

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДЕФЕКТОВ В ДВУХОСНЫХ НЕМАТИКАХ И СВЕРХТЕКУЧИХ ЖИДКОСТЯХ

М. И. Монастырский, П. В. Сасоров*

*Институт теоретической и экспериментальной физики
117218, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 января 2005 г.

Показано, что линейные дефекты в двухосных нематиках могут образовывать динамически стабильные связанные состояния, если они зацеплены, почти параллельны друг другу и взаимно отталкиваются. Такая ситуация возможна для пар линейных дефектов с определенной топологией. Этот эффект может иметь место и для почти параллельных вихрей в сверхтекучих жидкостях и сверхпроводниках.

PACS: 02.40.Re, 61.30.Jf, 67.40.Vs

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования последних тридцати лет показали эффективность применения топологических методов в теории конденсированных сред. Одним из главных приложений топологии является классификация термодинамических фаз и дефектов в средах с дальним порядком, например, в жидких кристаллах и сверхтекучем ^3He [1–3]. Тем не менее более сложные объекты, такие как зацепленные (linked) дефекты и скрученные солитоны [2, 4, 5], еще недостаточно исследованы. Роль подобных образований может оказаться существенной при исследовании ряда интересных физических процессов, например, слабой турбулентности [6–8] и спиноподобной декомпозиции [9, 10] в сверхтекучих жидкостях и жидких кристаллах. Еще менее известны условия динамической стабильности подобных объектов. В этой статье мы покажем, что стабильные зацепленные состояния действительно могут существовать в двухосных нематиках и других типах жидких кристаллов со сложным параметром порядка. Следует отметить, что такие стабильные состояния должны проявляться в асимптотических решениях (при $t \rightarrow \infty$) уравнений типа Гинзбурга–Ландау и, следовательно, могут рассматриваться как связанные состояния двух линейных дефектов.

Предложенный в статье метод, основанный на анализе уравнений Гинзбурга–Ландау и топологии

пространства вырождения параметра порядка соответствующих систем, является достаточно общим. Существование связанных дефектов в других системах, например в холестериках, «голубой фазе» холестерических кристаллов, сверхпроводниках и подобных системах зависит от конкретных параметров. Эти примеры обсуждаются в конце статьи.

2. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ

Начнем наше исследование с двухосных нематиков. Наш подход к построению связанных состояний зацепленных дефектов может быть применен и для других систем.

2.1. Основные уравнения и определения

Простейшее выражение для свободной энергии двухосного нематика имеет вид [2, 11]

$$\mathcal{F} = \int_V \left[\Phi (\text{Tr} [A^2], \text{Tr} [A^3]) + \gamma_1 \partial_r A_{qp} \partial_r A_{qp} + \gamma_2 \partial_q A_{rp} \partial_p A_{rq} + \gamma_3 \partial_q A_{rq} \partial_p A_{rp} \right] dV. \quad (1)$$

Параметр порядка A , описывающий нематик, задается матрицей A_{pq} — действительной, симметрической матрицей 3×3 с нулевым следом [1, 2, 11]. Латинские индексы « p », « q », « r » нумеруют декартовы координаты в рассматриваемой области V фи-

*E-mail: monastyr@itep.ru

зического пространства \mathbb{R}^3 . Мы используем обычное правило суммирования по повторяющимся индексам. Первое слагаемое под знаком интеграла есть плотность «потенциальной» энергии, в то время как остальные три слагаемых определяют энергию деформации. Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — константы упругости.

Плотность потенциальной энергии Φ в уравнении (1) принимает минимальное значение на орбите M действия «калибровочной» группы G потенциала Φ . Группа G изоморфна группе $SO(3)$ и действует в полном пространстве параметра порядка:

$$g : A \Rightarrow gAg^{-1}, \quad g \in SO(3).$$

Орбита M состоит из матриц 3×3 , все собственные значения которых различны. Орбита M изоморфна фактор-пространству $SO(3)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \approx SU(2)/Q$.

