

ИОНИЗАЦИЯ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ АТОМА ВОДОРОДА ЛАЗЕРНЫМ ИМПУЛЬСОМ

*Б. А. Зон**, *А. С. Корнев***

*Воронежский государственный университет
394006, Воронеж, Россия*

Поступила в редакцию 20 июня 2005 г.

В адиабатическом приближении проведены расчеты энергетических спектров электронов при ионизации возбужденных $2s$ -, $2p$ - и $3d$ -состояний атома водорода сверхсильным ультракоротким лазерным импульсом.

PACS: 32.80.Fb

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы был достигнут значительный прогресс в экспериментальном изучении ионизации атомов сверхсильным лазерным полем. Это относится, в частности, к детальным измерениям энергетического распределения электронов [1–4], а также к зависимости вероятности ионизации от фазы светового поля, возникающей для сверхкоротких лазерных импульсов [5].

Новые экспериментальные результаты стимулировали появление теоретических работ, в которых ионизация атомов в сильном лазерном поле рассматривалась как аналитическими, так и численными методами (см. обзор [6], а также недавние работы [7–11]). При этом основная проблема теории связана с учетом влияния кулоновского поля атомного остатка на движение электрона в непрерывном спектре. Дело в том, что для электрона, связанного короткодействующими силами, теория ионизации в сильном поле была развита еще в классической работе Келдыша [12]. Развитие метода, проведенное в работе [13] (см., также [14]), позволило получить спектры туннелирующих электронов, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными [15]. Авторами работы [13] была высказана гипотеза, что аналитические формулы, описывающие электронные спектры для фотоотрыва от отрицательных ионов (короткодействующий потенциал), могут

быть после простой модификации применены и для описания ионизации нейтральных атомов и положительных ионов, где имеется дальнедействующее кулоновское взаимодействие. Проверка этой гипотезы и является одной из целей данной работы.

Аналитические методы описания электронных спектров при ионизации нейтральных атомов и положительных ионов развивались также в работах [16, 17]. В работе [17] для описания движения свободного электрона в кулоновском поле и поле электромагнитной волны использовались волковские функции с кулоновской поправкой; относительно их точности в случае сильного поля были высказаны серьезные сомнения [18].

Вычисления данной работы проведены на основе адиабатического приближения, предложенного и протестированного нами ранее [19]. Напомним, что основная идея используемого адиабатического приближения базируется на результате работы [20]. В этой работе вероятность туннельного вырывания электрона из короткодействующего потенциала, найденная Келдышем, была обобщена на случай туннельной ионизации атома путем формальной замены напряженности электрического поля в вероятности туннельного эффекта в постоянном поле [21] на переменную напряженность электрического поля световой волны с последующим усреднением этой вероятности по периоду поля. В адиабатическом приближении [19] замена переменного поля на постоянное проводится на более ранней стадии — в электронных волновых функциях, с которыми можно про-

*E-mail: zon@niif.vsu.ru

**E-mail: a-kornev@yandex.ru

водить вычисления различных величин, в данном случае — электронных спектров. В дальнейшем эти найденные величины усредняются по периоду поля. Представляется очевидным, что точность подобного подхода должна быть не хуже, чем точность вычисления полной вероятности туннельного эффекта [22]. Другие варианты адиабатического приближения рассмотрены в работах [23].

В работе используется атомная система единиц ($\hbar = e = m = 1$).

2. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

Рассмотрим электрон, движущийся в кулоновском потенциале, создаваемом зарядом Z , и линейно поляризованном вдоль оси z лазерном поле напряженностью $F(t)$. Волновая функция электрона в дипольном приближении удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{Z}{r} + zF(t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

Построим решение уравнения Шредингера (1), пригодное для случая низких частот поля ω . Ограничимся случаем непрерывного спектра. Воспользуемся адиабатическим приближением, в соответствии с которым движение электрона «подстраивается» к изменению поля. Физически это означает пренебрежение инерционными свойствами электрона при его взаимодействии с полем. В соответствии с классическим законом изменения импульса условие применимости адиабатического приближения в непрерывном спектре можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{F}{\omega} \gg \sqrt{E}, \quad (2)$$

где F — характерное значение напряженности поля, E — характерное значение энергии электрона. Условие (2) уточняет условие применимости адиабатического приближения, приведенное в работе [19]: $F/\omega \ll 1$. Соотношение (2) аналогично соответствующему условию, впервые предложенному в работе [16].

Адиабатическое решение уравнения (1) запишем следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Phi_E(F, \mathbf{r})|_{F=F(t)} \exp(-iEt), \quad (3)$$

где $\Phi_E(F, \mathbf{r})$ — решение стационарного уравнения Шредингера в постоянном однородном поле F :

$$\left[-\frac{1}{2} \nabla^2 - \frac{Z}{r} + zF \right] \Phi_E(F, \mathbf{r}) = E \Phi_E(F, \mathbf{r}). \quad (4)$$

Как видно, функция (3) и энергия E зависят от времени параметрически, что и является основным приближением данной работы.

Стационарное уравнение Шредингера (4) удобно решать в квадратичных параболических координатах μ, ν, φ [24], связанных с декартовыми следующими соотношениями:

$$x = \mu\nu \cos \varphi, \quad y = \mu\nu \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2} (\mu^2 - \nu^2). \quad (5)$$

Координаты (5) связаны с традиционными параболическими координатами (ξ, η) простыми соотношениями: $\mu^2 = \xi$, $\nu^2 = \eta$. Квадратичные координаты удобны при численном решении уравнения Шредингера (4), так как область интегрирования становится более компактной [25]. Основные свойства квадратичных параболических координат собраны в Приложении А.

В этих координатах переменные в уравнении (4) разделяются,

$$\Phi_E(F, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu\nu}} M(F, \mu) N(F, \nu) e^{im\varphi}, \quad (6)$$

приводя к двум одномерным уравнениям Шредингера:

$$\left[\frac{d^2}{d\mu^2} + \frac{1-4m^2}{4\mu^2} + 2E\mu^2 - F\mu^4 + Z_1 \right] M(F, \mu) = 0, \quad (7)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\nu^2} + \frac{1-4m^2}{4\nu^2} + 2E\nu^2 + F\nu^4 + Z_2 \right] N(F, \nu) = 0, \quad (8)$$

с константами разделения Z_1 и Z_2 , связанными соотношением

$$Z_1 + Z_2 = 4Z.$$

Уравнение (7) описывает финитное движение, и его собственные функции характеризуются параболическим квантовым числом n_1 . Уравнение (8) описывает инфинитное движение, и его собственные функции можно характеризовать полной энергией E (рис. 1). Таким образом, адиабатическое решение временного уравнения Шредингера (1) можно записать в виде параболической волны:

$$\begin{aligned} \Psi_{En_1m}(\mathbf{r}, t) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu\nu}} M_{En_1m}(F, \mu) N_{En_1m}(F, \nu)|_{F=F(t)} \times \\ &\quad \times \exp[i(m\varphi - Et)]. \end{aligned} \quad (9)$$

