

САМОФИКУСИРОВКА УДАРНЫХ ВОЛН ОГИБАЮЩИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

*Н. А. Жарова**, *А. Г. Литвак*, *В. А. Миронов*

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 8 июня 2005 г.

Аналитически и численно рассмотрены особенности самовоздействия трехмерных волновых пакетов при конкуренции дифракции, кубической нелинейности и нелинейности, связанной с зависимостью групповой скорости от амплитуды волнового поля (нелинейной дисперсии). Проведено качественное исследование эволюции волнового поля методом моментов и определено достаточное условие самосжатия волнового пакета. Численно изучена динамика самовоздействия резонансного излучения в среде с электромагнитной индуцированной прозрачностью, для которой характерно отсутствие кубической нелинейности. Показано, что наряду с самосжатием волнового пакета происходит укрупнение его продольного профиля и образование ударной волны огибающей. Также продемонстрирована возможность формирования ударных волн огибающих при самофокусировке волновых пакетов в среде с нормальной дисперсией групповой скорости.

PACS: 42.65.-k, 42.50.-p, 42.65.Jx

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамику самовоздействия квазимонохроматического волнового пакета в слабодиспергирующей нелинейной среде обычно связывают с кубической нелинейностью. Однако по мере уменьшения длительности импульсов начинают проявляться эффекты дисперсии высокого порядка и нелинейной дисперсии среды, т. е. зависимости групповой скорости волнового пакета от амплитуды. Характерные для этого эффекта структурные изменения волнового пакета в одномерных системах (например, при распространении лазерного импульса в оптическом волокне) исследовались на основе нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), учитывающего дополнительно нелинейную дисперсию [1, 2]. В одномерном случае этот эффект накапливается на трассе и в конце концов приводит к укрупнению переднего (или заднего) фронта импульса и (в среде без дисперсии) к образованию ударных волн огибающих [1].

Для трехмерного случая ситуация является не столь определенной, поскольку интенсивные про-

странственно-ограниченные импульсы в нелинейной среде (с соответствующим знаком нелинейности) испытывают самофокусировку, которая тем самым ограничивает трассу распространения и возможность образования ударных волн. С другой стороны, в ходе самофокусировки сильно возрастает амплитуда поля, и это стимулирует проявление эффекта нелинейной дисперсии. В этой связи возникает вопрос, успеет ли фронт короткого импульса «прокиннуться» раньше, чем достигается момент самофокусировочной особенности, или наоборот, или же оба явления развиваются с одинаковым темпом, и особенность носит гибридный характер? Для решения этой проблемы в данной работе проводится исследование влияния нелинейной дисперсии на динамику интенсивных пространственно ограниченных импульсов, испытывающих самофокусировку.

Соответствующее обобщение НУШ на случай самовоздействия трехмерных волновых пакетов [1, 3] имеет вид

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial z} + i\gamma|\psi|^2\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \Delta_{\perp}\psi + \alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + \beta|\psi|^2\psi = 0. \quad (1)$$

Здесь ψ — комплексная нормированная огибающая

*E-mail: zhani@appl.sci-nnov.ru

электрического поля волнового пакета,

$$E = E_{NL}\psi(z, x, y, \tau) \exp(i\omega_0 t - ik_0 z),$$

распространяющегося вдоль оси z с групповой скоростью $v_{gr} = (\partial k / \partial \omega)^{-1}$; α — комплексный параметр, $\text{Re } \alpha = \text{sign}(\partial v_{gr} / \partial \omega)$ определяется знаком дисперсии групповой скорости; E_{NL} — характерное нелинейное поле; $\tau = z - v_{gr} t$ — безразмерная продольная координата волнового пакета в системе координат, связанной с групповой скоростью; z и x, y — соответственно, безразмерные эволюционная и поперечные координаты; $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial^2 x + \partial^2 / \partial^2 y$. В общем случае отношение коэффициента γ перед нелинейным членом, связанным с зависимостью групповой скорости от амплитуды (нелинейной дисперсией), к коэффициенту β перед кубической нелинейностью пропорционально отношению периода колебаний к длительности импульса τ_p ,

$$\frac{\gamma}{\beta} \approx \frac{2\pi}{\omega_0 \tau_p},$$

т. е. второе слагаемое в уравнении (1), описывающее нелинейную дисперсию, мало по сравнению с кубической нелинейностью.

Мы считаем дисперсию достаточно слабой, иначе трудно ожидать образования ударных волн. Соответственно, в уравнении (1) учитывается лишь основная — квадратичная — линейная дисперсия. Ниже будет показано, что для сильнонелинейных, самофокусирующихся решений уравнения (1) по мере приближения к особенности влияние нелинейной дисперсии (относительно линейной квадратичной) на динамику поля заметно растет. Учет влияния линейной дисперсии третьего и более высоких порядков, которое также усиливается, будет существенным лишь вблизи от точки «градиентной катастрофы», где нарушаются условия применимости уравнения для огибающей.

В оптике слабодиспергирующая среда не является редким и необычным объектом, поскольку дисперсией среды можно достаточно легко управлять. Например, в композитной среде, один из компонентов которой характеризуется нормальной дисперсией групповой скорости, а другой — аномальной, при соответствующем их процентном соотношении можно сделать квадратичную дисперсию сколь угодно малой. Вырожденный случай резонансного взаимодействия лазерного излучения с веществом в условиях электромагнитной индуцированной прозрачности [4, 5] характеризуется отсутствием квадратичной дисперсии ($\text{Re } \alpha = 0$) и обращением в нуль коэффициента перед кубической нелинейностью ($\beta = 0$),

так что в окне прозрачности динамика сигнальной волны определяется конкуренцией дифракции и нелинейной дисперсии, а на краях окна прозрачности — еще и поглощением, растущим при отстройке от центра линии. Для таких сред влияние зависимости групповой скорости волнового пакета от амплитуды является особенно существенным, и здесь можно ожидать образования ударных волн огибающих.

