

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ТУННЕЛЬНОЙ И МНОГОФОТОННОЙ ИОНИЗАЦИИ АТОМОВ В СИЛЬНОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ

В. С. Попов^{*}

*Институт теоретической и экспериментальной физики
117218, Москва, Россия*

Б. М. Карнаков^{**,*}, *В. Д. Мур*, *С. Г. Поздняков*

*Московский инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 8 декабря 2005 г.

Построено релятивистское обобщение квазиклассической теории туннельной и многофотонной ионизации атомов и ионов в поле интенсивной электромагнитной волны (теории Келдыша). Рассматриваются случаи линейной, циркулярной и эллиптической поляризации излучения. Для произвольных значений параметра адиабатичности γ вычислен экспоненциальный фактор в скорости ионизации релятивистского связанного состояния. В случае низкочастотного лазерного излучения ($\gamma \ll 1$) получена асимптотически точная формула для скорости туннельной ионизации атомного s -уровня, включая кулоновскую, спиновую и адиабатическую поправки и предэкспоненциальный множитель. Рассчитана скорость ионизации основного уровня водородоподобного атома (иона) при $Z \lesssim 100$ в зависимости от интенсивности лазерного излучения. Определены границы области применимости нерелятивистской теории ионизации. В расчетах используется метод «мнимого времени».

PACS: 03.65.Pm, 32.80.Rm

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованиям ионизации атомов и ионов под действием интенсивного лазерного излучения посвящена обширная литература. Теория этих процессов началась с классической работы Келдыша [1], в которой впервые было показано, что туннельный эффект в переменном электрическом поле $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ и многофотонная ионизация атомов являются предельными случаями процесса нелинейной фотоионизации, характер протекания которого существенно зависит от значения параметра адиабатичности, или параметра Келдыша $\gamma = \omega T_t$, где ω — частота лазерного излучения, а T_t — характерное время туннелирования. Туннельная ионизация атомных состояний имеет место при $\gamma \ll 1$, а в случае $\gamma \gg 1$ процесс является многофотонным [1].

Вскоре после появления работы [1] был найден [2–4] точный вид предэкспоненциального множителя в формуле Келдыша для скорости ионизации w атомного уровня, получены аналитические выражения для энергетического, импульсного и углового распределений фотоэлектронов¹⁾ и вычислен кулоновский фактор в вероятности ионизации. Эти работы заложили основу для дальнейших исследований в данной области.

До сих пор при рассмотрении туннелирования атомного электрона в поле световой волны можно было ограничиться нерелятивистским приближением, что справедливо для валентных электронов во всех атомах от водорода до урана. В настоящее время благодаря успехам лазерной физики и техноло-

¹⁾ В работах [5, 6] более подробно рассмотрены энергетические и угловые спектры фотоэлектронов при ионизации атомов и ионов монохроматическим излучением, в том числе в общем случае эллиптической поляризации света.

*E-mail: markina@itep.ru

**E-mail: karnak@theor.mephi.ru

гии существенно увеличена интенсивность лазерных импульсов и расширен диапазон их параметров (получение фемтосекундных и ультракоротких — аттосекундных — импульсов [7–10]; достигнуты интенсивности $I \sim 10^{22}$ Вт/см² [11] и планируется значительно повысить их в ближайшее десятилетие [10]). Столь интенсивные поля, на несколько порядков превышающие атомное поле $\mathcal{E}_a = 5.14 \cdot 10^9$ В/см, способны ободраить электронную оболочку атома и образовать многозарядные ионы с $Z \sim 30\text{--}40$, для которых энергия связи основного уровня сравнима с энергией покоя электрона. В этом случае подбарьерное движение электрона в процессе ионизации нельзя уже считать нерелятивистским и необходима модификация теории ионизации Келдыша [1–4].

Кратко опишем содержание работы. В разд. 2 приведены явные выражения для подбарьерной траектории электрона в случае монохроматической электромагнитной волны с эллиптической поляризацией. Вычисление мнимой части функции действия дает главный (экспоненциальный) фактор в вероятности w_R ионизации атомного уровня, что определяет частотную зависимость вероятности w_R и позволяет рассмотреть переход из адиабатической области ($\gamma \ll 1$) к случаю $\gamma \gg 1$ (высокочастотное поле). В разд. 3 вычислена спиновая поправка к вероятности туннелирования (в случае линейной поляризации), определяющая зависимость скорости ионизации s -уровня от проекции спина электрона на направление магнитного поля. Раздел 4 посвящен туннельной ионизации атомов под действием низкочастотного лазерного излучения. Получена явная формула для релятивистской скорости ионизации w_R (включающая экспоненциальный, кулоновский, спиновый факторы и предэкспоненту), асимптотически точная в пределе слабых полей. Противоположный случай $\gamma \gg 1$ (многофотонная ионизация) также обсуждается в разд. 4. Результаты численных расчетов приведены в разд. 5, где указаны также границы области применимости нерелятивистской теории Келдыша, некоторые заключительные замечания — в разд. 6 статьи.

В наших расчетах был использован метод «мнимого времени» (ММВ), дающий удобный способ вычисления вероятности туннелирования частиц через переменные во времени барьеры²⁾. В Приложении А обсуждается релятивистское обобщение параметра

²⁾ Относительно физических аспектов теории ионизации Келдыша и ее современного развития см. обзор [12]. Подробное изложение основ ММВ и результатов, полученных с его помощью в квантовой механике, атомной физике и теории поля, можно найти в [13].

Келдыша γ , в Приложении В рассмотрен предельный переход от релятивистской теории ионизации к теории Келдыша, в Приложении С — основные свойства асимптотических коэффициентов C_λ .

Далее, как правило, $\hbar = c = 1$, m — масса электрона (мы часто полагаем $m = 1$), $-e$ — его заряд, $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$; при этом $m^2/e \equiv \mathcal{E}_{cr} = 1.32 \cdot 10^{16}$ В/см — так называемое «критическое», или швингеровское поле, характерное для КЭД [14–16], $\mathcal{E}_a/\mathcal{E}_{cr} = \alpha^3 = 3.89 \cdot 10^{-7}$. Всюду предполагается, что $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{cr}$, что необходимо для применимости ММВ в данной задаче.

Часть представленных ниже результатов анонсирована в [17–19].

2. МЕТОД МНИМОГО ВРЕМЕНИ И РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ КЕЛДЫША

С помощью ММВ [3, 13] была найдена подбарьерная траектория электрона, удовлетворяющая классическим релятивистским уравнениям движения, но с мнимым временем ($t \rightarrow it$). В случае эллиптически поляризованной плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси x ,

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{H}_x = 0, \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \cos \theta, \quad \mathcal{E}_z = \rho \mathcal{E}_0 \sin \theta,$$

$$\mathcal{H}_y = -\rho \mathcal{E}_0 \sin \theta, \quad \mathcal{H}_z = \mathcal{E}_0 \cos \theta, \quad I = (1 + \rho^2) \frac{c \mathcal{E}_0^2}{8\pi},$$

она имеет вид³⁾

$$p_x = -\frac{e^2 \mathcal{E}_0^2}{J \omega^2} \left\{ \frac{1}{4} (1 - \rho^2) \left[\text{ch } 2\eta - \frac{\text{sh } 2\eta_0}{2\eta_0} \right] + \rho^2 \frac{\text{sh } \eta_0}{\eta_0} \left[\text{ch } \eta - \frac{\text{sh } \eta_0}{\eta_0} \right] \right\},$$

$$p_y = i \frac{e \mathcal{E}_0}{\omega} \text{sh } \eta, \quad p_z = -\rho \frac{e \mathcal{E}_0}{\omega} \left(\text{ch } \eta - \frac{\text{sh } \eta_0}{\eta_0} \right), \quad (2.1)$$

$$x = -i \frac{e^2 \mathcal{E}_0^2}{J^2 \omega^3} \left\{ \frac{1}{8} (1 - \rho^2) \left[\text{sh } 2\eta - \eta \frac{\text{sh } 2\eta_0}{\eta_0} \right] + \rho^2 \frac{\text{sh } \eta_0}{\eta_0} \left[\text{sh } \eta - \eta \frac{\text{sh } \eta_0}{\eta_0} \right] \right\},$$

³⁾ Эти уравнения задают экстремальную подбарьерную траекторию, которая минимизирует мнимую часть функции действия и определяет наиболее вероятный путь туннелирования частицы. В отличие от ранее рассмотренных задач [13], в релятивистском случае такая траектория является трехмерной. Отметим, что выражения (2.1) относятся к случаю уровня, связанного короткодействующим потенциалом.

$$y = \frac{e\mathcal{E}_0}{J\omega^2}(\text{ch } \eta_0 - \text{ch } \eta), \quad z = -i\rho \frac{e\mathcal{E}_0}{J\omega^2} \left[\text{sh } \eta - \frac{\text{sh } \eta_0}{\eta_0} \eta \right],$$

$$t = x(\eta) + i\omega^{-1}\eta.$$

Здесь

$$\eta = -i\theta = -i\omega(t - x), \quad 0 < \eta < \eta_0, \quad (2.2)$$

θ — переменная светового фронта (чисто мнимая под барьером), ρ — эллиптичность лазерного излучения ($-1 \leq \rho \leq 1$, причем $\rho = 0$ соответствует линейной, $\rho = \pm 1$ — циркулярной поляризации), \mathcal{E}_0 — амплитуда поля волны, ω — ее частота, I — интенсивность. Отметим, что часть компонент $p_i(\eta)$ и $x_j(\eta)$ под барьером — чисто мнимые, что указывает на невозможность такой траектории в классической механике. В момент выхода из-под барьера ($\eta = 0$) эти компоненты обращаются в нуль, и дальнейшее движение частицы совершается по вещественной (классической) траектории. При этом, в отличие от одномерной квазиклассики [20, 21], точка выхода не является точкой остановки частицы, что вообще характерно для многомерного случая и уже отмечалось ранее [3, 6, 13]. Начальный момент подбарьерного движения, $\eta = \eta_0$, определяется из граничных условий в рамках ММВ, см. подробнее в [13]. Вычисляя вдоль этой траектории мнимую часть функции укороченного действия W ,

$$W = \int_{t_0}^0 \left\{ -m\sqrt{1-v^2} + e(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - eA_0 + m\epsilon \right\} dt, \quad (2.3)$$

где $\epsilon = E_0/mc^2$, E_0 — начальная, ϵ — «приведенная» энергия уровня (включающая энергию покоя mc^2), находим с экспоненциальной точностью скорость ионизации релятивистского связанного состояния⁴⁾:

$$w_R \propto \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \text{Im } W \right\} = \exp \left\{ -\frac{2mc^2}{\hbar\omega} \eta_0 (J - \epsilon) \right\}, \quad (2.4)$$

где $J = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - p_x$ — интеграл движения в скрещенном поле [24] и предполагается, что $\hbar\omega \ll mc^2$, т. е. процесс ионизации является многоквантовым.