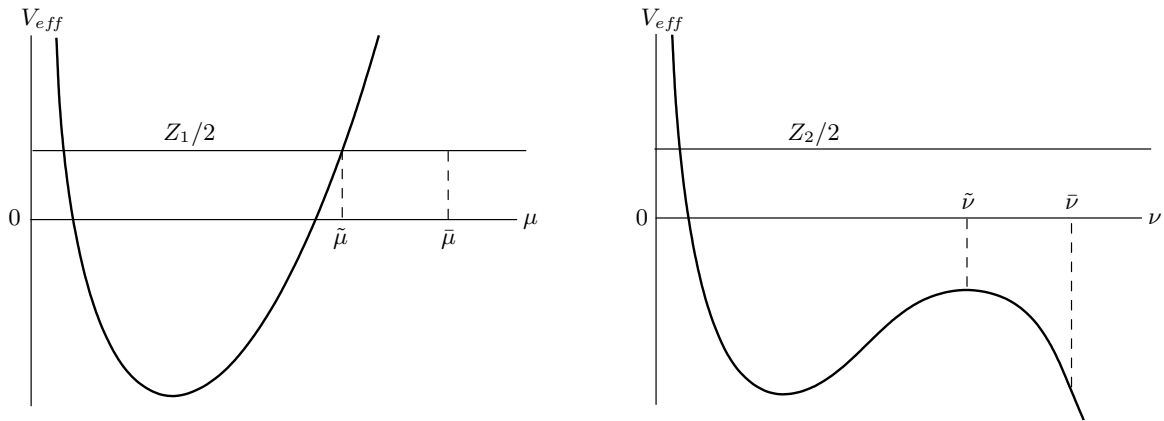


Рис. 1. Эффективные потенциалы для одномерных уравнений Шредингера (7) (а) и (8) (б)

Подробное описание использовавшегося алгоритма численного решения уравнений (7), (8) приведено в Приложении В.

3. АМПЛИТУДА И ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОЦЕССА

Выберем лазерный импульс в следующем виде:

$$F(t) = F_0 \cos^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cos(\omega t - \Theta), \quad |t| \leq T, \quad (10)$$

где Θ — фаза светового поля, существенная для коротких импульсов, T — ширина импульса на половине высоты.

Дифференциальная по энергии вероятность связанно-свободного перехода между начальным $|i\rangle$ и конечным $|f\rangle$ состояниями дается формулой

$$\frac{dP_{fi}}{dE} = \left| \int_{-T}^T A_{fi}(t) dt \right|^2, \quad (11)$$

где волновая функция конечного состояния предполагается нормированной на δ -функцию по шкале энергий. Амплитуда перехода

$$A_{fi}(t) = F(t) \langle f | z | i \rangle. \quad (12)$$

Таким образом, в отличие от известной работы Келдыша [12], в качестве волновой функции конечного состояния здесь выбирается не функция Гордона–Волкова, описывающая движение электрона в поле плоской электромагнитной волны, а адиабатические функции, переходящие при $\omega \rightarrow 0$ в точное

решение уравнения Шредингера, описывающее движение электрона в кулоновском и постоянном электрических полях.

Волновая функция начального состояния в квадратичных параболических координатах имеет следующий вид:

$$|i\rangle = |n_{1i} n_{2i} m\rangle = \frac{Z \exp[i(m\varphi - E_0 t)]}{\sqrt{\pi n^3 \mu \nu}} \times f_{n_{1i}|m|}\left(\mu \sqrt{\frac{Z}{n}}\right) f_{n_{2i}|m|}\left(\nu \sqrt{\frac{Z}{n}}\right). \quad (13)$$

Здесь

$$n = n_{1i} + n_{2i} + |m| + 1, \quad (14)$$

$$f_{n'm}(x) = \frac{1}{m!} \sqrt{\frac{(n'+m)!}{n!}} \times x^{(2m+1)/2} {}_1F_1(-n', m+1; x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция, $E_0 = -Z^2/2n^2$ — энергия связанного состояния.

После подстановки (9), (13) в (12) выражение для амплитуды процесса принимает вид

$$A_{E, n_{1i} n_{2i}}^{(m)}(n_1) = \int_{-T}^T \mathcal{N}_{E, n_{1i} n_{2i}}^{(m)}(n_1, t) \exp[i(E - E_0)t] dt, \quad (15)$$

где

$$\mathcal{N}_{E, n_{1i} n_{2i}}^{(m)}(n_1, t) = \frac{ZF}{\sqrt{2n^3}} [I_4 \mathcal{J}_0 - I_0 \mathcal{J}_4] \Big|_{F=F(t)}, \quad (16)$$

$$\mathcal{I}_k = \int_0^\infty \mu^k M_{E n_1 |m|}(|F|, \mu) f_{n_1 i |m|} \left(\mu \sqrt{\frac{Z}{n}} \right) d\mu,$$

величина \mathcal{J}_k отличается от \mathcal{I}_k заменами $\mu \rightarrow \nu$, $M_{E n_1 |m|} \rightarrow N_{E n_1 |m|}$, $n_{1i} \rightarrow n_{2i}$. Итак, амплитуда ионизации связанного состояния есть фурье-образ функции (16) по времени на частоте $E - E_0$:

$$A_{E, n_1, n_{2i}}^{(m)}(n_1) = \mathcal{N}_{E, n_1, n_{2i}}^{(m)}(n_1, \Omega) \Big|_{\Omega=E-E_0}. \quad (17)$$

Строго говоря, выражение (16) справедливо только на положительных полупериодах лазерного поля. При интегрировании в (11) по отрицательным полупериодам в правой части (16) необходимо провести дополнительную замену $n_{1i} \rightleftharpoons n_{2i}$, поскольку при $F < 0$ координаты μ и ν меняются ролями. Напомним, что проекция орбитального момента электрона на направление линейной поляризации сохраняется, и поэтому амплитуда (17) зависит от m параметрически. Заметим, что адиабатическое приближение, вообще говоря, неприменимо в те моменты времени, когда поле $F(t)$ меняет знак. Однако данное ограничение существенно не сказывается на величине амплитуды благодаря общему множителю $F(t)$ в (12).

В соответствии с формулой (11), дифференциальная по энергии вероятность испускания электрона с параболическим квантовым числом n_1 получается возведением в квадрат (17):

$$\frac{d}{dE} P_{E, n_1, n_{2i}}^{(m)}(n_1) = \left| A_{E, n_1, n_{2i}}^{(m)}(n_1) \right|^2. \quad (18)$$

Проинтегрированное по углам энергетическое распределение электронов получается суммированием вероятностей (18) по всем значениям параболического квантового числа n_1 :

$$\frac{d}{dE} P_{E, n_1, n_{2i}}^{(m)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left| A_{E, n_1, n_{2i}}^{(m)}(n_1) \right|^2. \quad (19)$$

Таким образом, использование параболических координат не требует решения системы связанных дифференциальных уравнений. Нужно лишь выполнить суммирование по вкладам всех параболических парциальных волн.

