

# О ВОЗМОЖНОСТИ ПРОВЕРКИ ПРИНЦИПА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В «НУЛЕВОМ» ЭКСПЕРИМЕНТЕ ПО КРАСНОМУ СМЕЩЕНИЮ С ПОМОЩЬЮ ДВУХРЕЗОНАТОРНОЙ ЛАЗЕРНОЙ СИСТЕМЫ

*Р. А. Даишев\*, З. Г. Мурзаханов, А. Ф. Сжочилов*

*Казанский государственный университет  
420008, Казань, Россия*

Поступила в редакцию 28 ноября 2005 г.

Предложены схемы оптического детектора для проверки принципа эквивалентности Эйнштейна в «нулевом» эксперименте по красному смещению и для тестирования способов расчета длины резонатора в слабом переменном гравитационном поле с помощью регистрации вариаций разностной частоты резонаторов двойной или двухрезонаторной лазерных систем, обусловленных лунно-солнечными вариациями геопотенциала.

PACS: 04.08.-y, 95.55.Ym, 42.60.-v

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время общая теория относительности является общепризнанной метрической теорией гравитации и составляет фундамент, на котором базируются наши знания о структуре пространства-времени. В основе ее лежит эйнштейновский принцип эквивалентности (ЭПЭ). Одно из следствий этого принципа приводит к наличию гравитационного смещения спектральных линий (так называемое «красное» смещение), что эквивалентно зависимости хода часов от локального гравитационного потенциала  $\varphi$ . При этом, согласно принципу локальной позиционной инвариантности (ЛПИ), являющемуся составной частью ЭПЭ [1], гравитационное смещение частоты хода часов является универсальным и не должно зависеть от типа используемых часов. С другой стороны, попытки создания квантовой теории гравитации приводят иногда к необходимости нарушения ЭПЭ на некотором уровне и, тем самым, стимулируют проведение экспериментальной проверки ЭПЭ и, в частности, ЛПИ со все возрастающей степенью точности.

Принцип ЛПИ может быть протестирован с помощью экспериментов по измерению эффекта гра-

витационного «красного» смещения, согласно которому в слабых гравитационных полях ( $\varphi/c^2 \ll 1$ ,  $c$  — скорость света) зависимость частоты  $\nu$  хода любых часов от потенциала  $\varphi$  имеет вид:  $\nu = \nu_0(1 + \varphi/c^2)$ , где  $\nu_0$  — частота хода часов в отсутствие гравитационного поля (собственная частота). Если предположить нарушение принципа ЛПИ, то эту зависимость можно представить в форме [1]

$$\nu_A = \nu_0 [1 + (1 + \beta_A)\varphi/c^2],$$

где безразмерная величина  $\beta_A$  характеризует степень отклонения от закона красного смещения, следующего из ЭПЭ, а индекс «А» указывает на возможную зависимость частоты  $\nu_A$  от конкретного типа используемых часов.

Существуют два способа проверки принципа ЛПИ. Первый (классический эксперимент по красному смещению) основан на использовании идентичных часов, расположенных в точках с разными значениями гравитационного потенциала ( $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ), и измерении разности частот:

$$\nu_{A1} - \nu_{A2} = \nu_0(1 + \beta_A)(\varphi_1 - \varphi_2)/c^2.$$

В результате проведения многочисленных экспериментов со все возрастающей степенью точности для определения возможных значений  $\beta_A$  в работе [2]

\*E-mail: Rinat.Daishev@ksu.ru

с помощью сличения частот генерации двух разнесенных водородных мазеров (Н) был получен минимальный верхний предел  $|\beta_H| < 7 \cdot 10^{-5}$ .

Второй способ проверки принципа ЛПИ («нулевой» эксперимент по красному смещению [1]) основан на сравнении хода неидентичных часов  $A$  и  $B$ , расположенных в точках с одинаковыми значениями гравитационного потенциала, при временных вариациях самого потенциала  $\varphi(t)$ . В этом случае нарушение принципа ЛПИ будет приводить к ненулевой разности частот:

$$\nu_A - \nu_B = \nu_0(\beta_A - \beta_B)\varphi(t)/c^2. \quad (1)$$

Большое число экспериментальных работ, связанных с проверкой принципа ЛПИ по формуле (1), проводилось на основе сравнения частот атомных переходов различных веществ при изменениях гравитационного потенциала  $\varphi(t)$ , вызванных орбитальным движением Земли вокруг Солнца. Минимальный верхний предел возможных значений величины  $\beta_A - \beta_B$  был получен этим способом в работе [3] при сравнении вариаций частот водородного лазера и цезиевого атомного стандарта частоты (Cs):  $|\beta_H - \beta_{Cs}| < 2.1 \cdot 10^{-5}$ . В работах [4, 5] «нулевой» эксперимент по красному смещению проводился на основе сравнения частоты атомного перехода с собственной частотой электромагнитного резонатора, т. е. сравниваемые часы имели совершенно разную физическую природу. При этом в работе [4] в результате измерений вариаций частот водородного лазера и сверхпроводящего электромагнитного резонатора был получен верхний предел  $|\beta_H - \beta_{res}| < 1.7 \cdot 10^{-2}$ , а в работе [5] при сравнении вариаций частоты электронного перехода в молекулах йода ( $I_2$ ) и собственной частоты криогенного оптического резонатора был установлен верхний предел  $|\beta_{I_2} - \beta_{res}| < 4 \cdot 10^{-2}$ .