Возможные топологические типы линейных дефектов определяются фундаментальной группой π_1 пространства вырождения параметра порядка, изоморфного орбите M [1, 2]. Для двухосного нематика классификация линейных дефектов впервые была получена в работе [12]:

$$\pi_1(M) = Q. \tag{2}$$

Здесь Q — группа единиц алгебры кватернионов:

$$Q = \{e, -e, i, -i, j, -j, k, -k\}, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -e, \quad i = jk = -kj, \\ j = ki = -ik, \quad k = ij = -ji. \end{aligned}$$

Возможные топологические заряды линейных дефектов или топологические типы таких дефектов образуют множество, изоморфное свободной гомотопической группе пространства параметра порядка M : $\hat{\pi}_1(M)$, где $\hat{\pi}_1(M)$ — множество классов сопряженных элементов группы π_1 (см., например, [1, 2]). Имеются четыре различных топологических типа линейных дефектов в двухосных нематиках. Они соответствуют сопряженным классам $-e, \pm i, \pm j, \pm k$ группы Q . Элемент e соответствует топологически тривиальному распределению параметра порядка — отсутствию топологического дефекта.

Далее для простоты предполагаем, что имеется только одна стабильная структура линейного дефекта каждого топологического типа.

2.2. Связанные состояния почти параллельных линейных дефектов

2.2.1. Одиночный линейный дефект

Рассмотрим одиночный линейный дефект длины L_{\parallel} в некоторой области V физического простран-

ства \mathbb{R}^3 . Выберем область V в виде прямого круглого цилиндра с периодическими граничными условиями вдоль его оси. При таком отождествлении область V является полноторием $S'^1 \times D^2$, где S'^1 — окружность, а D^2 — диск. Итак,

$$V = \{(x, y, z \text{ mod } L_z) : x^2 + y^2 < L_{\perp}^2\}.$$

На границе $x^2 + y^2 = L_{\perp}^2$ наложим граничные условия «скольжения»: $\partial_n A_{pq} = 0$. Пусть ядро линейного дефекта есть прямая линия, параллельная оси z : $x = y = 0$. Поперечный размер ядра дефекта, равный r_c , определяется «кривизной» потенциала Φ на орбите M и упругими константами γ_{α} . Предположим, что $L_{\perp} \sim L_z = L_{\parallel}$ и $r_c \ll L_{\perp}$. Тогда вне этого ядра параметр порядка A_{pq} находится близко (в смысле метрики Картана–Киллинга) к орбите M , где плотность потенциала достигает своего минимума. Собственные значения матриц, принадлежащих орбите M , могут быть параметризованы следующим образом:

$$\frac{2}{3}S, \quad -\frac{1}{3}(S - 3T), \quad -\frac{1}{3}(S + 3T).$$

Здесь S и T — константы, иногда называемые соответственно одноосным и двухосным модулями параметров порядка, причем $S > 3T > 0$. Итак, на больших расстояниях от ядра дефекта плотность свободной энергии сводится только к энергии деформации¹⁾:

$$\begin{aligned} F_{grad} = \gamma_1 \partial_r A_{qp} \partial_r A_{qp} + \gamma_2 \partial_q A_{rp} \partial_p A_{rq} + \\ + \gamma_3 \partial_q A_{rq} \partial_p A_{rp}. \end{aligned} \tag{4}$$

Подразумевается, что матричный параметр порядка принадлежит теперь орбите M . Выражение для свободной энергии (4) не содержит никакого параметра с размерностью длины. Это означает, что на расстояниях r от ядра дефекта таких, что $r_c \ll r \ll L_{\perp}$, матричный параметр порядка может зависеть только от полярного угла φ в плоскости xy . Проводя дифференцирование в формуле (4), получаем, что в этой области $F_{grad} \approx f(\varphi)/r^2$. Поэтому интегрирование по объему V от F_{grad} естественно представить в виде трех повторных интегрирований. Интеграл по углу ϕ дает определенную константу, зависящую от параметров модели ($S, T, \gamma_{1,2,3}$) и от типа дефекта. Интеграл по z дает длину дефекта L_{\parallel} в качестве множителя. Интеграл по радиусу r логарифмически

¹⁾ Общее выражение для энергии деформации двухосного нематика получено в работе [13]. Дальнейшее обсуждение, за очевидным исключением разд. 3, не зависит от конкретной формы энергии деформации.