Если начальное состояние задается с помощью главного n_i и орбитального l_i квантовых чисел, в качестве начального состояния $|i\rangle$ нужно взять соот-

ветствующую суперпозицию состояний (13) с параболическими числами n_{1i} , n_{2i} (см., например, [26]):

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |n_i l_i m\rangle = \\ &= \sum_{n_{1i}, n_{2i}} C_{n_{1i}, n_{2i}}^{l_i m} \frac{n_{1i}-1}{2} \frac{m+n_{1i}-n_{2i}}{2} \frac{n_{2i}-1}{2} \frac{m+n_{2i}-n_{1i}}{2} \times \\ &\quad \times |n_{1i} n_{2i} m\rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

Индексы суммирования в (20) пробегают все целые неотрицательные значения, удовлетворяющие условию (14) и не позволяющие коэффициенту Клебша–Гордана обращаться в нуль тождественно.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Все численные результаты, полученные в данной работе, относятся к зависимости проинтегрированной по углам вероятности испускания электрона от его энергии. Отметим вначале, что рассмотренное нами адиабатическое приближение не позволяет провести сравнение с результатами работ [27–29], в которых проводились аналогичные расчеты для основного состояния атома водорода. Используемые в указанных работах лазерные параметры удовлетворяют условию адиабатичности (2) лишь для низких энергий. Энергетический же спектр электронов при этом оказывается достаточно широким. Он заметно спадает лишь при значениях энергии, находящихся вне условия адиабатичности (2).

По этой причине расчеты были проведены для ионизации возбужденных ($2s$, $2p$, $3d$ с $|m| = 2$) состояний атома водорода при $\omega = 0.056$, $F = 0.1$, $T = 2.5$ фс. Электронные спектры для ионизации из возбужденных состояний оказываются более узкими в сравнении с ионизацией из основного состояния, выход электронов уменьшается на несколько порядков для энергий, удовлетворяющих условию адиабатичности (2). Кроме того, для возбужденных состояний энергия электрона в поле с максимальной напряженностью $F = 0.1$ превышает энергию связи электрона в атоме, поэтому формально приводимые результаты соответствуют случаю надбарьерной ионизации. Вопрос об ионизации возбужденных состояний атома также неоднократно поднимался в литературе (см., например, [4, 30]).

Результаты расчетов представлены на рис. 2, 3, энергия электронов измеряется в единицах пондеромоторной энергии $U_p = F_0^2/4\omega^2$.

Результаты представлены в сравнении с аналогичными результатами, получающимися в моделях, рассмотренных в работах [13, 17]. В этих работах

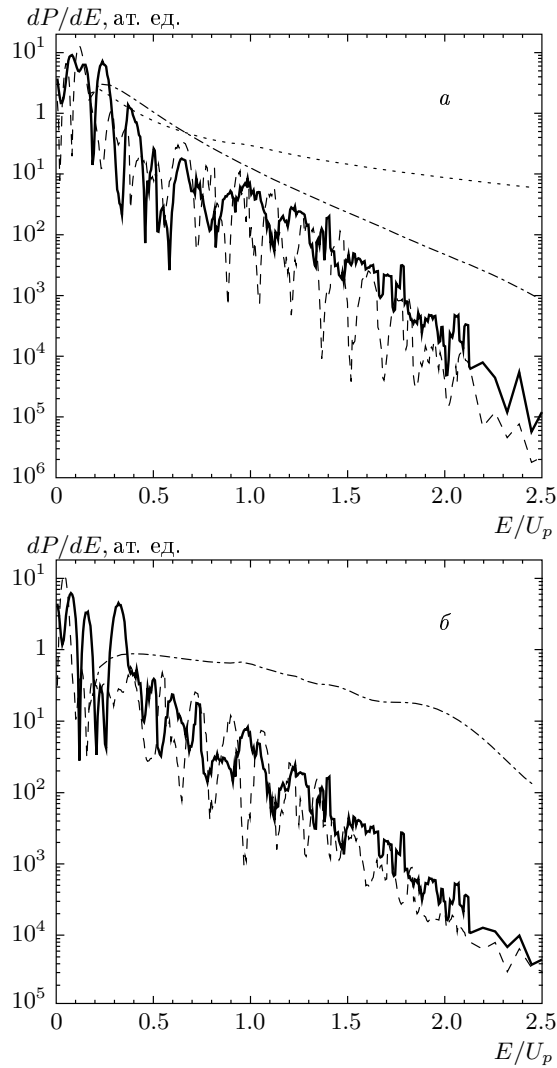


Рис. 2. Спектры электронов при ионизации $2s$ (*a*) и $2p$ -состояний (*б*) атома водорода с $m = 0$. Сплошные линии — для импульса в форме косинуса; штриховые — в форме синуса, штрихпунктирные — результаты кинетической модели (25), основанной на данных [13], пунктирные — результаты кинетической модели, основанной на данных [17]. Параметры излучения (10): $\omega = 0.056$ ат. ед. ($\lambda = 800$ нм); пиковая интенсивность $3.45 \cdot 10^{14}$ Вт/см² ($F_0 = 0.1$ ат. ед.), $T = 2.5$ фс

приведены аналитические формулы для скоростей ионизации атома монохроматическим линейно поляризованным излучением. При этом естественно возникает зависимость от числа поглощенных фотонов. В обеих моделях величина W_n получалась численным интегрированием дифференциальной по углам

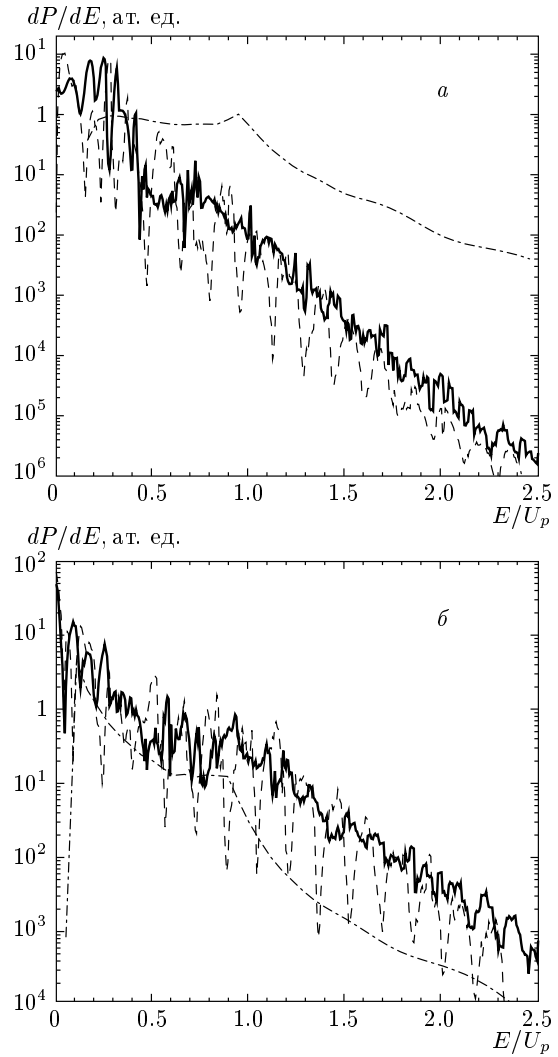


Рис. 3. Спектры электронов при ионизации $2p$ -состояния атома водорода с $|m| = 1$ (*a*) и $3d$ -состояния с $|m| = 2$ (*б*). Обозначения и параметры те же, что на рис. 2

скорости ионизации:

$$W_n = 2\pi \int_0^\pi \frac{dW_n}{d\Omega} \sin \theta d\theta.$$

Вид последней определяется используемой моделью.