Уравнение (1) описывает нелинейные волны различной природы в условиях конкуренции процессов дисперсии (линейной и нелинейной), дифракции и нелинейной рефракции волнового пакета. Оно тесно связано с уравнениями Кадомцева–Петвиашвили и Хохлова–Заболотской, которые широко используются для исследования самовоздействия электромагнитного излучения с шириной спектра порядка несущей частоты [6], сдвиговых акустических волновых полей [7], упругих волн конечной амплитуды в магнетиках [8].

Отметим ряд формальных особенностей уравнения (1) в консервативном случае ($\text{Im } \alpha = 0$). Масштабным преобразованием (координат, длительностей, полей) нетрудно свести (1) к виду

$$-i \frac{\partial \psi}{\partial z} + i |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \Delta_{\perp} \psi + |\psi|^2 \psi = 0 \quad (2)$$

с коэффициентами, равными единице ($\delta = +1$ и $\delta = -1$ соответственно для сред с аномальной и нормальной дисперсией групповой скорости).

Учет (слабой) нелинейной дисперсии тем не менее может оказаться существенным для динамики системы. В одномерном ($\Delta_{\perp} = 0$) случае уравнение (2) сводится с помощью формальных преобразований к уравнению

$$-i \frac{\partial u}{\partial z} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - i \frac{\partial (|u|^2 u)}{\partial \eta} = 0, \quad (3)$$

которое, как и НУШ, интегрируется методом обратной задачи рассеяния [9–11], но получающиеся здесь решения отличаются от солитонов стандартного НУШ. Нетривиальный предельный переход от локализованных решений уравнения (3) к солитонам НУШ при стремящемся к нулю коэффициенте нелинейной дисперсии специально рассмотрен в работе [10].

Исследование структурных особенностей решений уравнения (1) в трехмерном случае является предметом данной статьи.

Возможным препятствием для проявления эффектов нелинейной дисперсии является самофокусировка волнового пучка, которая обычно реализуется на более короткой трассе распространения. В

среде без линейной дисперсии групповой скорости ($\alpha = 0$) коллапс волновых пучков с амплитудой ψ_0 происходит на трассах $z_f \sim 1/\psi_0^2$, а «опрокидывание» импульса длительностью τ_p следует ожидать на расстояниях $z_0 \sim \tau_p/\psi_0^2$. Эти грубые оценки показывают, что влияние нелинейной дисперсии может быть существенным лишь для очень коротких импульсов

$$\tau_p < \tau_{min} \sim 1, \quad (4)$$

что выводит нас за границы применимости уравнения (1). Однако ниже будет показано, что поведение существенно более длинных неоднородных волновых пакетов также сильно зависит от нелинейной дисперсии.

В данной работе анализируется общая динамика трехмерных волновых пакетов и возможность формирования ударных волн огибающих. В разд. 2 рассмотрены особенности самовоздействия, связанные с зависимостью групповой скорости волнового пакета от амплитуды. В разд. 3 и 4 численно исследована динамика волновых полей соответственно для вырожденного случая резонансной среды с электромагнитно индуцированной прозрачностью и в нерезонансных средах, которые описываются уравнением общего вида.

2. ДИНАМИКА САМОВОЗДЕЙСТВИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Проведем анализ качественных особенностей эволюции трехмерных волновых пакетов при учете нелинейной дисперсии в консервативном случае ($\text{Im} \alpha = 0$). Для этой цели воспользуемся уравнением (2). Оно имеет ряд интегралов движения:

$$\int |\psi|^2 d\mathbf{r}_\perp d\tau = I, \quad (5)$$

$$\int (\psi^* \psi_\tau - \psi \psi_\tau^*) d\mathbf{r}_\perp d\tau = iP, \quad (6)$$

$$\int \left(|\nabla_\perp \psi|^2 - \frac{i}{4} |\psi|^2 (\psi^* \psi_\tau - \psi \psi_\tau^*) + \delta |\psi_\tau|^2 - \frac{|\psi|^4}{2} \right) \times d\mathbf{r}_\perp d\tau = H. \quad (7)$$

Законы сохранения «числа квантов» I (полной энергии трехмерного пакета) и «импульса» P нетрудно

получить непосредственно из уравнения (2). Для нахождения интеграла «энергии» (7) используем соотношение, связывающее функцию Лагранжа

$$L = \frac{i}{2} (\psi^* \psi_z - \psi \psi_z^*) + |\nabla_\perp \psi|^2 - \frac{i}{4} (\psi^* \psi_\tau - \psi \psi_\tau^*) |\psi|^2 + \delta |\psi_\tau|^2 - \frac{|\psi|^4}{2} \quad (8)$$

с плотностью h ($H = \int h d\mathbf{r} d\tau$) гамильтониана

$$h = L - \psi_z^* \frac{\partial L}{\partial \psi_z^*} - \psi_z \frac{\partial L}{\partial \psi_z}.$$

Прежде всего, заметим, что интегральное соотношение (6) может быть выражено через частотный спектр поля,

$$\psi(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(\tau) e^{i\tau\omega} d\tau,$$

следующим образом:

$$P = 2 \int \omega |\psi(\omega)|^2 d\omega d\mathbf{r}_\perp. \quad (9)$$

Сохранение эффективного импульса означает, что средняя частота волнового пакета,

$$\bar{\omega} = \int \omega |\psi(\omega)|^2 d\omega d\mathbf{r}_\perp / \int |\psi(\omega)|^2 d\omega d\mathbf{r}_\perp, \quad (10)$$

также сохраняется.

