

ТЕОРИЯ ИЗОТОПИЧЕСКОГО СДВИГА МЮОННЫЙ ВОДОРОД – МЮОННЫЙ ДЕЙТЕРИЙ

А. П. Мартыненко*

Самарский государственный университет
443011, Самара, Россия

Поступила в редакцию 16 декабря 2004 г.

Вычислены поправки порядка α^3 , α^4 и α^5 в лэмбовском сдвиге $1S$ - и $2S$ -уровней энергии атомов мюонного водорода μp и мюонного дейтерия μd . Учтены эффекты структуры ядра в терминах зарядовых радиусов протона r_p и дейтрона r_d для однофотонного взаимодействия, а также с помощью электромагнитных формфакторов протона и дейтрона в случае однопетлевых амплитуд. Получено численное значение изотопического сдвига $\mu d - \mu p$ для расщепления $1S - 2S$ 101003.3495 мэВ, которое может рассматриваться как надежная оценка при проведении соответствующего эксперимента с точностью 10^{-6} . Вычислены интервалы тонкой структуры $E(1S) - 8E(2S)$ в мюонном водороде и мюонном дейтерии.

PACS: 31.30.Jv, 12.20.Ds, 32.10.Fn

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование структуры уровней энергии водородоподобных (ВП) атомов представляет собой важную задачу для проверки Стандартной модели и получения более точных значений ряда фундаментальных физических констант (постоянная тонкой структуры, массы электрона и мюона, зарядовый радиус протона и др.) [1–3]. В последние годы значительный интерес в этой области связан с атомом мюонного водорода [4–6]. Он обусловлен прежде всего активизацией экспериментальных исследований лэмбовского сдвига $2P - 2S$ и сверхтонкой структуры атома мюонного водорода. Измерение лэмбовского сдвига $2P - 2S$ с точностью 30 *ppm* позволит получить величину зарядового радиуса протона с точностью 10^{-3} , что на порядок больше того значения, которое известно в настоящее время из различных источников, включая электрон-протонное рассеяние и значение лэмбовского сдвига $2P - 2S$ в атоме электронного водорода. Измерение сверхтонкого расщепления основного состояния мюонного водорода с аналогичной точностью позволило бы получить новое значение другого фундаментального параметра теории — радиуса Земаха [7] с точностью 10^{-3} [8, 9]. Затем оно может быть использовано при вы-

числении нового теоретического значения сверхтонкого расщепления в электронном водороде и ограничений на величину поправки на поляризуемость протона [10–12].

Наконец, существует еще одна экспериментальная задача исследования интервала большой тонкой структуры $1S - 2S$ в атоме мюонного водорода и изотопического сдвига мюонный водород–мюонный дейтерий для этого расщепления [13, 14], которая позволяет получить новые данные о зарядовых радиусах протона и дейтрона. Следует отметить, что обе указанные величины входят в число наиболее точно измеренных для атома электронного водорода. Так, величина изотопического сдвига водород–дейтерий для расщепления $1S - 2S$, при измерении которой экспериментальная точность возросла за прошедшее десятилетие на три порядка, составляет в настоящее время [15]

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{1S} &= [E(2S) - E(1S)]_D - [E(2S) - E(1S)]_H = \\ &= 670\,994\,334.64(15) \text{ кГц}, \end{aligned} \quad (1)$$

а интервал $1S - 2S$ в водороде был измерен с рекордной точностью до сотых долей кГц [16]:

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{1S-2S}(H) &= 2\,466\,061\,413\,187\,103(46) \text{ Гц}, \\ \delta &= 1.9 \cdot 10^{-14}. \end{aligned} \quad (2)$$

*E-mail: mart@ssu.samara.ru

Экспериментальные исследования интервалов (1), (2) в мюонном водороде пока находятся на стадии предварительной подготовки.

Теоретические исследования различных вкладов в уровни энергии мюонных атомов проводились много лет назад в работах [17–19] (см. также ссылки на другие работы в обзорной статье [1]). В последние годы вычисление различных поправок в спектре энергии мюонного водорода было связано в основном с лэмбовским сдвигом $2P - 2S$ и сверхтонкой структурой S -уровней [12, 20–23]. В этих работах был построен оператор взаимодействия частиц, который дает для интервала $2P - 2S$ и сверхтонкого расщепления уровней $1S$ и $2S$ поправки порядка α^5 , α^6 . В настоящее время существует необходимость теоретического исследования поправок порядка α^3 , α^4 , α^5 в лэмбовском сдвиге $1S$ - и $2S$ -состояний мюонного водорода и мюонного дейтерия, в изотопическом смещении $\mu p - \mu d$ для перехода $1S - 2S$, которое до сих пор оставалось неизвестным, а также в интервале тонкой структуры $E(1S) - 8E(2S)$. Такие расчеты могут способствовать активизации экспериментальных исследований интервалов тонкой структуры (1) и (2) в мюонном водороде и получению в результате более точных значений таких фундаментальных физических постоянных, как зарядовые радиусы протона и дейтрона, масса мюона.

В данной работе получены численные результаты для вкладов порядка α^3 , α^4 , α^5 в расщеплении

$1S - 2S$ и в изотопическом сдвиге $\mu p - \mu d$ для этого расщепления. При этом для некоторых вкладов использовались известные аналитические формулы, на основе которых найдены соответствующие численные значения. Большая часть вкладов для уровней энергии $1S$, $2S$ в мюонном водороде и изотопическом сдвиге были получены впервые в интегральной форме, которая использовалась для численных оценок. Зависимость от главного квантового числа n подавляющего большинства поправок не является тривиальной, т. е. не сводится к фактору $1/n^3$. Причина этого связана с характерными значениями импульса фотонов и обсуждается ниже. Цель работы состояла в расчете квантовоэлектродинамических поправок в изотопическом сдвиге мюонный водород–мюонный дейтерий для перехода $1S - 2S$, в интервале тонкой структуры $E(1S) - 8E(2S)$, в получении численных значений этих величин с точностью 10^{-9} , которые могут рассматриваться как надежный ориентир при проведении соответствующих экспериментов, так и для извлечения из этих экспериментов более точных значений зарядового радиуса протона, дейтрона, массы мюона.

Тонкая структура спектра энергии ВП-атома исследуется уже длительное время с помощью различных методов [1, 14, 24]. С точностью до членов порядка $(Z\alpha)^4$ уровни энергии S -состояний ВП-атома, состоящего из частиц m_1 и m_2 , определяются следующим выражением:

$$E_n = m_1 + m_2 - \frac{\mu(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{\mu(Z\alpha)^4}{2n^3} \left[1 - \frac{3}{4n} + \frac{\mu^2}{4m_1 m_2 n} \right] =$$

$$= \begin{cases} \mu p(1S) : 1\,043\,927\,826\,470.3586 \text{ мэВ}; & \mu p(2S) : 1\,043\,929\,722\,866.0601 \text{ мэВ}, \\ \mu d(1S) : 1\,981\,268\,455\,762.7537 \text{ мэВ}; & \mu d(2S) : 1\,981\,270\,453\,188.8081 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (3)$$

Несмотря на то что относительная величина теоретической ошибки в (3), которая связана с неопределенностями α и масс частиц, достигает значений порядка 10^{-7} , мы представили численные значения в (3) с точностью до 0.0001 мэВ, что является важным при рассмотрении различных интервалов тонкой структуры спектра энергии. При этом использовались следующие значения фундаментальных физических констант [3]:

$$\alpha^{-1} = 137.03599976(50),$$

$$m_\mu = 0.105658357(5) \text{ ГэВ},$$

$$m_p = 0.938271998(38) \text{ ГэВ},$$

$$m_d = 1.875612762(75) \text{ ГэВ}.$$

Вклад выражения (3) в изотопический сдвиг $\mu p - \mu d$ для перехода $1S - 2S$ является определяющим (см. таблицу). Вместе с тем существует ряд важных эффектов как электромагнитного, так и сильного взаимодействий, которые необходимо последовательно учесть для получения величины изотопического сдвига с точностью до членов порядка α^5 включительно.