⁴⁾ Эта формула получается путем непосредственного интегрирования в (2.3) с учетом выражений (2.1) для подбарьерной траектории. К тому же результату приводит использование изящного метода собственного времени Фока [22, 23], что, однако, не может быть изложено здесь за недостатком места.

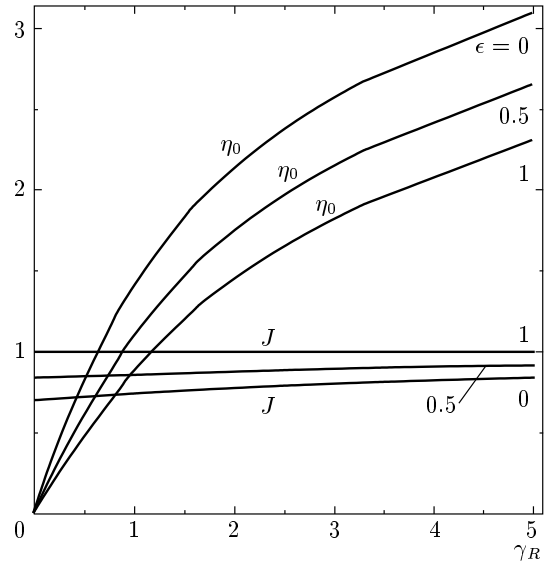


Рис. 1. Решение уравнений (2.5) в зависимости от параметра адиабатичности γ_R . У кривых указаны значения приведенной энергии ϵ уровня

Уравнения, определяющие η_0 и J , вытекают из граничных условий ММВ и в случае монохроматической волны с эллиптической поляризацией имеют вид

$$\begin{aligned} \text{sh}^2 \eta_0 - \rho^2 \left(\text{ch } \eta_0 - \frac{\text{sh } \eta_0}{\eta_0} \right)^2 &= \\ &= \gamma_R^2 \frac{1 + \xi^2}{3\xi^2} (1 - 2\epsilon J + J^2), \\ (1 - \rho^2) \frac{\text{sh } 2\eta_0}{2\eta_0} + \rho^2 \left[2 \left(\frac{\text{sh } \eta_0}{\eta_0} \right)^2 - 1 \right] &= \\ &= 1 + 2\gamma_R^2 \frac{1 + \xi^2}{3\xi^2} (1 - J^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

и легко решаются численно (рис. 1). Здесь γ_R — параметр адиабатичности, являющийся релятивистским обобщением известного параметра Келдыша [1]:

$$\begin{aligned} \gamma_R &= \gamma_0 \sqrt{\frac{3\xi^2}{1 + \xi^2}}, \\ \gamma_0 &= \frac{mc\omega}{e\mathcal{E}_0} = \frac{\hbar\omega}{mc^2} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_{cr}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

а ξ — удобная вспомогательная переменная:

$$\xi = \left[1 - \frac{1}{2}\epsilon \left(\sqrt{\epsilon^2 + 8} - \epsilon \right) \right]^{1/2}, \quad 0 < \xi < \sqrt{3} \quad (2.7)$$

(рис. 2), введенная в работах [25] вместо энергии ϵ и естественным образом возникающая в рамках ММВ.

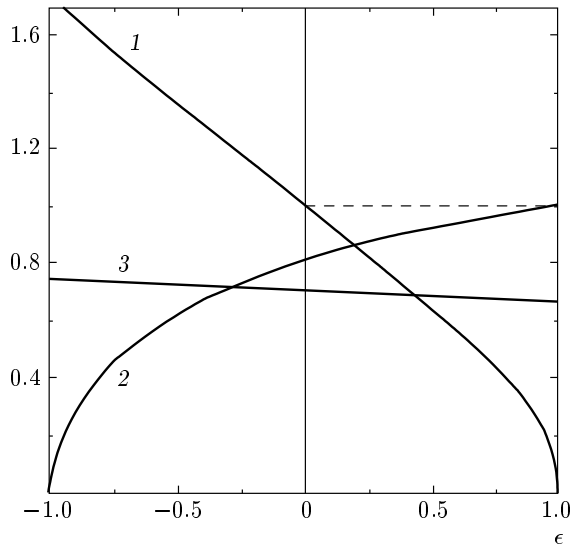


Рис. 2. Переменная ξ (кривая 1), отношение γ_r/γ_R (кривая 2), см. Приложение А, и коэффициент k (кривая 3) из приведенного ниже выражения (4.11) в зависимости от приведенной энергии уровня

Известным в настоящее время атомам соответствуют значения $Z < 137$ и $0 < \epsilon < 1$; в этом случае можно использовать приближение точечного заряда ядра⁵⁾. В частности, для основного состояния водородоподобного атома с зарядом Z имеем

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s} &= \sqrt{1 - \zeta^2}, \\ E_b &= \frac{mc^2 \zeta^2}{1 + \sqrt{1 - \zeta^2}} = Z^2 \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(1 + \frac{1}{4} \zeta^2 + \dots \right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\zeta = Z\alpha$, $0 < \zeta < 1$ и $E_b = mc^2 - E_{1s}$ — энергия связи основного уровня. Выбор параметра адиабатичности в виде (2.6) обсуждается в Приложении А.

Экспоненциальный множитель (2.4) удобно записать в следующем виде:

$$w_R \propto \exp \left\{ -\frac{2\mathcal{E}_{ch}}{3\mathcal{E}_0} g(\gamma_R; \epsilon, \rho) \right\}, \quad (2.9)$$

где функция $g(\gamma_R; \epsilon, \rho)$ определяет частотную зависимость скорости ионизации, \mathcal{E}_{ch} — характерное электрическое поле (см. работы [25] и таблицу):

⁵⁾ В принципе, однако, в релятивистской кулоновской задаче возможны значения $\epsilon < 0$ и $Z > 137$, вплоть до критического заряда ядра Z_{cr} ($1s_{1/2}$) ≈ 170 [26–29], при котором $1s$ -уровень опускается до границы нижнего континуума $\epsilon = -1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ch} &= \frac{3^{3/2} \xi^3}{1 + \xi^2} \mathcal{E}_{cr} = \\ &= \begin{cases} Z^3 \mathcal{E}_a \left[1 + \frac{1}{3} (Z\alpha)^2 + \dots \right], & Z \ll 137, \\ 2.598 \mathcal{E}_{cr}, & Z = 137 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

(отметим, что величина \mathcal{E}_{ch} близка к значению электрического поля на K -орбите атома с зарядом Z).

В адиабатическом случае, т. е. при $\gamma \ll 1$, были вычислены также предэкспоненциальный множитель P , кулоновский фактор Q и спиновая поправка S_{\pm} , приводящая к зависимости скорости ионизации w_R от проекции $s_z = \pm \hbar/2$ спина электрона на направление магнитного поля (в нерелятивистском пределе эта зависимость исчезает).

Для постоянных ($\omega = 0$) скрещенных полей $g(\gamma = 0) \equiv 1$ и потому с экспоненциальной точностью

$$w_R \propto \exp \left(-\frac{2\sqrt{3}\xi^3}{1 + \xi^2} \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}_0} \right) \equiv \exp \left(-\frac{2}{3F} \right), \quad (2.11)$$

где $F = \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_{ch}$ — приведенное поле, что соответствует результатам предыдущих работ [2, 25].

В случае низкочастотного лазерного излучения

$$g(\gamma_R; \epsilon, \rho) = 1 - c_2 \gamma_R^2 + c_4 \gamma_R^4 - \dots, \quad \gamma_R \ll 1, \quad (2.12)$$

$$c_2 = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{\rho^2}{3} \right),$$

$$c_4 = \frac{1}{24} \left(1 - \frac{\rho^2}{3} \right)^2 \frac{1 + 7\xi^2/25}{1 + \xi^2/3} - \frac{1}{105} \left(1 - \frac{\rho^2}{2} \right)$$

(в нерелятивистском пределе выражение (2.12) переходит в разложения, полученные ранее [3, 12]),

$$Q = Q_0 F^{-2\nu}, \quad (2.12')$$

$$Q_0 = \left[\sqrt{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{3} \right) \right]^{4\nu} \exp \left(6Z\alpha \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{3}} \right),$$

$$P = 3 \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} \sqrt{\frac{1 - \xi^2/3}{1 + \xi^2/3}} F, \quad (2.12'')$$

$$\nu = \frac{Z\alpha\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{Z\alpha(1 - \xi^2)}{\xi\sqrt{3 - \xi^2}} \quad (2.13)$$

(см. также формулу (4.2), приведенную ниже). Кулоновский фактор Q был найден в работе [30] с помощью квазиклассической теории возмущений по кулоновскому потенциалу⁶⁾, а предэкспонента P вычислена в работах [2, 30, 31]. Отметим, что поправка

⁶⁾ Этот подход был предложен [20] для задачи об ионизации атома водорода постоянным электрическим полем и обобщен на случай переменных во времени полей в работе [4], см. также [13].

Параметры, определяющие скорость ионизации в низкочастотном поле

	Z					
	20	30	40	60	80	92
ϵ	0.9893	0.9757	0.9564	0.8990	0.8118	0.7410
ξ	0.0847	0.1278	0.1719	0.2647	0.3676	0.4373
E_b , кэВ	5.47	12.4	22.3	51.6	96.2	132
ω_b , c^{-1}	8.31(18)	1.88(19)	3.38(19)	7.84(19)	1.46(20)	2.01(20)
C_λ^2	1.005	1.011	1.019	1.039	1.059	1.064
D	7.92	8.06	8.25	8.87	9.95	11.0
\mathcal{E}_{ch} , В/см	4.13(13)	1.41(14)	3.38(14)	1.19(15)	3.00(15)	4.82(15)
$\mathcal{E}_{ch}/\mathcal{E}_{cr}$	3.13(-3)	0.0107	0.0256	0.090	0.227	0.365
S_+	1.002	1.005	1.013	1.046	1.121	1.203
δ , %	0.05	0.2	0.4	1.5	3.9	6.2

Примечание. Приведены численные значения величин, входящих в формулу (4.2), для $1s_{1/2}$ -состояния водородоподобного атома (иона) с зарядом ядра Z : E_b — энергия связи; \mathcal{E}_{ch} — характерное электрическое поле (2.10); S_+ — спиновый фактор в случае постоянного скрещенного поля, $\delta = 1 - S_+^{ITM}/S_+$. Обозначение: $a(b) \equiv a \cdot 10^b$.