Эксперименты с часами разной физической природы дают верхний предел на три порядка выше, чем при проверке принципа ЛПИ с помощью сравнения только атомных частот перехода различных веществ, что связано с большими собственными шумами экспериментальных установок, используемых в работах [4, 5]. Однако именно в экспериментах с часами разной физической природы было бы желательно получить максимально точную оценку величины  $\beta_A - \beta_B$ . Как будет показано ниже, в этом случае можно получить экспериментальное подтверждение релятивистского обобщения [6–9] классической теории упругости.

В данной работе рассматривается возможность проверки принципа ЛПИ с помощью неподвижной горизонтально расположенной двойной лазер-

ной системы [10], в один из резонаторов которой помещена ячейка с нелинейно поглощающим газом.

## 2. ЧАСТОТА ГЕНЕРАЦИИ ГАЗОВОГО ЛАЗЕРА С НЕЛИНЕЙНО ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ЯЧЕЙКОЙ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

В работе [10] на основе ковариантного обобщения теории Лэмба исследовалось влияние гравитационного поля Земли на частоту генерации газового лазера. Исследование было проведено в рамках полуклассического приближения, когда электромагнитное и гравитационное поля описывались классически, а активная среда — квантово-механически. Для получения уравнений самосогласованного поля использовался формализм теории Лэмба [11]. Как показано в работе [10], с одной стороны, процесс формирования макроскопического электромагнитного поля в генерирующей среде предопределяется релятивистскими по своей сути уравнениями Максвелла, куда гравитационное поле входит в виде метрических коэффициентов и их производных; с другой стороны, именно механическая подсистема — резонатор, — эволюционирующая в поле тяжести по иным законам, проводит селекцию гармоник.

В работе [10] были получены уравнения генерации одномодового линейного лазера, расположенного горизонтально относительно поверхности Земли, с учетом ньютоновского гравитационного потенциала  $\varphi$  в данной точке:

$$E \left( \frac{d\Phi}{dt} + \omega - \Omega_m \right) = -2\pi\omega \left( 1 - \frac{2\varphi}{c^2} \right) C_m, \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} + \frac{\Delta\Omega_R}{2} \left( 1 + \frac{\varphi}{c^2} \right) E = -2\pi\omega \left( 1 - \frac{2\varphi}{c^2} \right) S_m. \quad (3)$$

Здесь  $E$  и  $\Phi$  — медленно меняющиеся амплитуда и фаза генерируемой электромагнитной волны,  $c$  — скорость света,  $\omega$  — частота генерации,  $\Omega_m$  — собственная продольная частота  $m$ -й моды резонатора в гравитационном поле,

$$\Omega_m = \Omega_{m0} \left( 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right), \quad \Omega_{m0} = k_m c = \frac{\pi m c}{L},$$

$\Delta\Omega_R$  — ширина линии пустого резонатора, а  $L = L_0(1 + \xi\varphi/c^2)$  — его длина, причем феноменологический параметр  $\xi$  определяется решением эластодинамической задачи эволюции механической длины резонатора в поле тяжести,  $L_0$  — собственная длина в отсутствие гравитационного поля. Поляризационные коэффициенты  $C_m$  и  $S_m$  при наличии нелиней-

но поглощающего газа в резонаторе можно представить в виде [11]  $C_m = (\chi'_a + \chi'_b)E$  и  $S_m = (\chi''_a + \chi''_b)E$ , где действительная  $\chi'_a$  и мнимая  $\chi''_a$  части нелинейной восприимчивости активной среды, вычисленные по методике [10] с точностью до членов второго порядка по полю, имеют следующий вид (при малости однородной ширины линии усиления по сравнению с доплеровской шириной и небольших отстройках частоты генерации от центра линии усиления):

$$\chi'_a = d_a \frac{2(\omega - \omega_a)}{G_a} \left(1 + 2\xi \frac{\varphi}{c^2}\right) \times \left\{1 - \left[1 - (1 + \xi) \frac{\varphi}{c^2}\right] \frac{G_a}{2\Gamma_a^0} D(\Delta_a) \alpha_a E^2\right\}, \quad (4)$$

$$\chi''_a = -d_a \left(1 + \xi \frac{\varphi}{c^2}\right) \left\{1 - [1 + D(\Delta_a)] \alpha_a E^2\right\}, \quad (5)$$

$$d_a = \frac{D_{12a}^2 \sqrt{\pi} N_a}{\hbar k_{m0} u_a}, \quad \alpha_a = \frac{D_{12a}^2}{8\hbar^2 \gamma_{1a}^0 \gamma_{2a}^0},$$

$$D(\Delta_a) = \frac{1}{1 + \Delta_a^2}, \quad \Delta_a = \frac{\omega_a - \omega}{\Gamma_a},$$

$$G_a = \sqrt{\pi} k_{m0} u_a, \quad u_a = \sqrt{\frac{2k_B T_a}{m_a}},$$

$$\Gamma_a = \Gamma_a^0 \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right), \quad \omega_a = \omega_a^0 \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right), \quad k_{m0} = \frac{\pi m}{L_0}.$$

Здесь  $D_{12a}$  — матричный элемент, соответствующий для атомов активной среды электрическому дипольному переходу между рабочими уровнями 1 и 2, характеризующимися (в отсутствие гравитационного поля) соответственно константами затухания  $\gamma_{1a}^0$  и  $\gamma_{2a}^0$ , и однородной шириной линии  $\Gamma_a^0$ ;  $\omega_a^0$  — собственная (не зависящая от гравитации) частота атомного перехода [9],  $N_a$  — инверсия населенностей между уровнями, обусловленная накачкой ( $N_a > 0$ ),  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T_a$  — температура и  $m_a$  — масса атомов активной среды.