расходится как при больших, так и при малых r в рассматриваемой области $r_c \ll r \ll L_\perp$. Отсюда вытекает, что свободную энергию линейного дефекта можно выразить следующим образом:

$$\mathcal{F}_\lambda = K_\lambda L_\parallel \ln \frac{L_\perp}{r_c} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln(L_\perp/r_c)}\right) \right], \quad (5)$$

где

$$K_\lambda \equiv \gamma_1 S^2 \bar{K}_\lambda \left(\frac{T}{S}, \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \right). \quad (6)$$

Здесь параметр $\lambda \in \{-e, i, j, k\}$ обозначает топологический тип линейного дефекта.

Дальнейшее изложение сильно зависит от специфической формы свободной энергии (5) одиночного линейного дефекта. Эта специфика состоит в том, что свободная энергия определяется в основном областью $r_c \ll r \ll L_\perp$ с относительно тривиальной пространственной зависимостью параметра порядка, из которой нам в дальнейшем надо знать только одну константу \bar{K}_λ , в то время как нетривиальное с аналитической точки зрения и неуниверсальное поведение параметра порядка на больших расстояниях, сравнимых с внешним размером задачи, вносит лишь относительно малую поправку к свободной энергии линейного дефекта.

2.2.2. Пара зацепленных друг за друга дефектов

Рассмотрим теперь в той же области V систему из двух почти параллельных оси z , а значит, и между собой линейных дефектов η_1 и η_2 соответственно типов λ_1 и λ_2 . Угол между касательными к линиям η_1 и η_2 много меньше $\pi/2$. Предположим далее, что расстояние $\rho_{12}(z)$ между дефектами в плоскости xy удовлетворяет условию $r_c \ll \rho_{12}(z) \ll L_\perp$ в любом сечении, перпендикулярном оси z , и что кривые η_1 и η_2 — достаточно гладкие. В этом случае можно написать

$$\mathcal{F}_{12} = \bar{\mathcal{F}}_{12} + \gamma_1 S^2 O(1) \quad (7)$$

при $r_c/\rho_{12}(z) \rightarrow 0$ и $\rho_{12}(z)/L_\perp \rightarrow 0$, где

$$\bar{\mathcal{F}}_{12} = \gamma_1 S^2 \left[\bar{K}_{\lambda_1} \int_{z=0}^{L_\parallel} \ln \frac{\rho_{12}(z)}{r_c} dl_1 + \bar{K}_{\lambda_2} \int_{z=0}^{L_\parallel} \ln \frac{\rho_{12}(z)}{r_c} dl_2 + \bar{K}_{\lambda_3} \int_{z=0}^{L_\parallel} \ln \frac{L_\perp}{\rho_{12}(z)} dz \right], \quad (8)$$

$$\lambda_1 \circ \lambda_2 = \lambda_3 \quad (9)$$

(знак « \circ » означает произведение топологических индексов). Наличие больших логарифмов под знаками интегралов в уравнении (8) обеспечивает малость второго слагаемого в уравнении (7) при $r_c/\rho_{12}(z) \rightarrow 0$ и $\rho_{12}(z)/L_\perp \rightarrow 0$.