Использование законов сохранения в дивергентном виде дает возможность получить уравнения для изменения эффективных параметров (моментов) распределения поля. Центр масс аксиально-симметричного распределения

$$\bar{\tau} = \int \tau |\psi|^2 d\mathbf{r}_\perp d\tau / \int |\psi|^2 d\mathbf{r}_\perp d\tau$$

по мере самофокусировки смещается к переднему фронту импульса со скоростью

$$\frac{d\bar{\tau}}{dz} = -\frac{1}{I} \left(\frac{1}{2} \int |\psi|^4 d\tau d\mathbf{r}_\perp + \delta P \right). \quad (11)$$

Аналогичным образом для изменения квадрата эффективной ширины a_\perp волнового пакета,

$$a_\perp^2 = \frac{1}{I} \int (x^2 + y^2) |\psi|^2 d\mathbf{r}_\perp d\tau,$$

находим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_\perp^2}{dz^2} &= \\ &= 8 \int \left(|\nabla_\perp \psi|^2 - \frac{i}{4} |\psi|^2 (\psi^* \psi_\tau - \psi \psi_\tau^*) - \frac{|\psi|^4}{2} \right) d\mathbf{r}_\perp d\tau = \\ &= 8 \left(H - \int \delta |\psi_\tau|^2 d\mathbf{r}_\perp d\tau \right), \quad (12) \end{aligned}$$

которое аналогично (а в среде без дисперсии, т. е. при $\delta = 0$, совпадает) уравнению для ширины волнового пучка в теории самофокусировки непрерывного излучения [13]. Отсюда видно, что в среде без дисперсии эффективный поперечный размер распределений с отрицательным гамильтонианом H уменьшается до нуля. Условие $H < 0$ оказывается достаточным и в среде с аномальной дисперсией ($\delta > 0$). Столь определенного вывода не удается сделать для среды с нормальной дисперсией. Однако соотношение (12) позволяет выделить широкий класс начальных распределений поля, для которых правая часть уравнения (12) отрицательна, и, следовательно, такие пучки будут испытывать самосжатие на начальном этапе эволюции системы. Следует отметить, что нелинейная дисперсия среды дает другую, отличную от кубичной нелинейности в НУШ, возможность реализации отрицательного гамильтониана (7). Она связана с рассмотрением начальных распределений

$$\psi = G(z = 0, r_{\perp})e^{i\Omega\tau}, \quad (13)$$

отстроенных на Ω от центральной частоты волнового пакета. Из выражений (7), (12) видно, что самофокусировка возможна при отрицательном сдвиге частоты ($\Omega < 0$) даже в отсутствие кубической нелинейности (без последнего слагаемого в (7)).

В случае трехмерных распределений поля с отрицательным гамильтонианом H имеет место коллапс, реализующийся на расстояниях, много меньших длины трассы «опрокидывания» одномерной задачи. Однако оказывается, что неограниченное возрастание амплитуды вблизи фокуса приводит к существенно более раннему проявлению укручения продольного профиля огибающей.

Уравнение (2) без учета дисперсии инвариантно относительно обобщенного «линзового» преобразования [13]

$$\begin{aligned} \psi &= \zeta G(\zeta, \tau, \eta) \exp\left(i\frac{r^2\zeta}{4}\right), \\ \zeta &= \frac{1}{z_0 - z}, \quad \eta = r\zeta, \end{aligned} \quad (14)$$

так что для автомодельной функции $G(\zeta, \tau, \eta)$ имеем в новых автомодельных переменных точно такое же уравнение, как и (2):

$$-i\frac{\partial G}{\partial \zeta} + i|G|^2\frac{\partial G}{\partial \tau} + \Delta_{\eta}G + |G|^2G = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь самофокусирующееся решение исходного уравнения (2) с особенностью в точке $z = z_0$. Преобразование (14) переводит координату этой особенности на бесконечность (при $z \rightarrow z_0$

$\zeta \rightarrow \infty$). Из уравнения (15) очевидно, что опрокидывание, которое происходит на конечном расстоянии по ζ , будет иметь место раньше, чем волновой коллапс.

Для того чтобы сделать соответствующие оценки, воспользуемся следующим из (15) уравнением непрерывности

$$-\frac{\partial |G|^2}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\frac{\partial |G|^4}{\partial \tau} + i \operatorname{div}_{\eta}(G^*\nabla G - G\nabla G^*) = 0, \quad (16)$$

интегрируя которое по поперечной координате η , приходим к уравнению типа простой волны для погонной мощности излучения:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \int |G|^2 \eta d\eta - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int |G|^4 \eta d\eta = 0. \quad (17)$$

