

# ДВИЖЕНИЕ КОМПЛЕКСОВ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ДВУМЕРНЫХ ЛАЗЕРНЫХ СОЛИТОНОВ

*Н. Н. Розанов\*, С. В. Федоров, А. Н. Шацев*

*ФГУП «Научно-производственная корпорация  
«Государственный оптический институт им. С. И. Вавилова»,  
Научно-исследовательский институт лазерной физики  
199034, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 21 октября 2005 г.

Выполнен анализ комплексов слабо связанных пространственных двумерных солитонов в широкоапертурном лазере класса А с насыщающимся поглощением и изучено движение таких комплексов. Сформулированы правила симметрии, определяющие характер поперечного движения комплексов. Численным решением управляющего обобщенного уравнения Гинзбурга–Ландау продемонстрированы (в соответствии с этими правилами симметрии поперечных распределений интенсивности и потоков энергии) четыре типа комплексов слабо связанных лазерных солитонов: 1) неподвижные (две оси зеркальной симметрии), 2) вращающиеся при неподвижном центре инерции (симметрия по отношению к повороту), 3) движущиеся прямолинейно без вращения (одна ось зеркальной симметрии), 4) асимметричные вращающиеся при синхронизированном круговом движении центра инерции (с совпадающими периодами двух движений).

PACS: 42.65.Tg

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Оптические солитоны — локализованные сгустки света со стабильной формой — помимо важного прикладного значения в задачах передачи и обработки информации [1] представляют и чисто научный интерес, в частности, в контексте давней проблемы соотношения между волнами и частицами. Более определенной может быть такая постановка вопроса. Если сопоставить солитоны частицам, то в какой мере для них сохраняются обычные свойства частиц? В действительности эти свойства различаются для консервативных (без существенного притока и оттока энергии) и диссипативных (с существенным энергообменом) солитонов. Здесь мы ограничимся рассмотрением только диссипативных солитонов, для которых в последнее время в экспериментальных исследованиях достигнут впечатляющий прогресс [2, 3]. Отметим следующие важные для дальнейшего изложения особенности диссипативных солитонов. Во-первых, диссипативные оптические солитоны обладают нетривиальной внутрен-

ней структурой, проявляющейся в различном характере потоков энергии в разных ячейках солитона [4]. Поэтому сопоставляемые солитонам частицы неэлементарны. Во-вторых, в зависимости от структуры потоков энергии в устойчивых комплексах таких солитонов можно выделить случаи как слабой, так и сильной связи [4]. В третьих, весьма необычными оказываются механические свойства асимметричных комплексов диссипативных солитонов — их центр инерции может двигаться криволинейно [5, 6], в отличие от правил механики Ньютона для частиц или полей в прозрачных средах [7, 8]. Последнее обстоятельство делает актуальным более детальный анализ условий и природы криволинейного движения солитонных структур.

Этому вопросу и посвящена данная статья. Ранее криволинейное движение было найдено нами для устойчивых комплексов лазерных солитонов с сильной связью [5, 6]; известно также, что криволинейное движение центра световых пучков реализуется даже в линейных средах с дихроизмом (анизотропией поглощения и/или усиления среды) [9], но такое движение ограничено по длине распростране-

\*E-mail: rosanov@NR3748.spb.edu

ния. Здесь мы примем ту же модель лазерной схемы, что и в работах [5, 6], но рассмотрим только слабое взаимодействие лазерных солитонов. Это позволит нам проверить, в частности, возможность установившегося криволинейного движения (в поперечном направлении по отношению к оси системы) в отсутствие сильной связи и, тем самым, более полно выявить природу этого эффекта. Также проанализируем роль оптических вихрей (винтовых дислокаций волнового фронта) и симметрии поперечных распределений интенсивности и потоков энергии в характере движения диссипативных солитонов.

В разд. 2 поясняется модель лазерной схемы, вводится управляющее уравнение — обобщенное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау для огибающей электрического поля, приводятся определения и основные исходные соотношения. В разд. 3 анализируются общие свойства движения структур поля с различными типами симметрии. В следующих двух разделах представлены результаты анализа и численного моделирования комплексов слабо связанных лазерных солитонов с нулевым (разд. 4) и ненулевым (разд. 5) топологическими зарядами. Общие выводы приведены в Заключение.

## 2. МОДЕЛЬ ЛАЗЕРА И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Используем ту же модель лазерной схемы, что и в работах [2, 4–6]. Одновременно рассматривается либо широкоапертурный лазер с плоскопараллельными зеркалами, между которыми помещена среда с (безынерционно) насыщающимися усилением и поглощением, либо сплошная среда с насыщающимися усилением и поглощением. В первом случае применяется усреднение огибающей электрического поля  $E(\mathbf{r}_\perp, t)$  по продольной координате  $z$  (приближение среднего поля, справедливое при малости линейных и нелинейных искажений огибающей поля за один проход через резонатор,  $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$  — двумерный вектор поперечных координат [10]). При этом эволюционной переменной служит время  $t$ . Во втором случае предполагается распространение монохроматического излучения, усреднение по продольной координате  $z$  не проводится и, напротив, переменная  $z$  является эволюционной. В обоих случаях квазиоптическое уравнение для огибающей имеет вид обобщенного комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау:

$$\frac{\partial E}{\partial \zeta} = (i + d)\Delta_\perp E + f(|E|^2) E. \quad (2.1)$$

Здесь  $\zeta$  — безразмерная эволюционная переменная (для первого варианта схемы это время  $t$  в единицах времени затухания поля в пустом резонаторе),  $d$  — эффективный коэффициент диффузии, описывающий слабую угловую селективность поглощения ( $0 < d \ll 1$ ),  $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  — поперечный оператор Лапласа, отвечающий дифракции излучения, поперечные координаты  $x$  и  $y$  для первого варианта схемы выражены в единицах эффективной ширины зоны Френеля

$$w_F = \left( \frac{L_c}{2k(1 - |R|)} \right)^{1/2},$$

где  $L_c$  — длина резонатора,  $k$  — волновое число в линейной среде,  $R$  — произведение амплитудных коэффициентов отражения зеркал резонатора. Функция  $f(|E|^2)$ , которую здесь будем считать вещественной (в пренебрежении частотными расстройками) функцией интенсивности поля  $I = |E|^2$ , так что  $\text{Im} f = 0$ , описывает насыщение усиления и поглощения; в нее же включаются и постоянные (нерезонансные) потери. Предположение безынерционности нелинейности можно оправдать, если времена релаксации среды много меньше времени затухания поля в пустом резонаторе (лазер класса А). Тогда для функции  $f$  можно использовать форму, следующую из двухуровневой модели сред с усилением и поглощением

$$f(|E|^2) = -1 + \frac{g_0}{1 + |E|^2} - \frac{a_0}{1 + b|E|^2}, \quad (2.2)$$

где  $g_0$  и  $a_0$  — линейные коэффициенты усиления и поглощения,  $b$  — отношение интенсивностей насыщения усиления и поглощения, а нерезонансные потери за счет нормировки времени представлены членом  $-1$  в правой части. Далее будем для определенности рассматривать первый (резонаторный) вариант схемы, в котором эволюционной переменной служит время  $t$ . Поперечные (по отношению к оси основного распространения) потоки энергии (поперечный вектор Пойнтинга)  $\mathbf{S}_\perp = (S_x, S_y)$  в используемом квазиоптическом (параксиальном) приближении для излучения с фиксированной (близкой к линейной) поляризацией в фиксированный момент времени  $t$  выражаются через медленно меняющуюся комплексную амплитуду (огибающую)  $E$ , вещественную амплитуду  $A = \sqrt{I} = |E|$  и фазу  $\Psi = \arg E$  соотношениями [4]

$$\mathbf{S}_\perp = A^2 \nabla_\perp \Psi = \text{Im}(E^* \nabla_\perp E). \quad (2.3)$$