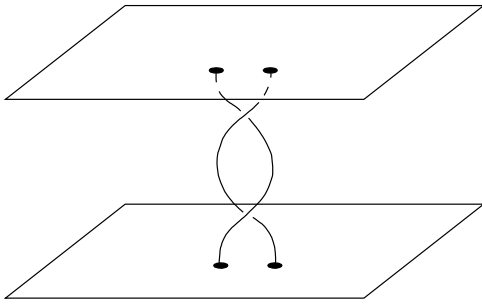
Эффективная оценка (8) для свободной энергии рассматриваемой системы двух линейных дефектов вытекает из следующих соображений. Из всей области интегрирования выражения (1) можно выделить три области. Первая из них окружает дефект η_1 с радиусом ρ_1 таким, что $r_c \ll \rho_1 \ll \rho_{12}(z)$ и $\rho_1 \ll 1/\kappa_1(z)$, где κ_1 — кривизна линии η_1 , которая предполагается меньшей, чем $1/\rho_{12}(z)$. Вторая область строится аналогично вдоль линии η_2 , а третья, цилиндрическая, окружает оба дефекта так, что в ней $\rho_{12}(z) \ll r \ll L_\perp$, где r — радиус, измеренный от оси рассматриваемой цилиндрической области. Первые две области можно разбить, в свою очередь, на серию цилиндрических подобластей, внутри которых кривые η_1 и η_2 можно считать почти прямыми. Внутри этих цилиндрических областей, так же как и для одиночного вихря, интегралы распадаются на угловые части, дающие некоторые (известные) константы, на продольные части, дающие просто длину дефектов, и на интегралы по радиусу. Последние логарифмически расходятся как при малых, так и при больших r , что определяет лидирующий член асимптотики (7). Интеграл по третьей области оценивается аналогично. Оставшиеся области V дают вклад только во второе слагаемое в оценке (7). Таким образом получаются оценки (7), (8).

Пусть положительные константы \bar{K}_{λ_1} , \bar{K}_{λ_2} и \bar{K}_{λ_3} удовлетворяют следующему обратному неравенству «треугольника»:

$$\bar{K}_{\lambda_3} > \bar{K}_{\lambda_1} + \bar{K}_{\lambda_2}. \quad (10)$$

Это означает, что дефекты отталкиваются друг от друга. Если два линейных дефекта не зацеплены друг за друга, то свободная энергия (8) достигает своего минимума, когда линейные дефекты параллельны оси z и находятся на максимально большом возможном расстоянии по модулю L_\perp друг от друга по обеим координатам, x и y .

Предположим теперь, что дефекты зацеплены друг за друга, причем число зацеплений $n > 0$. В этом случае при увеличении расстояния между линейными дефектами неизбежно увеличивается длина линейного дефекта. Таким образом, при увеличении расстояния между дефектами свободная энергия имеет, с одной стороны, тенденцию уменьшить-



Пример двух зацепленных линейных дефектов с числом зацеплений $n = 1$

ся за счет уменьшения модулей подынтегральных выражений, а с другой — увеличиться за счет увеличения длины линии интегрирования. Поэтому не исключена возможность того, что свободная энергия имеет минимум при определенном расстоянии между дефектами, если они зацеплены.

Основное утверждение работы состоит в том, что такая возможность действительно имеет место. Фактически мы покажем, что локальный минимум достигается в случае, когда линейные дефекты имеют форму соосных, вложенных друг в друга правильных спиралей с одинаковым шагом при определенных их радиусах r_1 и r_2 , и когда спирали повернуты вокруг своих осей на угол 180° друг относительно друга (см. рисунок для случая $n = 1$).

Вычислим свободную энергию зацепленных дефектов как функцию двух, вообще говоря, различных радиусов спиралей, r_1 и r_2 , когда они образуют структуру, описанную выше. В этом случае подынтегральные выражения в формуле (8) становятся константами и вычисление сводится к простому определению длин спиралей. В случае, когда $r_{1,2}/L_{\parallel} \rightarrow 0$, можно оценить главный член $\tilde{\mathcal{F}}_{12}$ асимптотики свободной энергии:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{12} = \tilde{\mathcal{F}}_{12} + \gamma_1 S^2 L_{\parallel} O \left(\frac{r_{1,2}^4}{L_{\parallel}^4} \ln \frac{r_{1,2}}{r_c} \right),$$

где

$$\tilde{\mathcal{F}}_{12} = \gamma_1 S^2 L_{\parallel} \left\{ (\bar{K}_1 + \bar{K}_2) \ln \frac{r_1 + r_2}{r_c} - \bar{K}_3 \ln \frac{r_1 + r_2}{L_{\perp}} + 2\pi^2 n^2 \left(\bar{K}_1 \frac{r_1^2}{L_{\parallel}^2} + \bar{K}_2 \frac{r_2^2}{L_{\parallel}^2} \right) \ln \frac{r_1 + r_2}{r_c} \right\}. \quad (11)$$

Здесь и далее введем сокращенное обозначение \bar{K}_l ($l = 1, 2, 3$) вместо \bar{K}_{λ_l} , если это не может вызвать недоразумений.