Отсюда видно, что опрокидывание будет происходить для сколь угодно длинного импульса на конечной трассе в точке с координатой

$$z^* \approx z_0 - z_0^2 \psi_0^2 / \tau_p, \quad (18)$$

т. е. раньше, чем фокусировка. С увеличением длительности импульса координата опрокидывания смещается все ближе к z_0 и достигаемая при этом амплитуда ψ^* поля растет по отношению к начальной амплитуде ψ_0 импульса как

$$|\psi^* / \psi_0| \approx z_0 / (z_0 - z^*). \quad (19)$$

Однако при достаточно больших амплитудах поля начинают сказываться другие, неучтенные в нашей постановке эффекты: насыщение нелинейности, многофотонная ионизация и т. д. Таким образом, для реальной системы, где характерные поля ограничены величиной ψ_{str} , мы получаем оценку максимальной длительности импульса, при которой может возникнуть опрокидывание:

$$\tau_p < \psi_{str} \psi_0 z_0. \quad (20)$$

Кроме того, существует ограничение на длительность импульса, связанное с возможностью нарушения условий применимости исходного уравнения, если еще до момента опрокидывания уширение временного спектра коллапсирующего решения превышает несущую частоту ω_0 волнового пакета, т. е. появляется характерный временной масштаб, меньший периода поля. Действительно, в результате неоднородной по τ самофокусировки происходит уменьшение эффективной длительности импульса;

оценка длительности τ^* импульса в точке опрокидывания¹⁾ дает

$$2\pi/\omega_0 < \tau^* \approx \tau_p \sqrt{1 - z^*/z_0}. \quad (21)$$

В численном расчете мы использовали неравенство (21) в качестве критерия определения условий, при которых параметры системы выходили за границы применимости исходного уравнения, и нарушение условия (21) служило сигналом для остановки вычислений.

Соотношение (21) позволяет также оценить роль линейной дисперсии второго и более высоких порядков в эволюции коллапсирующего решения. Относительно медленное уменьшение длительности импульса говорит о том, что по мере приближения к особенности влияние линейной дисперсии (порядка $(1 - z/z_0)^{-2}$) уменьшается по сравнению с остальными членами, которые растут быстрее (кубический член как $(1 - z/z_0)^{-3}$, а член с нелинейной дисперсией как $(1 - z/z_0)^{-7/2}$).

На основе проведенного выше анализа особенностей динамики самовоздействия, связанных с нелинейной дисперсией, мы рассмотрим в дальнейшем частные случаи. В следующем разделе проведем численное исследование самофокусировки в вырожденном случае резонансной среды ($\beta = 0$, $\text{Re } \alpha = 0$) [5], и затем в разд. 4 рассмотрим этот процесс при дополнительном учете линейной дисперсии групповой скорости ($\text{Re } \alpha \neq 0$) и кубической нелинейности ($\beta \neq 0$).

3. СТРУКТУРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Для того чтобы исследовать именно роль нелинейной дисперсии в процессе самовоздействия неоднородных волновых пакетов, рассмотрим вырожденный случай распространения бихроматического резонансного излучения в среде Λ -атомов в условиях электромагнитной индуцированной прозрачности, которая характеризуется чрезвычайно низкими порогами проявления нелинейных эффектов и слабым поглощением в окне прозрачности [4]. Самовоздействие пробной волны в поле однородной накачки определяется эффектом нелинейной дисперсии в «чистом виде» и описывается уравнением [5]

$$-i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Delta_{\perp} \psi + i |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + iq \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = 0, \quad (22)$$

¹⁾ Для оценки можно считать, что $|\psi/\psi_0| \sim (1 - z/z_0 + \alpha \tau^2/\tau_p^2)^{-1}$ при $\alpha \sim 1$.

в котором последнее слагаемое характеризует затухание в окне прозрачности ($q = \text{Im } \alpha$ — коэффициент «электромагнитной вязкости»). В одномерном случае ($\Delta_{\perp} = 0$) уравнение (22) сводится к модифицированному уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \psi^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + q \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}. \quad (23)$$

В отличие от обыкновенного уравнения Бюргерса аналитическое решение здесь, видимо, отсутствует. Однако эволюция волнового пакета, очевидно, протекает аналогично. Как уже говорилось выше, укрупнение переднего фронта волнового пакета, возникающее вследствие зависимости групповой скорости от амплитуды поля (нелинейной дисперсии), стабилизируется «электромагнитной вязкостью» среды (второе слагаемое в (23)), и в результате конкуренции этих процессов на расстоянии

$$z_0 \approx \tau_p / \psi_0^2 \quad (24)$$

формируется профиль типа ударной волны с шириной фронта q/ψ_0^2 . Здесь ψ_0 — максимальное значение амплитуды поля в импульсе длительностью τ_p .

Динамика пространственно-локализованных лазерных импульсов в резонансной среде оказывается более сложной. При подходящей отстройке частоты в полосе прозрачности они могут испытывать поперечное самофокусировочное сжатие, и ограничение самофокусировки возможно лишь за счет включения диссипации (электромагнитной вязкости), связанной с уширением временного спектра и выходом его за границы полосы прозрачности в процессе формирования ударной волны огибающей.

Проведенный в предыдущем разделе качественный анализ подтверждается численным моделированием уравнения (1). Численная схема реализована на основе метода расщепления операторов. Вклад от поперечного лапласиана учитывался с помощью прогонки на неравномерной сетке по радиусу. Вязкость учитывалась с помощью умножения в ω -пространстве фурье-образа функции ψ на ω^2 , нелинейная дисперсия — с помощью переноса «по характеристикам» в (z, τ) -пространстве.

