

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОГИБАЮЩЕЙ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ВОДЕ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

*А. В. Слюняев**

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 8 апреля 2005 г.

Получено уравнение для огибающей волн на поверхности воды конечной глубины, включающее члены трех порядков малости. Используются предположения о малости крутизны волн, узости спектра и малости глубины по сравнению с длиной модуляции. В случае достаточно глубокой воды выведено обобщенное уравнение Диста. В пределе мелкой воды в уравнении исчезает одно из слагаемых нелинейной дисперсии. Этот предел сопоставлен с уравнением для огибающей волн, описываемых уравнением Кортевега – де Вриза. Исследован пограничный случай вырождения нелинейности в классическом нелинейном уравнении Шредингера для волн на воде ($kh \approx 1.363$). Показано, что для интенсивных волн порог модуляционной неустойчивости сдвигается в область более мелкой воды (длинных волн).

PACS: 05.45.-a, 47.20.-k, 47.35.+i, 92.10.Hm

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической физике нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) было выведено сначала для задач нелинейной оптики [1, 2], а затем для описания полей разной природы в различных областях физики [3]. Для волн на воде оно было выведено в работах [4–6]. Уравнение волны на поверхности воды может описывать качественно разную динамику в зависимости от соотношения его коэффициентов, которые являются функциями глубины. Так, в случае достаточно глубокой воды ($kh > 1.363$, где k — волновое число несущей волны, h — глубина) уравнение описывает нелинейный эффект модуляционной неустойчивости, открытый в работе [7] и затем экспериментально подтвержденный. В противоположном случае модуляции волн являются устойчивыми. Модификации НУШ, описывающие трехмерные волны на поверхности воды (две горизонтальные размерности и одна в глубину), были получены в работах [8, 9], в этом случае области модуляционной неустойчивости устроены сложнее.

Будучи интегрируемым, НУШ является уни-

кально удобным нелинейным уравнением в частных производных. Его анализ зачастую значительно упрощается при использовании представлений о его солитонных решениях. С другой стороны, это уравнение имеет значительные ограничения по силе нелинейности и ширине спектра волн. Указанные недостатки зачастую компенсируют за счет добавления слагаемых высших порядков по нелинейности и дисперсии. Такие модели используются в последнее время, например, для описания коротких импульсов в оптоволоконных линиях [10]. Наибольшее применение для описания морских волн нашло уравнение Диста, выведенное впервые в [11], и его более поздние модификации. Нужно отметить, что родственные уравнения в разных работах записывались в различном виде (в том числе для различных величин) и часто имели противоречащие друг другу коэффициенты; в большинстве случаев они описывали волны на бесконечно глубокой воде. В недавней работе [12] было получено замкнутое нелинейное уравнение Шредингера для огибающей смещения поверхности с учетом поправок двух порядков для случая произвольной глубины:

*E-mail: Slunyaev@hydro.appl.sci-nnov.ru

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \varepsilon \beta_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \varepsilon \alpha_1 |A|^2 A + i \varepsilon^2 \beta_2 \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} + i \varepsilon^2 \alpha_{21} |A|^2 \frac{\partial A}{\partial x} + i \varepsilon^2 \alpha_{22} A^2 \frac{\partial A^*}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где ε — малый параметр. Уравнение (1) преобразуется в классическое НУШ, если отбросить слагаемые порядка ε^2 . Коэффициенты уравнения (1), полученные в [12], в пределе бесконечно глубокой жидкости совпадают с версией уравнений, используемых группой Диста и Трулсена в последних публикациях (например, [13]). Уравнение вида (1) появляется и в других приложениях; обзор работ, посвященных обобщениям уравнения НУШ, дан в [12].

Модуляционная неустойчивость является важным свойством уравнений типа НУШ. Она вырождается при уменьшении глубины ниже порога $kh \approx 1.363$ за счет смены знака коэффициента нелинейности α_1 . В пороговой области значений кубическая нелинейность оказывается аномально малой, поэтому для учета нелинейных эффектов должна быть учтена нелинейность следующего (пятого) порядка. В случае асимптотического вывода уравнений это определяется измененным соотношением между двумя малыми параметрами: нелинейности и дисперсии. Именно такой подход был использован в работах [14, 15]. Впервые нелинейное уравнение для случая $kh \approx 1.363$ было получено в работе [14]. В ней были приведены коэффициенты уравнения в пороговой области и сделан анализ области модуляционной неустойчивости. В работе [15] уравнение было перевыведено (в несколько ином виде):

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \varepsilon \beta_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \sqrt{\varepsilon} \alpha_1 |A|^2 A + i \varepsilon \alpha_{21} |A|^2 \frac{\partial A}{\partial x} + i \varepsilon \alpha_{22} A^2 \frac{\partial A^*}{\partial x} + \varepsilon \alpha_{31} |A|^4 A = 0 \quad (2)$$

(где $\alpha_1 = O(\varepsilon^{1/2})$), а его коэффициенты записаны как функции глубины. Кроме высшего нелинейного слагаемого уравнение (2) (первого порядка) содержит слагаемые нелинейной дисперсии. Было отмечено, что коэффициенты нового уравнения не совпадают с результатами работы [14], выводы об областях неустойчивости также оказались иными.