В работе [13] начальное состояние электрона взято из модели короткодействующего потенциала, для описания конечного состояния электрона берется волновая функция Гордона–Волкова, а вычисления проводятся в квазиклассическом приближении. Результат для линейно поляризованного излучения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dW_n}{d\Omega} = & \frac{pA^2}{4\pi} \left(\frac{\kappa}{\omega}\right)^{2\nu} 2^\nu \times \\ & \times \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) (2l+1) \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \times \\ & \times \left| P_l^{|m|} \left(\sqrt{1 + \frac{p^2 \sin^2 \theta}{\kappa^2}} \right) \right|^2 \times \\ & \times \left| \sum_{\mu=1,2} (\pm 1)^{l+m} \frac{(c_\mu + is_\mu)^n}{\sqrt{2\pi(-iS''_\mu)^{\nu+1}}} \times \right. \\ & \left. \times \exp[-ic_\mu(\xi + zs_\mu)] \right|^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь верхний или нижний знак выбирается, соответственно, для $\mu = 1$ или $\mu = 2$,

$$\begin{aligned} s_\mu = & -\frac{\xi \pm i\sqrt{8z(n-z) - \xi^2}}{4z}, \\ c_\mu = & \pm \sqrt{1 - s_\mu^2}, \\ S''_\mu = & c_\mu(\xi + 4zs_\mu), \quad z = \frac{F^2}{4\omega^3}, \\ p = & \sqrt{2 \left(n\omega - \frac{F^2}{4\omega^2} - E_0 \right)}, \end{aligned} \quad (22)$$

P — полином Лежандра, $\xi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{p}/\omega^2$, E_0 — энергия связи электрона в начальном состоянии, l, m — соответственно, его орбитальное и магнитное квантовые числа. Постоянные A , ν и $\kappa = \sqrt{2E_0}$ определяются волновой функцией начального состояния:

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = Ar^{\nu-1} e^{-\kappa r} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (23)$$

причем для короткодействующего потенциала $\nu = 0$.

Поскольку для нейтрального атома или положительного иона формула (23) при $\nu = 1$ дает правильное асимптотическое описание волновой функции с соответствующими заменами нормировочного множителя A и энергии связи E_0 , в работе [13] было высказано предположение, что формула (21) может быть применена и для описания ионизационных электронных спектров нейтральных атомов, а не только отрицательных ионов. Однако пренебрежение влиянием кулоновского поля атомного остатка на движение свободного электрона означает пренебрежение процессами перерассеяния, экспериментально наблюдавшимися в недавней работе [31], что в случае сильного поля является с формальной точки зрения недопустимым.

В работе [17] для описания конечного состояния электрона использовалась волновая функция Гордо-

на – Волкова с кулоновской поправкой. Приводим результат для надбарьерной ионизации s -состояния водородоподобного иона с зарядовым числом Z и главным квантовым числом n_p линейно поляризованным излучением:

$$\begin{aligned} \frac{dW_n}{d\Omega} = & \\ = & \frac{p^2 \omega^2 Z D^2}{\pi^2 (2F)^{4/3} n_p^2} \text{Ai}^2 \left(\frac{Z^2/n_p^2 + p_\perp^2 + p_\parallel^2 \gamma^2/3}{(2F)^{2/3}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$D = \left(\frac{4Z^3}{Fn_p^4} \right)^{n_p},$$

$\gamma = \omega Z/Fn_p$ — параметр Келдыша, p_\parallel и p_\perp — соответственно, продольная и поперечная (относительно вектора поляризации) составляющие импульса, Ai — функция Эйри. В работе [17] отсутствуют аналитические выражения для скорости ионизации состояний с $l > 0$.

При ионизации возбужденных состояний атома водорода скорости (21) и (24) оказываются настолько большими, что их умножение на время порядка длительности лазерного импульса приводит к вероятности, превышающей 1. Поэтому эти величины в данном случае следует рассматривать именно как скорости переходов, а не как вероятности переходов в единицу времени.

Для получения разумных результатов со скоростями (21) и (24) записывались кинетические уравнения, которые затем решались для импульса с огибающей из формулы (10) (при этом, к сожалению, зависимость от начальной фазы импульса терялась):

$$\frac{dC_0}{dt} = - \sum_{n'=1}^{N_{max}} W_{n'} C_0, \quad \frac{dC_n}{dt} = W_n C_0, \quad (25)$$

$$C_0(-T) = 1, \quad C_n(-T) = 0, \quad n = 1, \dots, N_{max}.$$

Здесь C_n — вероятность ионизации с поглощением n фотонов, C_0 — начальная концентрация нейтральных атомов, N_{max} — максимальное число поглощенных фотонов, учитываемое при вычислениях.

Система (25) формально может быть разрешена в квадратурах, которые, однако, непригодны для численных расчетов ввиду недостаточно гладкого поведения подынтегральных функций. Поэтому более удобным является численное решение самих кинетических уравнений. К сожалению, эта задача будет «жесткой» [32]. Для таких систем разработаны специальные численные методы [33].

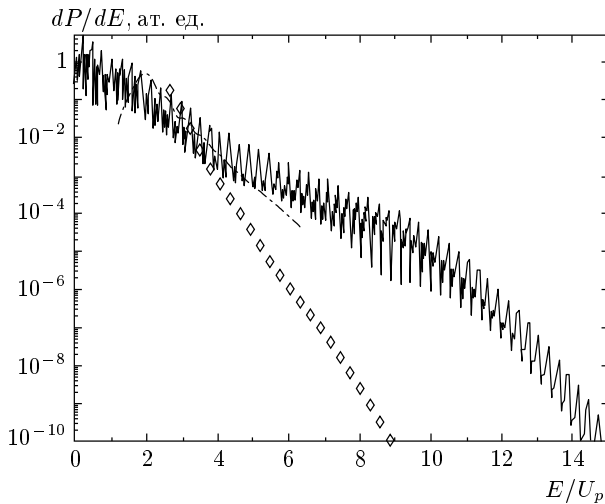


Рис. 4. Выход электронов при туннельной ионизации $1s$ -состояния атома водорода. Сравнение результатов [29] (сплошная линия) с моделью [13] (ромбы) и кинетической моделью (25), основанной на [13] (штрих-пунктирная линия). Параметры излучения: $\omega = 0.074$ (680 нм), $T = 25$ фс; пиковая интенсивность $2 \cdot 10^{14}$ Вт/см² ($F_0 = 0.076$)

Результатом решения системы (25) является набор вероятностей ионизации, различающихся числом поглощаемых фотонов. Эти вероятности затем интерполировались на непрерывный спектр энергий. Значения вероятностей содержат не более семи верных цифр, что ограничивает величину N_{max} , а вместе с тем и верхнюю границу энергетических спектров электронов.