Выражения для действительной  $\chi'_b$  и мнимой  $\chi''_b$  частей нелинейной восприимчивости поглощающей среды получаются из выражений (4), (5) заменой индекса  $a$  на  $b$  (при этом  $N_b < 0$ ).

Для стационарного режима генерации из (3) выводим уравнение для определения интенсивности электрического поля. Используя его и вводя безразмерную величину  $r = -d_b/d_a > 0$ , получим из (2) следующее уравнение для нахождения частоты генерации:

$$\omega - \Omega_m = (\omega_a - \omega) \left\{p_a \left[1 + (1 + \xi) \frac{\varphi}{c^2}\right] - q_a D(\Delta_a)\right\} - (\omega_b - \omega) \left\{p_b \left[1 + (1 + \xi) \frac{\varphi}{c^2}\right] - q_b D(\Delta_b)\right\}, \quad (6)$$

$$p_a = \frac{\delta_a}{(1-r)(1-2\alpha E^2)},$$

$$q_a = \frac{\Delta \Omega_R \alpha_a E^2}{2\Gamma_a^0 (1-r)(1-2\alpha E^2)},$$

$$p_b = \frac{r\delta_b}{(1-r)(1-2\alpha E^2)},$$

$$q_b = \frac{r\Delta \Omega_R \alpha_b E^2}{2\Gamma_b^0 (1-r)(1-2\alpha E^2)},$$

$$\delta_{a,b} = \frac{\Delta \Omega_R}{G_{a,b}},$$

$$\alpha = \frac{\alpha_a [1 + D(\Delta_a)] - r\alpha_b [1 + D(\Delta_b)]}{2(1-r)}.$$

Для устойчивого стационарного режима генерации должно быть  $\alpha > 0$ . Поскольку атомы поглощающей ячейки обычно имеют узкую ширину линии поглощения ( $\Gamma_b^0 \ll \Gamma_a^0$ ), будем иметь  $q_b \gg q_a$ , т. е. основным нелинейным эффектом является нелинейное затягивание частоты генерации к центру линии поглощения (автостабилизация частоты) [12]. Действительно, полагая  $\Delta_{a,b} \ll 1$ , получим из уравнения (6) следующее выражение для частоты генерации:

$$\omega = \omega_b + \frac{\Omega_m - \omega_b}{1+S} + \frac{\omega_a - \omega_b}{1+S} \times \left\{ \left[1 + (1 + \xi) \frac{\varphi}{c^2}\right] p_a - q_a \right\}. \quad (7)$$

Величина

$$S = \left[1 + (1 + \xi) \frac{\varphi}{c^2}\right] (p_a - p_b) - (q_a - q_b)$$

называется фактором автостабилизации и для характерных параметров поглощающих ячеек ( $q_b \gg \gg p_{a,b}$ ) справедливо соотношение  $S \approx q_b \gg 1$ , поэтому частота генерации определяется частотой поглощения атомов ячейки  $\omega_b$ , находящихся в гравитационном поле,

$$\omega = \omega_b^0 \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right). \quad (8)$$

В случае лазера без поглощающей ячейки внутри резонатора частота генерации определяется (см. формулу (6) при  $r = 0$  и  $\delta_a \ll 1$ ) [10] собственной частотой резонатора  $\Omega_{m0}$ :

$$\omega = \Omega_{m0} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right). \quad (9)$$

### 3. КОВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Собственная частота резонатора

$$\Omega_{m0} = \frac{\pi mc}{L} = \Omega_{m0}^0 \left(1 - \xi \frac{\varphi}{c^2}\right) \quad (10)$$

зависит от геометрического размера резонатора  $L(t)$ , для определения которого в гравитационном поле с потенциалом  $\varphi(t)$  необходимо решение эластодинамической задачи, предсказывающей значение параметра  $\xi$ .

На классическом уровне в рамках ньютоновского предела (т. е. в трехмерном евклидовом пространстве при скорости света  $c \rightarrow \infty$ ) уравнение распространения упругих волн хорошо известно. В рамках этой теории смещение  $U_i$  элемента тела под действием объемной силы  $F_i$  описывается уравнением

$$\ddot{U}_i + F_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x^k}. \quad (11)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, греческие — 0, 1, 2, 3, точка означает дифференцирование по времени,  $\sigma_{ik}$  — тензор напряжений,  $\rho$  — материальная плотность среды. В интересующем нас случае гравитационного воздействия сила  $F_i$  может быть представлена в виде  $F_i = \nabla_i \varphi$ . Закон Гука, связывающий тензор напряжений  $\sigma_{ik}$  и тензор малых деформаций тела  $\varepsilon_{mn}$ , в классической теории имеет вид  $\sigma_{ik} = C_{ikmn} \varepsilon_{mn}$ , где  $C_{ikmn}$  — упругие константы тела, а тензор малых деформаций  $\varepsilon_{mn}$  вследствие условия совместности деформаций Сен-Венана связан с вектором малых смещений  $U_i$  следующим образом:  $\varepsilon_{ij} = (U_{i,j} + U_{j,i})/2$ . Здесь и далее  $U_{i,j} = \partial U_i / \partial x^j$ .