Теперь $\tilde{\mathcal{F}}_{12}$ зависит только от r_1 и r_2 . Все остальные величины, входящие в выражение (11), — постоянные числа. Из этого выражения непосредственно видно, что минимум $\tilde{\mathcal{F}}_{12}$ достигается при некоторых конечных r_1 и r_2 . Если этот минимум находится в области $r_1, r_2 \ll L_{\parallel}$, то его положение легко находится аналитическими методами. Он достигается при $r_1 = \tilde{r}_1$ и $r_2 = \tilde{r}_2$, где \tilde{r}_1 и \tilde{r}_2 определяются следующими выражениями:

$$\tilde{r}_1 = \bar{r}_1 \left[1 + O \left(\frac{1}{\Lambda} \right) \right], \quad (12)$$

$$\tilde{r}_2 = \bar{r}_2 \left[1 + O \left(\frac{1}{\Lambda} \right) \right], \quad (13)$$

где

$$\bar{r}_1 = \frac{L_{\parallel}}{2\pi n \sqrt{\Lambda}} \sqrt{\frac{\Delta \bar{K}_{123} \bar{K}_2}{\bar{K}_1 (\bar{K}_1 + \bar{K}_2)}}, \quad (14)$$

$$\bar{r}_2 = \frac{L_{\parallel}}{2\pi n \sqrt{\Lambda}} \sqrt{\frac{\Delta \bar{K}_{123} \bar{K}_1}{\bar{K}_2 (\bar{K}_1 + \bar{K}_2)}}, \quad (15)$$

$$\Lambda = \ln \left(\frac{L_{\parallel}}{2\pi n r_c} \sqrt{\frac{\Delta \bar{K}_{123} (\bar{K}_1 + \bar{K}_2)}{\bar{K}_1 \bar{K}_2}} \right), \quad (16)$$

$$\Delta \bar{K}_{123} = \bar{K}_3 - \bar{K}_2 - \bar{K}_1. \quad (17)$$

Из этих выражений видно, что условие $r_1, r_2 \ll L_{\parallel}$ справедливости оценок (12) и (13) выполняется, когда $2\pi n \sqrt{\Lambda} \gg 1$.

Покажем, что описанное равновесное состояние двух связанных дефектов с определенными выше радиусами спиралей является устойчивым связанным состоянием. Надо доказать, что полученное состояние обеспечивает локальный минимум свободной энергии (8) при произвольных, но достаточно гладких возмущениях. То, что описанное состояние является экстремумом, следует из способа нахождения величин r_1 и r_2 и из симметрии задачи. Вторая вариация функционала (8) имеет вид

$$\delta^2 \tilde{\mathcal{F}}_{12} = \int_0^{L_{\parallel}} \delta^2 \tilde{F}_{12}(z) dz, \quad (18)$$

где

$$\delta^2 \bar{F}_{12}(z) = \gamma_1 S^2 \left\{ A_1 (\delta r_1 + \delta r_2)^2 + A_2 (\delta r_1)^2 + A_3 (\delta r_2)^2 + A_4 \left(\frac{d}{dz} \delta r_1 \right)^2 + A_5 \bar{r}_1^2 \left(\frac{d}{dz} \delta \varphi_1 \right)^2 + A_6 \left(\frac{d}{dz} \delta r_2 \right)^2 + A_7 \bar{r}_2^2 \left(\frac{d}{dz} \delta \varphi_2 \right)^2 \right\}. \quad (19)$$