В качестве начальных условий использовались аксиально-симметричные распределения поля

$$\begin{aligned} \psi(r, \tau, z = 0) &= \\ &= A_0 \exp \left[-\tau^2 / 2a_{\tau}^2 - r^2 / 2a_r^2 + i\phi(\tau) \right], \quad (25) \end{aligned}$$

где A_0 — амплитуда поля, a_{τ} , a_r — характерные масштабы распределения по соответствующим координатам и $\phi(\tau)$ фаза поля ($d\phi/d\tau = \Omega(\tau)$ — отстройка

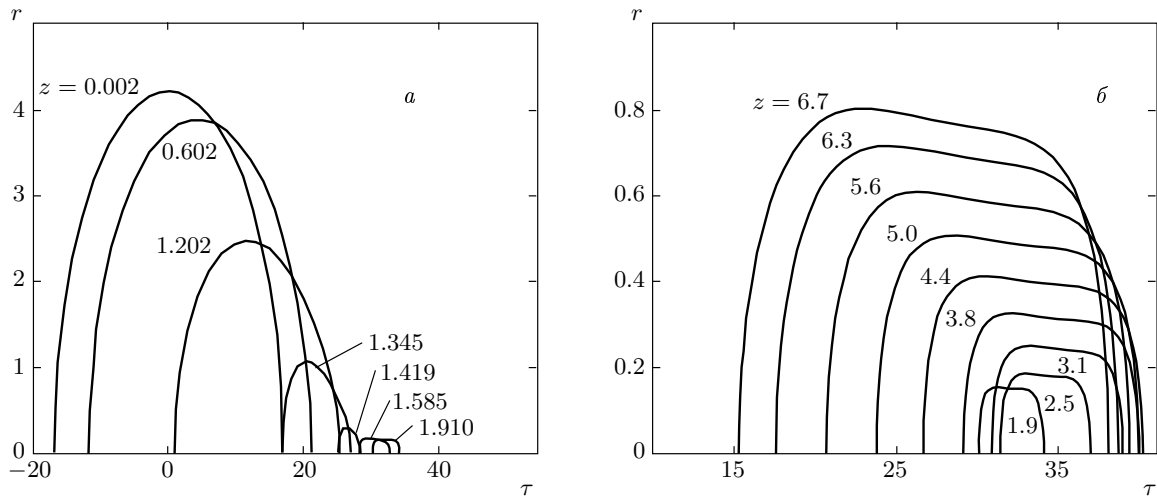


Рис. 1. Изолинии модуля поля: *a* — на стадии сжатия; *б* — в процессе расширения на уровне 0.7 от максимального значения в последовательные «моменты» z для начального распределения с параметрами $A_0 = 4, a_r = 5, a_\tau = 20, \Omega = -0.1, q = 5$

частоты волнового пакета от центральной). В дальнейшем будут рассматриваться начальные условия двух типов: волновые пакеты гауссовой формы со сдвигом частоты ($\phi = -|\Omega|\tau$) или с частотным чирпом ($\phi \sim \tau^2$).

Условие самофокусировки определяется отрицательностью гамильтониана, что для гауссовых начальных распределений с фазой $\phi = -|\Omega|\tau$ требует достаточно большого отрицательного сдвига частоты в начальном распределении:

$$|\Omega| > 4\sqrt{2}/A_0^2 a_r^2 a_\tau. \quad (26)$$

Для чирпированных волновых пакетов гамильтониан положителен, однако это не запрещает образования коллапса, поскольку условие $H < 0$ является достаточным, но не необходимым.

Для характеристики эффективной кубической нелинейности среды рассмотрим динамику средней частоты излучения в приосевой области,

$$\begin{aligned} \delta\Omega(r = 0, z) = \\ = \int \omega |\psi_\omega(\omega, r = 0, z)|^2 d\omega / \int |\psi_\omega(\omega, r = 0, z)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

В отличие от сдвига частоты (10), усредненного по волновому пакету, эта величина не является интегралом и в консервативном случае.

Рассматриваемая система является диссипативной, и коэффициент вязкости q определяет величину мелких пространственных масштабов, возникающих в процессе образования особенности. Устраняя

градиентную катастрофу при образовании ударной волны и одновременно ограничивая процесс самосжатия, эффективная вязкость существенным образом влияет на динамику системы.

В приведенных ниже примерах мы вводили различные значения коэффициента вязкости, так как большие значения q позволяли рассчитывать структуру ударного фронта, а в вариантах с малыми q достигалась более сильная фокусировка распределения поля.

Рисунок 1 иллюстрирует динамику пространственно-локализованного гауссова импульса (25) с параметрами $q = 5, A_0 = 4, a_r = 5, a_\tau = 20$ и отрицательным сдвигом частоты $\Omega = -0.1$. Влияние вязкости в этом варианте оказывается довольно малым на начальном этапе эволюции поля, но эффект вязкости накапливается, приводя к уменьшению надкритичности пакета и ослаблению, а затем и ограничению самофокусировки. Видно, что характерный размер волнового пакета сначала заметно уменьшается, затем возрастает.

На рис. 2 показано поведение характерных параметров распределения: максимального значения поля, «числа квантов» и среднего сдвига частоты на оси. Уменьшение числа квантов указывает на наличие заметной диссипации в процессе коллапса. Отметим также появление дополнительного нелинейного сдвига частоты и, следовательно, усиление «кубической» нелинейности на стадии сжатия. Возникновение этой обратной связи говорит о возможности са-