В качестве дополнительного анализа на рис. 4 дается сравнение электронных спектров при ионизации атома водорода из основного состояния, полученных в работе [29], с результатами, полученными в модели [13] путем умножения скорости ионизации на длительность лазерного импульса. Как видно, спектр из работы [13] имеет существенно более крутой наклон в сравнении с результатами [29], что, по всей видимости, связано с пренебрежением процессами перерасеяния. Сравнение результатов [29] с моделью [17] провести невозможно, так как при выбранных в работе [29] параметрах излучения параметр Келдыша не является достаточно малым.

Как видно из приведенных графиков, в электронных спектрах отсутствуют области, имеющие вид плато, в которых распределение электронов относительно слабо зависит от энергии. Этот вывод согласуется с данными работы [34], в которой экспериментально и теоретически было установлено, что с ростом интенсивности лазерного излучения подобные платообразные области исчезают.

5. ВЫВОДЫ

В заключение сформулируем основные результаты, полученные в данной работе.

1. В рамках адиабатической модели проведены расчеты энергетических спектров электронов, образующихся в результате ионизации атомов водорода из возбужденных состояний интенсивным лазерным импульсом.

2. Кинетическая модель, основанная на аналитических формулах работы [13], хорошо описывает спектры электронов в низкоэнергетической области, однако, для высокоэнергетической области ее результаты согласуются с нашими расчетами хуже. Этот факт ни в коей мере не означает неприменимость модели [13] в общем случае, поскольку наши расчеты проводились для очень короткого лазерного импульса.

3. Это же заключение относится и к модели, предложенной в работе [17], для которой сравнение с нашими расчетами оказалось возможным только для одного случая ионизации атома водорода из $2s$ -состояния.

Авторы выражают благодарности М. Ю. Кучиеву за полезные замечания. Работа выполнялась в рамках ведомственной научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (шифр 15286) при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-16253), Совета по грантам Президента РФ (грант МК-3551.2004.2), Американского Фонда гражданских исследований и развития (грант VZ-010-0) и Благотворительного Фонда «Династия».

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Квадратичные параболические координаты

Приведем здесь вид коэффициентов Ламэ (см., например, [24]) для квадратичных параболических координат (5):

$$h_\mu = h_\nu = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}, \quad h_\varphi = \mu\nu. \quad (A.1)$$

Используя их, можно построить все векторные дифференциальные операторы применимо к данной системе координат. Например, элемент объема имеет вид

$$d^3r = \mu\nu (\mu^2 + \nu^2) d\mu d\nu d\varphi. \quad (A.2)$$

Компоненты оператора ∇ записываются как

$$\nabla_\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad \nabla_\nu = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \frac{\partial}{\partial \nu}, \quad (A.3)$$

$$\nabla_\varphi = \frac{1}{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Наконец, оператор Лапласа в переменных (μ, ν, φ) имеет следующую структуру:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\mu\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\nu\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\mu^2\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (A.4)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Общее описание алгоритма

Уравнение (7) формально соответствует одномерному финитному движению с «энергией» $Z_1/2$ (рис. 1а). Граничные условия для $M(F, \mu)$ даются выражениями

$$M(F, \mu)|_{\mu \rightarrow 0} \sim \mu^{(2|m|+1)/2}, \quad (B.1)$$

$$M(F, \mu)|_{\mu \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{F^{1/2}}{3}\mu^3 + \frac{E}{F^{1/2}}\mu\right). \quad (B.2)$$

Пусть $\tilde{\mu}$ — правая классическая точка поворота. Удобным методом решения уравнения (7) является пошаговое разложение $M(F, \mu)$ в степенные ряды [25]. Для этого вначале функция $M(F, \mu)$ разлагалась в степенной ряд в окрестности нуля:

$$M(F, \mu) = \mu^{(2|m|+1)/2} \sum_{p=0}^{\infty} C_{0p} \mu^{2p}, \quad (B.3)$$

вплоть до $\mu = \mu_1 = 1$, а затем — в степенные ряды в окрестностях остальных точек $\mu_1 < \mu_i \leq \tilde{\mu}$, отстоящих друг от друга на шаг 0.5:

$$M(F, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{ip} (\mu - \mu_i)^p, \quad (B.4)$$

т. е. в каждом интервале $[\mu_k, \mu_{k+1}]$ использовалось свое разложение функции $M(F, \mu)$. Способ вычисления коэффициентов C_{ip} изложен ниже. Суммирование рядов (B.3), (B.4) прекращалось, если абсолютные значения трех следующих друг за другом членов ряда оказывались меньше наибольшего в 10^{12}

раз. Данный метод, предложенный в работе [25], удобен тем, что не требует разбиения промежутка интегрирования на большое число интервалов, приводя к существенному ускорению расчетов. Осцилляции функции $M(F, \mu)$ также не оказывают заметно влияния на устойчивость алгоритма.

Тем не менее с ростом энергии в классически недоступной области ($\mu > \tilde{\mu}$) указанный метод приводит к неверным результатам из-за влияния экспоненциально растущего решения (7), нарушающего граничное условие (B.2). Для устранения этого недостатка выполнялось стандартное численное интегрирование уравнения (7) в классически недоступной области из точки $\tilde{\mu}$, удовлетворяющей условию

$$\frac{1}{\tilde{\mu}} \exp\left(-\frac{F^{1/2}}{3}\tilde{\mu}^3 + \frac{E}{F^{1/2}}\tilde{\mu}\right) < 10^{-6},$$

в точку $\tilde{\mu}$, т. е. в обратном направлении. Граничное условие выбиралось в соответствии с (B.2). Константа разделения Z_1 определялась из условия сшивания логарифмических производных функции $M(F, \mu)$ слева и справа от точки поворота $\tilde{\mu}$:

$$\frac{d}{d\mu} \ln |M(F, \mu)| \Big|_{\mu=\tilde{\mu}-0} =$$

$$= \frac{d}{d\mu} \ln |M(F, \mu)| \Big|_{\mu=\tilde{\mu}+0}. \quad (B.5)$$

Параметр Z_1 принимает дискретный ряд значений, нумеруемых параболическим квантовым числом $n_1 = 0, 1, \dots$, которое равно числу нулей функции $M(F, \mu)$. При заданном n_1 величину Z_{1,n_1} удобно искать, решая (B.5) относительно Z_1 в малой окрестности ее квазиклассического значения $Z_{1,n_1}^{(WKB)}$ (см. ниже):

$$Z_{1,n_1}^{(WKB)} - \Delta Z \leq Z_{1,n_1} \leq Z_{1,n_1}^{(WKB)} + \Delta Z,$$

$$\Delta Z \approx 0.1 [Z_{1,n_1+1}^{(WKB)} - Z_{1,n_1}^{(WKB)}].$$

Как правило, отличие точного значения Z_{1,n_1} от квазиклассического не больше 1%. Это различие уменьшается с ростом энергии E . При значениях $E > 1$ вклад классически недоступной области в наблюдаемые характеристики процесса ионизации не превышает 0.5%. В этом случае волновую функцию $M(F, \mu)$ в области $\mu > \tilde{\mu}$ можно положить равной нулю, а для константы разделения Z_1 ограничиться только квазиклассическими формулами.