2. ЭФФЕКТЫ ОДНОПЕТЛЕВОЙ И ДВУХПЕТЛЕВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В ОДНОФОТОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Наши вычисления спектров энергии водородоподобных атомов выполняются в рамках квазипотенциального метода, в котором связанное состояние двух частиц описывается уравнением шредингеровского типа [25, 26]:

$$[G^f]^{-1} \psi_M \equiv \left(\frac{b^2}{2\mu_R} - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_R} \right) \psi_M(\mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) \psi_M(\mathbf{q}), \quad (4)$$

где

$$b^2 = E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2,$$

$\mu_R = E_1 E_2 / M$ — релятивистская приведенная масса, $M = E_1 + E_2$ — масса связанного состояния. Квазипотенциал уравнения (5) строится в квантовой электродинамике по теории возмущений (ТВ) с помощью спроектированной на положительно частотные состояния двухчастичной амплитуды рассеяния T вне массовой поверхности при нулевых относительных энергиях частиц:

$$V = V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \dots, \quad (5)$$

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + \dots,$$

$$V^{(1)} = T^{(1)}, \quad V^{(2)} = T^{(2)} - T^{(1)} G^f T^{(1)}, \dots \quad (6)$$

Увеличение массы лептона при переходе от электронного водорода к мюонному водороду приводит к уменьшению радиуса боровской орбиты μr . В результате комптоновская длина волны электрона и радиус боровской орбиты μr оказываются одного порядка:

$$\frac{\hbar^2}{\mu e^2} / \frac{\hbar}{m_e c} = 0.737384,$$

где m_e — масса электрона, μ — приведенная масса двух частиц в атоме μr . По этой причине существенно возрастает роль эффектов поляризации вакуума в спектре энергии мюонного водорода [27]. Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии представлены на диаграммах рис. 1.

Чтобы получить вклад диаграммы a на рис. 1 (электронная поляризация вакуума) в оператор

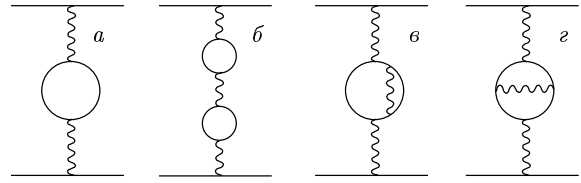


Рис. 1. Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии

взаимодействия частиц, необходимо сделать следующую замену в фотонном пропагаторе [27]:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty ds \frac{\sqrt{s^2 - 1} (2s^2 + 1)}{s^4 (k^2 + 4m_e^2 s^2)}. \quad (7)$$

Если

$$(-k^2) = \mathbf{k}^2 \sim \mu_e^2 (Z\alpha)^2 \sim m_e^2 (Z\alpha)^2$$

(электронный водород, μ_e — приведенная масса двух частиц в атоме водорода), то, пренебрегая первым слагаемым знаменателя в правой части (7), получим

$$-\frac{\alpha}{15\pi m_e^2}.$$

Но если

$$\mathbf{k}^2 \sim \mu^2 (Z\alpha)^2 \sim m_1^2 (Z\alpha)^2$$

(мюонный водород, m_1 — масса мюона), тогда параметры $\mu\alpha$ и m_e оказываются одного порядка и делать разложение по α в знаменателе (7) нельзя. В этом случае (мюонный водород) необходимо строить оператор взаимодействия частиц в однофотонном приближении, используя точное выражение (7). В дальнейшем мы учитываем, что электронная поляризация вакуума дает в спектре энергии S -состояний вклады порядка α^3 , α^4 и α^5 .

Модификация кулоновского потенциала

$$V^C(\mathbf{k}) = -Ze^2 / \mathbf{k}^2$$

за счет поляризации вакуума (VP) определяется с учетом (7) следующим выражением в импульсном представлении [27]:

$$V_{VP}^C(\mathbf{k}) = -4\pi Z\alpha \frac{\alpha}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{3\xi^4} \frac{(2\xi^2 + 1)}{\mathbf{k}^2 + 4m_e^2 \xi^2} d\xi. \quad (8)$$

Выполняя преобразование Фурье выражения (8), получим соответствующий оператор в координатном представлении:

$$V_{VP}^C(r) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}(2\xi^2 + 1)}{\xi^4} \times \left(-\frac{Z\alpha}{r} \exp(-2m_e \xi r) \right). \quad (9)$$

Последнее выражение позволяет получить поправку электронной поляризации вакуума порядка α^3 в спектр энергии 1S- и 2S-состояний атома мюонного водорода. Учитывая, что волновые функции 1S-, 2S-состояний имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{100}(r) &= \frac{W^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Wr}, \\ \psi_{200}(r) &= \frac{W^{3/2}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-Wr/2} \left(1 - \frac{Wr}{2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$W = \mu Z\alpha,$$

представим эту поправку в виде

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, VP}(1S) &= -\frac{\mu(Z\alpha)^2 \alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \frac{1}{p_1^2(\xi)}, \\ p_1(\xi) &= 1 + \frac{m_e \xi}{W}, \quad \rho(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}(2\xi^2 + 1)}{\xi^4}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, VP}(2S) &= -\frac{\mu(Z\alpha)^2 \alpha}{6\pi} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left(\frac{1}{p_2^2(\xi)} - \frac{2}{p_2^3(\xi)} + \frac{3}{2p_2^4(\xi)} \right), \\ p_2(\xi) &= 1 + \frac{2m_e \xi}{W}. \end{aligned} \quad (12)$$

Эффекты электронной поляризации вакуума очень чувствительны к структуре связанного состояния, так как характерный импульс частиц в атоме мюонного водорода равен $\mu(Z\alpha)$. Поэтому вклад рассматриваемых амплитуд с электронной поляризацией вакуума не сводится к фактору

$$|\psi^C(0)|^2 \sim 1/n^3,$$

а зависит от главного квантового числа более сложным образом, который и представлен выражениями (11), (12). Численные значения вклада электронной поляризации вакуума для состояний 1S, 2S мюонного водорода и дейтерия,

$$\Delta E_{1\gamma, VP} = \begin{cases} \mu p(1S) : -1898.8379 \text{ мэВ}; \quad \mu p(2S) : -219.5849 \text{ мэВ}, \\ \mu d(1S) : -2129.2820 \text{ мэВ}; \quad \mu d(2S) : -245.3205 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (13)$$

различаются только за счет приведенной массы двух частиц. Вклад мюонной поляризации вакуума может быть получен с помощью выражения (8), в котором необходимо заменить $m_e \rightarrow m_1$. Эта поправка порядка α^5 в спектре энергии мюонного ВП-атома включена в таблицу вместе с мюонной собственной-энергетической поправкой.

Рассмотрим модификацию кулоновского потенциала за счет двухпетлевой поляризации вакуума (см. рис. 1). Вклад первой диаграммы, содержащий две последовательно расположенные петли, может быть найден с помощью двухкратной замены (7) в пропагаторе фотона. В координатном представлении соответствующий оператор взаимодействия частиц имеет вид

$$\begin{aligned} V_{1\gamma, VP-VP}^C(r) &= \frac{\alpha^2}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \left(-\frac{Z\alpha}{r} \right) \times \\ &\times \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} (\xi^2 \exp(-2m_e \xi r) - \eta^2 \exp(-2m_e \eta r)) \end{aligned} \quad (14)$$

и дает в спектре энергии следующие результаты:

