{k}, \sigma}}{dt} = -i\omega_k \beta_{\mathbf{k}, \sigma} - g_k(\epsilon_{\mathbf{k}, \sigma}, \langle \hat{\mathbf{P}}_1 \rangle), \tag{A.2}$$

и явное выражение для оператора  $V_{af}^p$  легко находится. Действительно, повторяя выкладки третьего раздела, с учетом того, что

$$d\mathbf{k} = dk d\Omega_k, \quad k = \omega_k/c,$$

получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(t) &= \mathbf{E}_0(t) - i \int_0^t d\tau \int d\Omega_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k(t-\tau)} \times \\
 &\times \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2} \right) \langle \hat{\mathbf{P}}_1 \rangle \frac{\omega_k^3 d\omega_k}{2\pi c^3}, \\
 \mathbf{E}(t) &= \mathbf{E}_0(t) - i \frac{4}{3c^3} \times \\
 &\times \int_0^t d\tau \left( -i \frac{d}{dt} \right)^3 \delta(t-\tau) \langle \hat{\mathbf{P}}_1 \rangle = \\
 &= \mathbf{E}_0(t) + \frac{4}{3c^3} \frac{d^3}{dt^3} \langle \hat{\mathbf{P}}_1 \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

При выводе этих выражений учитывались аналитические свойства обобщенных функций, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k(t-\tau)} \omega_k^n d\omega_k = 2\pi \left( -i \frac{d}{dt} \right)^n \delta(t-\tau). \tag{A.4}$$

Необходимо отметить, что выражение для  $\mathbf{E}(t)$  надо понимать здесь в операторном смысле, т. е. при подстановке (А.3) в (А.1)  $\rho_a$  и  $g_{af}$  будут всегда находиться под знаком производной. Из этого выражения следует, что эффективное действующее поле в левой части уравнения для атомной матрицы плотности содержит поле реакции собственного излучения. Тем не менее, как будет показано ниже, эта компонента будет в точности компенсирована слагаемым  $V_f'$ .

При подстановке формального решения  $g_{af}$  в уравнение для  $\rho_a$  правая часть последнего будет определяться оператором:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k},\sigma} g_{af} \rangle &= \\ &= -i \int_0^t \langle \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k},\sigma} [e^{-iH_f(t-\tau)} V_f' e^{+iH_f(t-\tau)}, \rho_f] \rangle \times \\ &\times U(t)U^{-1}(\tau)\rho_a U(\tau)U^{-1}(t) d\tau + \text{r.r.}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

где «r.r.» обозначает компоненты, относящиеся к оператору радиационной релаксации и определяемые  $V_{af}$ . Этот результат получен в работе [28], и здесь будет рассмотрено явно лишь слагаемое, зависящее от  $V_f'$ . Оператор  $U(t)$  является фундаментальным решением уравнения

$$i \frac{dg_{af}}{dt} - \left[ H_a + \sum_{\mathbf{k},\sigma} V_{af}^p + H_f, g_{af} \right] = \delta(t)\hat{\mathbf{I}}, \quad (\text{A.6})$$

где  $\hat{\mathbf{I}}$  — единичный оператор. Учитывая, что в выражении (А.5) отличны от нуля только члены, содержащие  $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \rho_f$  и  $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \rho_f \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}$ , получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k},\sigma} g_{af} \rangle &= i \int_0^t d\tau g_{af}^2 e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)} \epsilon_{\mathbf{k},\sigma} (\epsilon_{\mathbf{k},\sigma}, \langle \hat{\mathbf{P}}_1 \rangle) \times \\ &\times U(t)U^{-1}(\tau)\rho_a U(\tau)U^{-1}(t) + \text{c.c.} + \text{r.r.} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Проводя также суммирование по модам, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k},\sigma} \langle \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k},\sigma} g_{af} \rangle &= i \int_0^t d\tau \int d\Omega_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^3 d\omega_{\mathbf{k}}}{2\pi c^3} \times \\ &\times e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-\tau)} \left( \hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2} \right) \langle \hat{\mathbf{P}}_1 \rangle \times \\ &\times U(t)U^{-1}(\tau)\rho_a U(\tau)U^{-1}(t) + \text{r.r.} = \\ &= -\frac{4}{3c^3} \frac{d^3}{dt^3} \langle \hat{\mathbf{P}}_1 \rangle \rho_a + \text{r.r.} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Сравнивая коммутатор в левой части уравнения для атомной матрицы плотности с учетом (А.3) и послед-