Уравнение (8) формально отличается от (7) знаменами

$$F \rightarrow -F, \quad Z_1 \rightarrow Z_2 = 4Z - Z_1. \quad (B.6)$$

При $E > 0$ оно соответствует одномерному инфинитному движению с «энергией» $Z_2/2$ (см. рис. 1б). Таким образом, при движении в направлении ν электрон проходит над барьером. Обозначим через $\tilde{\nu}$ значение координаты, при котором достигается максимум этого барьера:

$$\tilde{\nu}^2 = \frac{1}{3} \left(V - a - \frac{a^2}{V} \right),$$

где

$$V = \frac{1}{2^{1/3}} \left[\sqrt{b(4a^3 + b)} - 2a^3 - b \right]^{1/3},$$

$$a = \frac{E}{F}, \quad b = \frac{27}{8F} (4m^2 - 1).$$

Процедура интегрирования уравнения (8) в диапазоне $0 \leq \nu \leq \tilde{\nu}$ с точностью до замен (В.6) повторяет соответствующую процедуру для уравнения (7). Однако граничное условие при $\nu \rightarrow \infty$ будет отличаться от (В.2), а именно:

$$N(F, \nu)|_{\nu \rightarrow \infty} \approx \frac{A}{\nu} \sin \left(\frac{F^{1/2}}{3} \nu^3 + \frac{E}{F^{1/2}} \nu + \phi_0 \right), \quad (\text{В.7})$$

где A — нормировочная константа, ϕ_0 — вычисляемая при интегрировании фаза.

При численном интегрировании уравнения (8) асимптотическое представление (В.7) оказывается практически недостижимым, так как становится справедливым лишь при $\nu \sim 1000$. Проблема вычисления фазы ϕ_0 решалась использованием улучшенного квазиклассического приближения для функции $N(F, \nu)$ (см. ниже):

$$N_{WKB}(F, \nu) = \frac{D}{\sqrt{X(\nu)}} \sin \left[\int_{\nu}^{\nu} X(\nu') d\nu' + \beta \right], \quad (\text{В.8})$$

$$X^2(\nu) = k^2(\nu) - \frac{1}{4k^2(\nu)} \frac{d^2}{d\nu^2} k^2(\nu) + \frac{5}{16k^4(\nu)} \left[\frac{d}{d\nu} k^2(\nu) \right]^2, \quad (\text{В.9})$$

$$k^2(\nu) = \frac{1 - 4m^2}{4\nu^2} + 2E\nu^2 + F\nu^4 + Z_2. \quad (\text{В.10})$$

Здесь β — постоянная фаза, определяемая нижним пределом фазового интеграла, величина $k^2(\nu)$ имеет

смысл квадрата классического импульса. Можно показать, что при $\nu \rightarrow \infty$ из выражений (В.8)–(В.10) следует формула (В.7). В области $\nu > \tilde{\nu}$ численное интегрирование уравнения (8) продолжалось с переменным шагом

$$\Delta\nu_i \equiv \nu_i - \nu_{i-1} = \frac{\pi}{X(\nu_{i-1})},$$

позволяющим избежать большого количества осцилляций на каждом шаге. Вводя обозначения

$$a_1 = N(F, \nu_{i-1}) \sqrt{X(\nu_{i-1})},$$

$$a_2 = N(F, \nu_i) \sqrt{X(\nu_i)},$$

$$\alpha = \int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} X(\nu) d\nu,$$

получаем выражение для константы D в функции (В.8):

$$D^2 = (a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \alpha). \quad (\text{В.11})$$

Численное интегрирование уравнения (8) проводилось до тех пор, пока значения D на каждом последующем шаге переставали различаться по величине в пределах 10^{-6} – 10^{-7} . Значение $\nu = \bar{\nu}$, при котором интегрирование прекращалось, по величине сопоставимо с $\bar{\mu}$. Таким образом, корректное выведение численного решения уравнения (8) на требуемый асимптотический вид (В.7) осуществлялось посредством квазиклассического приближения (В.8). Константа D в (В.8) связана с константой A в (В.7) соотношением: $D = AF^{1/4}$.

Состояния непрерывного спектра (6) удобно нормировать следующим образом:

$$\int \Phi_{E'n_1m'}^*(F, \mathbf{r}) \Phi_{En_1m}(F, \mathbf{r}) d^3r = \delta_{m'm} \delta_{n'_1 n_1} \delta(E' - E). \quad (\text{В.12})$$

Возможность нормировки на δ -функцию «по шкале энергий» обеспечивается инфинитным движением в направлении ν . В этом случае основной вклад в интеграл по ν вносит область $\nu \gg 1$ и условие (В.12) упрощается:

$$\int_0^{\infty} M_{E'n_1m}^*(F, \mu) M_{En_1m}(F, \mu) d\mu = \delta_{n'_1 n_1}, \quad (\text{В.13})$$

$$\int_0^{\infty} \nu^2 N_{E'n_1m}^*(F, \nu) N_{En_1m}(F, \nu) d\nu = \delta(E' - E). \quad (\text{В.14})$$

Выбор нормировочной константы функции $N(F, \nu)$ в соответствии с (В.14) осуществляется по ее асимптотическому поведению. При больших значениях ν функция $N(F, \nu)$ может быть выражена в виде линейной комбинации уходящей N_{out} и приходящей N_{in} параболических волн. Нормировка на δ -функцию по шкале энергий в атомных единицах эквивалентна нормировке на величину потока в уходящей волне $I_{out} = 1/2\pi$ [35]. При условии (В.13) данное утверждение эквивалентно требованию $D = \sqrt{2/\pi}$.