порядка γ_R^2 в формуле (2.12) не зависит от энергии уровня и совпадает с ее нерелятивистским значением [3], а параметр ν является релятивистским аналогом известного из атомной физики эффективного главного квантового числа $n^* = Z/\kappa$, где Z — заряд атомного остова, $\kappa = \sqrt{2E_b}$, а E_b — энергия связи в атомных единицах.

Таким образом, в случае $\gamma_R \ll 1$ определены все величины, входящие в формулу для вероятности ионизации w_R , не зависящие от спина частицы. Переходим к нахождению спиновой зависимости w_R , что представляет принципиальный интерес, так как отличает туннелирование электрона от туннелирования скалярной (бесспиновой) частицы.

3. УЧЕТ СПИНА В ПОДБАРЬЕРНОМ ДВИЖЕНИИ

Экспоненциальный множитель (2.9) не зависит от спина s частицы и может быть вычислен на основе уравнения Клейна–Гордона. Спиновую поправку к вероятности туннелирования мы получим двумя независимыми способами.

1) В рамках ММВ учет спина электрона в его подбарьерном движении определяется поправкой к

функции действия⁷⁾

$$\begin{aligned} \delta S_{spin} &= \frac{ie}{2mc} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} \int F^{\alpha\beta} u^\lambda s^\mu d\tau = \\ &= \frac{e}{mc} \int \{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{H}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}) + [\mathbf{v} \times \mathbf{s}] \mathcal{E}\} dt, \end{aligned} \quad (3.1)$$

что является естественным релятивистским обобщением члена $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}$ в нерелятивистском лагранжиане. Здесь u^λ — 4-скорость частицы, $s^\mu = (s^0, \mathbf{s})$ — 4-псевдовектор спина, причем $u^\mu s_\mu = 0$. Поворот спина электрона под действием поля волны (в его подбарьерном движении) определяется из полуклассического уравнения Баргмана–Мишеля–Теллеги [33, 34], аналитически продолженного на мнимые значения времени. В трехмерной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} &= \frac{e}{mc} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\varepsilon} [\boldsymbol{\zeta} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}] + \frac{1}{(\varepsilon + m)c} [(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\mathcal{E}} - (\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}) \mathbf{v}] \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

(см. [34, § 41]), где $\varepsilon = \sqrt{m^2 + p^2}$ и $\boldsymbol{\zeta}$ — вектор поляризации электрона в его «мгновенной» системе покоя: $\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \hbar \boldsymbol{\zeta} / 2$, $|\boldsymbol{\zeta}| \leq 1$.

⁷⁾ См. работу [32], а также Приложение С в работе [13]. Мы пользуемся в этом разделе обычными единицами и полагаем $g = 2$, пренебрегая аномальным моментом электрона.

Рассмотрим случай линейной поляризации при лазерном импульсе произвольной формы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (0, -\mathcal{E}_0\omega^{-1}a(\theta), 0), \\ A^0 &= 0, \quad \theta = \omega(t - x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

При этом $\mathcal{E} = \mathcal{H} = \mathcal{E}_0a'(\theta)$, ось x выбрана вдоль направления распространения волны, электрическое поле направлено вдоль оси y , магнитное — вдоль оси z , а функция $a(\theta)$ задает форму импульса: $a(\eta) = \eta$ отвечает постоянному скрещенному полю, $a(\eta) = \sin \eta$ — монохроматическому лазерному излучению, $a(\eta) = \text{th } \eta$ — солитоноподобному импульсу, и т. д.

Поскольку для плоской волны $\mathcal{E} \cdot \mathcal{H} = 0$, а экстремальная подбарьерная траектория⁸⁾ лежит в плоскости xy и $\mathbf{v}\mathcal{H} = v_z = 0$, из уравнения (3.2) видно, что $\zeta_z(t) = \text{const}$. В силу этого

$$\begin{aligned} \delta S_{spin} &= \frac{e\mathcal{E}_0}{mc} \int_{t_0}^0 s_z a'(\eta) (1 - v_x) dt = \\ &= -\frac{e\mathcal{E}_0 J}{mc} \int_0^{\eta_0} s_z a'(\eta) d\tau = -i\mu_B \frac{\mathcal{E}_0}{\omega} \zeta_z \tilde{a}(\eta_0), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\tilde{a}(\eta) = -ia(i\eta)$ — вещественная функция, $\mu_B = e\hbar/2mc$ — магнетон Бора и $\eta_0 = -i\omega t_0$ соответствует начальному моменту подбарьерного движения (электрон в связанном состоянии вблизи ядра). Формула (3.4) дает спиновую поправку в общем случае, т. е. для произвольного электромагнитного поля вида (3.3) и любых значений γ_R . Поскольку δS_{spin} набирается по всей подбарьерной области $r \sim b$ (b — ширина барьера, $b \sim \lambda_C \mathcal{E}_{ch}/\mathcal{E}_0 \gg \lambda_C = \hbar/mc$), т. е. на больших расстояниях от ядра, здесь можно положить $\zeta_z = \pm 1$, как и для свободного электрона.

Перейдем теперь к случаю низкочастотного поля, $\gamma \ll 1$, который легче всего реализуется в эксперименте. Полное мнимое «время» подбарьерного движения равно [25]

$$t_0 = i\tau_C \sqrt{\frac{3\xi^2}{1 + \xi^2} \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}_0}}, \quad \tau_C = \frac{\lambda_C}{c}, \quad (3.5)$$

$\tau_C = 1.29 \cdot 10^{-21}$ с — комптоновское время. Подставляя это в выражение (3.4) и учитывая, что $a(\eta) = \eta$, находим

$$\delta S_{spin} = i\hbar \frac{\sqrt{3}\xi}{2\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (3.6)$$

⁸⁾ Нас здесь интересует только эта траектория, поскольку речь идет о малой поправке (3.1) к мнимой части $\text{Im } S$, набираемой частицей в ее подбарьерном движении.

Однако этот результат не является окончательным: нужно учесть еще изменение экспоненциального множителя в проницаемости барьера из-за расщепления δE начального уровня в магнитном поле волны, $\delta E = \mp \mu\mathcal{H} = \mp \mu\mathcal{E}_0$, в которое входит магнитный момент μ связанного электрона, отличный от магнетона Бора, если $Z\alpha \sim 1$ и кулоновское поле «поджимает» электрон к ядру. Так, например, для $1s_{1/2}$ -состояния водородоподобного атома [35, 36]

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\mu_B} &= \frac{1}{3} \left[1 + 2\sqrt{1 - (Z\alpha)^2} \right] = \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}(Z\alpha)^2, & Z \ll 137, \\ 1/3, & Z = 137. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

В случае постоянного скрещенного поля из выражения (2.11) с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1 - \xi^2}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \frac{d\epsilon}{d\xi} = -\frac{3\xi + \xi^3}{\sqrt{(1 + \xi^2)^3}}, \\ \delta \left(\frac{2\sqrt{3}\xi^3}{1 + \xi^2} \right) &= -\frac{2\sqrt{3}\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \delta\epsilon, \\ \delta\epsilon &= \mp \frac{\mu\mathcal{H}}{mc^2} = \mp \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_B} \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_{cr}} \end{aligned}$$

находим дополнительную поправку к (3.6):

$$\delta_1 S = -i\hbar \frac{\sqrt{3}\xi}{2\sqrt{1 + \xi^2}} \frac{\mu}{\mu_B}, \quad (3.8)$$

которая частично компенсирует поправки (3.6). В итоге в рамках ММВ (imaginary time method, ITM) получаем [17]

$$\begin{aligned} S_{\pm}^{ITM} &= \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \text{Im}(\delta S_{spin} + \delta_1 S) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_B} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где знаки « \pm » соответствуют двум возможным проекциям спина $\pm\hbar/2$ на ось квантования (направление магнитного поля \mathcal{H}).

Отметим, что спиновая поправка (3.9) не зависит от постоянной Планка \hbar . При малых Z имеем

$$S_{\pm}^{ITM} = 1 \pm \frac{1}{3}(Z\alpha)^3,$$

т. е. поправка практически отсутствует (члены порядка $Z\alpha$ и $(Z\alpha)^2$ в (3.6) и (3.8) полностью сокращаются). Это — следствие того, что в уравнении Паули

для электрона в однородном магнитном поле координатные и спиновые переменные разделяются, проекция s_z на направление магнитного поля сохраняется и орбитальное движение частицы не зависит от нее, хотя значения полной энергии этих состояний различаются на $\mp\mu H$.

Приведенный выше вывод формулы (3.9) справедлив, строго говоря, в пределе $s \gg \hbar$, однако для электрона $s = \hbar/2$. Поэтому мы изложим и другой подход к этой проблеме, основанный на применении квазиклассики непосредственно к уравнению Дирака в постоянном скрещенном поле⁹⁾.

2) Как известно, решение уравнения Дирака $\hat{D}_-\psi = 0$ для электрона во внешнем электромагнитном поле $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ можно представить в виде

$$\psi = \hat{D}_+\Psi, \quad \hat{D}_\pm = \gamma^\mu \left(i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A_\mu \right) \pm mc, \quad (3.10)$$

где Ψ — решение квадратированного уравнения:

$$\hat{D}_+\hat{D}_-\Psi \equiv \left\{ \left(i\partial + \frac{e}{\hbar c}A \right)^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} + \frac{ie}{\hbar c}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} + i\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}) \right\} \Psi = 0, \quad (3.11)$$

$A^2 \equiv A^\mu A_\mu = A_0^2 - \mathbf{A}^2$, а $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ — четырехрядные матрицы, введенные Дираком. В калибровке

$$A_\mu = \{-\mathcal{E}y, -\mathcal{E}y, 0, 0\}, \quad \mu = \{0, 1, 2, 3\}, \quad (3.12)$$

отвечающей постоянному скрещенному полю, интегралами движения являются энергия E и обобщенные импульсы P_x, P_z . Решение уравнения (3.11) ищем в виде

$$\Psi = \exp \left[-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{P}_\perp \cdot \mathbf{r}) \right] \phi(y)u, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{P}_\perp = \{P_x, 0, P_z\}.$$

В случае скрещенных полей

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} + i\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B})^2 = (\alpha_y + i\Sigma_z)^2 \mathcal{E}^2 \equiv 0,$$

поэтому

$$u = (\alpha_y + i\Sigma_z) u_0 = \begin{pmatrix} c_1\chi_1 + c_{-1}\chi_{-1} \\ c_{-1}\chi_1 + c_1\chi_{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

⁹⁾ Квазиклассический метод ВКБ для уравнения Дирака был развит в работах [37, 38], а для глубоких уровней вблизи границы нижнего континуума — в [39, 40] (в последнем случае предполагалось, что потенциал $V(r)$ обладает сферической симметрией). Применения метода ВКБ в квантовой электродинамике сверхсильных кулоновских полей ($Z > 137$) рассмотрены в работах [29, 39–41].