В уравнениях (1) и (2) содержатся слагаемые нелинейной дисперсии одинакового вида. Оказывается, что коэффициенты при них различны во всех трех упомянутых работах [12, 14, 15] (в работе [15] они неограниченно растут при $kh \rightarrow \infty$). Уравнение (2) также было выведено из уравнения для поля (обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ)) и исследовалось на модуляционную устойчи-

вость в [16]. Вырождение нелинейности может приводить к появлению качественно новых эффектов в динамике волн достаточно большой амплитуды (см., например, [17, 18]).

В настоящей работе с помощью классической постановки асимптотической схемы получено уравнение, описывающее слабонелинейные слабомодулированные гравитационные волны на поверхности воды конечной глубины, включающее в себя слагаемые трех порядков малости. Найденное уравнение является обобщением (1) с учетом членов следующего порядка малости. В пределе мелкой воды полученное обобщенное уравнение НУШ сопоставляется с выведенным для огибающей волн в рамках уравнения КдВ. Оказывается, что в рассматриваемом порядке точности коэффициенты нелинейной дисперсии полученного обобщенного уравнения неограничены при $kh \rightarrow \infty$. Для глубоководного случая полученное обобщение уравнения Диста с учетом слагаемых следующего порядка, его коэффициенты конечны. В частном случае $kh \rightarrow 1.363$ обобщенное уравнение НУШ записывается в форме (2). Проведен анализ модуляционной неустойчивости волн в этом случае с учетом полученных коэффициентов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка задачи имеет классический вид (см., например, [12, 19]). Выкладки представляют собой значительную трудность при выводе коэффициентов уравнения огибающей, поэтому был использован пакет символьной математики Maple. Запишем процедуру в формальном виде, удобном для алгоритмизации. Рассматриваются слабонелинейные волны на поверхности несжимаемой невязкой жидкости под действием силы тяжести. Система уравнений состоит из двух граничных условий на поверхности жидкости,

$$\varphi_z = \eta_t + \varphi_x \eta_x, \quad z = \eta, \quad (3)$$

$$\varphi_t + g\eta + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) = 0, \quad z = \eta, \quad (4)$$

и уравнения Лапласа для толщи воды плюс граничное условие «непротекания» на дне:

$$\Delta \varphi = 0, \quad -h \leq z \leq \eta, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (6)$$

Здесь z — вертикальная, а x — горизонтальная координаты, $\eta(x, t)$ — смещение поверхности, а $\varphi(x, z, t)$ — потенциал поля скоростей $\mathbf{v} = \nabla \varphi$; h — глубина жидкости. Потенциальность течения

является частым предположением при рассмотрении волн на поверхности жидкости. Условие слабой модуляции волн (узости спектра) позволяет искать решение в виде суперпозиции гармоник:

$$\begin{pmatrix} \varphi(x, z, t) \\ \eta(x, z, t) \end{pmatrix} = \delta \sum_n \begin{pmatrix} \varphi_n(x, z, t) \\ \eta_n(x, z, t) \end{pmatrix} E^n, \quad (7)$$

$$E^n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ (1/2) \exp(in\omega t - inkx), & n \neq 0, \end{cases}$$

при этом основная (несущая) гармоника обладает частотой ω и волновым числом k . В (7) $\delta \ll 1$ — малая величина, соответствующая малоамплитудному приближению. Для обеспечения действительных значений $\varphi(x, z, t)$ и $\eta(x, t)$ должны выполняться соотношения

$$\varphi_{-n} = \varphi_n^*, \quad \eta_{-n} = \eta_n^*.$$

Учитывая малость смещений поверхности, граничные условия на границе $z = \eta(x, t)$, можно записать для неподвижного уровня $z = 0$ после разложения функций глубины в ряд Тейлора. Тогда система уравнений на поверхности (3), (4) запишется в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j \partial_z^{j+1} \varphi}{j!} = \eta_t + \eta_x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j \partial_z^j \varphi_x}{j!}, \quad z = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j \partial_z^j \varphi_t}{j!} + g\eta + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j \partial_z^j \varphi_x}{j!} \right)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j \partial_z^{j+1} \varphi}{j!} \right)^2 = 0, \quad z = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Введем медленную координату x_1 , отражающую слабую дисперсию — медленность изменения огибающей в сравнении с длиной волны несущей:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_0} + \mu \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \mu \ll 1, \quad (10)$$