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, VP-VP}(1S) &= -\frac{\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{9\pi^2} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left(\frac{\xi^2}{p_1^2(\xi)} - \frac{\eta^2}{p_1^2(\eta)} \right) = \\ &= \begin{cases} \mu p : -1.8816 \text{ мэВ}, \\ \mu d : -2.1871 \text{ мэВ}, \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, VP-VP}(2S) &= -\frac{\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{18\pi^2} \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \times \\ &\times \left[\xi^2 \left(\frac{1}{p_2^2(\xi)} - \frac{2}{p_2^3(\xi)} + \frac{3}{2p_2^4(\xi)} \right) - \right. \\ &\left. - \eta^2 \left(\frac{1}{p_2^2(\eta)} - \frac{2}{p_2^3(\eta)} + \frac{3}{2p_2^4(\eta)} \right) \right] = \\ &= \begin{cases} \mu p : -0.2426 \text{ мэВ}, \\ \mu d : -0.2811 \text{ мэВ}. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Для вычисления вкладов диаграмм *в*, *г* на рис. 1, которые определяются поляризационным оператором второго порядка, необходимо использовать следующую подстановку в фотонном пропагаторе [29]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} &\rightarrow \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{f(v)}{4m_e^2 + k^2(1-v^2)} dv = \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{2}{3} \int_0^1 dv \frac{v}{4m_e^2 + k^2(1-v^2)} \times \\ &\times \left\{ (3-v^2)(1+v^2) \left[\text{Li}_2\left(-\frac{1-v}{1+v}\right) + 2\text{Li}_2\left(\frac{1-v}{1+v}\right) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \ln \frac{1+v}{2} - \ln \frac{1+v}{1-v} \ln v \right] + \\ &+ \left[\frac{11}{16}(3-v^2)(1+v^2) + \frac{v^4}{4} \right] \ln \frac{1+v}{1-v} + \\ &+ \left[\frac{3}{2}v(3-v^2) \ln \frac{1-v^2}{4} - 2v(3-v^2) \ln v \right] + \\ &\left. + \frac{3}{8}v(5-3v^2) \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

В данном случае при определении численного значения вклада удобно использовать координатное представление и привести потенциал взаимодействия частиц к виду

$$\begin{aligned} \Delta V_{1\gamma, 2-loop VP}^C &= -\frac{2}{3} \frac{Z\alpha}{r} \times \\ &\times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \exp\left(-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right). \quad (18) \end{aligned}$$

Потенциал (18) дает следующие поправки в лэмбовском сдвиге *S*-уровней мюонного водорода и дейтерия:

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, 2-loop VP}(1S) &= -\frac{2}{3\pi^2} \mu\alpha^2 (Z\alpha)^2 \frac{W^2}{m_e^2} \times \\ &\times \int_0^1 \frac{f(v) dv}{\left(1 + \frac{W\sqrt{1-v^2}}{m_e}\right)^2} = \\ &= \begin{cases} \mu p : -12.6144 \text{ мЭВ}, \\ \mu d : -14.0141 \text{ мЭВ}, \end{cases} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{1\gamma, 2-loop VP}(2S) &= -\frac{1}{12\pi^2} \mu\alpha^2 (Z\alpha)^2 \frac{W^2}{m_e^2} \times \\ &\times \int_0^1 \frac{f(v) dv}{\left(1 + \frac{W\sqrt{1-v^2}}{2m_e}\right)^2} \left[1 - \frac{2}{p_3(v)} + \frac{3}{2p_3^2(v)} \right] = \\ &= \begin{cases} \mu p : -1.4112 \text{ мЭВ}, \\ \mu d : -1.5606 \text{ мЭВ}, \end{cases} \\ p_3(v) &= \frac{1}{1 + \frac{W\sqrt{1-v^2}}{2m_e}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим здесь, что поскольку мы получаем вклады в спектр энергии численно, соответствующие результаты представлены с точностью 0.0001 мЭВ.

3. ТРЕХПЕТЛЕВАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ОДНОФОТОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

В пятом порядке по α дают также вклад трехпетлевые амплитуды поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии (см. рис. 2*а*, *б*). Вклад диаграммы на рис. 2*а* в потенциал имеет вид

$$\begin{aligned} V_{VP-VP-VP}^C(r) &= -\frac{Z\alpha}{r} \frac{\alpha^3}{(3\pi)^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \times \\ &\times \left[\exp(-2m_e \zeta r) \frac{\zeta^4}{(\xi^2 - \zeta^2)(\eta^2 - \zeta^2)} + \right. \\ &+ \exp(-2m_e \xi r) \frac{\xi^4}{(\zeta^2 - \xi^2)(\eta^2 - \xi^2)} + \\ &\left. + \exp(-2m_e \eta r) \frac{\eta^4}{(\xi^2 - \eta^2)(\zeta^2 - \eta^2)} \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

Вклад диаграммы на рис. 2*б* в потенциал можно

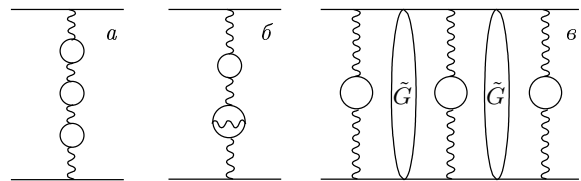


Рис. 2. Эффекты трехпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии (*а*, *б*) и в третьем порядке теории возмущений (*в*)

представить в интегральной форме, используя выражения (7), (17):

$$V_{VP-2-loop VP}^C = -\frac{4\mu\alpha^3(Z\alpha)}{9\pi^3} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \frac{f(\eta)}{\eta} d\eta \frac{1}{r} \times \left[\exp(-2m_e\eta r) \frac{\eta^2}{\eta^2 - \xi^2} - \exp(-2m_e\xi r) \frac{\xi^2}{\eta^2 - \xi^2} \right]. \quad (22)$$

Соответствующие этим взаимодействиям поправки в спектре энергии атомов μp и μd равны

$$\Delta E_{VP-VP-VP}(1S) = -\frac{\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{27\pi^3} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \times \left[\frac{\xi^4}{(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - \zeta^2)p_1^2(\xi)} + \frac{\eta^4}{(\eta^2 - \xi^2)(\eta^2 - \zeta^2)p_1^2(\eta)} + \frac{\zeta^4}{(\zeta^2 - \xi^2)(\zeta^2 - \eta^2)p_1^2(\zeta)} \right] = \begin{cases} \mu p : -0.0029 \text{ мэВ}, \\ \mu d : -0.0034 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (23)$$

$$\Delta E_{VP-VP-VP}(2S) = -\frac{\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{54\pi^3} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \times \left\{ \frac{\xi^4}{(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - \zeta^2)} \left[\frac{1}{p_2^2(\xi)} - \frac{1}{p_2^3(\xi)} \right] + \frac{\eta^4}{(\eta^2 - \xi^2)(\eta^2 - \zeta^2)} \left[\frac{1}{p_2^2(\eta)} - \frac{1}{p_2^3(\eta)} \right] + \frac{\zeta^4}{(\zeta^2 - \xi^2)(\zeta^2 - \eta^2)} \left[\frac{1}{p_2^2(\zeta)} - \frac{1}{p_2^3(\zeta)} \right] \right\} = \begin{cases} \mu p : -0.0003 \text{ мэВ}, \\ \mu d : -0.0004 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (24)$$

$$\Delta E_{VP-2-loop VP}(1S) = -\frac{4\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{9\pi^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \int_1^\infty \frac{f(\eta)}{\eta} \frac{d\eta}{\eta^2 - \xi^2} \left[\frac{\eta^2}{p_1^2(\eta)} - \frac{\xi^2}{p_1^2(\xi)} \right] = \begin{cases} \mu p : -0.0223 \text{ мэВ}, \\ \mu d : -0.0251 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (25)$$

$$\Delta E_{VP-2-loop VP}(2S) = -\frac{2\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{9\pi^3} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \frac{f(\eta)}{\eta} \frac{d\eta}{\eta^2 - \xi^2} \times \left\{ \eta^2 \left[\frac{1}{p_2^2(\eta)} - \frac{1}{p_2^3(\eta)} \right] - \xi^2 \left[\frac{1}{p_2^2(\xi)} - \frac{1}{p_2^3(\xi)} \right] \right\} = \begin{cases} \mu p : -0.0030 \text{ мэВ}, \\ \mu d : -0.0035 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (26)$$

В функции $f(v)$, которая определяется формулой (17), необходимо сделать подстановку:

$$v = \frac{\sqrt{\eta^2 - 1}}{\eta}.$$

Существует еще ряд диаграмм, которые представляют собой трехпетлевые поправки в поляриционный оператор. Они были впервые вычислены для лэмбовского сдвига $2P - 2S$ в работах Киношиты, Нио [30, 31]. При этом наибольший вклад в спектр энергии дают диаграммы поляризации вакуума шестого порядка с одной электронной петлей (вклады $\Pi^{(p6)}$ [30]). Оценка их вклада в лэмбовский сдвиг уровней энергии $1S$ и $2S$ включена в таблицу.

4. ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА С УЧЕТОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОПРАВOK

При расчете спектра энергии S -состояний мюонного водорода с точностью α^5 необходимо построить квазипотенциал на основе соотношений (5), (6), в котором учитываются релятивистские эффекты указанного порядка (гамильтониан Брейта ΔV_B). С учетом электронной поляризации вакуума брейтовский гамильтониан ΔV_B^{VP} был получен Пахуцким в работе [19]. Опуская зависящие от спина частиц члены оператора взаимодействия, представим эти гамильтонианы в виде

$$\Delta V_B = -\mathbf{p}^4 \left(\frac{1}{8m_1^3} + \frac{1}{8m_2^3} \right) + \frac{\pi Z\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}) - \frac{Z\alpha}{2m_1 m_2 r} \left(\mathbf{p}^2 + \frac{r_i r_j p_i p_j}{r^2} \right), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_B^{VP} = & \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left\{ \frac{Z\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \times \right. \\ & \times \left[\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2 \xi^2}{r} \exp(-2m_e \xi r) \right] - \\ & - \frac{Z\alpha m_e^2 \xi^2}{m_1 m_2 r} \exp(-2m_e \xi r) (1 - m_e \xi r) - \\ & - \frac{Z\alpha}{2m_1 m_2} p_i \frac{\exp(-2m_e \xi r)}{r} \times \\ & \times \left[\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} (1 + 2m_e \xi r) \right] p_j. \end{aligned} \quad (28)$$

В первом порядке теории возмущений потенциал (28) дает следующий вклад в энергетический спектр после усреднения по кулоновским волновым функциям (10):

$$\begin{aligned} \Delta E_{1,B}^{rel,VP} = & \langle \psi_{1S,2S} | \Delta V_B^{VP} | \psi_{1S,2S} \rangle = \\ = & \begin{cases} \mu p(1S) : 0.1962 \text{ мэВ}; \mu p(2S) : 0.0249 \text{ мэВ}, \\ \mu d(1S) : 0.2515 \text{ мэВ}; \mu d(2S) : 0.0322 \text{ мэВ}. \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

Эти поправки имеют порядок $\alpha(Z\alpha)^4$. Поправки второго порядка теории возмущений в спектре энергии ВП системы определяются редуцированной кулоновской функцией Грина [32], частичное разложение которой имеет вид

$$\tilde{G}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \tilde{g}_{nl}(r, r') Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}'). \quad (30)$$

Радиальная функция $\tilde{g}_{nl}(r, r')$ была получена в работе [32] в виде штурмовского разложения по полиномам Лагерра. Приведем ее выражение для 1S- и 2S-состояний:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{10}(r, r') = & -4\mu^2 Z\alpha \left(\sum_{m=2}^\infty \frac{L_{m-1}^1(x) L_{m-1}^1(x')}{m(m-1)} + \right. \\ & \left. + \frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x'}{2} \right) \exp\left(-\frac{x+x'}{2}\right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{20}(r, r') = & -2\mu^2 Z\alpha \left[\sum_{m=1, m \neq 2}^\infty \frac{L_{m-1}^1(x) L_{m-1}^1(x')}{m(m-2)} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{5}{2} + x \frac{\partial}{\partial x} + x' \frac{\partial}{\partial x'} \right) L_1^1(x) L_1^1(x') \right] \times \\ & \times \exp\left(-\frac{x+x'}{2}\right), \end{aligned} \quad (32)$$

где $x = \mu Z\alpha r$, L_n^m — обычные полиномы Лагерра, которые определяются формулой

$$L_n^m(x) = \frac{e^x x^{-m}}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x} x^{n+m}). \quad (33)$$

Ряд слагаемых квазипотенциала содержит $\delta(\mathbf{r})$, поэтому необходимо знать величину $\tilde{G}_n(\mathbf{r}, 0)$. Выражение для редуцированной кулоновской функции Грина в этом случае было получено в работе [33] с помощью представления Хостлера для кулоновской функции Грина в результате вычитания полюсного члена в виде

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{1S}(\mathbf{r}, 0) = & \frac{Z\alpha\mu^2}{4\pi} \frac{2e^{-x/2}}{x} \times \\ & \times [2x(\ln x + C) + x^2 - 5x - 2], \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{2S}(\mathbf{r}, 0) = & -\frac{Z\alpha\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-x/2}}{2x} \times \\ & \times [4x(x-2)(\ln x + C) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4], \end{aligned} \quad (35)$$

где $C = 0.5772\dots$ — постоянная Эйлера. Однопетлевая поляризация вакуума дает во втором порядке теории возмущений (SOPT) вклад, который определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Delta E_n \text{ SOPT} = & \\ = & 2 \sum_{m=1, m \neq n}^\infty \frac{\langle \psi_n^C | \Delta V_B | \psi_m^C \rangle \langle \psi_m^C | V_{VP}^C | \psi_n^C \rangle}{E_n^C - E_m^C}. \end{aligned} \quad (36)$$

При расчете матричного элемента оператора \mathbf{p}^4 вначале использовалась подстановка

$$\mathbf{p}^4/4\mu^2 = (H_0 + Z\alpha/r)(H_0 + Z\alpha/r),$$

$$H_0 = \mathbf{p}^2/2\mu - Z\alpha/r,$$

а затем алгебраические преобразования вида

$$\begin{aligned} \langle \psi_n^C | \frac{Z\alpha}{r} H_0 \sum_{m, m \neq n} \frac{|\psi_m^C\rangle \langle \psi_m^C|}{E_n^C - E_m^C} V_{VP}^C | \psi_n^C \rangle = & \\ = & -\langle \psi_n^C | \frac{Z\alpha}{r} (I - |\psi_n^C\rangle \langle \psi_n^C|) V_{VP}^C | \psi_n^C \rangle + \\ & + E_n^C \langle \psi_n^C | \frac{Z\alpha}{r} \sum_{m, m \neq n} \frac{|\psi_m^C\rangle \langle \psi_m^C|}{E_n^C - E_m^C} V_{VP}^C | \psi_n^C \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Возникающие после интегрирования с редуцированной кулоновской функцией Грина (30) по координатам r, r' суммы вычислялись с учетом того, что область изменения переменной $1 < \xi < \infty$ и

$$\frac{1}{1 + W/m_e \xi} < 1.$$

Характерный матричный элемент для состояния $1S$ имеет вид

$$I = \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-x} dx \int_0^\infty x' \exp(-x' p_1(\xi)) dx' \times \\ \times \left[\frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x'}{2} + \sum_m \frac{L_{m-1}^1(x) L_{m-1}^1(x')}{m(m-1)} \right] = \\ = \frac{5}{4p_1^2(\xi)} - \frac{1}{2p_1^3(\xi)} + \frac{\ln p_1(\xi)}{p_1^2(\xi)}, \quad (38)$$

$$\sum_{m=2}^\infty \frac{[p_1(\xi) - 1]^{m-1}}{(m-1)p_1^{m+1}(\xi)} = \\ = \frac{1}{p_1^2(\xi)} \sum_{m=2}^\infty \frac{1}{(m-1)p_1^{m-1}(\xi)} = \frac{\ln p_1(\xi)}{p_1^2(\xi)}.$$

Опуская другие многочисленные промежуточные аналитические выражения, приведем суммарное численное значение поправок для $1S$ - и $2S$ -уровней во втором порядке теории возмущений (36):

$$\Delta E_{2,B}^{rel,VP} = \\ = \begin{cases} \mu p(1S) : -0.2644 \text{ мэВ}; \mu p(2S) : -0.0559 \text{ мэВ}, \\ \mu d(1S) : -0.3194 \text{ мэВ}; \mu d(2S) : -0.0696 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (39)$$