Классическая теория упругости имеет долгую историю, развитие же релятивистской теории упругости началось достаточно поздно. Первая такая попытка была предпринята в конце пятидесятых годов Вебером [8]. Выведенные им уравнения используются для описания отклика упругой болванки на воздействие слабой гравитационной волны [13, 14]. В своем современном виде релятивистская теория упругости была построена только к 1972 году Картером и Куинтана [15]. Эта теория и сейчас продолжает развиваться (см., например, [16, 17]). Существенный вклад в развитие этой области науки внес Можен. В частности, в статье [18] он предложил релятивистское уравнение распространения упругих волн.

Для расчета эволюции длины резонатора  $L(t)$  в переменном гравитационном поле (см. формулу (10)) воспользуемся уравнением распространения упругих волн [18]. Закон Гука и уравнение упругих колебаний в пространстве-времени  $V_4$  в рамках этого подхода соответственно имеют вид

$$\sigma_{ik} = C_{ikmn} \varepsilon_{mn}, \quad (12)$$

$$\ddot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{\rho} \sigma_{(i|l|l|k)} + c^2 R_{i0k0}, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Граничные условия записываются в стандартном виде:  $(\sigma_{ik} N^k)|_{\Sigma} = F_i$ , где  $F_i$  — внешняя поверхностная сила негравитационного происхождения,  $N^k$  — вектор нормали к поверхности тела  $S$ . Далее везде полагаем, что на тело не действуют силы негравитационного происхождения, т. е.  $F_i = 0$ .

Для однородной изотропной среды тензор упругости имеет вид

$$C_{iklm} = \lambda \delta_{ik} \delta_{mn} + \mu [\delta_{im} \delta_{kn} + \delta_{in} \delta_{km}], \quad (14)$$

где  $\lambda, \mu = \text{const}$  — коэффициенты Ламе, связанные с продольными и поперечными скоростями упругих волн в среде соотношениями

$$a_l = \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\rho}}, \quad a_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

В рамках этой теории, в отличие от классической, деформация среды состоит из «фоновой деформации»  $h_{ik}/2$  и «истинной деформации»  $U_{ik}$ :  $\varepsilon_{ik} = U_{ik} + h_{ik}/2$ , где  $U_{ij} = (U_{i,j} + U_{j,i})/2$ .

Рассмотрим метрику приливного воздействия, т. е. метрику, описывающую квазистатическое однородное и изотропное ньютоновское гравитационное поле:

$$dS^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (15)$$

Выбор ее в таком виде обусловлен следующими обстоятельствами. Эта метрика имеет вид метрики Шварцшильда, записанной в изотропных координатах с точностью до величин порядка  $M/r$ , где  $M$  — масса тяготеющего центра,  $r$  — расстояние до этого центра. Функция  $\varphi$  в этом случае имеет смысл потенциала гравитационного поля в точке наблюдения. При этом, поскольку Земля движется по эллиптической орбите вокруг Солнца, для земного наблюдателя  $r = r(t)$ , поэтому и  $\varphi = \varphi(t)$ , но в любой момент времени  $t$  метрика (15) — это метрика Шварцшильда, записанная с указанной выше точностью. Кроме того, вариации гравитационного потенциала

в данной точке Земли обусловлены еще и движением Луны вокруг Земли. Меняющийся гравитационный потенциал в точке наблюдения мы и моделируем функцией  $\varphi(t)$ . Значения ее в данной точке пространства в любой момент времени могут быть предъявлены с большой точностью. Отметим здесь, что по сравнению со скоростями процессов, происходящих в лазере, скорость изменения потенциала  $\varphi$  чрезвычайно мала. Поэтому для этих процессов потенциал  $\varphi$  с большой степенью точности можно считать постоянной величиной. Далее в этой функции будем выделять постоянную  $\varphi_0$  и переменную  $\delta\varphi(t)$  части:  $\varphi(t) = \varphi_0 + \delta\varphi(t)$ .

Уравнения эластодинамики (13) в исследуемом случае могут быть записаны в виде

$$\ddot{U}_{ik} = \frac{1}{\rho} [3\lambda\delta_{(i|l}\theta_{,l|k)} + 2\mu U_{(i|l,l|k)}], \quad (16)$$

где введено обозначение  $\Theta \equiv U_{k,k}$ . Уравнение (16) является дифференциальным следствием другого, более простого уравнения,

$$\ddot{U}_i - \frac{3\lambda}{\rho}\Theta_{,i} - \frac{\mu}{\rho}(U_{i,ll} + U_{l,il}) = 0, \quad (17)$$

полученного из (16) дифференцированием и симметризацией по пространственным переменным. Для приливного воздействия с метрикой (15) граничные условия имеют вид

$$3\lambda\Theta N^i + 2\mu U_{ik}N^k = -\lambda\frac{3\varphi(t)}{c^2}N^i - \mu\frac{2\varphi(t)}{c^2}N^i. \quad (18)$$

Таким образом, для того чтобы найти изменения длины стержня, вызванные вариациями гравитационного потенциала, необходимо решать однородные уравнения эластодинамики (17) с неоднородными граничными условиями (18).