и медленные времена t_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \\ + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial t_3} + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial t_4} + \dots, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (11) \end{aligned}$$

Будем искать решение в виде разложения в ряд по малому параметру ε :

$$\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \begin{pmatrix} \varphi_{nm} \\ \eta_{nm} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Таким образом, потенциал и смещение представлены в виде

$$\varphi(x, z, t) = \frac{\delta}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varepsilon^m \varphi_{nm}(x_0, x_1, z, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

$$\eta(x, t) = \frac{\delta}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varepsilon^m \eta_{nm}(x_0, x_1, t_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Малые параметры δ и μ могут по-разному соотноситься между собой, соответствуя разным условиям (сильная дисперсия по сравнению с нелинейностью или наоборот). Малый параметр ε отвечает за разложение искомого решения в асимптотический ряд и должен подбираться в зависимости от соотношения между δ и μ . В классическом случае уравнения НУШ, когда кубическая нелинейность появляется в одном порядке с первой дисперсионной поправкой, должно выполняться $\varepsilon \sim \mu \sim \delta$. Будем в дальнейшем использовать только один малый параметр ε , положив $\mu = \varepsilon$ и $\delta = \varepsilon$.

Основной вклад в решение дает первая гармоника, поэтому полагаем ненулевыми компоненты потенциала нулевого порядка только для первой, минус первой (сопряженной) и нулевой гармоник: $\varphi_{n0} = 0$ для $|n| > 1$. Член φ_{00} отвечает за среднее наведенное течение. Для смещения $\eta_{n0} = 0$ для $n \neq \pm 1$. Так как гармоники, отличные от нулевой, возбуждаются нелинейными взаимодействиями между компонентами, можно положить $\varphi_{nm} = 0$ и $\eta_{nm} = 0$ для всех $|n| > m$. Эти условия уменьшают объем выкладок, хотя могут быть получены и в процессе решения.

Теперь выражения для функций (13) и (14) можно подставить в уравнения (8) и (9) с учетом (10) и (11) и собирать по очереди слагаемые одной гармоники (степени n при E) и одного порядка малости (степени m при ε). В дальнейшем будем нумеровать получаемые уравнения двойным индексом $\{n, m\}$. Для нахождения замкнутой системы уравнений потребуется решение уравнения Лапласа (5) с учетом граничного условия (6). В действительности сперва решалось уравнение Лапласа, далее из уравнения (9) последовательно по порядкам малости находились выражения для компонент смещения η_{nm} и подставлялись в уравнение (8), которое и давало искомое эволюционное уравнение.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Рассмотрим уравнение Лапласа (5) с граничным условием (6). С учетом введенных медленных координат и представления функций в виде рядов оно может быть записано в форме

$$L_n \varphi_n - 2\mu ink \partial_{x_1} \varphi_n + \mu^2 \partial_{x_1}^2 \varphi_n = 0, \quad L_n = \partial_z^2 - n^2 k^2,$$

для всех n , или

$$L_n \varphi_{nm} - 2ink \partial_{x_1} \varphi_{n,m-1} + \partial_{x_1}^2 \varphi_{n,m-2} = 0 \quad (15)$$

для всех n и m . Разложение уравнения Лапласа (15) может быть последовательно решено для всех порядков малости $m \geq 0$. Соответствующие решения для $0 \leq m \leq 4$ и $n = 0$ могут быть записаны в виде

$$\{0, 0\} : \quad \varphi_{00} = A_{00}(x_i, t_i), \quad (16)$$

$$\{0, 1\} : \quad \varphi_{01} = A_{01}(x_i, t_i), \quad (17)$$

$$\{0, 2\} : \quad \varphi_{02} = A_{02}(x_i, t_i) - \frac{1}{2}(z+h)^2 \partial_{x_1}^2 A_{00}, \quad (18)$$

$$\{0, 3\} : \quad \varphi_{03} = A_{03}(x_i, t_i) - \frac{1}{2}(z+h)^2 \partial_{x_1}^2 A_{01}, \quad (19)$$

$$\{0, 4\} : \quad \varphi_{04} = A_{04}(x_i, t_i) - \frac{1}{2}(z+h)^2 \partial_{x_1}^2 A_{02} + \frac{1}{24}(z+h)^4 \partial_{x_1}^4 A_{00}, \quad (20)$$