где $\sigma\chi_z = \sigma\chi_\sigma$. Биспинор u_0 и коэффициенты c_σ , $\sigma = \pm 1$ не зависят от координат и времени, а функция $\phi(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\phi''(y) + p^2(y)\phi = 0, \quad (3.15)$$

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - P_\perp^2 - m^2c^2 + 2me\mathcal{E}Jy,$$

где $J = (E - cP_x)/mc^2$ — интеграл движения [20].

Квазистационарному состоянию соответствует волновая функция

$$\Psi^{(+)}(\mathbf{r}) = \int \hat{D}_+ \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{P}_\perp \cdot \mathbf{r} \right) \Phi^{(+)}(y)u d^2P_\perp, \quad (3.16)$$

удовлетворяющая условию излучения Зоммерфельда (расходящаяся волна при $y \rightarrow +\infty$). Ее нужно сшить с волновой функцией начального состояния [21, 36] (электрон на s -уровне в короткодействующем потенциале)

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_0 t \right) C_\lambda \sqrt{\frac{mc\lambda}{2\pi\hbar}} \times \exp \left(-\frac{mc}{\hbar} \lambda r \right) r^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \epsilon\chi_\sigma} \\ i\sqrt{1 - \epsilon(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\chi_\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

где $\lambda = \sqrt{1 - \epsilon^2}$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, а C_λ — безразмерный асимптотический (при $\lambda r \gg 1$) коэффициент волновой функции начального состояния ($l = 0, M = \sigma/2$ — проекция полного момента $j = 1/2$ на ось z , т. е. на направление магнитного поля). При этом предполагается условие нормировки $\int \Psi^{(0)+} \Psi^{(0)} d^3r = 1$, обычное для связанных состояний.

Центральной задачей при вычислении вероятности w_R является сшивание решений (3.16) и (3.17), имеющих разную симметрию в области перекрытия (3.18). Как ясно из (3.15), функция $\Phi^{(+)}(y)$ выражается через функции Эйри. В области сшивания

$$\frac{\lambda_C}{\lambda} \ll r \ll b = \lambda_C(1 - \epsilon) \frac{\mathcal{E}cr}{\mathcal{E}}, \quad (3.18)$$

можно воспользоваться асимптотиками функций Эйри при больших значениях аргумента [42]. Разлагая $\exp(-\lambda r)$ в интеграл Фурье, опуская в операторе \hat{D}_+ слагаемые с потенциалами \mathbf{A} и A^0 , из условия сшивания волновых функций (3.16) и (3.17) получаем¹⁰⁾ коэффициенты c_1 и c_{-1} в (3.14). После этого нетрудно написать волновую функцию электрона

¹⁰⁾ Здесь мы опускаем технические детали, излагая ход вычислений схематически.

вне барьера и, вычисляя компоненту плотности тока $j_y = c(\psi^{(+)})^* \alpha_y \psi^{(+)}$ и полный поток $\iint j_y dx dz$, найти вероятность вылета электрона в единицу времени, т. е. скорость ионизации s -уровня:

$$w_R = \frac{mc^2}{\hbar} C_\lambda^2 P_\sigma \frac{1}{2\xi} \sqrt{\frac{1 - \xi^2/3}{3 + \xi^2}} \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{cr}} \times \exp\left(-\frac{\sqrt{3}\xi^3}{1 + \xi^2} \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}}\right), \quad (3.19)$$

где

$$P_\sigma = \frac{1 + \sqrt{1 + \xi^2} + \sqrt{3} \xi \sigma}{1 + \sqrt{1 + \xi^2} - \sqrt{3} \xi \sigma}, \quad \sigma = \pm 1, \quad (3.19')$$

а ξ определена в (2.7). Если в (3.19) положить $P_\sigma = 1$, то это выражение совпадает с формулой для вероятности ионизации в случае скалярной частицы, связанной короткодействующими силами (которая записана в работе [2] в других обозначениях). Добавляя к (3.19) поправку (3.8), возникающую вследствие расщепления начального уровня в магнитном поле, получаем окончательно

$$S_+ = \frac{1}{S_-} = \frac{1 + \sqrt{1 + \xi^2} + \sqrt{3}\xi}{1 + \sqrt{1 + \xi^2} - \sqrt{3}\xi} \times \exp\left(-\frac{\mu}{\mu_B} \sqrt{\frac{3\xi^2}{1 + \xi^2}}\right), \quad (3.20)$$

где S_\pm — значения спинового фактора для двух возможных проекций спина электрона на направление магнитного поля. Интересно отметить, что хотя выражения (3.9) и (3.20) функционально различны, при $Z \lesssim 60$ они с процентной точностью совпадают:

$$\frac{S_\sigma^{ITM}}{S_\sigma} = 1 - \frac{\sigma}{6} (Z\alpha)^3 + O((Z\alpha)^5), \quad (3.21)$$

см. также таблицу. Это дает уверенность в том, что спиновый фактор в вероятности w_R вычислен правильно.

При вычислении скорости ионизации w_R мы использовали шивание волновых функций (3.16) и (3.17) в подбарьерной области. Этот прием является обобщением известной задачи об ионизации атомов в однородном электрическом поле [20] на случай скрещенных полей и уравнения Дирака.

4. ТУННЕЛЬНАЯ И МНОГОФОТОННАЯ ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Вероятность туннельной ионизации следует непосредственно из формул (2.9)–(2.12). Кроме того,

нужно учесть, что в случае $\mathcal{E}_0 \ll \mathcal{E}_{ch}$ основной вклад вносит $\exp(-2/3F)$, вследствие чего ионизация практически происходит в те моменты времени, когда поле $|\mathcal{E}(t)|$ близко к своему максимальному значению. Усреднение величины $w_R(\mathcal{E}(t))$ по периоду поля дает в вероятности дополнительный множитель [3]

$$A = \begin{cases} \sqrt{3F/\pi(1 - \rho^2)}, & 0 \leq \rho^2 < 1, \\ 1, & \rho = \pm 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

(в узкой переходной области $1 - \rho^2 \lesssim F$ зависимость от амплитуды поля в предэкспоненте не сводится к степени F). Собирая вместе выражения (2.9), (2.12), (3.20) и (4.1), получаем следующую формулу для скорости ионизации релятивистского связанного s -состояния в туннельном ($\gamma_R \ll 1$) режиме:

$$w_R^a = \omega_b |C_\lambda|^2 S D F^{3/2 - 2\nu} \times \exp\left\{-\frac{2}{3F} \left[1 - \frac{1}{10} \left(1 - \frac{\rho^2}{3}\right) \gamma_R^2\right]\right\}, \quad (4.2)$$

где

$$\omega_b = (mc^2 - E_0)/\hbar = 0.776(1 - \epsilon) \cdot 10^{21} \text{ c}^{-1} \quad (4.3)$$

— частота, отвечающая энергии связи E_b уровня, C_λ — асимптотический коэффициент (на расстояниях $r \gg 1/\lambda$, $\lambda = \sqrt{1 - \epsilon^2}$) атомной волновой функции без внешнего поля, $S = (S_+ + S_-)/2$, а функция D имеет довольно громоздкий вид, но не зависит от поля F :

$$D = \frac{\sqrt{3}(1 + \epsilon)}{\sqrt{\pi(1 - \rho^2)(1 - \xi^4/9)}} \left[2 \left(1 - \frac{\xi^2}{3}\right)^2\right]^{2\nu} \times \exp\left(6Z\alpha \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{3}}\right) \quad (4.4)$$

(здесь мы считаем $\rho^2 < 1$, исключая малую область эллиптичности вблизи $\rho = \pm 1$; для циркулярной поляризации нужно убрать из выражения для D множитель $\sqrt{3/\pi(1 - \rho^2)}$ и изменить показатель степени $3/2 - 2\nu$ в (4.2) на $1 - 2\nu$). При переходе от \mathcal{E} к приведенному полю F , зависящему от энергии уровня, экспоненциальный множитель в (4.2) принимает в точности такой же вид, как и в нерелятивистском случае [3], что отчетливо проявляется на рис. 3. Поэтому форма кривых рис. 4 не меняется от водорода до урана (хотя, разумеется, абсолютная величина w_R сильно увеличивается с ростом Z).

Следует отметить, что C_λ^2 и D являются «вялыми» функциями заряда Z (за исключением Z , близких к 137), в то время как величина ω_b меняется на

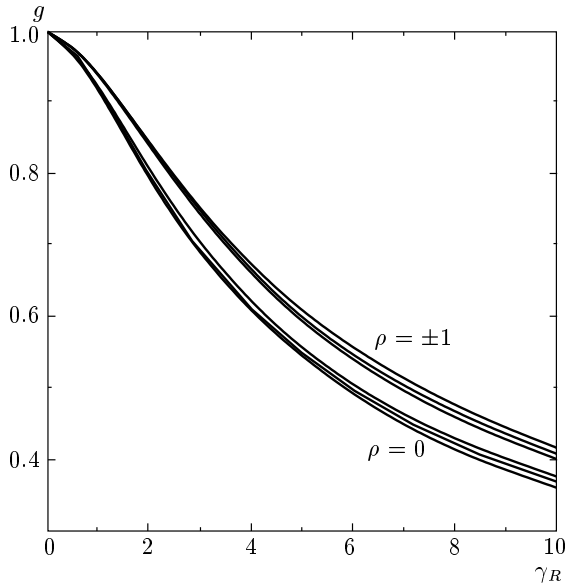


Рис. 3. Функция g из выражения (2.9) в зависимости от параметра адиабатичности γ_R . При данной эллиптичности ρ кривые относятся к $\epsilon = 1, 0, -1$ (сверху вниз)