При указанных выше условиях для гравитационного поля и исследуемой упругой среды в «истинных» деформациях среды, описываемых тензором  $U_{ik}$ , не может быть какого-либо выделенного направления. Поэтому тензор «истинных» деформаций  $U_{ik}$  примем в виде  $U_{ik} = \delta_{ik}\Theta$ .

Для одномерного стержня длиной  $L_0$ , расположенного вдоль оси  $x$ , уравнение колебаний и граничные условия имеют вид

$$\ddot{U}_1 = \frac{3}{\rho}\lambda U_{1,xx} + \frac{2}{\rho}\mu U_{1,xx}, \quad (19)$$

$$U_{1,x}(0, t) = U_{1,x}(L_0, t) = -\frac{\varphi(t)}{c^2}. \quad (20)$$

В этом случае временные вариации в изменении длины стержня,  $\Delta L = U^1(L_0, t) - U^1(0, t)$ , описываются формулой

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{\varphi L_0}{c^2} + \frac{8L_0}{\pi^2 c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\varphi}{(2m-1)^2} + \frac{\pi a}{2m-1} \times \right. \\ & \times \left[ \sin \frac{\pi(2m-1)at}{L_0} \int \varphi \cos \frac{\pi(2m-1)at}{L_0} dt + \right. \\ & \left. \left. + \cos \frac{\pi(2m-1)at}{L_0} \int \varphi \sin \frac{\pi(2m-1)at}{L_0} dt \right] \right\} \times \\ & \times \cos \frac{\pi(2m-1)x}{L_0}. \end{aligned}$$

В случае же, когда  $\delta\varphi(t) = A \cos(\Omega_g t)$ , имеем

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{\varphi(t)}{c^2} L_0 + \frac{8L_0}{\pi^2 c^2} \delta\varphi(t) \times \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Omega_g^2}{\tilde{\Omega}_{2m-1}^2 - \Omega_g^2} \frac{1}{(2m-1)^2}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{\Omega}_{2m-1}$  — собственные частоты колебаний стержня. Для основной гармоник ( $m = 1$ ) этого колебания

$$\Delta L = \frac{\varphi(t)}{c^2} L_0 + \frac{\delta\varphi(t)}{c^2} L_0 \left( 1 + \frac{8}{\pi^2} \frac{\Omega_g^2}{\tilde{\Omega}_1^2 - \Omega_g^2} \right). \quad (21)$$

Длина стержня  $L(t) = L_0 + \Delta L(t)$ , полученная в рамках предположений, о которых мы говорили выше, может быть вычислена по формуле

$$L(t) = L_0 \left[ 1 + \frac{\varphi(t)}{c^2} + \frac{8}{\pi^2} \frac{\delta\varphi(t)}{c^2} \frac{\Omega_g^2}{\tilde{\Omega}_1^2 - \Omega_g^2} \right]. \quad (22)$$

В экспериментах по проверке принципа ЛПИ имеет место нерезонансный случай ( $\tilde{\Omega}_1 \gg \Omega_g$ ), следовательно, в формуле (22) рядом с достаточно малой величиной  $\delta\varphi(t)/c^2$  стоит очень малый коэффициент порядка  $\Omega_g^2/\tilde{\Omega}_1^2$ . Поэтому в практически важном для эксперимента случае, пренебрегая крайне малыми величинами, формулу (22) можно переписать:

$$L(t) = L_0 \left[ 1 + \frac{\varphi(t)}{c^2} \right].$$

Подставляя эти значения в формулу  $\Omega_{m0} = \pi mc/L(t)$  и пренебрегая величинами, квадратичными по  $\varphi(t)/c^2$ , получим:

$$\Omega_{m0} \approx \Omega_{m0}^0 \left[ 1 - \frac{\varphi(t)}{c^2} \right].$$

Используя формулу (9), для лазера без поглощающей ячейки внутри резонатора определим, что частота генерации лазера описывается формулой

$$\omega = \Omega_{m0}^0 \left[ 1 + \frac{\varphi(t)}{c^2} \right],$$

т. е. значение феноменологического параметра  $\xi$  в формуле (10) равно  $\xi = 1$ .

#### 4. «НУЛЕВОЙ» ЭКСПЕРИМЕНТ ПО КРАСНОМУ СМЕЩЕНИЮ С ПОМОЩЬЮ ДВУХРЕЗОНАТОРНОЙ ЛАЗЕРНОЙ СИСТЕМЫ

Для экспериментального разрешения указанной альтернативы можно использовать неподвижную двойную лазерную систему [10], в один из резонаторов которой помещена ячейка с нелинейно поглощающим газом, фактически превращая его в стабилизированный по узкому нелинейному резонансу поглощения лазер. На рис. 1 представлена возможная оптическая схема лазерной системы (необходимая для настройки на пик поглощения ячейки электронная аппаратура для простоты не указана), основные оптические элементы которой (глухие зеркала 1, газоразрядные трубки 2, поглощающая ячейка 3 и частично пропускающие зеркала 4) жестко закреплены на едином основании 5. Зеркало 6 и полупрозрачная диэлектрическая пластинка 7 обеспечивают смешение оптических излучений, выходящих из двух резонаторов лазерной системы, а фотоприемное устройство 8 служит для регистрации биений разностной частоты. Для частот генерации  $\omega_{1,2}$  первого и второго резонаторов в линейном приближении по  $\varphi/c^2$  можно получить из (7) следующее выражение:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[ 1 + \left( 1 + \frac{1 - \xi}{S_{1,2}} \right) \frac{\varphi}{c^2} \right], \quad (23)$$

где  $\omega_0 \approx \omega_a^0 \approx \omega_b^0 \approx \Omega_{m0}^0$  — частота оптического излучения,  $S_1 = 1 + p_a - q_a \approx 1$  для резонатора без поглощающей ячейки,  $S_2 = 1 + (p_a - p_b) - (q_a - q_b) \gg 1$  в случае резонатора с поглощающей ячейкой.