Линии тока для поперечных потоков энергии (кривые, касательная к которым в каждой точке совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{S}_\perp$ ) определяются

уравнениями, которые, согласно [4], записываются с помощью параметра  $\tau$ , меняющегося вдоль кривой вместе с ее длиной:

$$\frac{dx}{d\tau} = S_x(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = S_y(x, y). \quad (2.4)$$

Здесь  $\mathbf{r}_\perp(x, y)$  — поперечные координаты. Задание в фиксированный момент времени поперечных распределений интенсивности  $I(x, y)$  и поперечного вектора Пойнтинга  $\mathbf{S}_\perp(x, y)$  определяет структуру поля с точностью до несущественного постоянного сдвига фазы.

Важной характеристикой локализованной структуры поля служит положение ее центра инерции, или центра интенсивности, определяемое в фиксированный момент времени естественным образом:

$$\mathbf{R}_c(t) = \frac{\int \mathbf{r}_\perp |E|^2 d\mathbf{r}_\perp}{\int |E|^2 d\mathbf{r}_\perp}. \quad (2.5)$$

Соответственно, скорость движения центра инерции дается выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_c(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{R}_c = \\ &= \frac{\int \mathbf{r}_\perp \frac{\partial I}{\partial t} d\mathbf{r}_\perp \int I d\mathbf{r}_\perp - \int \mathbf{r}_\perp I d\mathbf{r}_\perp \int \frac{\partial I}{\partial t} d\mathbf{r}_\perp}{\left( \int I d\mathbf{r}_\perp \right)^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Представляется достаточно очевидным, что мгновенная скорость движения центра полностью определяется распределениями (в тот же момент времени) интенсивности  $I(x, y)$  и поперечного вектора Пойнтинга  $\mathbf{S}_\perp(x, y)$ . Действительно, в силу инвариантности управляющего уравнения (2.1) к постоянному сдвигу фазы эта фаза не может влиять на интересующее нас движение. Формально это можно показать, исходя из вытекающего из (2.1) динамического уравнения для интенсивности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= -2 \operatorname{Im}(E^* \Delta_\perp E) + 2d \operatorname{Re}(E^* \Delta_\perp E) + 2If(I) = \\ &= -2 \operatorname{div}_\perp \mathbf{S}_\perp + 2d \left( A \Delta_\perp A - \frac{1}{I} \mathbf{S}_\perp^2 \right) + 2If(I). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В последнем соотношении первое слагаемое отвечает изменению интенсивности за счет переноса энергии и сохраняет вид и для схем без диффузии ( $d = 0$ ) и потерь ( $f = 0$ ); эти факторы описываются, соответственно, вторым и третьим слагаемыми. Из формул (2.6) и (2.7) следует, что мгновенная скорость

движения центра инерции выражается через вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}_\perp$  и интенсивность излучения  $I$  (напомним, что амплитуда  $A = \sqrt{I}$ ).

### 3. ДВИЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ СТРУКТУР

Общий характер движения может быть выяснен уже из соображений симметрии. При этом мы имеем в виду симметрию распределений одновременно интенсивности  $I(x, y)$  и поперечного вектора Пойнтинга  $\mathbf{S}_\perp(x, y)$  локализованных структур поля в фиксированный момент времени и предполагаем, что симметричная структура устойчива по отношению к малым асимметричным возмущениям (последние не нарастают при дальнейшей эволюции). Для дальнейшего важны следующие два случая симметрии.

1. *Осевая (зеркальная) симметрия.* Для скалярного поля  $I(x, y)$  условие симметрии очевидно, а для векторного поля  $\mathbf{S}_\perp(x, y)$  имеется в виду, что при отражении от оси симметрии продольная (по отношению к этой оси) компонента  $\mathbf{S}_\perp(x, y)$  сохраняется, а поперечная меняет знак. Утверждение состоит в том, что для этого типа симметрии скорость движения центра инерции  $\mathbf{V}_c$  направлена вдоль оси симметрии. Соответственно, движение структуры может быть только прямолинейным, а ее вращение невозможно. Если структура обладает двумя осями симметрии, то отсутствует как движение центра инерции, так и вращение структуры.

2. *Симметрия по отношению к повороту на угол  $\alpha = 2\pi/M$ ,  $M = 2, 3, \dots$* , т. е. наличие оси симметрии  $M$ -го порядка ( $C_M$ ). В этом случае можно утверждать, что скорость  $\mathbf{V}_c = 0$ , так что центр инерции неподвижен. При этом может иметь место вращение структуры. Случай  $M = 2$  отвечает центральной симметрии.

Доказать эти достаточно очевидные утверждения можно следующим образом. Согласно выражению (2.6) мгновенная скорость движения центра инерции определяется интегралом по поперечным координатам от функции интенсивности и вектора Пойнтинга. Для симметричной структуры область интегрирования можно разбить на несколько подобластей: две (в случае оси зеркальной симметрии, которая и будет служить границей разбиения) или  $M$  (для случая оси симметрии  $M$ -го порядка, когда подобласти — угловые секторы). Тогда скорость  $\mathbf{V}_c$  представляется как сумма двух или  $M$  составляющих:

$$\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_{c1} + \mathbf{V}_{c2} + \dots, \quad (3.1)$$

причем каждая из них получается из вектора  $\mathbf{V}_{c1}$  соответствующим преобразованием симметрии. Например, для зеркальной симметрии, как это пояснялось выше, продольная компонента  $\mathbf{V}_{c2}$  та же, что у  $\mathbf{V}_{c1}$ , а поперечная отличается знаком. Поэтому суммарный вектор  $\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_{c1} + \mathbf{V}_{c2}$  может обладать только продольной компонентой, что и доказывает первое из сделанных утверждений. Аналогично, при наличии оси симметрии  $M$ -го порядка

$$\mathbf{V}_c = \sum_{n=1}^M \mathbf{V}_{cn},$$

где отдельные слагаемые отвечают интегралу по соответствующему угловому сектору. Эти слагаемые (векторы для соседних секторов) отличаются поворотом на угол  $\alpha = 2\pi/M$ . Вводя комплексное представление этих двумерных векторов по правилу  $\tilde{V}_{cn} = V_{cn,x} + iV_{cn,y}$ , можно записать  $\tilde{V}_c = \tilde{V}_{c1} \exp(i\alpha n)$ . Тогда сумма

$$\tilde{V}_c = \tilde{V}_{c1} \sum_{n=1}^M \exp\left(i\frac{2\pi}{M}n\right) = 0, \quad (3.2)$$

что и доказывает второе утверждение. В общем (невыврожденном) случае отсутствие симметрии приводит к движению и вращению структуры.