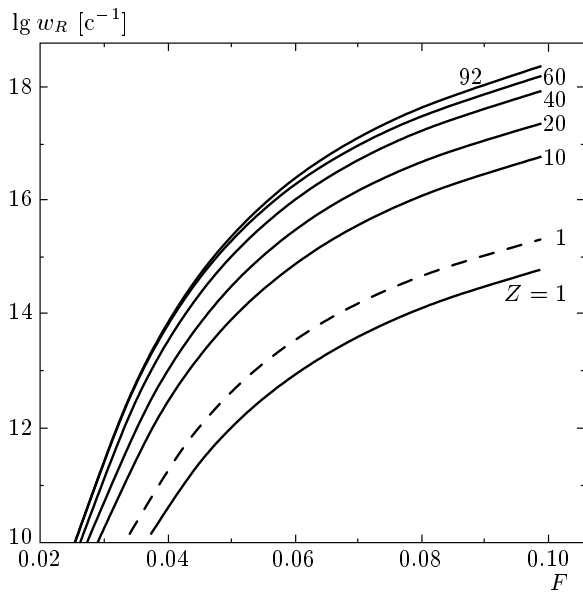


Рис. 4. Зависимости $\lg w_R$ от приведенного поля F для уровня $1s_{1/2}$ водородоподобного атома (иона). Сплошные кривые — линейная поляризация излучения, штриховая кривая — постоянное электрическое поле

несколько порядков — см. таблицу, в которой приведены значения параметров, входящих в формулу (4.2), для основного состояния водородоподобного атома (иона) с зарядом Z . В этом случае [21, 36]

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s} &= \nu = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}, \\ C_{1s}^2 &= 2^{2\epsilon - 1} / \Gamma(2\epsilon + 1), \end{aligned} \quad (4.5)$$

причем аналитические выражения для ϵ и C_λ^2 имеются и для других состояний дискретного спектра, см. Приложение С. Что касается спиновой поправки S_\pm , то при $Z \ll 137$ она мало отличается от единицы, однако увеличивается с ростом Z . Так, $S_+ = 1.283$ при $Z = 100$ и $S_+ = 4.041$ при $Z = 137$ (предельное значение Z в модели точечного заряда ядра). При $F \ll 1$ ширина барьера во много раз больше радиуса связанного состояния, и асимптотика волновой функции свободного (без поля) атома задает «начальное условие» для волновой функции в подбарьерной области. Поэтому вероятность ионизации $w_R \propto |\psi(b)|^2$ пропорциональна $|C_\lambda|^2$.

Для нерелятивистского атома водорода имеем $Z = 1$, $\nu = C_\lambda^2 = 1$ (для $1s$ -уровня), $D = 8\sqrt{3}/\pi = 7.818$, $\omega_b = me^4/2\hbar^3 = 2.067 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$, и формула (4.2) принимает вид (в атомных единицах)

$$\begin{aligned} w_{NR}^a &= 4\sqrt{\frac{3}{\pi\mathcal{E}_0(1-\rho^2)}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{2}{3\mathcal{E}_0}\left(1-\frac{3-\rho^2}{30}\gamma^2\right)\right\}, \quad 0 \leq \rho^2 < 1, \end{aligned} \quad (4.6)$$

а в случае циркулярной поляризации —

$$\begin{aligned} w_{NR}^a &= \\ &= \frac{4}{\mathcal{E}_0} \exp\left\{-\frac{2}{3\mathcal{E}_0}\left(1-\frac{1}{15}\gamma^2\right)\right\}, \quad \gamma = \gamma_R, \end{aligned} \quad (4.7)$$

см., например, обзор [12]. Поправки порядка γ^2 в показателе экспоненты были вычислены в работах [2, 3].

Формулы (4.2)–(4.5) позволяют рассчитать скорость ионизации основного состояния при любом Z . Результаты численных расчетов обсудим в следующем разделе.

Перейдем теперь к случаю $\gamma_R \gg 1$, когда процесс ионизации является многофотонным. Поскольку $\omega/m \lesssim 10^{-5}$ для лазеров оптического и инфракрасного диапазонов, данный режим может быть реализован, если будут сконструированы мощные рентгеновские лазеры, что является делом достаточно далекого будущего. Поэтому мы рассмотрим

случай $\gamma_R \gg 1$ кратко, ограничиваясь лишь одним (впрочем, наиболее важным) экспоненциальным множителем.

При $\gamma_R \gg 1$ скорость ионизации удобно переписать в следующем виде:

$$w_R \propto \exp\{-2K_0 f(\gamma_R, \epsilon)\}, \quad (4.8)$$

где K_0 — параметр многоквантовости:

$$K_0 = E_b / \hbar\omega = mc^2(1 - \epsilon) / \hbar\omega. \quad (4.9)$$

При этом

$$f(\gamma_R; \epsilon, \rho) = k(\epsilon)\gamma_R g(\gamma_R; \epsilon, \rho), \quad (4.10)$$

где

$$k(\epsilon) = \frac{\xi^2}{\sqrt{1 + \xi^2} - 1 + \xi^2}, \quad (4.11)$$

причем коэффициент k изменяется в ограниченных пределах: $2/3 < k(\epsilon) < 3/4$ при $1 > \epsilon > -1$ (см. рис. 2). Асимптотика функции (4.10) является логарифмической,

$$f(\gamma_R; \epsilon, \rho) \approx \ln(2\gamma_R) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{2(1 - \xi^2/3)}{(1 + \epsilon)(1 - \rho^2)}, \quad (4.12)$$

и устанавливается при $\gamma_R \gtrsim 3$. Отсюда с экспоненциальной точностью имеем

$$w_R(\gamma_R; \epsilon, \rho) \propto \left[\frac{e(1 + \epsilon)(1 - \rho^2)}{8\gamma_R^2} \right]^{K_0}, \quad (4.13)$$

$$e = 2.718 \dots,$$

поэтому скорость ионизации уменьшается с увеличением энергии связи уровня (при одном и том же значении параметра γ_R). В случае циркулярной поляризации предыдущие формулы несколько изменяются:

$$f(\gamma_R) \propto \ln(\gamma_R \sqrt{\ln \gamma_R}), \quad \gamma_R \rightarrow \infty, \quad (4.14)$$

и т. д.

Полная вероятность ионизации может быть представлена в виде суммы вероятностей многофотонных процессов:

$$w_R = \sum_{n > K_0} w_n, \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} \sim \gamma_R^{-2}, \quad (4.15)$$

как и в нерелятивистском случае [1–3].

При $\gamma_R > 1$ проявляется резкая зависимость вероятности w_R от формы импульса, что представляет интерес для экспериментов с ультракороткими лазерными импульсами. Данный вопрос может быть

рассмотрен с помощью ММВ (ср. с [43, 44]), но это выходит за рамки данной статьи.

Выше были рассмотрены предельные случаи малых и больших γ_R . С помощью приведенных выше уравнений можно рассмотреть и промежуточный случай $\gamma_R \sim 1$, связав тем самым области туннельной и многофотонной ионизации.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Обсудим результаты численных расчетов.

Функция $g(\gamma_R)$, стоящая в показателе экспоненты (2.9), была вычислена нами не только в адиабатической области, но и при всех γ_R (см. рис. 3). С ростом γ_R , т. е. частоты ω лазера, функция $g(\gamma_R)$ монотонно уменьшается, так же как и в нерелятивистской теории ионизации. Соответственно, вероятность ионизации возрастает (при одном и том же значении приведенного поля F). Зависимость скорости w_R релятивистской ионизации от интенсивности I излучения является чрезвычайно резкой: при росте I на порядок величина w_R увеличивается на 10–12 порядков, что вообще характерно для туннельных процессов.

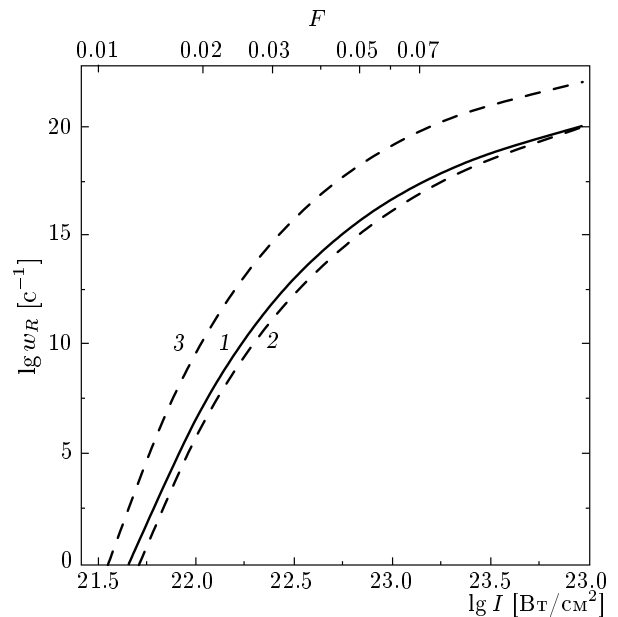


Рис. 5. Скорость ионизации основного уровня при $Z = 30$. Сплошная кривая 1 — расчет по формуле (4.2), штриховая кривая 2 — при $P = Q = S = 1$, кривая 3 — при $P = S = 1$, но с учетом кулоновского фактора Q . На верхней оси даны значения приведенного поля F

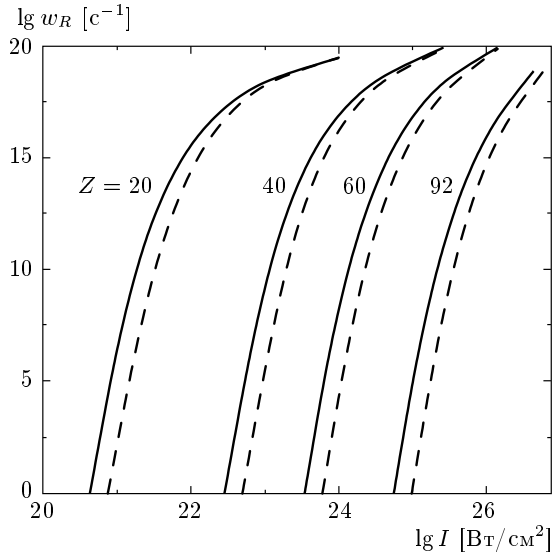


Рис. 6. Скорость туннельной ионизации низкочастотным лазерным полем: сплошные кривые — для линейной, штриховые — для циркулярной поляризации

Результаты численных расчетов представлены на рис. 4–6. Рисунок 5 иллюстрирует относительную роль различных множителей в формуле (4.2). Из него видно, что кулоновский фактор Q и предэкспонента P меняют величину w_R на несколько порядков, но действуют в разные стороны. В итоге, если положить $P = Q = S = 1$, получится весьма простая формула, которую можно использовать как первое приближение (штриховая кривая 2 на рис. 3). Как видно на рис. 6, с ростом эллиптичности значение $w_R(I)$ уменьшается на 1–3 порядка. Это объясняется тем, что при заданной интенсивности I электрическое поле $\mathcal{E}_0 \propto (1 + \rho^2)^{-1/2}$ убывает с ростом $|\rho|$. На рис. 4 показана зависимость $\lg w_R$ от приведенного поля $F = \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_{ch}$: сплошные кривые относятся к линейной поляризации, штриховая кривая — к постоянному электрическому полю (атом водорода, $\kappa = 1$). При изменении Z от 1 до 92 форма кривых качественно не меняется, но абсолютная величина вероятности w_R сильно увеличивается. Различие между двумя кривыми с $Z = 1$ обязано предэкспоненциальному множителю (4.1).