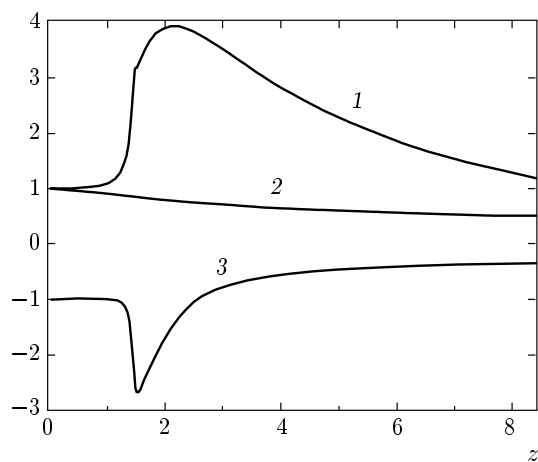


Рис. 2. Динамика максимального значения поля (кривая 1), «числа квантов» (кривая 2) и среднего сдвига частоты на оси (кривая 3) для начального распределения с теми же параметрами, что и на рис. 1

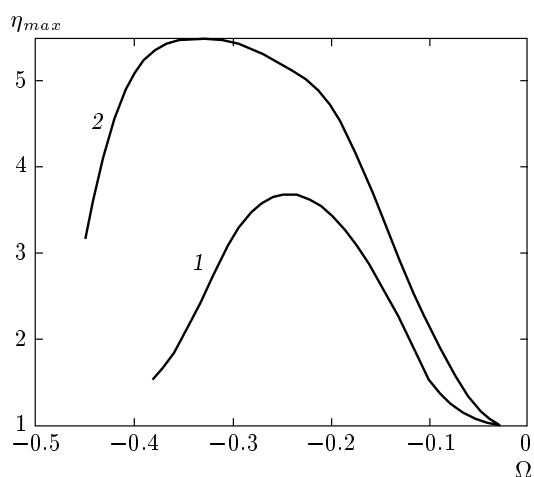


Рис. 3. Максимальное усиление поля $\eta_{max} = |A_{max}|/A_0$, достигаемое при эволюции гауссова пучка с параметрами $q = 1$, $a_r = 5$, $a_r = 20$, как функция начального сдвига частоты Ω для двух значений амплитуды $A_0 = 1.5$ (кривая 1) и $A_0 = 1.7$ (кривая 2)

мосжатия волнового пакета с нулевым сдвигом частоты. Однако в отсутствие затравочного сдвига частоты $\Omega(z=0) = 0$ такого рода процесс не развивается, и даже весьма интенсивные гауссовы пучки не испытывают самофокусировки. Об этом свидетельствует исследование зависимости коэффициента максимального усиления поля (отношения максимального значения поля на трассе распростране-

ния к начальной амплитуде A_0) от Ω (рис. 3). Заметим, что рост амплитуды A_0 или уменьшение коэффициента вязкости q приводит ко все более интенсивному поперечному сжатию и ограничению самофокусировки на все более поздней стадии эволюции решения. Таким образом, эволюция гауссовых распределений (25) с отрицательным сдвигом частоты ($\phi = -|\Omega|\tau$) при выполнении условия (26) на самом деле качественно напоминает стандартную самофокусировку (см. рис. 1). Сначала на фоне укрупнения переднего фронта импульса, характерного для одномерной задачи, происходят уменьшение эффективного поперечного размера нелинейной структуры и рост максимального значения поля. В дальнейшем, по мере уменьшения области локализации поля, процесс поперечного схлопывания стабилизируется возрастающей ролью вязкости в уравнении (22). Уменьшающаяся в результате диссипации мощность волнового пучка снижается до значения, меньшего критической мощности самофокусировки, и сжатие сменяется медленным расширением волнового пакета. Характерное расстояние, на котором происходит опрокидывание профиля огибающей (24), совпадает в этом режиме с длиной самофокусировки. В остальном динамика самовоздействия очень сильно отличается от одномерного случая [9–11].

При гауссовых начальных распределениях с чирпом ($\phi = a\tau^2$) удается реализовать самофокусировку в отсутствие отстройки начальной частоты волнового пакета от центральной. Особенности эволюции системы при таких начальных условиях связаны с тем, что часть волнового пакета с отрицательной отстройкой частоты фокусируется, другая часть (с положительной отстройкой) — расфокусируется. О такой динамике свидетельствует формирование двухмасштабной структуры поля. Возрастание интенсивности излучения в приосевой области стимулирует увеличение отрицательного сдвига частоты и, соответственно, роли кубической нелинейности, что приводит к самосжатию волнового пакета. При этом оказывается, что в режим схлопывания захватывается значительная часть волнового поля. Различие в знаке чирпа проявляется лишь в темпе возрастания поля вблизи оси системы. Так, для одинаковых структурных параметров изменение знака чирпа с положительного на отрицательный приводит к увеличению «времени» образования особенности в два раза. В остальном, как на стадии схлопывания волнового пакета, так и в последующем его расплывании, динамика самовоздействия протекает сходным образом.

4. ФОРМИРОВАНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН ОГИБАЮЩИХ В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

Теперь обратимся к случаю самовоздействия неоднородного волнового пакета, описываемому уравнением (1) общего вида, в котором присутствуют также слагаемые с кубической нелинейностью и с линейной дисперсией. В отличие от резонансной среды, рассмотренной в предыдущем разделе, этот случай имеет широкую область приложений. В частности, им можно пользоваться для описания распространения мощных фемтосекундных импульсов в воздухе и других прозрачных средах.

Формально в области применимости уравнения (1) нелинейная дисперсия всегда является слабой (в следующем порядке по параметру $1/\omega_0\tau_p$) по сравнению с кубической нелинейностью, которая становится определяющей в динамике системы. С другой стороны, уменьшение длительности импульса приводит к усилению роли линейной дисперсии групповой скорости среды и, как результат, к стабилизации опрокидывания волнового профиля.