#### 4. ОДИНОЧНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ СОЛИТОНЫ И СТРУКТУРЫ С НУЛЕВЫМ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ

Основными элементами, из которых составлены рассматриваемые в данной работе структуры, являются стационарные одиночные солитоны с осесимметричным распределением интенсивности. Для них временная зависимость огибающей имеет вид  $\exp(-i\nu t)$ , где  $\nu$  — частотный сдвиг, служащий собственным значением задачи, а огибающая поля в полярных координатах  $r, \varphi$  ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) имеет вид

$$E = F(r) \exp(im\varphi) \exp(-i\nu t), \quad (4.1)$$

где целое число  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — топологический индекс. Комплексная радиальная функция  $F(r)$  удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{m^2}{r^2} F + \frac{1}{i+d} [i\nu + f(|F|^2)] F = 0 \quad (4.2)$$

и естественным требованиям конечности при  $r \rightarrow 0$  и экспоненциального убывания при  $r \rightarrow \infty$ . Отметим, что из уравнения (4.2) видно вырождение собственного числа  $m$  и собственной функции  $F(r)$  по знаку топологического заряда. Помимо вещественной амплитуды  $A(r) = |F(r)|$  и «мгновенной» фазы  $\Psi = \arg E$  удобно ввести радиальную фазу  $\Psi_0(r) = \arg F$ , причем

$$\Psi(r, \varphi) = \Psi_0(r) + m\varphi. \quad (4.3)$$

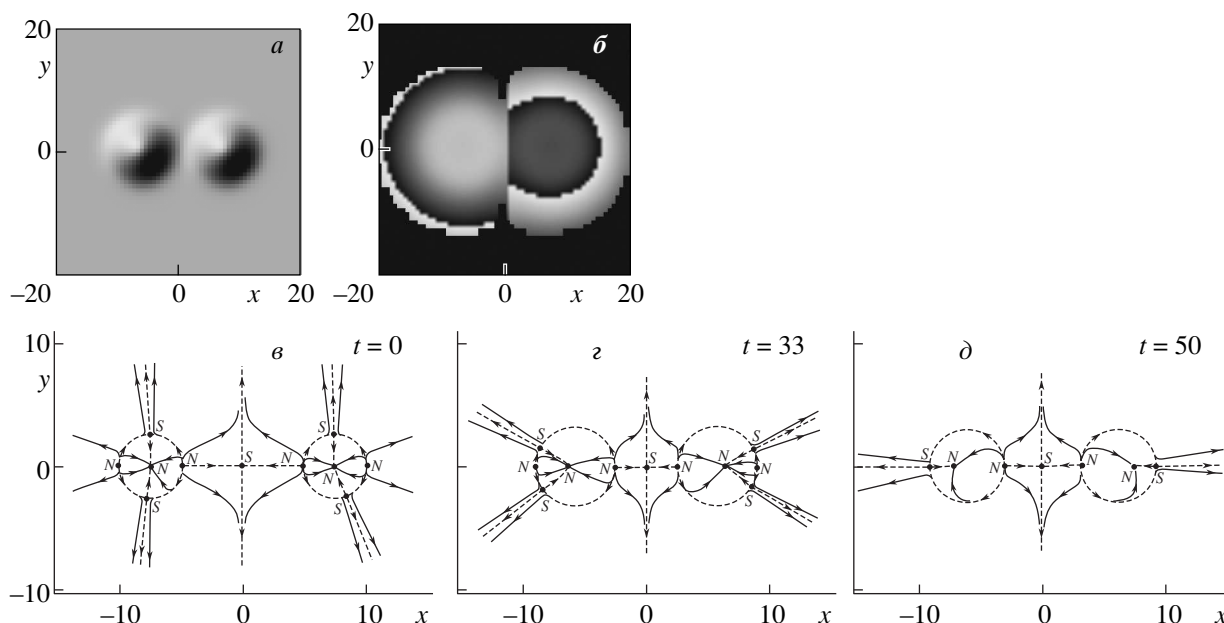
В (4.3) фиксирован момент времени  $t$  и ввиду несущественности постоянной составляющей фазы считается, что  $\Psi_0(0) = 0$ . Устойчивость этих солитонов по отношению к малым возмущениям имеет место в определенных диапазонах параметров схемы, в том числе для топологических индексов  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$  [2, 11].

Вектор Пойнтинга (2.3) для рассматриваемых солитонов в полярных координатах (с ортами  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ ) имеет вид

$$\mathbf{S}_\perp = A^2(r) \left( \frac{d\Psi_0}{dr} \mathbf{e}_r + \frac{m}{r} \mathbf{e}_\varphi \right). \quad (4.4)$$

Вид потоков энергии для этих солитонов приведен в работе [4]. Существенно, что для беззарядового солитона ( $m = 0$ ) на фазовой плоскости энергетических потоков имеется одна замкнутая линия — круг радиуса, отвечающего минимуму фазы  $\Psi_0$  как функции радиуса. Для солитонов с ненулевым топологическим зарядом радиальная зависимость  $\Psi_0$  обладает максимумом в центре (при  $r = r_0 = 0$ ) и тремя дополнительными экстремумами при  $r = r_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Соответственно, на фазовой плоскости энергетических потоков имеются три замкнутые линии (предельные циклы), которые здесь являются концентрическими окружностями с теми же радиусами  $r = r_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Эти замкнутые линии служат «сигнатурами» диссипативных солитонов. Нетрудно видеть, что для рассматриваемых одиночных солитонов распределения интенсивности и вектора Пойнтинга инвариантны относительно поворота на любой угол, т.е. обладают осью симметрии бесконечного порядка ( $M = \infty$ ). Поэтому их центр инерции неподвижен.