При $\epsilon \rightarrow 1$ имеем $\xi \propto \sqrt{1 - \epsilon} \rightarrow 0$ и предыдущие уравнения переходят в известные формулы нерелятивистской теории Келдыша, см. подробнее в Приложении В. В частности, при $\rho = 0$ из уравнений (2.5), (2.12) и (2.13) следует

$$g(\gamma) = \frac{3}{2\gamma} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \ln \left(\gamma + \sqrt{1 + \gamma^2} \right) - \frac{\sqrt{1 + \gamma^2}}{2\gamma} \right\}, \quad (5.1)$$

$$Q = \left(\frac{2}{F} \right)^{2n^*}, \quad P = \kappa^2 F, \quad (5.2)$$

$$n^* = \frac{Z}{\kappa}, \quad \gamma = \frac{\omega \kappa}{\mathcal{E}_0},$$

что согласуется с результатами работ [1–4]. Здесь $F = \mathcal{E}_0/\kappa^3$, $\kappa = \sqrt{2E_b}$ и используются атомные единицы $\hbar = m = e = 1$. Поправки к нерелятивистским выражениям порядка α^2 (см., например выражения (В.2) в Приложении В). Кривые на рис. 3, отвечающие $\epsilon \rightarrow 1$, построены по формуле (5.1), остальные кривые — с помощью уравнений (2.1), (2.4) и (4.2).

Оценим область применимости теории Келдыша. Для этого заметим, что

$$R = \frac{w_{NR}}{w_R} \propto \exp \left\{ - \left[\frac{2}{3} [2(1 - \epsilon)]^{3/2} - \frac{2\sqrt{3}\xi^3}{1 + \xi^2} \right] \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}_0} \right\} \approx \exp \left\{ - \frac{1}{36} (Z\alpha)^5 \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}_0} \right\}, \quad (5.3)$$

где с экспоненциальной точностью мы положили $w_{NR} \propto \exp(-2\kappa^3 \mathcal{E}_a/3\mathcal{E}_0)$ и $\kappa = \alpha^{-1} \sqrt{2(1 - \epsilon)}$. Различие между нерелятивистской и релятивистской вероятностями, w_{NR} и w_R , становится существенным при $Z \sim Z_*$,

$$Z_* = \alpha^{-1} (36\mathcal{E}_0/\mathcal{E}_{cr})^{1/5} \approx 45I^{0.1}, \quad (5.4)$$

и с дальнейшим ростом Z быстро увеличивается (здесь I — интенсивность лазерного излучения в единицах 10^{22} Вт/см²; такой интенсивности отвечает напряженность поля $\mathcal{E}_0 \sim \sqrt{8\pi I/c} \sim 500\mathcal{E}_a \sim 3 \cdot 10^{12}$ В/см). Эта простая оценка дает: $Z_* \approx 35, 45, 60, 75$ соответственно при $I = 10^{21}, 10^{22}, 10^{23}, 10^{24}$ Вт/см² в согласии с численными расчетами (рис. 7). В настоящее время такие интенсивности превышают возможности лазерной техники, однако, согласно выводам работы [10], можно рассчитывать на достижение их в ближайшем десятилетии.

Заметим еще, что $w_R \lesssim 1/\tau \sim \omega$, где τ — длительность импульса¹¹⁾. Численно имеем $\omega \approx 2.4 \cdot 10^{15}$ с⁻¹

¹¹⁾ При этом условии полная вероятность ионизации пропорциональна τ (линейный режим). При нарушении условия (5.5) экспоненциальная малость w_R исчезает.

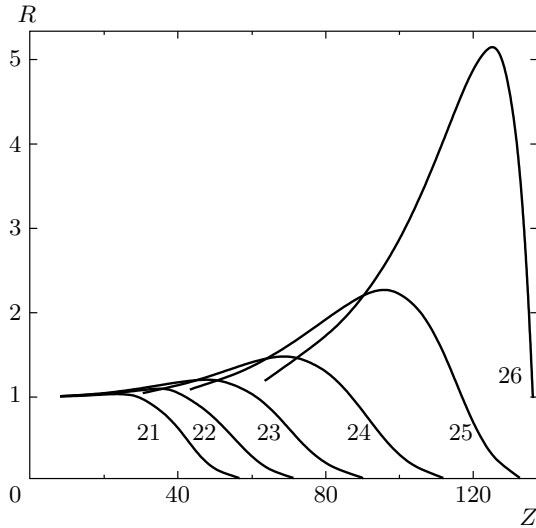


Рис. 7. Область применимости нерелятивистской теории ионизации: отношение R из формулы (5.3) в зависимости от Z (у кривых указаны значения $\lg I$ [Вт/см²])

для титан-сапфирового лазера, $\omega \approx 1.7 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ для лазера на свободных электронах [45, 46] и $\omega \approx 1.5 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$ для рентгеновского лазера [47] ($\hbar\omega = 1 \text{ кэВ}$); из рис. 4 видно, что соответствующие значения поля $F \approx 0.04\text{--}0.1$. Полагая $F = 0.1$, получаем

$$\frac{\xi^3}{1 + \xi^2} \gtrsim \sqrt{\frac{I}{I_{cr}}}, \tag{5.5}$$

$$I_{cr} = \frac{c}{8\pi} \mathcal{E}_{cr}^2 = 2.3 \cdot 10^{29} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2},$$

что ограничивает значения Z снизу (при данной интенсивности I). Это ограничение учтено на рис. 7.

В целом нерелятивистская теория Келдыша оказывается применимой в более широкой области, чем можно было бы думать *a priori*, но при очень больших интенсивностях I и при $Z \gtrsim Z_*$ нужно пользоваться релятивистскими формулами.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выше мы рассматривали ионизацию атомного уровня монохроматическим излучением с произвольной эллиптичностью ρ . В случае линейной поляризации решение уравнений ММВ нетрудно получить для лазерного импульса общего вида:

$$\mathcal{E} = \mathcal{H} = \mathcal{E}_0 \varphi(\omega(t - x)), \quad \mathcal{E} \perp \mathcal{H}, \tag{6.1}$$

где $\varphi(\theta)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая условию квазиклассичности; например, $\varphi(\theta) = 1/\text{ch}^2 \theta$, $\exp(-\theta^2)$ или $\exp(-\theta^2/2\sigma^2) \cos \theta$ — соответственно солитоноподобный и гауссовский импульсы или модулированный световой импульс с гауссовской огибающей. При этом формула (2.4) сохраняет свой вид, а уравнения для η_0 и J аналогичны (2.5) при $\rho = 0$. Так, например, в случае модулированного светового импульса

$$\mathcal{E}(t, x) = \mathcal{E}_0 \exp\{-\omega^2(x - t)^2/2\sigma^2\} \cos \omega(x - t) \tag{6.2}$$

имеем

$$F(\eta_0) = \gamma \sqrt{1 + \frac{(\epsilon - J)^2}{1 - \epsilon^2}},$$

$$\frac{1}{\eta_0} \int_0^{\eta_0} F^2(\eta) d\eta = \gamma^2 \frac{1 - J^2}{1 - \epsilon^2}, \tag{6.3}$$

где $\gamma \equiv \gamma_r$, см. (A.2), и

$$F(\eta) = \frac{1}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \exp\left(\frac{z^2}{2\sigma^2} + z\right) dz. \tag{6.4}$$

Как и выше, из этих уравнений легко определяются (численно) величины η_0 и J в зависимости от γ . Параметр σ определяет ширину огибающей. При $\sigma \rightarrow \infty$ функция $F(\eta) \rightarrow \text{sh} \eta$ и уравнения (6.3) совпадают с (2.5), если в последних положить $\rho = 0$.

С уменьшением σ значения функции $g(\gamma, \sigma)$, стоящей в показателе экспоненты (2.9), также уменьшаются, вследствие чего вероятность w_R в области $\gamma \gtrsim 1$ резко возрастает (при том же значении \mathcal{E}_0). Как и в нерелятивистской теории, это объясняется тем, что при укорочении импульса в его спектре увеличивается вес высоких гармоник основной частоты ω , для которых порог фотоионизации меньше, чем $K_0 = E_b/\hbar\omega$.

В заключение следует сказать, что релятивистское обобщение теории Келдыша рассматривается также в статьях Милосевича, Крайнова и Брабца [48], посвященных «полуклассической дираковской теории туннельной ионизации». Результаты этих работ в части, касающейся не зависящих от спина факторов, не являются оригинальными и полностью повторяют (без надлежащих ссылок) полученные ранее [2, 25, 30]. Что касается ионизации электронного уровня скрещенным полем, то рассмотрение этого вопроса в работе [48] является ошибочным из-за неучета спин-орбитального взаимодействия в подбарьерном движении электрона. Дальнейшие подробности и комментарии см. в [49].

Настоящая работа основана на докладе, представленном авторами XXIII Съезду по спектроскопии (17–21 октября 2005 г., Звенигород). Мы хотели бы выразить искреннюю благодарность С. П. Гореславскому, Л. В. Келдышу, Н. Б. Нарожному, С. В. Попруженко и В. П. Яковлеву за обсуждение полученных результатов, рецензенту нашей статьи за полезное замечание, а также С. С. Буланову, Н. С. Либовой и М. Н. Маркиной за помощь при подготовке рукописи к печати.