нее выражение (А.8), из его правой части можно видеть, что компоненты, пропорциональные реакции излучения

$$\frac{4}{3c^3} \frac{d^3}{dt^3} \langle \hat{\mathbf{P}}_1 \rangle,$$

имеют одинаковые знаки и взаимно уничтожаются. Это является свойством цепочки ББГКИ, которое отражает тот факт, что поле, рассеянное атомом, не влияет на динамику его переменных. Данное обстоятельство приводит к отличию действующего на атом поля от макроскопического среднего поля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Andreev, V. I. Emelyanov, and Yu. A. Ilinskii, *Cooperative Effects in Optics*, ed. by E. R. Pike, Malvern Physics Series, IOP Publishing, London (1993).
2. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev et al., *Super-Radiance: Multiatomic Coherent Emission*, IOP Publishing, London (1996).
3. R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
4. G. S. Agarwal, R. Saxena, L. M. Narducci, D. H. Feng, and R. Gilmore, *Phys. Rev. A* **21**, 257 (1980).
5. S. J. Kilin, *J. Phys. B* **13**, 2653 (1980).
6. M. Kus and K. Wodkiewicz, *Phys. Rev. A* **23**, 853 (1981).
7. R. D. Griffin and S. M. Harris, *Phys. Rev. A* **25**, 1528 (1982).
8. Z. Ficek, R. Tanas, and S. Kielich, *J. Phys. B* **17**, 1491 (1984).
9. G. S. Agarwal, A. C. Brown, L. M. Narducci, and G. Vetri, *Phys. Rev. A* **15**, 1613 (1977).
10. A. S. J. Amin and J. G. Cordes, *Phys. Rev. A* **18**, 1298 (1978).
11. I. R. Senitzky, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1334 (1978).
12. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).
13. F. A. Hopf, C. M. Bowden, and W. H. Louisell, *Phys. Rev. A* **29**, 2591 (1984).
14. Ben-Aryeh and C. M. Bowden, *Opt. Commun.* **59**, 224 (1986); C. M. Bowden and J. P. Dowling, *Phys. Rev. A* **47**, 1247 (1993); *Phys. Rev. A* **47**, 1514 (1993).
15. Kuditcher, M. P. Hehlen, C. M. Florea, K. W. Winick, and S. C. Rand, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1898 (2000).

16. M. P. Hehlen, A. Kuditcher, S. C. Rand, and S. R. Lüthi, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3050 (1999).
17. M. E. Crenshaw and C. M. Bowden, *Phys. Rev. A* **53**, 1139 (1996).
18. J. T. Manassah, *Opt. Commun.* **191**, 435, (2001).
19. M. Fleischhauer, *Phys. Rev. A* **60**, 2534 (1999).
20. S. Scheel, L. Knöll, and D.-G. Welsch, *Phys. Rev. A* **60**, 4094 (1999).
21. M. E. Crenshaw and C. M. Bowden, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1851 (2000).
22. G. Manoj Kumar, D. Narayana Rao, and G. S. Agarwal, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 203903 (2003).
23. T. M. Bowden and M. E. Crenshaw, *Opt. Commun.* **179**, 63 (2000).
24. P. de Vries, D. V. van Coevorden, and A. Lagendijk, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 447 (1998).
25. M. E. Crenshaw and C. M. Bowden, *Opt. Commun.* **203**, 115 (2002).
26. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, Москва (1987).
27. M. Bonitz, *Quantum Kinetic Theory*, B. G. Teubner, Stuttgart–Leipzig (1998).
28. А. А. Пантелеев, Вл. К. Рерих, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **123**, 222 (2003); Vl. C. Roerich and M. G. Gladush, in *Progress in Nonequilibrium Green's Functions II*, ed. by M. Bonitz and D. Semkat, World Scientific Publ., Singapore (2003).
29. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2000).
30. M. G. Benedict, V. A. Malyshev, E. D. Trifonof, and A. I. Zaitsev, *Phys. Rev. A* **43**, 3845 (1991).
31. И. С. Градштейн, И. С. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).
32. V. I. Lebedev, in *Numerical Method and Application*, ed. by G. I. Marchuk, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo (1994); В. И. Лебедев, *Вычислительные процессы и системы*, Наука, Москва (1991), т. 8.