Описанные простейшие солитоны служат элементами для составления более сложных структур. Здесь нас будет интересовать только случай слабой связи солитонов, когда каждый из них при любых временах сохраняет все свои «собственные» замкнутые линии в фазовой плоскости потоков энергии [4]. В начальный момент времени можно задать исход-



**Рис. 1.** Установившиеся распределения интенсивности (*a*) и фазы (*б*) и начальное (*в*), промежуточное (*з*) и конечное (*д*) распределения поперечных потоков энергии для пары лазерных солитонов с нулевым топологическим зарядом. *N* и *S* — узлы и седла, сепаратрисы седел показаны штриховыми линиями со стрелками. Распределения интенсивности (*a*) и потоков энергии (*д*) имеют две оси симметрии, ввиду чего комплекс неподвижен,  $d = 0.06$

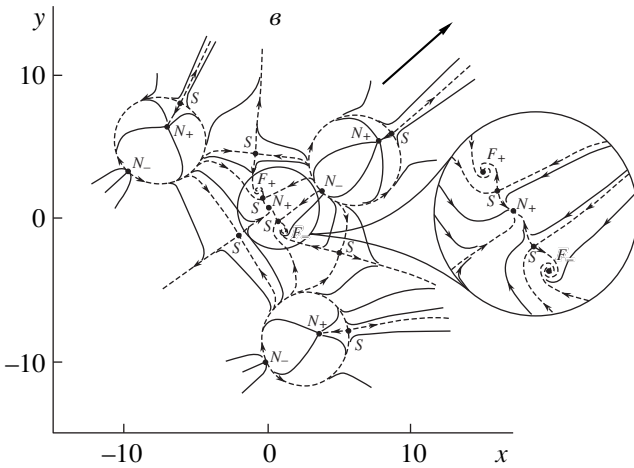
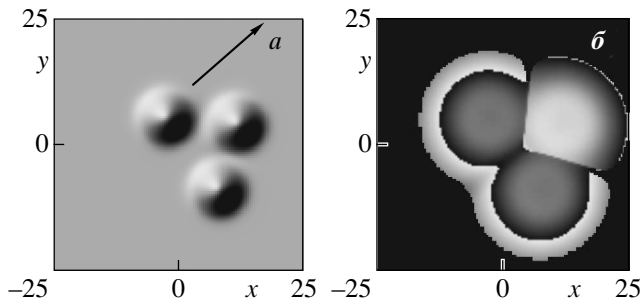
ное распределение поля в виде линейной суперпозиции  $N$  одиночных солитонов, находящихся на сравнительно большом (по сравнению с шириной одиночного солитона) расстоянии друг от друга:

$$E(t = 0) = \sum_{n=1}^N F(r_n) \exp(im_n \varphi_n + i\theta_n). \quad (4.5)$$

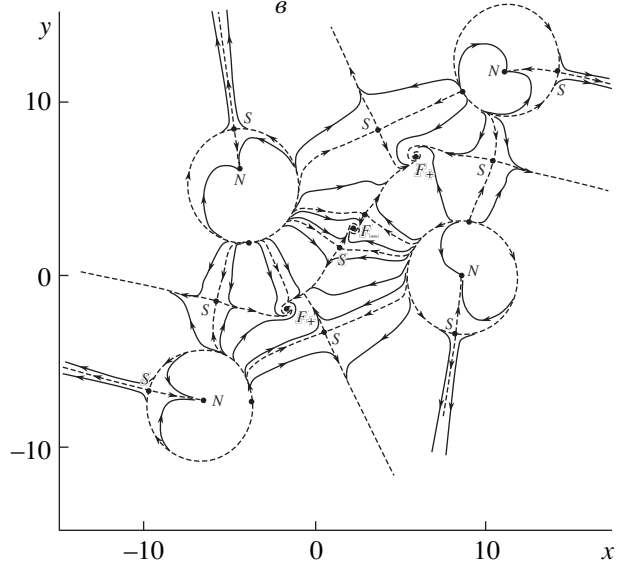
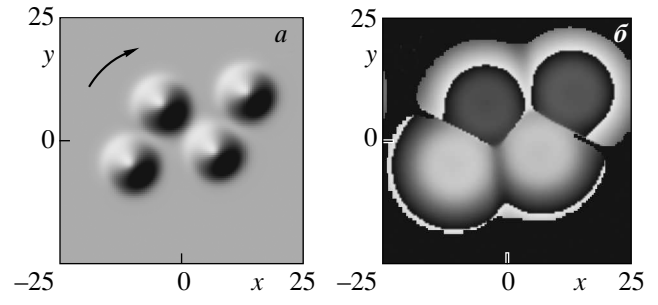
Здесь  $r_n$  и  $\varphi_n$  — полярные координаты в системе координат с центром в центре  $n$ -го солитона,  $\theta_n$  — сдвиг фазы  $n$ -го солитона, обладающего топологическим зарядом  $m_n$ . Дальнейшая эволюция находилась численным решением уравнения (2.1) с функцией нелинейности (2.2) при значениях параметров  $a_0 = 2, b = 10, g_0 = 2.11, d = 0.06, 0.12$  (метод расщепления с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье [11]). При варьировании параметров в определенном диапазоне основные результаты сохраняются. Начнем анализ связанных лазерных комплексов со случая солитонов с нулевым топологическим зарядом  $m_n = 0$ .

*Пара солитонов ( $N = 2$ ).* Для пары солитонов эволюция исходного распределения (4.5) определяется при фиксированных параметрах схемы только двумя начальными значениями — исходным расстоянием между центрами солитонов  $|r_2 - r_1|$  и разностью их фаз  $\theta = \theta_2 - \theta_1$ . Результаты расчетов

представлены на рис. 1. На рис. 1*a, б* показаны установившиеся распределения интенсивности и фазы, причем разность фаз в точках между центрами солитонов близка к  $\pi$ . Слабый тип взаимодействия солитонов иллюстрируют рис. 1*в–д*, где показаны распределения потоков энергии (на протяжении всего процесса установления сохраняются замкнутые траектории, окружающие центры индивидуальных солитонов). В то же время в процессе установления пары происходит бифуркация энергетических потоков. Так, для начального распределения (рис. 1*в*) у каждого из двух солитонов имеется по паре седел  $S$ , расположенных приблизительно над отвечающими центрам солитонов узлами  $N$ . Затем эти седла приближаются, с некоторыми осцилляциями, к периферийным узлам  $N$  (рис. 1*з*) и сливаются с этими узлами, так что при этом сохраняются периферийные седла  $S$  (рис. 1*д*). Если внести в распределение поля малую асимметрию, слияние периферийных седел и узлов будет не одновременным (невыврожденный случай), но из-за устойчивости симметричной структуры оправдано и рассмотрение вырожденной (негрубой) структуры, которая и устанавливается со временем. Как видно из рис. 1*a, д*, установившиеся распределения интенсивности и потоков энергии обладают двумя осями симметрии, ввиду че-



**Рис. 2.** Установившиеся распределения интенсивности (а), фазы (б) и потоков энергии (в) для комплекса трех солитонов с нулевым топологическим зарядом;  $F$  — фокусы. Распределения  $a$  и  $b$  имеют только одну ось симметрии, ввиду чего комплекс движется без вращения прямолинейно вдоль оси симметрии (большие стрелки);  $d = 0.06$



**Рис. 3.** Установившиеся распределения интенсивности (а), фазы (б) и потоков энергии (в) для комплекса четырех солитонов с нулевым топологическим зарядом. Распределения  $a$  и  $b$  обладают центральной симметрией, поэтому комплекс вращается при неподвижном центре в направлении, показанном искривленной стрелкой;  $d = 0.06$

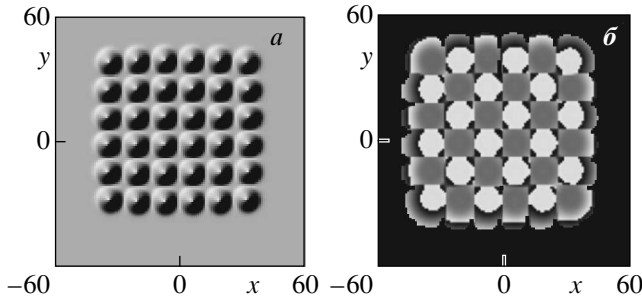
го этот двухсолитонный комплекс неподвижен.