В одномерном случае в среде с аномальной дисперсией групповой скорости в области неоднозначности профиля формируются солитоны, а в среде с нормальной дисперсией — структура типа перепада (кинка) [11]. Такие перепады в слабодиспергирующей среде соответствуют электромагнитным ударным волнам, впервые исследованным в работах [12]. В трехмерном случае имеет место коллапс, характер которого также зависит от знака дисперсии групповой скорости в среде. В этой связи очевидно, что область параметров, где можно ожидать выраженного эффекта формирования ударных волн огибающих, сужается по мере увеличения дисперсии групповой скорости, хотя влияние нелинейной дисперсии прослеживается в появлении асимметрии изначально симметричных распределений поля.

Численные расчеты показывают, что ударные волны образуются лишь при слабой линейной дисперсии групповой скорости, причем соответствующие режимы труднее реализовать в среде с аномальной дисперсией, где поперечная самофокусировка волнового пакета с $H < 0$ сопровождается и уменьшением длительности импульса.

Приведем результаты численного исследования процессов в среде с нормальной дисперсией групповой скорости. В качестве примера ниже будет рассмотрено распространение в воздухе (без учета многофотонной ионизации) импульса гауссовой формы длительностью 200 фс. Предполагается, что

длина волны излучения 800 нм, параметр дисперсии групповой скорости в воздухе на этой частоте $GVD = d^2k/d\omega^2 = 0.2$ фс²/см, что соответствует в нашей нормировке значению параметра $\alpha = -5$. В максимуме импульса мощность превышает критическую ($P_{cr} \approx 3.3$ ГВт) в 1.3 раза.

На рис. 4 представлена эволюция волнового пакета в среде с нормальной дисперсией групповой скорости без учета и с учетом нелинейной дисперсии. Видно, что характерная для среды с нормальной дисперсией неустойчивость дробления импульса пополам стабилизируется процессом смещения максимума поля к заднему фронту волнового пакета. Образующийся при этом сгусток поля имеет характерную для ударных волн форму с плавным ростом поля на переднем фронте и с резким задним фронтом (рис. 5). В одномерной задаче укручение фронта ударной волны стабилизируется за счет линейной дисперсии, и ширина фронта обратно пропорциональна интенсивности поля. В трехмерном достаточно интенсивном импульсе самофокусировочный рост поля вызывает все большее укручение фронта и появление все более мелких временных масштабов; наряду с самофокусировочной особенностью в решении появляется особенность, которая носит характер градиентной катастрофы. Именно градиентная катастрофа останавливает численный расчет эволюции гауссова импульса, так как по мере укручения фронта ударной волны в спектре появляются временные масштабы порядка обратной частоты заполнения (рис. 6).

Таким образом, для импульсов длительностью порядка (меньше) τ_{min} в средах без дисперсии и с нормальной дисперсией групповой скорости коллапс волнового пакета сопровождается нарушением симметрии первоначального распределения и образованием ударной волны огибающей вблизи заднего фронта. Опрокидывание импульса стабилизируется за счет дисперсии среды. В средах без дисперсии, как и в условиях электромагнитной индуцированной прозрачности, уширение спектра приводит к эффективному нелинейному затуханию волнового поля и ограничению ширины фронта ударной волны.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное выше исследование показывает, что нелинейность, связанная с зависимостью групповой скорости от амплитуды волны, приводит к качественному изменению динамики самовоздействия трехмерных волновых пакетов. Наряду с характер-

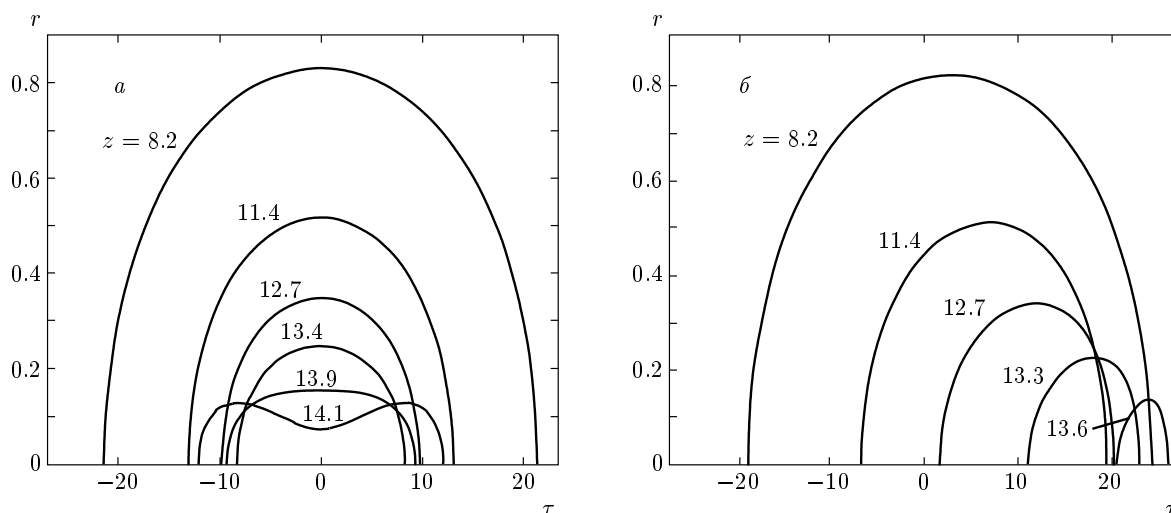


Рис. 4. Изолинии модуля поля без учета (а) и с учетом (б) нелинейной дисперсии на уровне 0.9 от максимального значения в последовательные «моменты» z для начального распределения с параметрами $A_0 = 0.5$, $a_r = 4.4$, $a_\tau = 100$, $\Omega = 0$, $\alpha = -5$, так что в максимуме импульса мощность превышает критическую мощность в 1.3 раза