5. ДВУХПЕТЛЕВАЯ И ТРЕХПЕТЛЕВАЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Двухпетлевая поляризация вакуума дает вклад во втором порядке теории возмущений (рис. 3а):

$$\Delta E_{SOPT}^{VP,VP} = \langle \psi_n^C | V_{VP}^C \tilde{G} V_{VP}^C | \psi_n^C \rangle. \quad (40)$$

Расчет этого матричного элемента может быть выполнен с помощью соотношений (9), (31), (32). В ре-

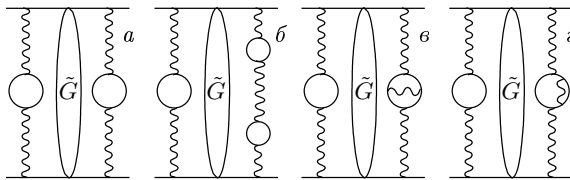


Рис. 3. Поправки двухпетлевой и трехпетлевой поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений

зультате получаем следующие поправки для $1S$ - и $2S$ -уровней энергии порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$:

$$\Delta E_{SOPT}^{VP,VP}(1S) = -\frac{\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \times \\ \times \left[\frac{5}{2} \frac{1}{p_1^2(\xi)p_1^2(\eta)} - \frac{1}{p_1^2(\xi)p_1^3(\eta)} - \frac{1}{p_1^3(\xi)p_1^2(\eta)} + \right. \\ \left. + \frac{[p_1(\xi) - 1][p_1(\eta) - 1]}{p_1^2(\xi)p_1^2(\eta)(p_1(\xi) + p_1(\eta) - 1)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{p_1^2(\xi)p_1^2(\eta)} \ln \frac{p_1(\xi) + p_1(\eta) - 1}{p_1(\xi) + p_1(\eta)} \right], \quad (41)$$

$$\Delta E_{SOPT}^{VP,VP}(2S) = -\frac{\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{9\pi^2} \times \\ \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta f(\xi, \eta), \quad (42)$$

$$f(\xi, \eta) = -\frac{9}{2p_2^4(\xi)p_2^5(\eta)} + \frac{6}{p_2^3(\xi)p_2^5(\eta)} - \frac{3}{p_2^2(\xi)p_2^5(\eta)} - \\ - \frac{9}{2p_2^5(\xi)p_2^4(\eta)} + \frac{153}{8p_2^4(\xi)p_2^4(\eta)} - \frac{39}{2p_2^3(\xi)p_2^4(\eta)} + \\ + \frac{33}{4p_2^2(\xi)p_2^4(\eta)} + \frac{6}{p_2^5(\xi)p_2^3(\eta)} - \frac{39}{2p_2^4(\xi)p_2^3(\eta)} + \\ + \frac{17}{p_2^3(\xi)p_2^3(\eta)} - \frac{6}{p_2^2(\xi)p_2^3(\eta)} - \frac{3}{p_2^5(\xi)p_2^2(\eta)} + \\ + \frac{33}{4p_2^4(\xi)p_2^2(\eta)} - \frac{6}{p_2^3(\xi)p_2^2(\eta)} + \frac{3}{2p_2^2(\xi)p_2^2(\eta)} - \\ - \frac{z^4}{a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)(z-1)} - \frac{z^4(6-5z)}{2a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)(z-1)^2 p_2(\xi)} - \\ - \frac{z^4(6-5z)}{2a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)(z-1)^2 p_2(\eta)} + \frac{z^4(4-3z)}{2a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)(z-1)^2} + \\ + \frac{z^4(4-3z)}{2a_2^3(\xi)a_2^2(\eta)(z-1)^2} + \frac{z^5(-30+49z-21z^2)}{4a_2^3(\xi)a_2^3(\eta)(z-1)^3} - \\ - \frac{z^4(-18+27z-11z^2)}{4a_2^2(\xi)a_2^3(\eta)(z-1)^3 p_2(\xi)} - \\ - \frac{z^4(-18+27z-11z^2)}{4a_2^3(\xi)a_2^2(\eta)(z-1)^3 p_2(\eta)} + \\ + \frac{z^4(-10+13z-5z^2)}{4a_2^3(\xi)a_2^3(\eta)(z-1)^3} + \ln(1-z) \times \\ \times \left[-\frac{2z^3}{a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)} + \frac{3z^3}{a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)p_2(\xi)} + \frac{3z^3}{a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)p_2(\eta)} - \right. \\ \left. - \frac{z^3}{a_2^2(\xi)a_2^3(\eta)} - \frac{z^3}{a_2^3(\xi)a_2^2(\eta)} - \frac{9z^4}{2a_2^3(\xi)a_2^3(\eta)} + \right. \\ \left. + \frac{3z^3}{2a_2^2(\xi)a_2^3(\eta)p_2(\xi)} + \frac{3z^3}{2a_2^3(\xi)a_2^2(\eta)p_2(\eta)} - \frac{z^3}{2a_2^3(\xi)a_2^3(\eta)} \right],$$

где

$$a_2(\xi) = p_2(\xi) - 1, \quad z = \frac{a_2(\xi)a_2(\eta)}{p_2(\xi)p_2(\eta)}.$$

Вклады трехпетлевой поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений, показанные на рис. 3б, в, г, имеют порядок $\alpha^3(Z\alpha)^2$. Для их вычисления вновь необходимо использовать выражение для однопетлевого и двухпетлевого поляризационных операторов. Выполняя интегрирование по координатам волновых функций, можно представить эти вклады в виде

$$\Delta E_{SOPT}^{VP-VP,VP}(1S) = -\frac{2\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{27\pi^3} \times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \frac{\rho(\eta) d\eta}{\xi^2 - \eta^2} \times \int_1^\infty \frac{\rho(\zeta) d\zeta}{p_1^2(\zeta)} \left[\frac{\xi^2 g(\xi, \zeta)}{p_1^2(\xi)} - \frac{\eta^2 g(\eta, \zeta)}{p_1^2(\eta)} \right], \quad (43)$$

$$g(\xi, \zeta) = \frac{5}{2} - \frac{1}{p_1(\xi)} - \frac{1}{p_1(\zeta)} + \frac{[p_1(\xi) - 1][p_1(\zeta) - 1]}{p_1(\xi) + p_1(\zeta) - 1} - \ln \frac{p_1(\xi) + p_1(\zeta) - 1}{p_1(\xi)p_1(\zeta)}, \quad (44)$$

$$\Delta E_{SOPT}^{VP-VP,VP}(2S) = -\frac{2\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{27\pi^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \frac{\xi^2 f(\xi, \zeta) - \eta^2 f(\eta, \zeta)}{\xi^2 - \eta^2}, \quad (45)$$

где функция $f(\xi, \zeta)$ определена ранее выражением (42),

$$\Delta E_{SOPT}^{2-loop VP,VP}(1S) = -\frac{\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{9\pi^2} \int_0^1 f(v) dv \times \left\{ \frac{5}{2} \frac{1}{p_1^2(\xi)q_1^2(v)} - \frac{1}{p_1^3(\xi)q_1^2(v)} + \frac{1}{p_1^2(\xi)q_1^2(v)} \times \left[\frac{p_1(\xi)q_1(v)}{p_1(\xi)+q_1(v)+1} - \ln \frac{p_1(\xi)+q_1(v)+1}{p_1(\xi)+q_1(v)} \right] \right\}, \quad (46)$$

$$q_1(v) = 1 + \frac{m_e}{W\sqrt{1-v^2}},$$

$$\Delta E_{SOPT}^{2-loop VP,VP}(2S) = -\frac{4\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{9\pi^3} \times \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi f(\xi, v), \quad (47)$$

где в выражении для функции $f(\xi, v)$

$$p_2(v) = 1 + \frac{2m_e}{W\sqrt{1-v^2}}, \quad a_2(v) = \frac{2m_e}{W\sqrt{1-v^2}}.$$

Вклад поправок (41)–(47) в изотопический сдвиг равен 0.3125 мэВ, а отдельные вклады для S -уровней представлены в таблице. Анализ вклада трехпетлевой поляризации вакуума в третьем порядке теории возмущений на рис. 2в показывает, что он на порядок меньше вклада диаграммы на рис. 3в, и им, следовательно, можно пренебречь.