а для $n \neq 0$:

$$\{n, 0\} : \quad \varphi_{n0} = A_{n0}(x_i, t_i) \frac{\text{ch} nk(z+h)}{\text{ch} nkh}, \quad (21)$$

$$\{n, 1\} : \quad \varphi_{n1} = A_{n1}(x_i, t_i) \frac{\text{ch} nk(z+h)}{\text{ch} nkh} + i \partial_{x_1} A_{n0}(z+h) \frac{\text{sh} nk(z+h)}{\text{ch} nkh}, \quad (22)$$

$$\{n, 2\} : \quad \varphi_{n2} = \left(A_{n2}(x_i, t_i) - \partial_{x_1}^2 A_{n0} \frac{(z+h)^2}{2} \right) \times \frac{\text{ch} nk(z+h)}{\text{ch} nkh} + i \partial_{x_1} A_{n1}(z+h) \frac{\text{sh} nk(z+h)}{\text{ch} nkh}, \quad (23)$$

$$\{n, 3\} : \quad \varphi_{n3} = \left(A_{n3}(x_i, t_i) - \partial_{x_1}^2 A_{n1} \frac{(z+h)^2}{2} \right) \times \frac{\text{ch} nk(z+h)}{\text{ch} nkh} + \left(i \partial_{x_1} A_{n2}(z+h) - i \partial_{x_1}^3 A_{n0} \frac{(z+h)^3}{6} \right) \times \frac{\text{sh} nk(z+h)}{\text{ch} nkh}, \quad (24)$$

$$\{n, 4\} : \quad \varphi_{n4} = \left(A_{n4}(x_i, t_i) - \partial_{x_1}^2 A_{n2} \frac{(z+h)^2}{2} + \partial_{x_1}^4 A_{n0} \frac{(z+h)^4}{24} \right) \frac{\text{ch} nk(z+h)}{\text{ch} nkh} + \left(i \partial_{x_1} A_{n3}(z+h) - i \partial_{x_1}^3 A_{n1} \frac{(z+h)^3}{6} \right) \times \frac{\text{sh} nk(z+h)}{\text{ch} nkh}. \quad (25)$$

Функции $A_{nm}(x_i, t_i)$ в выражениях (16)–(25) на данном этапе не определены.

4. КЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ НУШ

В порядке $\{1, 0\}$ находим условие на параметры волны, определяющее дисперсионное соотношение:

$$\omega = \sqrt{kg\sigma}, \quad \sigma = \text{th}(kh). \quad (26)$$

Следующий порядок $\{1, 1\}$ дает соотношение

$$\frac{\partial A_{10}}{\partial t_1} + V \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} = 0. \quad (27)$$

Это уравнение описывает распространение линейной волны в диспергирующей среде со скоростью

$$V = \frac{g}{2\omega} (\sigma + kh(1 - \sigma^2)), \quad (28)$$

которая есть групповая скорость распространения линейных волн в среде с дисперсионной зависимостью (26).

Порядок $\{1, 2\}$ приводит к эволюционному уравнению, содержащему нулевую и вторую гармоники. Уравнение для нулевой гармоники находится в порядке $\{0, 2\}$ и имеет вид

$$gh \frac{\partial^2 A_{00}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 A_{00}}{\partial t_1^2} = \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} |A_{10}|^2. \quad (29)$$

Из (29) с использованием (27) следует, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + V \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - V_{long}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) A_{00} = 0, \quad (30)$$

$$V_{long} = \sqrt{gh}.$$

Здесь V_{long} — линейная скорость длинных волн. Распространение с этой скоростью соответствует свободному решению для нулевой гармоники. В нашем же случае следует положить

$$\frac{\partial A_{00}}{\partial t_1} + V \frac{\partial A_{00}}{\partial x_1} = 0, \quad (31)$$

что отвечает предположению, что в первом порядке нулевая гармоника распространяется со скоростью

вынуждающей силы (поверхностной волны). Тогда уравнение (29) принимает вид

$$\frac{\partial A_{00}}{\partial x_1} = \gamma_1 |A_{10}|^2, \quad (32)$$

$$\gamma_1 = \Gamma_1/V_d^2, \quad V_d^2 = gh - V^2.$$

Здесь и далее выражения для получаемых коэффициентов отнесены в Приложение.