Сущность «нулевого» эксперимента по красному смещению с помощью двойной лазерной системы заключается в следующем. Вследствие лунно-солнечных приливов происходит периодическая временная модуляция ньютоновского гравитационного потенциала  $\varphi(t) = \varphi_0 + \delta\varphi(t)$ , где  $\delta\varphi(t)$  имеет частоту  $\Omega_g \sim 10^{-5}$  Гц и амплитуду  $\delta\varphi_0 \approx 2.88 \cdot 10^4$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>. Поскольку время установления стационарной генерации в лазерной системе  $\Delta t \ll 2\pi/\Omega_g$  ( $\Delta t$  имеет

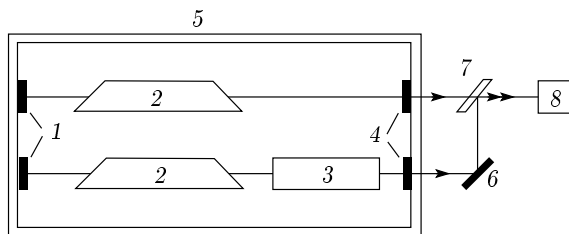


Рис. 1. Двойная лазерная система

порядок  $\Delta\Omega_R^{-1}$ , где  $\Delta\Omega_R \approx 10^6-10^7$  рад/с), можно использовать формулу (23) для вычисления мгновенной частоты генерации лазера. В соответствии с (23) в разностной частоте двух резонаторов появится в этом случае периодически изменяющаяся добавка

$$\Delta\omega(t) = \omega_0(1 - \xi) \left( \frac{S_2 - S_1}{S_1 S_2} \right) \frac{\delta\varphi(t)}{c^2} \approx \omega_0(1 - \xi) \frac{\delta\varphi(t)}{c^2}. \quad (24)$$

Величина этой добавки существенно зависит от значения феноменологического параметра  $\xi$ . Например, в случае  $\xi = 0$  амплитуда вариаций разностной частоты  $\Delta\omega(t)$  для оптического излучения ( $\omega_0 \approx 10^{15}$  рад/с) составит приблизительно 320 рад/с, что для газовых лазеров значительно больше ширины линии, обусловленной спонтанным излучением атомов активной среды. Технические флуктуации разностной частоты могут быть минимизированы путем моноблочного изготовления двойной лазерной системы и помещения ее в экранированную от внешних магнитных и электрических полей вакуумную камеру, в которой поддерживается постоянная температура. Кроме того, в силу периодичности детектируемого сигнала возможно его длительное накопление в течение нескольких месяцев с использованием эффективных методов выделения слабого низкочастотного сигнала из больших шумов [19]. Потенциальная чувствительность определения величины  $\Delta\beta = |\beta_A - \beta_B|$  (см. формулу (1)) в предлагаемом эксперименте ограничена естественными флуктуациями частоты генерации лазера, вызванными спонтанным излучением атомов активной среды и приводящими к конечной ширине линии лазерного излучения, которую можно оценить по известной формуле Шавлова – Таунса:

$$\Delta\nu_0 = \frac{4\hbar\nu_0}{P}(\Delta\Omega_R)^2,$$

где  $P$  — мощность лазерного излучения. Отсюда для  $P \approx 1$  мВт и  $\Delta\Omega_R \approx 10^6$  рад/с получается следующая оценка для минимально возможного измерения величины  $\Delta\beta$ :

$$\Delta\beta \geq \left( \frac{\delta\varphi_0}{c^2} \right)^{-1} \frac{4\hbar}{P}(\Delta\Omega_R)^2 \approx 10^{-6},$$

что на четыре порядка лучше точности, достигнутой в экспериментах [4, 5].

На рис. 2 представлена другая возможная схема детектора на основе двухрезонаторной лазерной системы, в которой используется единая активная среда для получения генерации в двух пространственно-неэквивалентных резонаторах. Первый