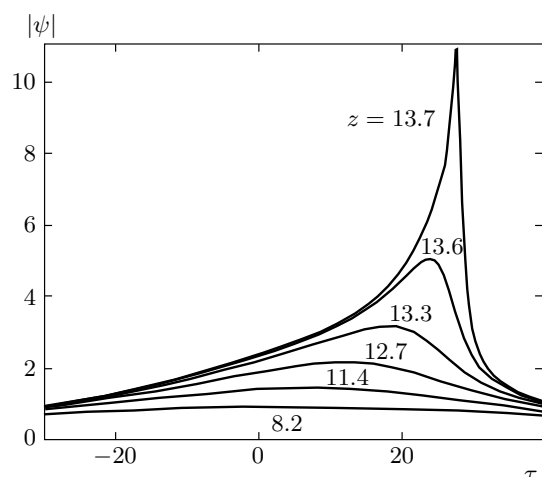


Рис. 5. Распределение модуля поля на оси в варианте с учетом нелинейной дисперсии в последовательные «моменты» z для начального распределения с параметрами $A_0 = 0.5$, $a_r = 4.4$, $a_\tau = 100$, $\Omega = 0$, так что в максимуме импульса мощность превышает критическую мощность в 1.3 раза

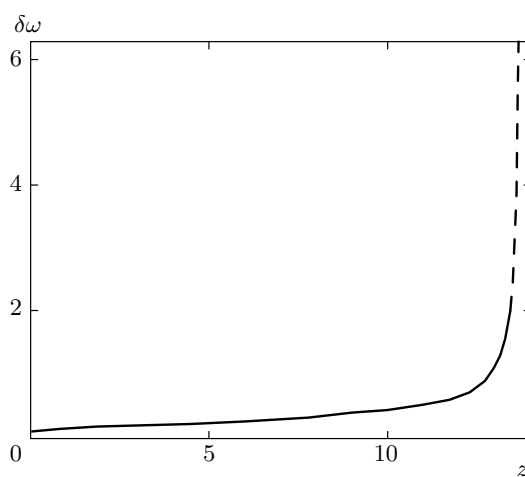


Рис. 6. Пространственная динамика спектральной ширины импульса (параметры моделирования совпадают с приведенными на рис. 4б). Резкий рост ширины спектра до значений порядка несущей частоты $\delta\omega \sim \omega_0/3 (= 2\pi/3)$ означает градиентную катастрофу, которая сопровождается самофокусировкой волнового пакета

ным для самофокусирующей нелинейности процессом самосжатия волнового пакета по мере его распространения происходит укрупнение продольного профиля и образование ударной волны огибающей. В среде без дисперсии качественное исследование динамики самовоздействия трехмерных волновых пакетов позволяет определить характерные длитель-

ности импульсов, для которых процесс опрокидывания опережает коллапс. Численное исследование эволюции волнового пакета в этих условиях показывает, что градиентная катастрофа предшествует коллапсу для сравнительно больших длительностей импульса. Формирование такого типа ударных волн оказывается возможным и в среде с нормальной дис-

персией групповой скорости.

Важно отметить, что в процессе опрокидывания волнового профиля наблюдается заметное уширение спектра импульса. Следует ожидать, что образование ударных волн играет важную роль наряду с ионизационными процессами при генерации суперконтинуума в воздухе в поле лазерного излучения [14, 15].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 05-02-17517, 05-02-17509, 04-02-17042) и Международного научно-технического центра (грант А-1095).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988); Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны*, Физматлит, Москва (2005).
2. Е. А. Головченко, Е. М. Дианов, А. М. Прохоров, В. Н. Серкин, Письма в ЖЭТФ **42**, 74 (1985); G. Yang and Y. R. Shen, *Opt. Lett.* **9**, 510 (1984).
3. Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, В. А. Миронов, *Изв. ВУЗов, радиофизика* **46**, 331 (2003).
4. М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, Москва (2003).
5. Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, В. А. Миронов, Письма в ЖЭТФ **79**, 330 (2004).
6. С. А. Козлов, С. А. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997).
7. О. В. Руденко, О. А. Сапожников, УФН **174**, 970 (2004); ЖЭТФ **106**, 395 (1994).
8. С. В. Турицин, Г. Е. Фалькович ЖЭТФ **89**, 258 (1985); В. С. Львов, *Нелинейные спиновые волны*, Наука, Москва (1987).
9. D. J. Kaup and A. C. Newell, *J. Math. Phys.* **19**, 798 (1978); K. Imai, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**, 355 (1999).
10. В. А. Выслоух, И. В. Чередник, ТМФ **78**, 35 (1989).
11. H. Stendel, *J. Phys. A* **36**, 1931 (2003).
12. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ **36**, 957 (1959); Л. А. Островский, Письма в ЖЭТФ **10**, 198 (1966).
13. В. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, ИПФ РАН, Нижний Новгород (1997).
14. A. Braun, G. Korn, X. Liu et al., *Opt. Lett.* **20**, 73 (1995); E. T. J. Nilbering, P. F. Curley, G. Grillion et al., *Opt. Lett.* **21**, 62 (1996).
15. В. П. Кандидов, И. С. Голубцов, О. Г. Косарева, КЭ **34**, 348 (2004); L. Berge, S. Scupin, F. Lederer et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 225002 (2004).