6. ЭФФЕКТЫ СТРУКТУРЫ, ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ЯДРА И ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА

В спектре энергии мюонного водорода важная роль принадлежит сильным взаимодействиям, которые связаны с плотностью распределения электрического заряда и магнитного момента ядра. В лидирующем порядке $(Z\alpha)^4$ эффекты структуры ядра определяются дифференциальной характеристикой распределения электрического заряда — зарядовым радиусом ядра, r_N . При вычислении однопетлевых поправок необходимо знать вид самих электромагнитных формфакторов ядра. Вклад эффектов структуры ядра как в сверхтонкую структуру уровней энергии, так и в лэмбовский сдвиг изучался в ряде работ [1, 19, 20, 23, 36]. Лидирующая поправка структуры ядра порядка $(Z\alpha)^4$ в спектре энергии S -уровней мюонного водорода имеет вид (см. диаграмму на рис. 4а):

$$\Delta E_{str,(Z\alpha)^4}(nS) = \frac{2}{3n^3} \mu^3 (Z\alpha)^4 \langle r_p^2 \rangle, \quad (48)$$

где r_p^2 — среднеквадратичный радиус протона. Численные значения этой поправки для уровней с $n = 1$ и $n = 2$ (при $r_p = 0.891$ фм [1]), представленные в таблице, имеют значительный относительный вес, поэтому снижение погрешности определения зарядового радиуса протона является чрезвычайно акту-

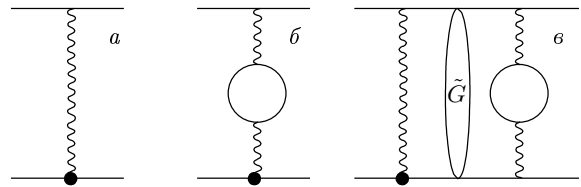


Рис. 4. Поправки на структуру ядра и поляризацию вакуума

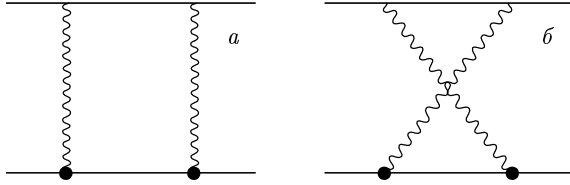


Рис. 5. Поправки на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^5$. Жирной точкой на диаграмме обозначен вершинный оператор ядра

альной задачей, если мы хотим получить более точное теоретическое значение для лэмбовского сдвига S -уровней. В случае дейтерия использовалось значение зарядового радиуса дейтрона $r_d = 2.094$ фм [23].

Двухфотонные обменные амплитуды, показанные на рис. 5 дают поправки на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^5$. В этом случае квазипотенциал двухфотонного взаимодействия может быть найден с помощью соотношений (5), (6) [20, 19], а соответствующая поправка в спектре энергии имеет вид одномерного интеграла:

$$\Delta E_{str,(Z\alpha)^5}(nS) = -\frac{\mu^3(Z\alpha)^5}{\pi n^3} \int_0^\infty \frac{dk}{k} V(k), \quad (49)$$

$$\begin{aligned} V(k) = & \frac{2(F_1^2 - 1)}{m_1 m_2} + \frac{8m_1[F_2(0) + 4m_2^2 F_1'(0)]}{m_2(m_1 + m_2)k} + \\ & + \frac{k^2}{2m_1^3 m_2^3} [2(F_1^2 - 1)(m_1^2 + m_2^2) + 4F_1 F_2 m_1^2 + 3F_2^2 m_1^2] + \\ & + \frac{\sqrt{k^2 + 4m_1^2}}{2m_1^3 m_2(m_1^2 - m_2^2)k} \times \\ & \times \left\{ k^2 [2(F_1^2 - 1)m_2^2 + 4F_1 F_2 m_1^2 + 3F_2^2 m_1^2] - \right. \\ & \left. - 8m_1^4 F_1 F_2 + \frac{16m_1^4 m_2^2 (F_1^2 - 1)}{k^2} \right\} - \\ & - \frac{\sqrt{k^2 + 4m_2^2} m_1}{2m_2^3 (m_1^2 - m_2^2)k} \left\{ k^2 [2(F_1^2 - 1) + 4F_1 F_2 + 3F_2^2] - \right. \\ & \left. - 8m_2^2 F_1 F_2 + \frac{16m_2^4 (F_1^2 - 1)}{k^2} \right\}. \quad (50) \end{aligned}$$

Для проведения численных расчетов на основе выражения (49) использовалась параметризация дираковского F_1 и паулиевского F_2 протонных формфакторов, полученная в [37]. Для атома мюонного дейтерия аналогичные вклады найдены в работе [23]. Вклад пятого порядка по α , связанный со структурой ядра, дают также эффекты электронной поляри-

зации вакуума, которые показаны на рис. 4б,в. Оператор взаимодействия частиц, который соответствует амплитуде на рис. 4б, определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Delta V_{str,VP}(r) = & \frac{2\alpha(Z\alpha)r_N^2}{9} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ & \times \left[\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2 \xi^2}{r} \exp(-2m_e \xi r) \right], \quad (51) \end{aligned}$$

а вклады в спектр энергии $1S$ - и $2S$ -уровней имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,VP}(1S) = & \frac{2}{9} \alpha(Z\alpha)^4 \mu^3 r_N^2 \int_1^\infty \frac{\rho(\xi) d\xi}{p_1^2(\xi)} \times \\ & \times \left(1 + \frac{2m_e \xi}{W} \right) = \begin{cases} \mu p : 0.1991 \text{ мэВ}, \\ \mu d : 1.4155 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,VP}(2S) = & \frac{1}{36} \alpha(Z\alpha)^4 \mu^3 r_N^2 \int_1^\infty \frac{\rho(\xi) d\xi}{p_1^2(\xi)} \times \\ & \times \left[\left(1 + \frac{4m_e \xi}{W} \right) - \frac{4m_e^2 \xi^2}{W^2} \left(-\frac{2}{p_2(\xi)} + \frac{3}{2p_2^2(\xi)} \right) \right] = \\ & = \begin{cases} \mu p : 0.0257 \text{ мэВ}, \\ \mu d : 0.1824 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (53) \end{aligned}$$

Имеется также вклад электронной поляризации вакуума и структуры ядра во втором порядке теории возмущений (см. диаграмму *в* на рис. 4), который определяется редуцированной кулоновской функцией Грина $\tilde{G}_n(r, 0)$ (34) и (35). В этом случае вклады в сдвиг S -уровней равны

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,VP;SOPT}(1S) = & -\frac{2}{9\pi} \alpha(Z\alpha)^4 \mu^3 r_N^2 \times \\ & \times \int_1^\infty \frac{\rho(\xi) d\xi}{p_1^3(\xi)} [2 - 3p_1(\xi) - 2p_1^2(\xi) - 2p_1(\xi) \ln p_1(\xi)] = \\ & = \begin{cases} \mu p : 0.1242 \text{ мэВ}, \\ \mu d : 0.8913 \text{ мэВ}, \end{cases} \quad (54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,VP;SOPT}(2S) = & \\ & = \frac{1}{36\pi} \alpha(Z\alpha)^4 \mu^3 r_N^2 \int_1^\infty \frac{\rho(\xi) d\xi}{p_1^5(\xi)} \times \\ & \times \left[-12 + 23p_2(\xi) - 8p_2^2(\xi) - 4p_2^3(\xi) + 4p_2^4(\xi) + \right. \\ & \left. + 4p_2(\xi)(3 - 4p_2(\xi) + 2p_2^2(\xi)) \ln p_2(\xi) \right] = \\ & = \begin{cases} \mu p : 0.0126 \text{ мэВ}, \\ \mu d : 0.0898 \text{ мэВ}. \end{cases} \quad (55) \end{aligned}$$