Работа частично поддержана РФФИ (гранты №№ 03-02-17348, 04-02-17157).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

О параметре адиабатичности

Выбор этого параметра в виде (2.6) требует пояснений. В нерелятивистской теории Келдыша [1]

$$\gamma = \omega T_t = \frac{m\epsilon\omega\kappa}{\hbar\mathcal{E}_0}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2E_b}{m\epsilon^4/\hbar^2}}, \quad (\text{A.1})$$

где T_t — характерное время туннелирования, а γ и κ — безразмерные величины. Замена $\kappa \rightarrow \alpha^{-1}\sqrt{1-\epsilon^2}$ приводит к выражению

$$\gamma_r = \frac{m\epsilon\omega}{e\mathcal{E}_0} \sqrt{1-\epsilon^2} \equiv \frac{\hbar\omega}{mc^2} \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}_0} \sqrt{1-\epsilon^2}, \quad (\text{A.2})$$

которое использовалось в ряде работ, в том числе в [17]. Тот же результат получается, если рассмотреть туннелирование в однородном электрическом поле \mathcal{E}_0 . В квазиклассическом приближении

$$\gamma_r = \omega T_t = \omega \int_0^b \frac{dx}{|v|}, \quad v = i\sqrt{-\frac{p^2}{p^2+m^2}}, \quad (\text{A.3})$$

$$p^2 = (\epsilon - V)^2 - m^2 = (m\epsilon + e\mathcal{E}_0 x)^2 - m^2, \quad (\text{A.4})$$

где $\epsilon > 0$, v — скорость (мнимая) электрона под барьером, $b = m(1-\epsilon)/e\mathcal{E}_0$ — его ширина. Вычисляя интеграл, получаем формулу (A.2). Однако для состояний с $\epsilon < 0$ эта формула уже неприменима: так, $\gamma_r \rightarrow 0$, когда $\epsilon \rightarrow -1$, т. е. уровень приближается к границе нижнего континуума. Формально это связано с тем, что при $\epsilon < 0$ контур интегрирования в комплексной плоскости «времени» t меняет свой вид, см. рис. 1 в [25].

В рамках ММВ в качестве времени туннелирования естественно взять $|t_0|$, где t_0 — полное (мнимое) время подбарьерного движения частицы. Для постоянного скрещенного поля [25, 30]

$$t_0 = i \frac{mc}{e\mathcal{E}_0} \frac{\sqrt{3}\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = i \frac{\hbar}{mc^2} \sqrt{\frac{3\xi^2}{1+\xi^2}} \frac{\mathcal{E}_{cr}}{\mathcal{E}_0}, \quad (\text{A.5})$$

что приводит к определению

$$\gamma_R = \omega|t_0| = \frac{m\epsilon\omega}{e\mathcal{E}_0} \sqrt{\frac{3\xi^2}{1+\xi^2}} = \frac{\gamma_r}{\sqrt{1-\xi^2/3}}. \quad (\text{A.6})$$

Для состояний с энергией связи $E_b < mc^2$ выражения (A.3) и (A.6) очень близки: $\gamma_r/\gamma_R = 0.997, 0.99, 0.97$, соответственно при $Z = 30, 60, 92$. С другой стороны, $\gamma_r \rightarrow 0$ при $\epsilon = -1$, а γ_R только численно множителем 1.5 отличается от параметра $\gamma_0 = m\epsilon\omega/e\mathcal{E}_0$, возникающего в теории рождения e^+e^- -пар из вакуума переменным электрическим полем (см. [50, 51], а также работу [52] и указанные в ней дальнейшие ссылки).

После перехода от γ_r к γ_R функция g , с экспоненциальной точностью определяющая вероятность релятивистской ионизации w_R , слабо зависит от энергии уровня в области $\gamma_R \lesssim 1$. Это вытекает из выражения (2.12) и в особенности из сравнения рис. 8а и 8б. Это показывает, что выбор параметра адиабатичности в виде (A.6) предпочтительнее, чем в виде (A.2). В нерелятивистском пределе как γ_R , так и γ_r переходят в параметр Келдыша (A.1):

$$\begin{aligned} \gamma_R &= \left(1 - \frac{5}{72}\alpha^2\kappa^2 + \dots\right) \gamma, \\ \gamma_r &= \left(1 - \frac{1}{8}\alpha^2\kappa^2 + \dots\right) \gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Нерелятивистский предел

Формулы (2.4)–(2.9) релятивистской теории ионизации имеют, на первый взгляд, мало общего с известными формулами теории Келдыша. Покажем, как происходит предельный переход к нерелятивистскому приближению.

Полагая

$$\epsilon = \frac{E_0}{mc^2} = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2\kappa^2, \quad (\text{B.1})$$

имеем¹²⁾

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha\kappa \left(1 + \frac{7}{72}\alpha^2\kappa^2 + \dots\right),$$

¹²⁾ Эти разложения имеют хорошую точность даже в релятивистском случае. Так, при $Z = 92$ ($\alpha\kappa = 0.720$) из (B.2) находим $\xi = 0.436$, $\lambda = 0.673$ и $\mathcal{E}_{ch}/\mathcal{E}_{cr} = 0.365$, что лишь на доли процента отличается от точных (см. таблицу) значений.

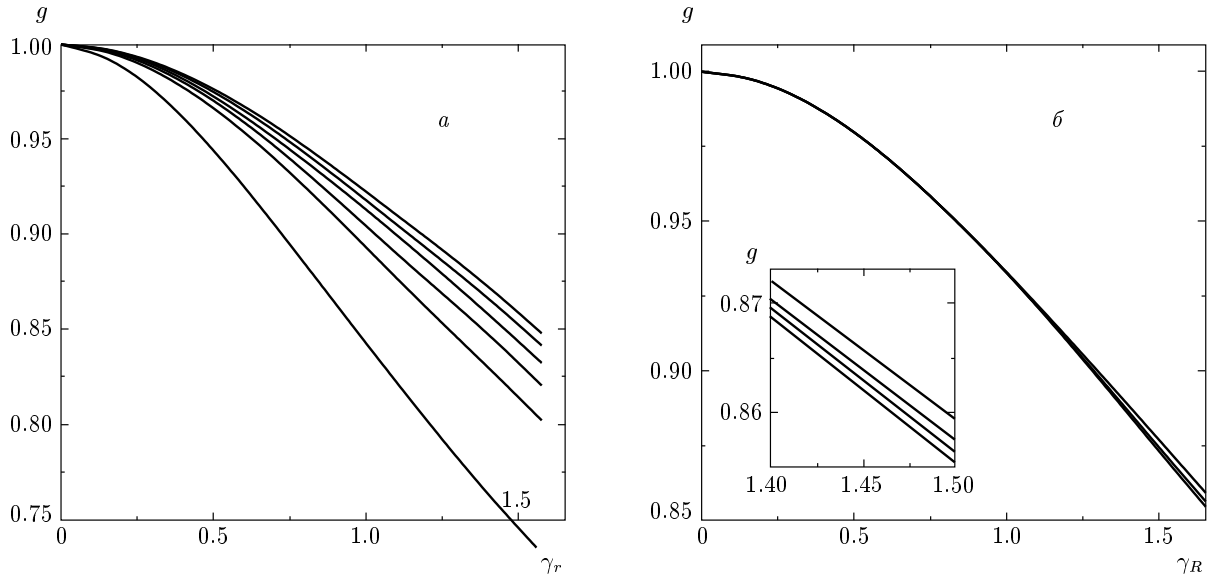


Рис. 8. Функция $g(\gamma, \epsilon)$ из (2.9) в области $\gamma \lesssim 1$ при различном выборе параметра адиабатичности: $a - \gamma = \gamma_r$, энергия $\epsilon = 1, 0.75, 0.5, 0.25, 0, -0.5$ (кривые сверху вниз); $b - \gamma = \gamma_R$ и $\epsilon = 1, 0, -0.5, -1$ (кривые сверху вниз)

$$\mathcal{E}_{ch} = \kappa^3 \mathcal{E}_a \left(1 - \frac{1}{24} \alpha^2 \kappa^2 + \dots \right),$$

$$\nu = \frac{Z}{\kappa} \left(1 - \frac{3}{8} \alpha^2 \kappa^2 + \dots \right), \quad (B.2)$$

κ см. в (A.1). С учетом того, что $(J - \epsilon)^2 = O(\alpha^4)$, первое из уравнений (2.5) принимает вид

$$\text{sh}^2 \eta_0 - \rho^2 \left(\text{ch} \eta_0 - \frac{\text{sh} \eta_0}{\eta_0} \right)^2 = \gamma^2 \quad (B.3)$$

и совпадает с уравнением $\eta_0 = -i\omega t_0$, определяющим начальный момент подбарьерного движения в поле эллиптически поляризованной световой волны [3]. Далее, из второго уравнения в (2.5) находим

$$J - \epsilon = \frac{1}{2} \alpha^2 \kappa^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left[(1 - \rho^2) \frac{\text{sh} 2\eta_0}{2\eta_0} + 2\rho^2 \left(\frac{\text{sh} \eta_0}{\eta_0} \right)^2 - (1 + \rho^2) \right] \right\} + O(\alpha^4) \quad (B.4)$$

и в итоге получаем

$$\frac{2mc^2}{\hbar\omega} (J - \epsilon) \eta_0 = 2K_0 f(\gamma, \rho), \quad (B.5)$$

где

$$f = \left(1 + \frac{1 + \rho^2}{2\gamma^2} \right) \eta_0 - \frac{1 - \rho^2}{4\gamma^2} \text{sh} 2\eta_0 - \rho^2 \frac{\text{sh}^2 \eta_0}{\gamma^2 \eta_0}, \quad (B.6)$$

$K_0 = \kappa^2 / 2\omega \equiv E_b / \omega$ — параметр многоквантовости. После подстановки в (2.4) получаем главный (экспоненциальный) фактор теории Келдыша для произвольной эллиптичности ρ , впервые вычисленный в работе [3] (в более громоздких обозначениях) и представленный в указанном выше виде в работе [6]. При этом, как обычно, переход к переменной ММВ η_0 существенно упрощает вид формул.

В случае линейной поляризации уравнение (B.3) решается явно: $\eta_0 = \text{Arsh} \gamma$. Для скорости ионизации s -уровня получаем

$$w(\mathcal{E}_0, \omega, \rho = 0) = C_\lambda^2 \cdot 2^{2n^*} F^{3/2 - 2n^*} \times \exp \left\{ -\frac{2\kappa^3}{3\mathcal{E}_0} g(\gamma) \right\}, \quad F = \frac{\mathcal{E}_0}{\kappa^3}, \quad (B.7)$$

что согласуется с результатами работ [1–4, 12] (функция $g(\gamma)$ определена в (5.1)).

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Если атомный потенциал на больших расстояниях от ядра имеет вид

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r} \left[1 + o\left(\frac{1}{r}\right) \right], \quad r \gg \frac{1}{\lambda}, \quad (C.1)$$

то из уравнения Дирака следует асимптотика для электронной плотности

$$\int d\Omega_n \psi^+(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \{2\sqrt{\lambda}C_\lambda e^{-\lambda r}(\lambda r)^\nu + \dots\}^2, \quad (C.2)$$

где $\lambda = \sqrt{1 - \epsilon^2}$, а ν — параметр Зоммерфельда (2.13). При этом предполагается нормировка $\int \psi^+ \psi d^3r = 1$.