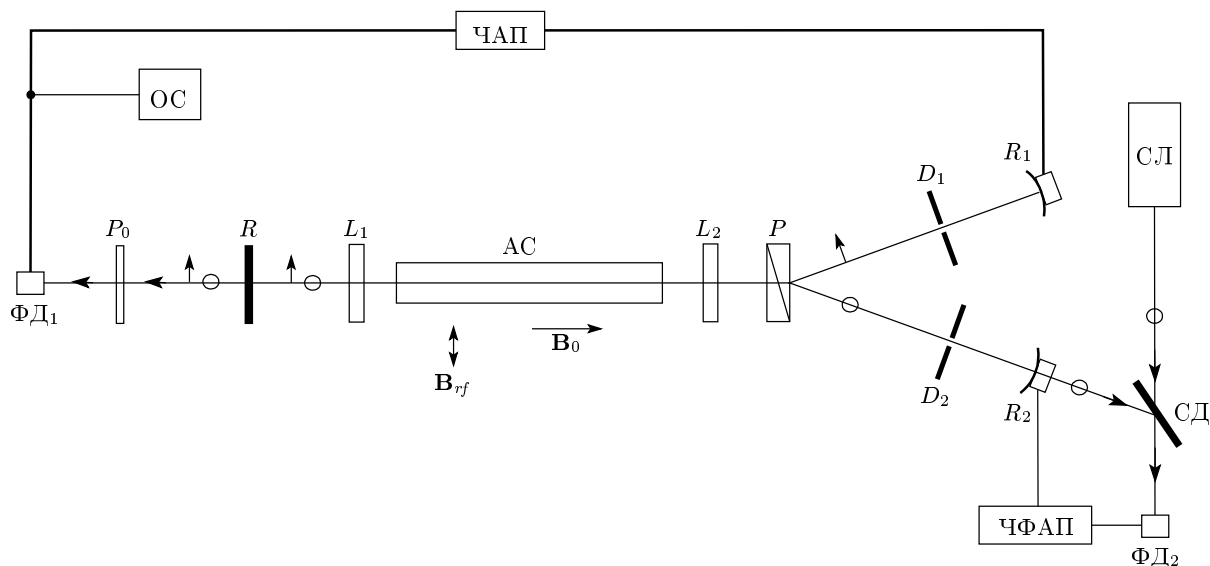


Рис. 2. Двухрезонаторная лазерная система

(сигнальный) резонатор заключен между зеркалами  $R$  и  $R_1$ , а второй (опорный) — между зеркалами  $R$  и  $R_2$ . Общими оптическими элементами для обоих резонаторов являются активная среда АС (газоразрядная He–Ne-трубка без окон Брюстера), четвертьволновые пластинки  $L_1$  и  $L_2$ , быстрые оси которых взаимно ортогональны и образуют углы  $45^\circ$  с плоскостью рисунка, и поляризационная призма Волластона  $P$ . Призма Волластона ориентирована таким образом, что необыкновенный луч с ТМ-поляризацией (вектор электрического поля лежит в плоскости рисунка) направляется на автоколлимационное зеркало  $R_1$ , а обыкновенный луч с ТЕ-поляризацией (вектор электрического поля перпендикулярен плоскости рисунка) попадает на автоколлимационное зеркало  $R_2$ .

Рассмотрим сначала работу двухрезонаторной лазерной системы в отсутствие четвертьволновых пластинок  $L_1$  и  $L_2$ . В этом случае в опорном и сигнальном резонаторах будут генерироваться линейно поляризованные оптические излучения соответственно с ТЕ- и ТМ-поляризациями. Диафрагмы  $D_1$  и  $D_2$  служат для выделения основных поперечных ТЕМ<sub>00</sub>-мод в каждом резонаторе. Кроме того, смещением одной из диафрагм перпендикулярно первоначальному положению оптической оси соответствующего резонатора можно существенно менять степень пространственного перекрытия в активной среде генерируемых мод с ТЕ- и ТМ-поляризациями, что приводит к резкому уменьшению конкуренции

и связи между ними [20]. Излучение из опорного резонатора, выходящее через частично пропускающее выходное зеркало  $R_2$ , смешивается с помощью светоделительной пластинки СД (см. рис. 2) с излучением стабилизированного по поглощающей ячейке лазера СЛ. Сигнал биений, регистрируемый фотодетектором ФД<sub>2</sub>, поступает в электронный блок частотно-фазовой автоподстройки ЧФАП, который с помощью пьезоэлемента, закрепленного на зеркале  $R_2$ , осуществляет привязку частоты генерации опорного резонатора к частоте генерации стабилизированного лазера СЛ. Излучения из сигнального и опорного резонаторов, выходящие через общее выходное зеркало  $R$ , после прохождения через линейный поляризатор  $P_0$ , у которого ось пропускания образует угол  $45^\circ$  с плоскостью рис. 2, образуют интерференционное поле, которое регистрируется фотодетектором ФД<sub>1</sub>. Сигнал с фотодетектора ФД<sub>1</sub> поступает в блок обработки сигналов ОС и в электронный блок частотной автоподстройки ЧАП, который управляет работой пьезоэлемента, закрепленного на зеркале  $R_1$ . ЧАП позволяет установить заданную начальную разность частот сигнального и опорного резонаторов или обеспечить работу внутри зоны синхронизации (захвата частот), когда информация о  $\Delta\omega(t)$  переносится в вариацию разности фаз сигнального и опорного резонаторов [20]. ЧАП может также использоваться для частичной компенсации шума, вызванного техническими флуктуациями разностной частоты двух генерируемых мод с

ТЕ- и ТМ-поляризациями.