При $\nu > \bar{\nu}$ можно пользоваться квазиклассическим видом волновой функции (В.8). Ее удобный для вычислений вид приводится ниже.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Вычисление коэффициентов в разложениях функции $M(F, \mu)$

Подстановка (В.3), (В.4) в (7) приводит к следующим рекуррентным соотношениям для коэффициентов C_{in} :

$$C_{0n} = -\frac{Z_1 C_{0,n-1} + 2EC_{0,n-2} - FC_{0,n-3}}{4n(n+m)}, \quad (C.1)$$

$$C_{in} = -\frac{1}{n(n-1)\mu_i^2} \left\{ 2(n-1)(n-2)\mu_i C_{i,n-1} + \left[(n-2)(n-3) + \frac{1}{4} - m^2 + Z_1\mu_i^2 + 2E\mu_i^4 - F\mu_i^6 \right] \times \right. \\ \times C_{i,n-2} + 2(Z_1\mu_i + 4E\mu_i^3 - 3F\mu_i^5) C_{i,n-3} + (Z_1 + 12E\mu_i^2 - 15F\mu_i^4) C_{i,n-4} + 4(2E\mu_i - 5F\mu_i^3) C_{i,n-5} + (2E - 15F\mu_i^2) C_{i,n-6} - \\ \left. - 6F\mu_i C_{i,n-7} - FC_{i,n-8} \right\}. \quad (C.2)$$

В соответствии с граничным условием (В.1) необходимо положить

$$C_{0,-1} = C_{0,-2} = C_{0,-3} = 0,$$

а константу C_{00} выбрать с ненулевым начальным значением. Начальные значения C_{in} ($i > 0$) вычисляются из условия сшивания рядов (В.3), (В.4) на границах областей их определения. Сшивание состоит в приравнивании функций и их первых двух производных слева и справа от граничной точки μ_i . Вторые производные приравниваются для того, чтобы одномерное уравнение Шредингера (7) выполнялось

в самой граничной точке μ_i . Приведем здесь окончательные результаты. При $i = 1$

$$C_{10} = \mu_1^{(2|m|+1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_{0n} \mu_1^{2n}, \\ C_{11} = \mu_1^{(2|m|+1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[2n + |m| + \frac{1}{2} \right] C_{0n} \mu_1^{2n-1}, \\ C_{12} = \frac{1}{2} \mu_1^{(2|m|+1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n + |m|)^2 - \frac{1}{4} \right] C_{0n} \mu_1^{2n-2}, \\ C_{1,-1} = \dots = C_{1,-5} = 0.$$

При $i > 1$

$$C_{i,0} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{i-1,n} (\Delta\mu_i)^n, \\ C_{i,1} = \sum_{n=1}^{\infty} n C_{i-1,n} (\Delta\mu_i)^n, \\ C_{i,2} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_{i-1,n} (\Delta\mu_i)^n, \\ C_{i,-1} = \dots = C_{i,-5} = 0.$$

Здесь $\Delta\mu_i = \mu_i - \mu_{i-1}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ D

Квазиклассическая формула для константы разделения

Для вычисления константы разделения Z_1 при $E > 0$ в работе [36] была получена квазиклассическая формула. Приведем ее здесь применительно к квадратичным параболическим координатам.

Введем обозначение $k = \sqrt{2E}$. При

$$k^3 < 3\pi \left[n_1 + \frac{1}{2}(|m| + 1) \right] F$$

имеем

$$Z_{1,n_1}^{(WKB)} = \frac{t}{(t-1)^2} \frac{k^4}{F},$$

где параметр $t > 1$ определяется из уравнения

$$\frac{t}{(t-1)^{3/2}} {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; -t \right) = 4 \left[n_1 + \frac{1}{2}(|m| + 1) \right] \frac{F}{k^3}, \quad n_1 = 0, 1, \dots$$

При

$$k^3 > 3\pi \left[n_1 + \frac{1}{2}(|m| + 1) \right] F$$

имеем

$$Z_{1,n_1}^{(WKB)} = -\frac{t}{(t+1)^2} \frac{k^4}{F},$$

$$\begin{aligned} \frac{(t-1)^2}{(t+1)^{3/2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 3; 1-t\right) = \\ = 16 \left[n_1 + \frac{1}{2}(|m|+1) \right] \frac{F}{k^3}. \end{aligned}$$

Спектр Z_1 ограничен снизу: $Z_1 \geq -E^2/F$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Улучшенное квазиклассическое приближение

Решение уравнения

$$\frac{d^2 N}{d\nu^2} + W(\nu)N(\nu) = 0, \quad (E.1)$$

где $W(\nu) > 0$, в квазиклассическом приближении ищется в виде

$$N(\nu) = \frac{D}{\sqrt{X(\nu)}} \sin \left[\int^\nu X(\nu') d\nu' + \beta \right]. \quad (E.2)$$

Подстановка (E.2) в (E.1) приводит к следующему нелинейному уравнению для неизвестной функции $X(\nu)$:

$$X^2(\nu) + \frac{1}{2X} \frac{d^2 X}{d\nu^2} + \frac{3}{4X^2} \left(\frac{dX}{d\nu} \right)^2 + W = 0. \quad (E.3)$$

Если функция $X(\nu)$ изменяется медленно, все слагаемые (E.3), содержащие производные, дают малый вклад. Поэтому воспользуемся итерационным методом решения уравнения (E.3), взяв в качестве нулевой итерации $X = \sqrt{W}$. Как известно, этой нулевой итерацией ограничивается традиционное квазиклассическое приближение. В результате первой итерации, т. е. после подстановки $X = \sqrt{W}$ в производные (E.3), имеем

$$X^2(\nu) = W - \frac{1}{4W} \frac{d^2 W}{d\nu^2} + \frac{5}{16W^2} \left(\frac{dW}{d\nu} \right)^2. \quad (E.4)$$

Как правило, выражение (E.3) позволяет воспроизвести до 8 значащих цифр, получаемых в результате численного решения уравнения (E.1). Вторая итерация обеспечивает до 14 верных цифр, но при этом формула для $X(\nu)$ оказывается неустойчивой относительно варьирования параметров $W(\nu)$. Полагая в (E.4) $W(\nu) = k^2(\nu)$, приходим к (B.8).

ПРИЛОЖЕНИЕ F

Вычисление уходящего потока

В квадратичных параболических координатах поток I через поверхность S , заданную уравнением $\nu = \text{const}$, дается интегралом

$$I = \iint_S d\mathbf{S}_\nu \cdot \mathbf{j}, \quad (F.1)$$

$$d\mathbf{S}_\nu = \mu\nu\sqrt{\mu^2 + \nu^2} d\mu d\varphi \mathbf{e}_\nu,$$

где \mathbf{e}_ν — единичный вектор в направлении ν . Как известно, плотность тока \mathbf{j} в состоянии с волновой функцией Ψ есть

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*). \quad (F.2)$$

Компоненты ∇ в квадратичных параболических координатах даются выражениями (A.3).