Существуют еще два вклада сильного взаимодействия в лэмбовский сдвиг, которые связаны с поляризуемостью ядра и адронной поляризацией вакуума. Для атома мюонного дейтерия вклад поляризуемости ядра в сдвиг S -уровней и сверхтонкую структуру был получен в работе [38], а для атома мюонного водорода в работах [20, 21]. Вклад адронной поляризации вакуума порядка $\alpha(Z\alpha)^4$ в сдвиг S -уровней исследовался в работах [40, 41] и также включен в таблицу.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе выполнен расчет различных квантовоэлектродинамических эффектов, эффектов структуры, поляризуемости протона и адронной поляризации вакуума в лэмбовском сдвиге уровней энергии $1S$ и $2S$ в мюонном водороде, мюонном дейтерии и в изотопическом сдвиге $\mu p - \mu d$ для расщепления $1S - 2S$. Рассматривались поправки порядка α^3 , α^4 и α^5 , а также некоторые вклады порядка α^6 , усиленные $\ln \alpha$. При этом мы учитывали, что отношение $\mu\alpha/m_e$ близко к единице, и уделили особое внимание вычислению эффектов электронной поляризации вакуума. Численные значения полученных вкладов представлены в таблице. В таблицу включены также поправка Вихмана–Кролла [1, 28], мюонная собственно-энергетическая поправка и вклад мюонной поляризации вакуума порядка $\alpha(Z\alpha)^4$ [1, 19], радиационные поправки порядка $\alpha(Z\alpha)^5$ с коэффициентом порядка 10 [1], вклады шестого порядка по α от мюонных радиационных эффектов с учетом электронной поляризации вакуума [1, 34], поправка на отдачу порядка $(Z\alpha)^5$ от двухфотонных обменных диаграмм, которая известна в аналитическом виде [35]. Приведены ссылки на многие работы, в которых исследовались аналитически или численно аналогичные поправки, несмотря на то что конкретные численные результаты для $1S$ и $2S$ уровней в этих работах отсутствуют. При сравнении полученных результатов с расчетами других авторов очень часто используется обзорная работа [1], которая аккумулирует последние достижения в физике энергетических спектров простейших атомов и содержит подробные ссылки на выполненные ранее исследования.

Отметим ряд особенностей проведенных вычислений.

1. Для мюонного водорода важную роль играют эффекты поляризации вакуума, которые приводят

к модификации как брейтовского потенциала взаимодействия частиц, так и оператора взаимодействия в целом, который дает в спектре энергии поправки пятого порядка по постоянной тонкой структуры α .

2. Эффекты структуры протона в спектре энергии S -состояний выражены в главном порядке $(Z\alpha)^4$ в терминах зарядового радиуса ядра (протона и дейтрона), а в однопетлевых амплитудах порядка $(Z\alpha)^5$ с помощью электромагнитных формфакторов ядра.

3. Оценка вкладов на поляризуемость ядра (второй вклад сильного взаимодействия) была выполнена с помощью соотношений, полученных в работах [20, 21, 38]. Вклады структуры и поляризуемости ядра вносят наибольшую теоретическую погрешность в величину интервала $1S - 2S$, а также в изотопический сдвиг для этого расщепления.

Полные численные значения энергии $1S$ - и $2S$ -состояний в мюонном водороде и мюонном дейтерии, а также величина изотопического смещения для перехода $1S - 2S$ представлены в таблице. Они могут рассматриваться как надежная оценка для будущих экспериментов как по изотопическому сдвигу мюонный водород–мюонный дейтерий, так и по интервалу большой тонкой структуры $1S - 2S$ в мюонном водороде и мюонном дейтерии. Численные значения поправок получены с точностью 0.0001 мэВ. Для перехода $1S - 2S$ теоретическая ошибка полученных результатов определяется рядом факторов: неопределенностями фундаментальных параметров (постоянная тонкой структуры, массы протона, дейтрона и мюона), которые составляют величину порядка 10^{-7} . Квантовоэлектродинамические поправки более высокого порядка α^6 дают ошибку порядка 10^{-8} . Наибольший вклад в теоретическую ошибку дают неопределенности значений зарядовых радиусов протона и дейтрона. Их относительный вклад составляет величину порядка 10^{-6} (использовались значения зарядовых радиусов протона $r_p = 0.891$ фм и дейтрона $r_d = 2.094$ фм). Дальнейшие улучшения теоретических результатов, представленных в таблице, связаны прежде всего с поправками на структуру и поляризуемость ядра. В этой связи для сравнения выполненных теоретических расчетов с экспериментальными данными большой интерес представляет величина интервала тонкой структуры $E(1S) - 8E(2S)$, в которой эффекты структуры и поляризуемости ядра отсутствуют в главном порядке $(Z\alpha)^4$. Численные значения этого интервала для мюонного водорода и мюонного дейтерия имеют вид

Поправки порядка $\alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$ в лэмбовском сдвиге 1S- и 2S-уровней энергии мюонного водорода и мюонного дейтерия и в изотопическом сдвиге ΔE_{IS}

Вклад в энергию атома	μp , мэВ		μd , мэВ		ΔE_{IS}	Ссыл- ка, фор- мула
	1S	2S	1S	2S		
1	2	3	4	5	6	7
Формула тонкой структуры $E_n = m_1 + m_2 - \frac{\mu(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{\mu(Z\alpha)^4}{2n^3} \times \left[1 - \frac{3}{4n} + \frac{\mu^2}{4nm_1m_2} \right]$	1043927826470.3586	1043929722866.0601	1981268455762.7537	1981270453188.8081	101030.3530	(3) [1]
Вклад 1-петл. ПВ в 1 γ -взаимодей- ствии порядка $\alpha(Z\alpha)^2$	-1898.8379	-219.5849	-2129.2820	-245.3205	204.7085	(5) (6) (13)
Поправка Вих- мана - Кролла по- рядка $\alpha(Z\alpha)^4$	0.0114	0.0012	0.0126	0.0014	-0.0010	[28]
Вклад 2-петл. ПВ (VP-VP) в 1 γ -взаимодей- ствии порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$	-1.8816	-0.2426	-2.1871	-0.2811	0.2616	(15) (16)
Вклад 2-петл. ПВ (2-loop) в 1 γ -взаимодей- ствии порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$	-12.6144	-1.4112	-14.0141	-1.5606	1.2476	(19) (20)
Вклад 3-петл. ПВ (VP-VP-VP) в 1 γ -взаимодей- ствии порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.0029	-0.0003	-0.0034	-0.0004	0.0004	[30] (23) (24)
Вклад 3-петл. ПВ (VP-2-loop) в 1 γ -взаимодей- ствии порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.0223	-0.0030	-0.0251	-0.0035	0.0023	[30] (25) (26)

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7
Вклад 3-петл. ПВ ($\Pi^{(p6)}$) в 1γ -взаимодей- ствии порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.0340	-0.0045	-0.0380	-0.0050	0.0035	[30]
Вклад реляти- вистских эффектов и ПВ в 1 пор. ТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	0.1962	0.0249	0.2515	0.0322	-0.0480	[19] (29)
Вклад реляти- вистских эффектов и ПВ во 2 пор. ТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.2644	-0.0559	-0.3194	-0.0696	0.0413	[19] (39)
Вклад 2-петл. ПВ во 2 пор. ТВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$	-2.0343	-0.1532	-2.3675	-0.1750	0.3114	(41) (42)
Вклад 3-петл. ПВ ($VP-VP, VP$) во 2 пор. ТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.0061	-0.0002	-0.0073	-0.0005	0.0009	(43) (45)
Вклад 3-петл. ПВ (2-loop VP, VP) во 2 пор.ТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.0059	-0.0016	-0.0069	-0.0021	0.0005	(46) (47)
Собственно-энер- гетический вклад мюона и вклад мюонной поляриз. вакуума порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	5.1180	0.6543	5.9395	0.7594	-0.7164	[1] [19]
Радиационные поправки порядка $\alpha(Z\alpha)^5$	0.0355	0.0044	0.0414	0.0052	-0.0051	[1]
Радиационные поправки+ПВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$	0.0178	0.0025	0.0209	0.0029	-0.0027	[1] [19]
Поправки на отдачу порядка $(Z\alpha)^5$	0.3009	0.0428	0.1781	0.0253	0.1053	[1]