Минимальная ширина линии разностной частоты двух лазерных мод определяется уровнем квантовых шумов, обусловленных спонтанным излучением атомов активной среды. В работе [21] была теоретически предсказана возможность существенного сужения (практически до нуля) ширины линии разностной частоты двух мод, имеющих разные верхние возбужденные атомные уровни и общий нижний уровень, за счет создания активной (принудительной) корреляции населенностей верхних уровней. В работах [23, 24] эта идея была реализована экспериментально для подавления квантового фазового шума в разностной частоте зеемановских  $\sigma^+$ - и  $\sigma^-$ -компонент оптического излучения, полученных в линейном двухзеркальном одномодовом He-Ne-лазере за счет расщепления собственной моды резонатора при наложении постоянного магнитного поля  $B_0$  вдоль активной среды. Эффект корреляции спонтанного излучения (отсутствие диффузии фазы в разностной частоте) достигался при включении поперечного радиочастотного магнитного поля  $B_{rf}$  определенной амплитуды, которое связывало верхние расщепленные лазерные уровни за счет магнитного дипольного перехода между ними. Подобного эффекта в схеме на рис. 2 можно достигнуть благодаря использованию четвертьволновых пластинок  $L_1$  и  $L_2$  при наложении на активную среду АС постоянного продольного ( $B_0$ ) и переменного поперечного ( $B_{rf}$ ) магнитных полей. Используя формализм матриц Джонса для исследования состояния поляризации собственных мод в двухрезонаторной лазерной системе, нетрудно показать, что в этом случае слева от пластинки  $L_1$  и справа от пластинки  $L_2$  в опорном и сигнальном резонаторах по-прежнему будут генерироваться оптические излучения с ТЕ- и ТМ-поляризациями, которым в пространстве между пластинками будут соответствовать право- и левоциркулярно поляризованные волны. В этом варианте работы детектора время, необходимое для выделения полезного сигнала, может быть существенно сокращено за счет отсутствия в разностной частоте дрейфа фазы, обусловленного спонтанным излучением атомов активной среды.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнивая формулы (1) и (11), легко увидеть, что величина  $\Delta\beta = |\beta_A - \beta_B|$ , характеризующая степень отклонения от принципа ЛПИ в «нулевом» эксперименте по красному смещению, ограничивает

возможные значения феноменологического параметра  $\xi$  в пределах  $|1 - \xi| \leq \Delta\beta$ . Поскольку из экспериментов [4, 5] следует, что  $\Delta\beta$  не превышает значений порядка  $10^{-2}$ , параметр  $\xi$  должен быть близок к единице. В случае проведения эксперимента по предложенным в данной работе схемам возможно получение более точных значений величины  $\Delta\beta$  (до уровней  $10^{-6}$  и ниже), что позволит проверить принцип ЛПИ для часов различной физической природы намного более точно, чем достигнуто в работах [4, 5]. При этом одновременно можно получить экспериментальное подтверждение правильности рассмотренного релятивистского обобщения классической теории уругости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
2. R. F. C. Vessot, M. W. Levine, E. M. Mattison, E. L. Blomberg, T. E. Hoffman, G. U. Nystrom, B. F. Farrell, R. Decher, P. B. Eby, C. R. Baugher, J. W. Watts, D. L. Teuber, and F. O. Wills, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2081 (1980).
3. A. Bauch and S. Weyers, *Phys. Rev. D* **65**, 081101 (2002).
4. J. P. Turneure, C. M. Will, B. F. Farrell, E. M. Mattison, and R. F. C. Vessot, *Phys. Rev. D* **27**, 1705 (1983).
5. C. Braxmaier, H. Müller, O. Pradl, J. Mlynek, A. Peters, and S. Shiller, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 010401 (2002).
6. G. A. Maugin, *J. Math. Phys.* **19**, 1198 (1978).
7. А. Б. Балакин, Г. В. Кисунько, З. Г. Мурзаханов, *ДАН СССР* **325**, 493 (1992).
8. J. Weber, *Phys. Rev.* **117**, 306 (1960).
9. Дж. Вебер, *Общая теория относительности и гравитационные волны*, Изд-во иностр. лит., Москва (1962).
10. А. Б. Балакин, З. Г. Мурзаханов, А. Ф. Скочилов, *Опт. и спектр.* **76**, 671 (1994).
11. W. E. Lamb, *Phys. Rev.* **134**, 1429 (1964).
12. В. С. Летохов, В. П. Чеботаев, *Нелинейная лазерная спектроскопия сверхвысокого разрешения*, Наука, Москва (1990).
13. Э. Амальди, Г. Пицелла, в кн. *Астрофизика, кванты и теория относительности*, под ред. Ф. И. Федорова, Мир, Москва (1982), с. 241.



14. M. Karim and K. Green, E-print archives, gr-qc/0209015.
15. B. Carter and H. Quintana, Proc. Roy. Soc. Lond. A **331**, 57 (1972).
16. J. Kijowski and G. Magli, Class. Quant. Grav. **15**, 3891 (1998).
17. M. Karlovini and L. Samuelsson, Class. Quant. Grav. **20**, 3613 (2003).
18. G. A. Maugin, Gen. Rel. Grav. **4**, 241 (1973).
19. A. B. Balakin, Z. G. Murzakhanov, and A. F. Skochilov, Gravitation and Cosmology **5**, 351 (1999).
20. А. Б. Балакин, Г. В. Кисунько, З. Г. Мурзаханов, А. Ф. Скочилов, ДАН **361**, 477 (1998).
21. M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **55**, 2802 (1985).
22. I. Steiner and P. E. Toschek, Phys. Rev. Lett. **74**, 4639 (1995).
23. K. Abich, L. Schanz, Ch. Balzer, and P. E. Toschek, Laser Phys. **11**, 102 (2001).