В состоянии (6) с асимптотикой (B.7) уходящая компонента имеет вид

$$\begin{aligned} N_{out}(F, \nu) = \frac{A}{2i} \frac{1}{\nu} \times \\ \times \exp \left(\frac{i}{3} \sqrt{F} \nu^3 + \frac{iE}{\sqrt{F}} \nu + i\phi_0 \right). \end{aligned} \quad (F.3)$$

Подставляя (6) в (F.2) и (F.1), получаем

$$I_{out} = \frac{A^2}{4} \sqrt{F} \int_0^\infty M^2(\mu) d\mu. \quad (F.4)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ G

Вычисление фазового интеграла

В качестве нижнего предела в фазовом интеграле функции (B.8) для определенности выберем $\bar{\nu}$. Тогда

$$\phi_0 = \arcsin \left[N(F, \bar{\nu}) \sqrt{\frac{\pi X(\bar{\nu})}{2}} \right],$$

где $N(F, \nu)$ — нормированное решение уравнения (8).

Аналитически выделим в фазовом интеграле растущие слагаемые. Для этого представим подынтегральную функцию в виде

$$X(\nu) = \sqrt{2E\nu^2 + F\nu^4 + \Xi(\nu)},$$

где

$$\Xi(\nu) = \frac{1-4m^2}{4\nu^2} + Z_2 - \frac{q''(\nu)}{4q(\nu)} + \frac{5(q'(\nu))^2}{16q^2(\nu)},$$

$$q(\nu) \equiv k^2(\nu),$$

и преобразуем с помощью интегрирования по частям, выделяя $\epsilon(\nu) = 2E\nu^2 + F\nu^4$:

$$\int_{\bar{\nu}}^{\nu} X(\nu') d\nu' = S(\nu) - S(\bar{\nu}) - \int_{\bar{\nu}}^{\nu} \left(\frac{2}{3} \frac{E}{F} + \frac{\nu'^2}{3} \right) \left\{ -\frac{2}{\nu'} z(\nu') + \frac{1}{16} \left[-\frac{4(1-4m^2)}{\nu'^2} + \frac{-5q'(\nu')^3 + 7qq'(\nu')q''(\nu') - 2q(\nu')^2q'''(\nu')}{q(\nu')^3} \right] \right\} \times \left[1 + \frac{z(\nu')}{\epsilon(\nu')} \right]^{-1/2} \frac{d\nu'}{\nu'}.$$

Здесь

$$S(\nu) = \left(\frac{2}{3} \frac{E}{F} + \frac{\nu^2}{3} \right) \frac{\epsilon(\nu)}{\nu} \sqrt{1 + \frac{\Xi(\nu)}{\epsilon(\nu)}},$$

$$z(\nu) = Z_2 + \frac{1-4m^2}{4\nu^2} + \frac{5q'(\nu)^2 - 4q(\nu)q''(\nu)}{16q(\nu)^2},$$

$$q'(\nu) = -\frac{1-4m^2}{2\nu^3} + 4E\nu + 4F\nu^3,$$

$$q''(\nu) = \frac{3(1-4m^2)}{2\nu^4} + 4E + 12F\nu^2,$$

$$q'''(\nu) = \frac{6(1-4m^2)}{\nu^5} + 24F\nu.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Walker, B. Sheehy, K. C. Kulander et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 5031 (1996).
2. B. Sheehy, R. Lafon, M. Widmer et al., Phys. Rev. A **58**, 3942 (1998).
3. B. Buerke and D. D. Meyerhofer, Phys. Rev. A **69**, 051402(R) (2004).
4. V. L. B. de Jesus, B. Feuerstein, K. Zrost et al., J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **37**, L161 (2004).
5. G. G. Paulus, F. Grasbon, H. Walter et al., Nature **414**, 182 (2001).
6. R. Dörner, T. Weber, M. Weckenbrock et al., Adv. Atom. Mol. Opt. Phys. **48**, 1 (2002).
7. A. S. Kornev, E. B. Tulenko, and B. A. Zon, Phys. Rev. A **68**, 043414 (2003).
8. A. S. Kornev, E. B. Tulenko, and B. A. Zon, Phys. Rev. A **69**, 065401 (2004).
9. C. C. Chirila and R. M. Potvliege, Phys. Rev. A **71**, 021402(R) (2005).
10. I. V. Litvinyuk, F. Légaré, P. W. Dooley et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 033003 (2005).
11. V. E. Chernov, I. Yu. Kiyan, H. Helm, and B. A. Zon et al., Phys. Rev. A **71**, 033410 (2005).
12. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
13. G. F. Gribakin and M. Yu. Kuchiev, Phys. Rev. A **55**, 3760 (1997).
14. M. V. Frolov et al., J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **36**, L419 (2003).
15. I. Yu. Kiyan and H. Helm, Phys. Rev. Lett. **90**, 183001 (2003).
16. N. B. Delone and V. P. Krainov, J. Opt. Soc. Amer. B **8**, 1207 (1991).
17. V. P. Krainov, J. Opt. Soc. Amer. B **14**, 425 (1997).
18. A. S. Kornev and B. A. Zon, J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **35**, 2451 (2002).
19. Б. А. Зон, А. С. Корнев, ЖЭТФ **123**, 991 (2003).
20. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966).
21. Б. М. Смирнов, М. И. Чибицов, ЖЭТФ **49**, 841 (1965).
22. М. В. Аммосов, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **91**, 2008 (1986).
23. R. M. Potvliege and R. Shakeshaft, Phys. Rev. A **40**, 3061 (1989); M. Dörr, R. M. Potvliege, and R. Shakeshaft, Phys. Rev. A **41**, 558 (1990); R. M. Potvliege and R. Shakeshaft, Phys. Rev. A **41**, 1609 (1990); R. Shakeshaft et al., Phys. Rev. A **42**, 1656 (1990).
24. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, Изд-во иностр. лит., Москва (1958), гл. 5.
25. R. J. Damburg and V. V. Kolosov, J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. **9**, 3149 (1976).
26. D. Park, Z. Phys. **159**, 155 (1960).
27. S. Dionissopoulou, A. Lyras, Th. Mercouris, and C. A. Nicolaidis, J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **28**, L109 (1995).

28. S. Dionissopoulou, Th. Mercouris, A. Lyras, and C. A. Nicolaidis, *Phys. Rev. A* **55**, 4397 (1997).
29. E. Cormier and P. Lambropoulos, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **30**, 77 (1997).
30. A. Rudenko, K. Zrost, C. D. Schröter et al., *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **37**, L407 (2004).
31. W. A. Bryan, E. M. L. English, J. Wood et al., in *Proc. 24th Int. Conf. Photonic, Electronic and Atomic Collisions (XXIV ICPEAC)*, Rosario, Argentina (2005), p. Fr301.
32. Дж. Холл, Дж. Уатт, *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, Москва (1979).
33. L. F. Shampine and H. A. Watts, *DEPAC — Design of a User Oriented Package of ODE Solvers*, Rep. SAND79-2374, Sandia Lab. (1979).
34. G. G. Paulus, W. Nicklich, F. Zacher et al., *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **29**, L249 (1996).
35. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматлит, Москва (2001), §§ 37, 77.
36. В. Д. Кондратович, В. Н. Островский, *ЖЭТФ* **79**, 395 (1980).