В случае водородоподобного атома (иона) уравнение Дирака решается аналитически [21, 36], и для состояний $ns_{1/2}$ имеем

$$\epsilon_n = \left(1 - \frac{\zeta^2}{N^2}\right)^{1/2} \equiv \left(1 + \frac{\zeta^2}{\nu_n^2}\right)^{-1/2}, \quad (C.3)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

где

$$\nu_n = n - \left(1 - \sqrt{1 - \zeta^2}\right),$$

$$N = \sqrt{n^2 - 2(n-1)\left(1 - \sqrt{1 - \zeta^2}\right)},$$

$$C_n^2 = \frac{2^{2(\nu_n-1)}(1 + N^{-1})}{(n-1)!\Gamma(2\nu_n + 2 - n)}, \quad (C.4)$$

$\zeta = Z\alpha$, $n > N > \nu_n > n - 1$ и $C_n \equiv C_\lambda(ns_{1/2})$.

Далее имеем

$$\nu_n = (n-1)\epsilon_n^2 + \epsilon_n \sqrt{1 - (n-1)^2(1 - \epsilon_n^2)} \quad (C.5)$$

и, подставляя это в (C.4), выражаем асимптотический коэффициент C_n через энергию ϵ_n уровня. В частности, для основного уровня $n = N = 1$,

$$\epsilon_1 = \nu_1 = \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad C_1^2 = 2^{2\epsilon_1-1}/\Gamma(2\epsilon_1 + 1), \quad (C.6)$$

для следующего уровня $2s_{1/2}$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2}N = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \zeta^2}\right)}, \quad \nu_2 = 2\epsilon_2^2, \quad (C.7)$$

$$C_2^2 = \frac{2^{4\epsilon_2^2-2}}{\Gamma(4\epsilon_2^2)}\left(1 + \frac{1}{2\epsilon_2}\right), \quad (C.8)$$

и т. д.

Преыдущие формулы справедливы только в том случае, если в атоме имеется один электрон в состоянии $ns_{1/2}$, а остальные электроны ободраны (неэкранированный кулоновский потенциал

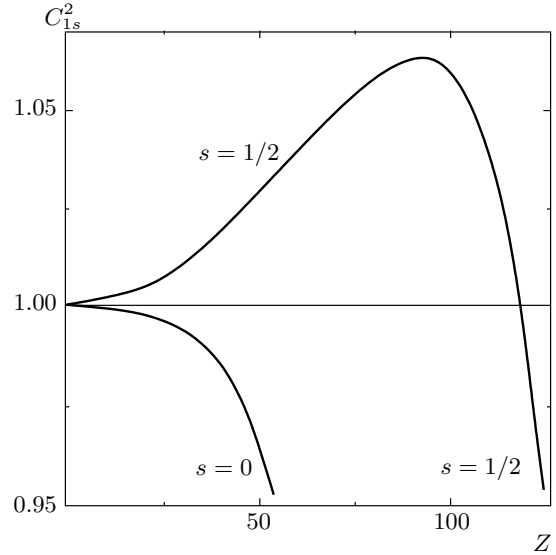


Рис. 9. Квадрат асимптотического коэффициента для основного состояния водородоподобного атома в случае частиц со спином $s = 1/2$ и $s = 0$ (нерелятивистское значение $C_{1s}^2 = 1$)

$V(r) = -\zeta/r$, $0 < r < \infty$). Для других атомов аналитическое решение отсутствует, параметры ϵ и C_λ являются независимыми, характеризуют данный атомный уровень и могут быть найдены численно¹³⁾, либо взяты из эксперимента. В наших расчетах выражения (C.6) для основного уровня использовались в качестве ориентировки.

Аналогичные формулы имеют место и в случае бесспиновых частиц.

Решение уравнения Клейна–Гордона в кулоновском поле точечного заряда имеет вид (для основного состояния $1s$)

$$\chi_0(r) = 2\sqrt{\lambda}C_\lambda e^{-\lambda r}(\lambda r)^\nu,$$

$$0 < \zeta < 1/2,$$

где

$$\epsilon = \sqrt{\nu}, \quad \lambda = \sqrt{1 - \nu},$$

$$\nu = \frac{\zeta\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \zeta^2}, \quad (C.9)$$

$$C_{1s}^2 = \frac{2^{2\epsilon^2-1}\epsilon}{\Gamma(2\epsilon^2 + 1)},$$

¹³⁾ В нерелятивистском случае, т.е. для валентных электронов, асимптотические коэффициенты C_λ известны для всех атомов, от водорода до урана, и могут быть извлечены из справочников. Согласно работе [48], коэффициенты C_λ можно выразить аналитически через ϵ для s -уровня произвольного атома (см. формулы (27) и (36) в работе [48]), что неверно.

причем условие нормировки имеет вид

$$\int \psi^* \left(\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} - 2V \right) \psi d^3r = \int_0^\infty \left(\epsilon + \frac{\zeta}{r} \right) \chi_0^2(r) dr = 1. \quad (\text{C.10})$$

При $Z \lesssim 60$ влияние релятивизма на величину C_{1s}^2 не превышает нескольких процентов (рис. 9). При $Z \rightarrow Z_{cr}$ происходит уменьшение значений C_{1s}^2 до $1/2$ (для спина $s = 1/2$) или до $1/\sqrt{2}$ ($s = 0$). Если $Z > Z_{cr}$, то в релятивистских волновых уравнениях возникает известное из квантовой механики «падение на центр», которое устраняется введением конечного радиуса ядра [26–29]. Приближение точечного заряда неприменимо для состояний с энергией $-1 < \epsilon < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
2. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **50**, 255 (1966); **52**, 223 (1967).
3. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393; **51**, 309 (1966).
4. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **52**, 514 (1967).
5. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **70**, 493 (1999); ЖЭТФ **118**, 56 (2000).
6. В. Д. Мур, С. В. Попруженко, В. С. Попов, ЖЭТФ **119**, 893 (2001).
7. G. Mourou, C. P. J. Batty, and M. D. Perry, Phys. Today **51**(1), 22 (1998).
8. T. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. **72**, 545 (2000).
9. S. V. Bulanov, F. Califano, G. I. Dudnikova et al., Rev. Plasma Phys. **22**, 227 (2001).
10. T. Tajima and G. Mourou, Phys. Rev. Special Topics — Accelerators and Beams **5**, 031301 (2002).
11. S.-W. Bahk, P. Rousseau, T. A. Planchon et al., Opt. Lett. **29**, 2837 (2004); Appl. Phys. B **80**, 823 (2005); **81**, 727 (2005).
12. В. С. Попов, УФН **174**, 921 (2004).
13. В. С. Попов, препринты ИТЭФ 13-04, 4-05, Москва (2004); ЯФ **68**, 717 (2005).
14. F. Sauter, Z. Phys. **69**, 742 (1931); **73**, 547 (1931).
15. W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
16. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
17. В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, Письма в ЖЭТФ **79**, 320 (2004).
18. В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, С. Г. Поздняков, в Тезисы докладов XXIII съезда по спектроскопии, (2005), с. 23; препринт ИТЭФ 22-05 (2005).
19. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, С. Г. Поздняков, В. С. Попов, в сб. Научная сессия МИФИ-2006, Москва (2006), т. 5, с. 178.
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика (нерелятивистская теория), Физматгиз, Москва (1963).
21. L. I. Schiff, Quantum Mechanics, Mc Graw-Hill, New York (1955).
22. V. Fock, Phys. Z. Sowjet. **12**, 404 (1937).
23. В. А. Фок, Работы по квантовой теории поля, Изд-во ЛГУ, Ленинград (1957), с. 141.
24. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматлит, Москва (2001), § 22.
25. В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, Письма в ЖЭТФ **66**, 229 (1997); V. S. Popov, B. M. Karnakov, and V. D. Mur, Phys. Lett. **250A**, 20 (1998).
26. I. Pomeranchuk and Ya. Smorodinskdy, J. Phys. USSR **9**, 97 (1945).
27. W. Pieper and W. Greiner, Z. Phys. **218**, 327 (1969).
28. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **11**, 254 (1970); ЯФ **12**, 429 (1970), **64**, 421 (2001).
29. Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, УФН **105**, 403 (1971).
30. В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, В. С. Попов, ЖЭТФ **114**, 798 (1998).
31. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, ЯФ **62**, 1444 (1999).
32. М. С. Маринов, В. С. Попов, ЯФ **15**, 1271 (1972).
33. V. Bargmann, L. Michel, and V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).
34. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Релятивистская квантовая теория, ч. 1, Наука, Москва (1968).
35. G. Breit, Nature **122**, 649 (1928).

36. Г. Бете, Э. Солпитер *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, Физматгиз, Москва (1960).
37. W. Pauli, *Helv. Phys. Acta* **5**, 479 (1932); В. Паули, *Труды по квантовой теории*, Наука, Москва (1975), с. 563.
38. S. I. Rubinow and J. B. Keller, *Phys. Rev.* **131**, 2789 (1963).
39. V. S. Popov, V. L. Eletsky, V. D. Mur, and D. N. Voskresensky, *Phys. Lett.* **80B**, 68 (1978).
40. В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский, Письма в ЖЭТФ **28**, 140 (1978); ЖЭТФ **76**, 431 (1979).
41. M. S. Marinov and V. S. Popov, *J. Phys. A* **8**, 1575 (1975).
42. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
43. В. С. Попов, ЖЭТФ **120**, 315 (2001).
44. V. S. Popov, *Phys. Lett.* **298A**, 83 (2002); В. С. Попов, ЖЭТФ **121**, 1235 (2002).
45. J. Andruszkow et al., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3825 (2000).
46. T. Laarmann et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 143401 (2004).
47. A. Ringwald, *Phys. Lett.* **510B**, 107 (2001).
48. N. Milosević, V. P. Krainov, and T. Brabec, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 193001 (2001); *J. Phys. B* **35**, 3515 (2002).
49. B. M. Karnarov, V. D. Mur, and V. S. Popov, E-print archives, quant-ph/0405158; *Laser Phys.* **15**, 1556 (2005).
50. E. Brezin and C. Itzykson, *Phys. Rev. D* **2**, 1191 (1970).
51. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **13**, 261 (1971); ЖЭТФ **61**, 1334 (1971).
52. С. С. Буланов, Н. Б. Нарожный, В. Д. Мур, В. С. Попов, ЖЭТФ **129**, 14 (2005).