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7
Вклад структуры ядра порядка $(Z\alpha)^4$	38.5711	4.8214	213.4218	26.6825	-152.6597	(48) [1, 23]
Вклад структуры ядра порядка $(Z\alpha)^5$	-0.1464	-0.0183	-2.9384	-0.3674	2.4429	(51) [19, 23]
Вклад структуры ядра и ПВ порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	0.2127	0.0274	1.4155	0.1824	-1.0478	(52) (53)
Вклад структуры ядра и ПВ во 2 пор. ТВ порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	0.1327	0.0135	0.8913	0.0898	-0.6823	(54) (55)
Вклад поляризуемости ядра порядка $(Z\alpha)^5$	-0.1291	-0.0161	92.0511	11.5064	-80.6577	[38] [36, 39]
Вклад адронной поляриз. вакуума порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	-0.0864	-0.0108	-0.1010	-0.0126	0.0128	[40] [41]
Суммарный вклад	1043927824598.8893	1043929722650.1499	1981268453925.6873	1981270452980.2974	101003.3495	

$$\begin{aligned} \mu p : E(1S) - 8E(2S) = \\ = -7\,307\,509\,956\,602.3099 \text{ мэВ}, \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} \mu d : E(1S) - 8E(2S) = \\ = -13\,868\,895\,169\,916.6917 \text{ мэВ}. \end{aligned}$$

Относительная величина той части теоретической ошибки в (56), которая обусловлена поправками более высокого порядка, чрезвычайно мала (порядка 10^{-15}).

Изотопическое смещение в системе мюонный водород-мюонный дейтерий для расщепления $1S - 2S$ представляет собой одну из важнейших характеристик спектров энергии этих ВП-атомов. Различие в длинах волн, излучаемых изотопами одного элемента, возникает из-за различия масс изотопов, а также из-за различий в распределении заряда ядер. В то время как массы протона и дейтрона известны в настоящее время с достаточно высокой точ-

ностью, характеристики структуры ядер определены менее точно. Используя результаты проведенных расчетов, можно выразить разность зарядовых радиусов дейтрона и протона в терминах изотопического сдвига:

$$\begin{aligned} \frac{r_d^2}{(1 + m_\mu/m_d)^3} - \frac{r_p^2}{(1 + m_\mu/m_p)^3} = \\ = \frac{12}{7m_\mu^3(Z\alpha)^4} (\Delta \tilde{E}_{1S}^{th} - \Delta E_{1S}^{exp}), \end{aligned} \tag{57}$$

где теоретическое значение $\Delta \tilde{E}_{1S}^{th}$ не содержит поправки на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^4$. Таким образом, измерение изотопического смещения $\mu p - \mu d$ позволит, с одной стороны, осуществить еще одну проверку КЭД, а с другой — получить более точное значение зарядового радиуса дейтрона из соотношения (57) после определения зарядового радиуса протона в эксперименте PSI [4].

Автор благодарит Д. Д. Бакалова, Т. Киношиту, В. А. Матвеева, М. Нио, В. Г. Пальчикова, К. Пахуцкого, В. А. Рубакова, В. И. Саврина, Р. Н. Фаустова, В. В. Фильченкова, И. Б. Хрипловича, М. И. Эйдеса за полезные обсуждения различных аспектов проблемы спектра энергии атома мюонного водорода. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-02-16085) и Программы «Университеты России — Фундаментальные исследования» (грант № УР.02.01.367).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rep.* **342**, 62 (2001).
2. Ю. Л. Соколов, *УФН* **169**, 559 (1999).
3. P. J. Mohr and B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 351 (2000).
4. R. Pohl, F. Biraben, C. A. N. Conde et al., *Hyperfine Interactions* **127**, 161 (2000).
5. A. Adamczak, D. Bakalov, K. Bakalova et al., *Hyperfine Interactions* **136**, 1 (2001).
6. A. Dupays, A. Beswick, B. Lepetit et al., *Phys. Rev. A* **68**, 052503 (2003).
7. A. C. Zemach, *Phys. Rev.* **104**, 1771 (1956).
8. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЖЭТФ* **125**, 48 (2004); E-print archives hep-ph/0312116.
9. А. Р. Мартыненко, *Phys. Rev. A* **71**, 022506 (2005).
10. S. D. Drell and J. D. Sullivan, *Phys. Rev.* **154**, 1477 (1967).
11. J. Bernabeu and T. E. O. Ericson, *Z. Phys. A* **309**, 213 (1983).
12. E. V. Cherednikova, R. N. Faustov, and A. P. Martynenko, *Nucl. Phys. A* **703**, 365 (2002).
13. G. Breit, *Rev. Mod. Phys.* **30**, 507 (1958).
14. K. Pachucki, D. Leibfried, M. Weitz et al., *J. Phys. B* **29**, 177 (1996).
15. A. Huber, Th. Udem, B. Gross et al., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 468 (1998).
16. M. Niering, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5496 (2000).
17. M. M. Sternheim, *Phys. Rev.* **138**, B430 (1965).
18. E. Borie and G. A. Rinker, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 67 (1982).
19. K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **53**, 2092 (1996).
20. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЯФ* **63**, 915 (2000).
21. K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **60**, 3593 (1999).
22. A. Veitia and K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **69**, 042501 (2004).
23. R. N. Faustov and A. P. Martynenko, *Phys. Rev. A* **67**, 052506 (2003).
24. E. E. Salpeter, *Phys. Rev.* **87**, 328 (1952); **89**, 92 (1952).
25. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ТМФ* **64**, 179 (1985).
26. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЖЭТФ* **115**, 1221 (1999).
27. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
28. E. H. Wichmann and N. M. Kroll, *Phys. Rev.* **101**, 843 (1956).
29. M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rev. D* **65**, 013003 (2001).
30. T. Kinoshita and M. Nio, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 3240 (1999).
31. T. Kinoshita and M. Nio, *Phys. Rev. D* **60**, 053008 (1999).
32. С. А. Запрягаев, Н. Л. Манаков, В. Г. Пальчиков, *Теория многозарядных ионов с одним и двумя электронами*, Энергоатомиздат, Москва (1985).
33. В. Г. Иванов, С. Г. Каршенбойм, *ЖЭТФ* **109**, 1219 (1996).
34. R. Barbieri, M. Caffo, and E. Remiddi, *Nuovo Cimento Lett.* **7**, 60 (1973).
35. J. R. Sapirstein and D. R. Yennie, in *Quantum Electrodynamics*, ed. by T. Kinoshita, World Scientific, Singapore (1990), p. 560.
36. J. L. Friar, J. Martorell, and D. W. L. Sprung, *Phys. Rev. A* **56**, 4579 (1997).
37. G. G. Simon, Ch. Schmitt, F. Borkowski et al., *Nucl. Phys. A* **333**, 381 (1980).
38. А. И. Мильштейн, С. С. Петросян, И. Б. Хриплович, *ЖЭТФ* **109**, 1146 (1996); А. И. Мильштейн, И. Б. Хриплович, *ЖЭТФ* **125**, 205 (2004).
39. R. N. Faustov and A. P. Martynenko, *Mod. Phys. Lett. A* **16**, 507 (2001).
40. J. L. Friar, J. Martorell, and D. W. L. Sprung, *Phys. Rev. A* **59**, 4061 (1999).
41. R. N. Faustov and A. P. Martynenko, *EPJdirect C* **6**, 1 (1999).