Здесь подразумевается, что в цилиндрической системе координат (r, φ, z) пространственное положение линий этих двух дефектов параметризуются следующим образом:

$$(r_{1,2}(z), \varphi_{1,2}(z), z),$$

где

$$r_{1,2}(z) = \tilde{r}_{1,2} + \delta r_{1,2}(z), \quad (20)$$

$$\varphi_{1,2}(z) = \pi \Delta_{1,2} + 2\pi n z / L_{\parallel} + \delta \varphi_{1,2}(z), \quad (21)$$

$\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 1$; $\tilde{r}_{1,2}$ и два первых члена в выражении (21) определяют равновесное положение двух зацепленных линейных дефектов (см. уравнение (12) и пояснения к нему). Коэффициенты A_1, \dots, A_7 , входящие в уравнение (19), положительны (если $\Delta \bar{K}_{123} > 0$) и могут выражены следующим образом:

$$A_1 = \frac{\Delta \bar{K}_{123}}{2(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)^2} \left[1 + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \right],$$

$$A_{2,3} = \pi^2 n^2 \frac{\bar{K}_{1,2}}{L_{\parallel}^2} \Lambda \left(1 + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \right),$$

$$A_{4,\dots,7} = \frac{1}{2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \right).$$

Таким образом, мы видим, что описанное выше состояние двух связанных линейных дефектов определяет локальный минимум свободной энергии. Это означает, что это равновесное состояние является устойчивым, по крайней мере локально.

Выше мы оперировали только главными членами асимптотик. Учет относительно малых остаточных членов приведет лишь к небольшой деформации описанного равновесия относительно состояния с вложенными друг в друга правильными соосными спиральями (с определенными выше радиусами), повернутыми на 180° относительно друг друга, и к небольшому изменению коэффициентов второй вариации функционала энергии. Это никоим образом

не затрагивает основного нашего вывода о существовании устойчивых связанных зацепленных состояний двух линейных дефектов при выполнении обратного неравенства «треугольника» (10).

3. ПРОВЕРКА ОБРАТНОГО НЕРАВЕНСТВА «ТРЕУГОЛЬНИКА» ДЛЯ НЕКОТОРОЙ МОДЕЛИ ДВУХОСНОГО НЕМАТИКА

В этом разделе мы покажем, что обратное неравенство «треугольника», $\bar{K}_{\lambda_1} + \bar{K}_{\lambda_2} < \bar{K}_{\lambda_1 \circ \lambda_2}$, может выполняться для некоторых пар топологических дефектов по крайней мере в простейшей модели двухосного нематика. Тут имеется в виду простейшая модель для энергии деформаций.

Упругие константы \bar{K}_λ могут быть вычислены для энергии деформации, имеющей вид (4), при

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma.$$

В этом случае [10, 14]

$$\bar{K}_i = (1+T/S)^2, \quad \bar{K}_j = (1-T/S)^2, \quad (22)$$

$$\bar{K}_k = 4T^2/S^2, \quad \bar{K}_{-e} = 16T^2/S^2.$$

Видно, что

$$\bar{K}_i > \bar{K}_j > \bar{K}_k \quad (23)$$

и

$$\bar{K}_k + \bar{K}_k < \bar{K}_{-e}, \quad \bar{K}_k + \bar{K}_j < \bar{K}_i, \quad (24)$$

$$\bar{K}_k + \bar{K}_i > \bar{K}_j, \quad \bar{K}_j + \bar{K}_i > \bar{K}_k,$$

$$\bar{K}_i + \bar{K}_i > \bar{K}_{-e}$$

для всей допустимой области модулей параметров порядка T и S : $S/3 > T > 0$. Кроме того,

$$\bar{K}_j + \bar{K}_j > \bar{K}_{-e} \quad \text{при} \quad \frac{T}{S} < \frac{2\sqrt{2}-1}{7}, \quad (25)$$

и

$$\bar{K}_j + \bar{K}_j < \bar{K}_{-e} \quad \text{при} \quad \frac{T}{S} > \frac{2\sqrt{2}-1}{7}. \quad (26)$$

Эти неравенства означают, что в конкретной модели двухосного нематика пары линейных дефектов с $(\lambda_1, \lambda_2) = (k, k)$ и $(\lambda_1, \lambda_2) = (k, j)$ образуют стабильные связанные состояния зацепленных друг за друга дефектов при $T/S < (2\sqrt{2}-1)/7$, а при $(2\sqrt{2}-1)/7 < T/S < 1/3$ к ним добавляется возможность образования связанных зацепленных дефектов типа $(\lambda_1, \lambda_2) = (j, j)$.