*Три солитона ( $N = 3$ ).* На рис. 2 представлены распределения интенсивности (а), фазы (б) и потоков энергии (в) для установившегося комплекса трех солитонов. Из рис. 2в следует, что связь солитонов слабая (сохранение трех «индивидуальных» замкнутых линий на картине потоков энергии). Распределения интенсивности и потоков энергии обладают одной осью зеркальной симметрии (показана большой стрелкой на рис. 2б). Это исключает вращение комплекса и допускает только его прямолинейное движение вдоль оси симметрии. «Передняя» и «задняя» части комплекса (по направлению оси) асимметричны, ввиду чего последнее движение имеет место (с постоянной скоростью). Разность фаз между передним и каждым из задних солитонов близка к  $\pi$ . Отметим также появление в области перекрытия хвостов солитонов оптических вихрей, представленных

на рис. 2в фокусами  $F$  и имеющих интерференционный характер.

*Треугольные решетки.* Такие структуры можно рассматривать как повторение «элементарной» ячейки, отвечающей рассмотренному выше трехсолитонному комплексу. Пример четырехсолитонного комплекса ( $N = 4$ ) представлен на рис. 3. Фазы солитонов одного и того же ряда (верхнего или нижнего) близки и отличаются от фаз солитонов другого ряда примерно на  $\pi$ . Распределения интенсивности и потоков энергии обладают центральной симметрией (ось симметрии второго порядка,  $M = 2$ ), ввиду чего центр инерции комплекса неподвижен, а сам комплекс вращается с постоянной угловой скоростью.

*Прямоугольные («шахматные») решетки.* Комплексы такого типа, в которых соседние солитоны



**Рис. 4.** Распределения интенсивности (а) и фазы (б) для «идеальной» прямоугольной шахматной структуры размера 6 × 6. Ввиду наличия двух осей симметрии структура неподвижна;  $d = 0.12$

противофазны, иллюстрирует рис. 4. Они обладают двумя осями симметрии, ввиду чего неподвижны.

Структура волнового фронта этих комплексов, вообще говоря, нетривиальна, и ее затруднительно выявить численно ввиду быстрого убывания поля солитонов на их периферии. Однако возможно приближенное рассмотрение для решетки с достаточно большим числом слабо взаимодействующих солитонов, если пренебречь искажениями самой решетки вследствие взаимодействия и отклонениями от принципа суперпозиции полей индивидуальных солитонов. Точнее, нам потребуется менее жесткое условие одинаковости радиальных зависимостей полей  $F(r_n)$  в (4.5) при  $m_n = 0$ . Рассмотрим суммарное поле в междоузлии — центре элементарной ячейки с длиной стороны  $a$ , представляющей собой квадрат с солитонами, расположенными в его углах. Просуммировать поля в выражении (4.5) удобнее по слоям — наборам солитонов, расположенных на одинаковом расстоянии от междоузлия. Для радиусов окружностей  $R_{mn}$ , проходящих через узлы-солитоны, имеем

$$\frac{R_{mn}}{a/2} = \sqrt{(2m - 1)^2 + (2n - 1)^2},$$

где  $m$  и  $n$  — целые положительные числа. При  $m = n$  в слое находятся 4 узла, а при  $m \neq n$  — 8. С ростом  $m$  и  $n$  радиус быстро возрастает и, соответственно, вклад солитонов слоя в поле в междоузлии существенно ослабевает. Нетрудно видеть, что при суммировании в пределах каждого слоя поле в самом междоузлии обращается в нуль (с учетом противофазности соседних солитонов). Более того, в разложении Тейлора поля вблизи междоузлия в нуль обращаются и линейные по отклонениям от междоузлия ( $x$  и  $y$ ) члены. Поэтому случай междоузлий яв-

ляется вырожденным. Указанное разложение Тейлора начинается с квадратичных членов (вклад полей ближайшего слоя):

$$E(x, y) \approx \gamma xy, \quad \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{a} F' + 2F'', \quad (4.6)$$

где штрихи означают производные по  $r$ , вычисляемые при  $r = a/\sqrt{2}$ . В соответствии с (4.6) в распределении интенсивности  $I(x, y) \approx |\gamma|^2 x^2 y^2$  просматривается темный крест (интенсивность обращается в нуль на линиях  $x = 0$  и  $y = 0$ ). Фаза же полного поля  $\Psi$  в окрестности междоузлия примерно постоянна,  $\Psi \approx \arctg(\gamma_i/\gamma_r)$ , где  $\gamma_r = \text{Re } \gamma$  и  $\gamma_i = \text{Im } \gamma$ . Поэтому в (малой) окрестности междоузлий бесконечной решетки оптических вихрей нет.

В связи с вырожденностью ситуации здесь необходим учет дефектов решетки. Такими дефектами могут служить края решетки и вакансии — отсутствие одного или нескольких солитонов в решетке. В этих случаях для поля в окрестности междоузлия в (4.6) нужно добавить поле дефектов  $E_d$ , для которого достаточно использовать разложение Тейлора с линейными по отклонениям членами

$$E_d = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y.$$

Теперь для отыскания нулей поля имеем два уравнения:

$$\begin{aligned} \text{Re } E &= \alpha_{0r} + \alpha_{1r} x + \alpha_{2r} y + \gamma_r xy = 0, \\ \text{Im } E &= \alpha_{0i} + \alpha_{1i} x + \alpha_{2i} y + \gamma_i xy = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где индексы  $r$  и  $i$  обозначают вещественную и мнимую части. Из (4.7) следует линейное соотношение между  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} y &= \xi_0 + \xi_1 x, \quad \xi_0 = -\frac{\alpha_{0r} \gamma_i - \alpha_{0i} \gamma_r}{\alpha_{2r} \gamma_i - \alpha_{2i} \gamma_r}, \\ \xi_1 &= -\frac{\alpha_{1r} \gamma_i - \alpha_{1i} \gamma_r}{\alpha_{2r} \gamma_i - \alpha_{2i} \gamma_r}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

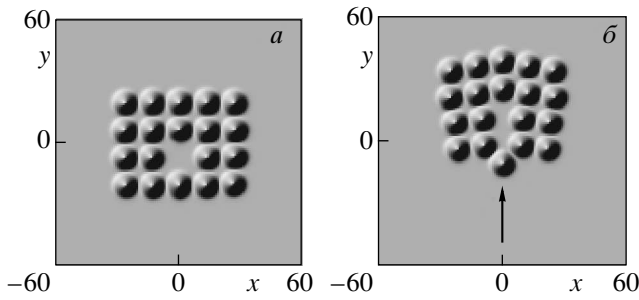
с учетом которого уравнения (4.7) сводятся к квадратному уравнению

$$\gamma_r \xi_1^2 x^2 + (\alpha_{1r} + \alpha_{2r} \xi_1 + \gamma_r \xi_0) x + (\alpha_{0r} + \alpha_{2r} \xi_0) = 0. \quad (4.9)$$