Используя стандартные аргументы общего положения, можно показать, что наши выводы полностью сохраняются и в некоторой окрестности в пространстве параметров моделей энергии деформации, общий вид которых приведен в работе [13].

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Результат нашей работы — доказательство существования связанных зацепленных состояний линейных дефектов — представляется достаточно важным, поскольку такие состояния могут проявляться в асимптотических решениях в конденсированных средах со сложным параметром порядка.

Мы рассматривали дефекты внутри тора $S^1 \times D^2$, что соответствует выбору периодических граничных условий вдоль оси цилиндра. Однако эффекты, которые изучаются в этой статье, имеют место и при выборе более общих граничных условий, по крайней мере при условии пиннинга на поверхности сосуда, куда помещен жидкий кристалл.

В заключение приведем несколько примеров, где могут использоваться методы нашей работы.

Одноосный нематик. В этом случае пространством параметра порядка является проективная плоскость $M = \mathbb{R}P^2$ и $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$. Поэтому комбинация двух дефектов дает тривиальное состояние. Это с очевидностью приводит к притягиванию двух дефектов, что означает невозможность существования связанных объектов рассматриваемого типа по крайней мере тогда, когда топологический тип особенности однозначно определяет ее структуру.

Холестерики. Холестерики являются естественными кандидатами на существование связанных зацепленных состояний линейных дефектов, поскольку они отвечают глобально тому же самому параметру порядка, что и двухосные нематики [2]. Однако ситуация с холестериками является более тонкой. Действительно, локально параметр порядка для холестериков точно такой же, как и для одноосных нематиков. Более того, свободная энергия холестерика содержит еще один макроскопический пространственный масштаб, определяющий период структуры холестерика. В отличие от одноосного нематика, состояние холестерика не фиксируется направлением директора \mathbf{n} . Директор \mathbf{n} непрерывно меняется в пространстве, описывая спиральную кривую. В результате упругие свойства холестерика крайне анизотропны и особенности поля директора являются наиболее энергетически невыгодными. Обозначения типов линейных дефектов могут быть выбраны так, что эффективные константы упругости для линейных дефектов классов, сопряженных $-e$ и $\pm i$, существенно меньше, чем эффективные упругие константы для дефектов типов $\pm j$ и $\pm k$, причем поле директора не имеет особенностей для дефектов первых двух типов. Такая ситуация

обозначается иногда термином «двойная топология» [2, 15]. Кажется разумным сделать следующее предположение, исходя из отмеченных свойств холестериков. Могут существовать связанные состояния двух зацепленных дефектов одного типа i и двух дефектов разного типа, i и j (или k).

Сверхтекучий ^4He . Здесь параметром порядка является конденсат — комплексная функция $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$, причем ψ как функция пространственных координат описывается уравнениями типа Гинзбурга–Ландау. Пространство M параметра порядка эквивалентно окружности S^1 , $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Существование дефектов-вихрей хорошо известно. Обратное неравенство «треугольника» выполняется для вихрей с почти параллельными завихренностями, и следовательно, зацепленные дефекты-вихри могут существовать. Однако в приложении к сверхтекучей жидкости обычно рассматриваются задачи совершенно другого типа. При течении сверхтекучей жидкости с достаточно высокой скоростью в сосудах с нетривиальной формой формируются динамические системы вихрей, описывающие переход в турбулентное состояние. Именно такие динамические состояния широко обсуждаются в литературе [6–8].

Сверхтекучий ^3He . Существует множество топологически различных линейных дефектов в сверхтекучем ^3He в зависимости от вида фазы (например, A или B) и от силы спин-орбитального взаимодействия [2, 16, 17]. Некоторые из них могут образовывать зацепленные связанные состояния.

Голубая фаза. Следующий пример — специфический класс состояний холестериков — «голубая фаза». Здесь мы встречаем новое явление. Для исследования голубой фазы мы обязаны принять во внимание входящий в выражение для свободной энергии поверхностный член. Это приводит к образованию решетки линейных дефектов.

Нестандартная сверхпроводимость. Наш последний пример — недавно открытые нестандартные состояния сверхпроводников Sr_2RuO_4 и $\text{PrOs}_4\text{Sb}_{12}$ [18]. Предполагается, что в этих сверхпроводниках происходит спаривание в триплетное состояние. Аналогия со сверхтекучим ^3He выглядит вполне оправданной, и можно предположить существование связанных состояний, порожденных линейными дефектами (вихрями) в этой системе. Например, вихри с половинным квантом потока в Sr_2RuO_4 обсуждались в работе [19].

В обычных **сверхпроводящих** системах, где возможно существование системы вихрей типа абрикосовской решетки, изучается возможность зацепления или пересечения дефектов в такой

решетке. Этому посвящена обширная литература. Задача, рассмотренная в нашей работе, принципиально отличается от такого рода задач, так как мы изучаем системы из индивидуальных зацепленных дефектов. К таким системам относятся, например, нематические и холестерические жидкие кристаллы, в которых периодической решетки вообще не существует. Это следует из конечности фундаментальной группы параметра порядка.

Один из авторов (П. В. С.) благодарен В. В. Янникову за стимулирующую дискуссию по теме этой работы. Авторы также благодарны К. Маки (K. Maki) за обсуждение почти законченной работы и полезные замечания. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 05-01-00964) и Фондом научных школ (грант № 99-2185-1). Один из авторов (М. И. М.) также благодарен Институту Макса Планка физики комплексных систем (Max-Planck-Institut für Physik Komplexer Systeme, Dresden, Germany) за хороший прием и финансовую поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 591 (1979).
2. М. И. Монастырский, *Топология калибровочных полей и конденсированных сред*, Паимс, Москва (1995).
3. M. Kléman, *Rep. Progr. Phys.* **52**, 555 (1989).
4. L. Faddeev and A. J. Niemi, *Nature* **387**, 58 (1997).
5. E. Babaev, L. D. Faddeev, and A. J. Niemi, *Phys. Rev. B* **65**, 100512 (2002).
6. C. E. Swanson, C. F. Barenghi, and R. J. Donnelly, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 190 (1983).
7. K. W. Schwartz and J. R. Rosen, *Phys. Rev. E* **44**, 7563 (1991).
8. M. Tsubota, T. Araki, and C. F. Barenghi, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 205301 (2003).
9. M. Zapotocky, P. M. Goldbart, and N. Goldenfeld, *Phys. Rev. E* **51**, 1216 (1995).
10. N. V. Priezjev and R. A. Pelcovits, *Phys. Rev. E* **66**, 051705 (2002).
11. P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Oxford Univ. Press, Oxford (1993).
12. G. Toulouse, *J. de Phys.* **38**, L67 (1977).
13. E. Govers and G. Vertogen, *Phys. Rev. A* **30**, 1998 (1984).
14. S. Sukumaran and G. S. Ranganath, *J. de Phys. II* **7**, 583 (1997).
15. Y. Bouligand, B. Derrida, V. Poenaru et al., *J. de Phys.* **39**, 863 (1978).
16. M. M. Salomaa and G. E. Volovik, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 333 (1987).
17. D. Volhardt and P. Wölfle, *Superfluid Phases in ^3He* , Taylor & Francis, London (1988).
18. E. D. Bauer, N. A. Frederick, P.-C. Ho et al., *Phys. Rev. B* **65**, 100506(R) (2002).
19. H.-Y. Kee, Y. B. Kim, and K. Maki, *Phys. Rev. B* **62**, 9275(R) (2000).