В зависимости от знака дискриминанта

$$D = 4\gamma_r \xi_1 (\alpha_{0r} + \alpha_{2r} \xi_0) - (\alpha_{1r} + \alpha_{2r} \xi_1 + \gamma_r \xi_0)^2$$

либо имеются два вещественных решения, что отвечает паре вихрей ( $D < 0$ ), либо вещественные решения отсутствуют ( $D > 0$ ), и тогда в окрестности междоузлия интенсивность положительна, что



**Рис. 5.** Начальное (*а*) и конечное (*б*) распределения интенсивности для шахматной решетки  $4 \times 5$  с вакансией, сохраняющей одну ось симметрии. Структура движется прямолинейно вдоль оси симметрии (стрелка на рис. 5*б*) с постоянной скоростью;  $d = 0.12$

исключает наличие оптических вихрей. Для дефектов в виде границ решетки в силу соображений симметрии  $\alpha_0 = 0$  и реализуется первый вариант — образование в окрестности междоузлия пары близких вихрей. Оценки показывают, что этот же вариант возникает и для дефекта в виде одиночной вакансии (при этом  $\alpha_0 \neq 0$ ). Следует отметить, что ввиду близости вихрей они не оказывают заметного влияния на динамику комплекса.

В шахматную структуру достаточно больших размеров можно внести вакансию (отсутствие одного из солитонов) таким образом, что структура останется устойчивой — она только деформируется, но не разрушается. В самом месте вакансии поле оказывается отличным от нуля, так как поля ближайшего слоя солитонов теперь складываются по фазе (слой — квадрат с ребром  $a$ ), поэтому в окрестности вакансии вихрей нет. Расчеты показывают, что структура сохраняется при внесении вакансий во внутренние ряды структуры. На рис. 5 приведена шахматная структура с вакансией, сохраняющей только одну ось симметрии. Соответственно, структура движется прямолинейно без вращения. На рис. 6 представлен пример полностью асимметричной структуры с вакансией (нет элементов симметрии). Такая структура вращается, а ее центр инерции движется по кругу. Периоды вращения и кругового движения совпадают (как при движении Луны вокруг Земли).

### 5. КОМПЛЕКСЫ ВИХРЕВЫХ СОЛИТОНОВ

Анализ комплексов слабо связанных вихревых солитонов начнем со случая одинаковых топологи-

ческих зарядов всех солитонов. Установившуюся пару ( $N = 2$ ) таких солитонов иллюстрирует рис. 7. Существенно, что устойчивыми оказываются пары синфазных солитонов (фазы двух солитонов близки). Распределения интенсивности и потоков энергии (фокусы в центрах основных вихрей на рис. 7, 12 не указываются) обладают центральной симметрией, осей симметрии не имеется. Поэтому центр инерции этой пары неподвижен, а сама она вращается с постоянной угловой скоростью. Таким образом, устойчивые вращающиеся структуры возникают уже в случае двух слабо связанных вихревых солитонов. Отличие от выводов работы [12], в которой пары вихревых солитонов считаются неустойчивыми и для вращения требуется три солитона, связано с тем, что в работе [12] рассматривались только пары противофазных вихревых солитонов (разность их фаз близка к  $\pi$ ), которые действительно образуют устойчивый комплекс.

При увеличении числа солитонов  $N$  варианты построения комплексов становятся более разнообразными. Так, при  $N = 3$  (трехсолитонный комплекс) устойчивы линейная конфигурация (рис. 8, три синфазных солитона) и три «треугольных» с разностями фаз соседних солитонов, равных 0 (рис. 9),  $2\pi/3$  (рис. 10) и  $-2\pi/3$  (рис. 11). Распределения интенсивности и вектора Пойнтинга для всех четырех комплексов обладают симметрией с осью третьего порядка ( $M = 3$ ), а осей зеркальной симметрии не имеется, ввиду чего их центр инерции неподвижен и комплекс вращается. Заметим, что из этих четырех вариантов трехсолитонных комплексов в работе [12] найден только один с разностью фаз солитонов, равной  $2\pi/3$ . Интерференция хвостов солитонов приводит к появлению дополнительных интерференционных вихрей (см. рис. 9*б*). Из сравнения рис. 10 и рис. 11 видно противоположное направление вращения комплексов, что связано с различием разности фаз солитонов. Ввиду недостатка места мы не приводим здесь найденные нами комплексы с большим числом слабо связанных вихревых солитонов.

Теперь приведем примеры комплексов слабо связанных вихревых солитонов с противоположными знаками топологического заряда. Установившаяся пара синфазных солитонов с топологическими зарядами  $m_1 = 1$  и  $m_2 = -1$  представлена на рис. 12. В этом случае распределения интенсивности и вектора Пойнтинга имеют только одну ось зеркальной симметрии, ввиду чего комплекс не вращается и движется вдоль этой оси с постоянной скоростью. Заметим, что в терминах нелинейной динамики структура потоков энергии негрубая (вырожденная). Вся ось сим-



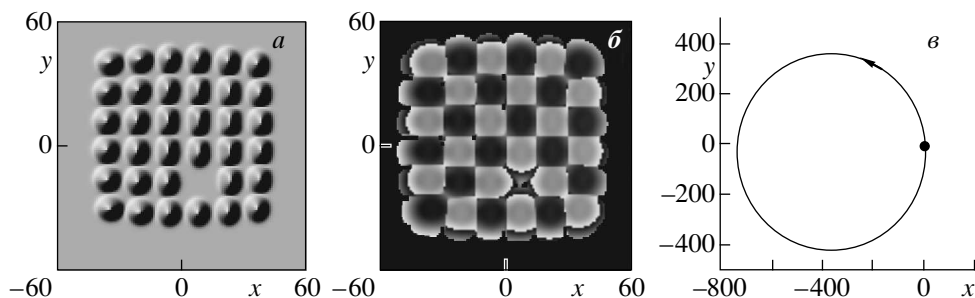


Рис. 6. Распределения интенсивности (а) и фазы (б) вращающейся асимметричной шахматной структуры 6 × 6 с вакансией и круговое движение ее центра инерции (в);  $d = 0.12$

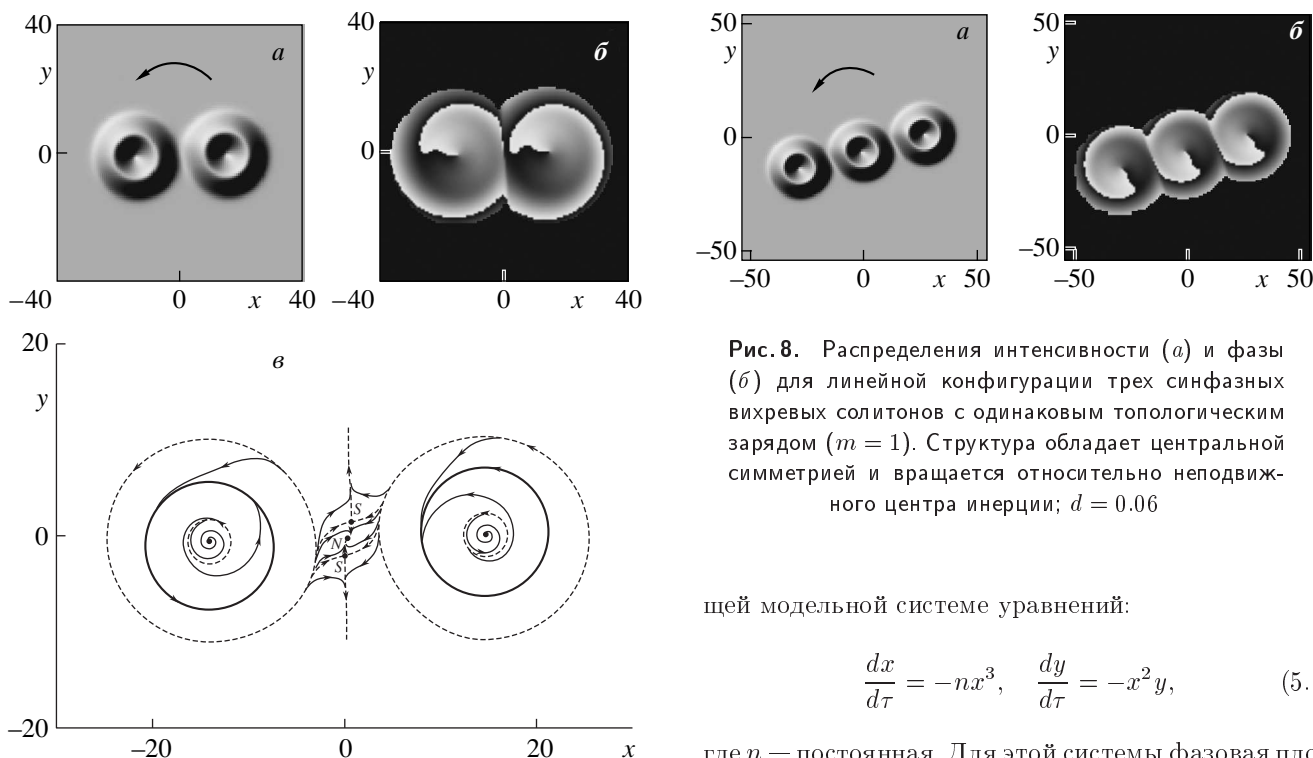


Рис. 7. Распределения интенсивности (а), фазы (б) и потоков энергии (в) для пары синфазных вихревых солитонов с одинаковым топологическим зарядом ( $m = 1$ ). Структура обладает центральной симметрией и вращается относительно неподвижного центра инерции;  $d = 0.06$

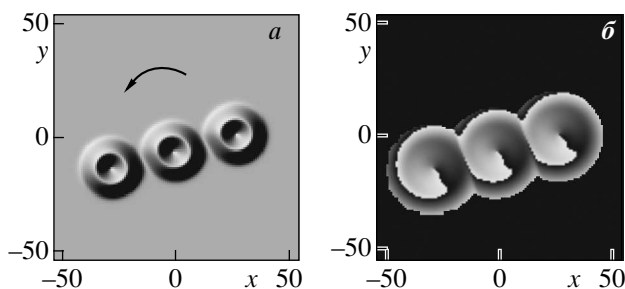


Рис. 8. Распределения интенсивности (а) и фазы (б) для линейной конфигурации трех синфазных вихревых солитонов с одинаковым топологическим зарядом ( $m = 1$ ). Структура обладает центральной симметрией и вращается относительно неподвижного центра инерции;  $d = 0.06$

щей модельной системе уравнений:

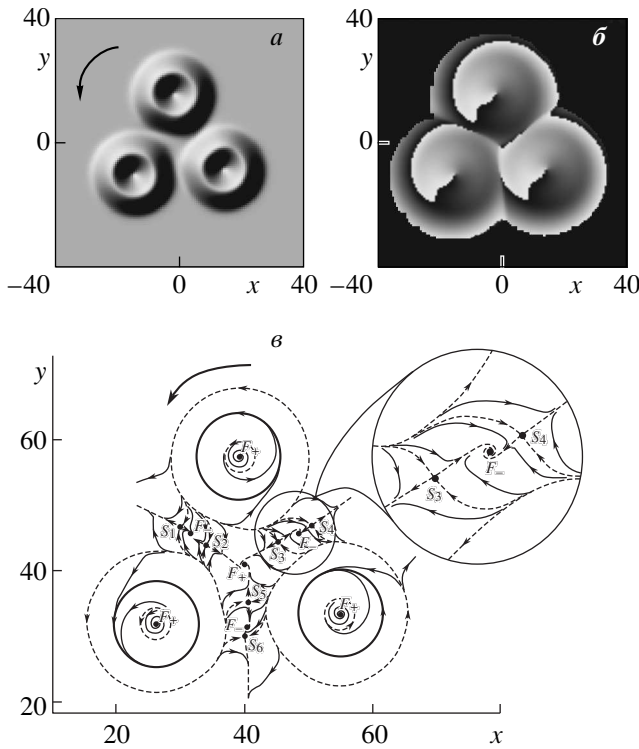
$$\frac{dx}{d\tau} = -nx^3, \quad \frac{dy}{d\tau} = -x^2y, \quad (5.1)$$

где  $n$  — постоянная. Для этой системы фазовая плоскость состоит из линий вида

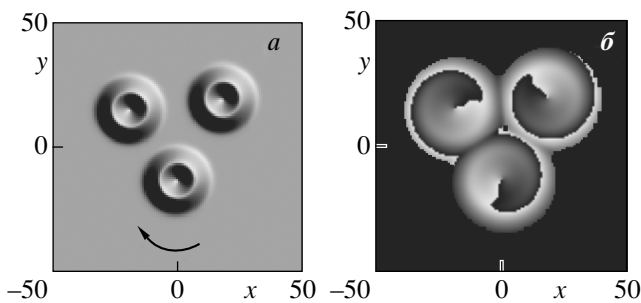
$$x|y|^n = C. \quad (5.2)$$

При  $C = 0$  это оси  $x$  и  $y$ , а при  $C \neq 0$  — гиперболы  $n$ -го порядка. Вырожденность ситуации не противоречит ее устойчивости, т. е. физической реализуемости, она вызвана устойчивостью симметричной структуры. Если в начальный момент времени в распределении поля внести малую асимметрию, то вырождение снимется, но со временем эта асимметрия будет ослабевать, а вся структура приближаться к вырожденной. Нами были найдены и комплексы с большим числом солитонов с различными знаками топологического заряда.

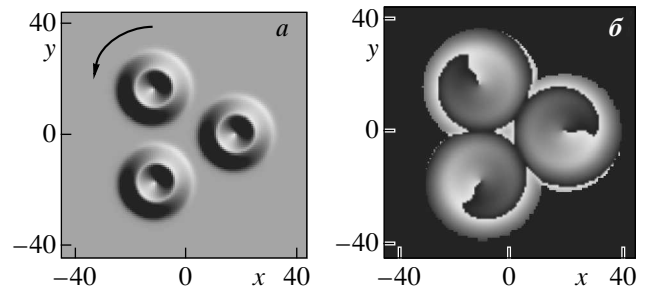
метрии отвечает неподвижным точкам, в одну из которых входят две линии (вырожденное седло). Качественно структура фазовой плоскости вблизи оси симметрии такая же, как для отвечающей следую-



**Рис. 9.** Распределения интенсивности (*a*), фазы (*б*) и потоков энергии (*в*) для «треугольной» конфигурации трех синфазных вихревых солитонов с одинаковым топологическим зарядом ( $m = 1$ ). Структура обладает симметрией по отношению к повороту на угол  $2\pi/3$  ( $M = 3$ ) и вращается относительно неподвижного центра инерции против часовой стрелки;  $d = 0.06$



**Рис. 10.** Распределения интенсивности (*a*) и фазы (*б*) для «треугольной» конфигурации трех вихревых солитонов с одинаковым топологическим зарядом ( $m = 1$ ) и разностью фаз  $2\pi/3$ . Структура обладает симметрией по отношению к повороту на угол  $2\pi/3$  ( $M = 3$ ) и вращается относительно неподвижного центра инерции по часовой стрелке;  $d = 0.06$



**Рис. 11.** Распределения интенсивности (*a*) и фазы (*б*) для «треугольной» конфигурации трех вихревых солитонов с одинаковым топологическим зарядом ( $m = 1$ ) и разностью фаз  $-2\pi/3$ . Структура обладает симметрией по отношению к повороту на угол  $2\pi/3$  ( $M = 3$ ) и вращается относительно неподвижного центра инерции против часовой стрелки;  $d = 0.06$

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье вывод работ [5, 6] о возможности криволинейного движения диссипативных солитонов обобщен на случай комплексов солитонов со слабым взаимодействием. В представленных примерах такое движение (обращение) является круговым и оно синхронизовано с вращением комплекса (типа движения Луны вокруг Земли). Сформулированы принципы симметрии, которые позволяют определить возможность (поперечного) движения и вращения комплексов. При этом речь идет об одновременной симметрии поперечных распределений интенсивности и потоков энергии. Как подтверждают многочисленные примеры, движение, не запрещенное соображениями симметрии, в общем случае действительно реализуется. Тем самым тип движения диссипативной структуры определяется ее симметрией. Симметричные соображения (см. также [2, 14]) являются более общими, чем, например, соображения, связанные с наличием или отсутствием оптических вихрей (винтовых дислокаций волнового фронта). Действительно, известны вращающиеся диссипативные (лазерные) структуры, в которых вихри отсутствуют [2, 11]. С другой стороны, структуры с оптическими вихрями могут и не вращаться в зависимости от симметрии их расположения (см. разд. 4 и 5 настоящей работы). Отметим, что указанные симметричные соображения не ограничиваются случаем слабой связи солитонов.

Набор комплексов слабо связанных солитонов оказывается также весьма обширным. Представленные выше примеры не исчерпывают его, и представ-

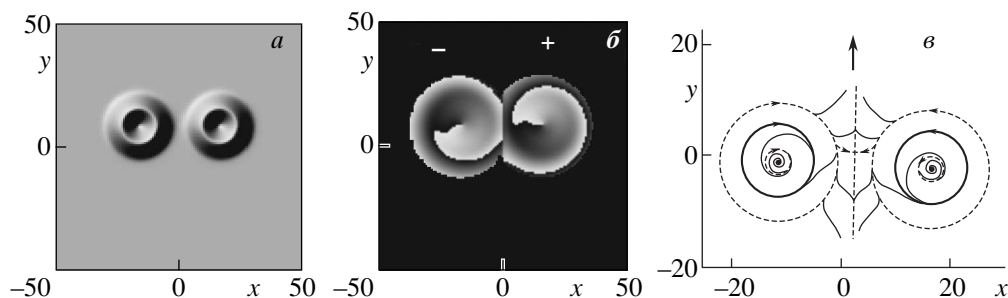


Рис. 12. Распределения интенсивности (а), фазы (б) и потоков энергии (в) для пары синфазных вихревых солитонов с противоположными топологическими зарядами ( $m_1 = 1$ ,  $m_2 = -1$ ). Структура обладает осью симметрии и движется вдоль этой оси (большая стрелка на рис. 12в);  $d = 0.06$

ляется целесообразным дальнейшее исследование этих структур. В случае слабого взаимодействия, вообще говоря, анализ движения комплексов слабо связанных солитонов можно выполнить методами теории возмущений [13], но известные попытки построения механических уравнений пока не выявили найденную нами численно возможность криволинейного движения комплексов. Возможно здесь требуется учет более высоких порядков теории возмущений; этот вопрос предполагается выяснить в дальнейшем. Принятая модель лазера класса А, строго говоря, не описывает наиболее перспективных для эксперимента случаев полупроводниковых и твердотельных лазеров. Однако общность соображений симметрии позволяет полагать, что основные выводы упрощенной модели сохранят справедливость и для этих лазеров, хотя получение количественных характеристик потребует модификации модели. Возможно и формирование локализованных структур со сходным характером движения в двумерных сетях нелинейных активных световодов [15].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 04-02-16605, 04-02-81014Бел).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, Москва (2005) (перевод с англ. Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, Amsterdam (2003)).
2. N. N. Rosanov, *Spatial Hysteresis and Optical Patterns*, Springer-Verlag, Berlin (2002).
3. *Dissipative Solitons*, ed. by N. Akhmediev and A. Ankiewicz, Lecture Notes in Physics **661**, Berlin, Springer (2005).
4. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, А. Н. Шацев, ЖЭТФ **125**, 486 (2004).
5. N. N. Rosanov, S. V. Fedorov, and A. N. Shatsev, Phys. Rev. Lett. **95**, 053903 (2005).
6. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, А. Н. Шацев, Письма в ЖЭТФ **81**, 748 (2005).
7. В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Физматлит, Москва (1961).
8. С. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород (1997).
9. Н. Н. Розанов, Опт. и спектр. **100**, 299 (2005).
10. А. Ф. Сучков, ЖЭТФ **49**, 1495 (1965).
11. S. V. Fedorov, N. N. Rosanov, A. N. Shatsev, N. A. Veretenov, and A. G. Vladimirov, IEEE J. Quantum Electron. **39**, 197 (2003).
12. D. V. Skryabin and A. G. Vladimirov, Phys. Rev. Lett. **89**, 044101 (2002).
13. K. A. Gorshkov and L. A. Ostrovsky, Physica (Amsterdam) **3D**, 428 (1981).
14. Н. Н. Розанов, Опт. и спектр. **71**, 816 (1991).
15. E. A. Ultanir, G. I. Stegeman, and D. N. Christodoulides, Opt. Lett. **29**, 845 (2004).