Выражение для второй гармоники получается в порядке {2, 1} и имеет вид

$$A_{21} = i\chi_1 A_{10}^2. \quad (33)$$

В результате с учетом (27), (31) и (33) порядок {1, 2} приводит к уравнению

$$i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_2} + \beta_1 \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + \tilde{\rho}_{11} |A_{10}|^2 A_{10} + \tilde{\rho}_{12} A_{10} \frac{\partial A_{00}}{\partial x_1} = 0. \quad (34)$$

Система уравнений (34) и (32) дает замкнутое эволюционное уравнение:

$$i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_2} + \beta_1 \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + \tilde{\alpha}_1 |A_{10}|^2 A_{10} = 0. \quad (35)$$

Так как нас, в конечном итоге, интересует уравнение для смещения поверхности, используем связь потенциала скорости и смещения:

$$\eta_{10} = i\lambda A_{10}, \quad \lambda = -\frac{\omega}{g}, \quad (36)$$

которая получается при решении уравнения (9). Тогда, возвращаясь к физическим переменным, уравнение НУШ принимает вид

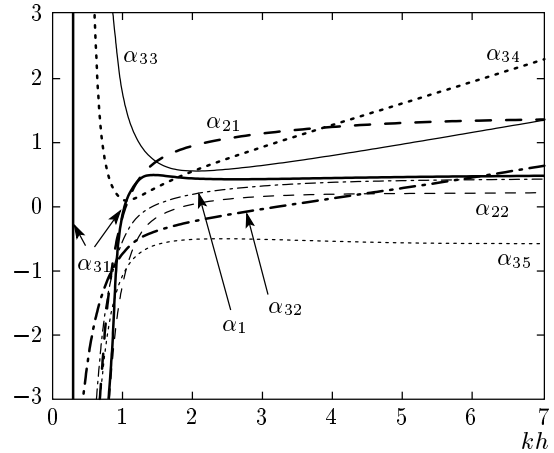
$$i \left(\frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + V \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right) + \varepsilon \beta_1 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \varepsilon \alpha_1 |\eta_{10}|^2 \eta_{10} = 0, \quad (37)$$

$$\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 / \lambda^2,$$

а смещение поверхности определяется формулой

$$\eta = \text{Re} (\eta_{10} \exp(i\omega t - ikx)). \quad (38)$$

Полученное уравнение (37) является классическим НУШ первого порядка и содержит известные коэффициенты. В частности, коэффициент дисперсии β_1 всегда положителен, а коэффициент нелинейности α_1 меняет свой знак при $kh \rightarrow 1.363$ (см. рисунок), что влечет смену типа уравнения (37) (фокусирующее при $\alpha_1 > 0$ и дефокусирующее в обратном случае).



Безразмерные нелинейные коэффициенты обобщенного уравнения (66) в зависимости от параметра kh (см. таблицу)

5. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ С УЧЕТОМ ДВУХ ПОРЯДКОВ МАЛОСТИ (УРАВНЕНИЕ СЕДЛЕЦКОГО)

Обобщение НУШ для волн на поверхности жидкости конечной глубины с учетом слагаемых двух порядков малости было получено в [12]. В настоящей работе этот вывод, в целом, повторяется, однако отлично учитывается вклад слагаемого с производной от потенциала скорости нулевой гармоники по времени t_2 . В работе [12] предполагалось, что нулевая гармоника (ее старший член φ_{00}) распространяется с линейной скоростью фундаментальной волны V не только в первом порядке (как (31)), но и в следующем порядке точности. Такое предположение, однако, противоречит связи (32) между нулевой и первой гармониками. В силу (32) производная от A_{00} по t_2 определяется с использованием уравнения (35) и не равна нулю. Учет соответствующего слагаемого приводит к поправкам в коэффициентах нелинейной дисперсии (они, впрочем, не сказываются на пределе $kh \rightarrow \infty$).

С учетом членов второго порядка смещение поверхности записывается как

$$\eta_1 = \eta_{10} + \varepsilon \eta_{11} + O(\varepsilon^2), \quad (39)$$

$$\eta_{11} = i\lambda \left(A_{11} + ip_1 \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right).$$

Полученное уравнение будет описывать эволюцию комбинации $(A_{10} + \varepsilon A_{11})$. Функция A_{11} (соответствующая однородной части решения (22) уравнения Лапласа) не определена. Далее (для нахождения уравнения для смещения) придется выразить

функции потенциала через смещение, согласно (39). Для упрощения вычислений можно использовать произвольность A_{11} , положив

$$A_{11} = -ip_1 \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1}, \quad (40)$$

тогда имеем

$$\eta_1 = i\lambda A_{10} + O(\varepsilon^2). \quad (41)$$

Эволюционное уравнение второго порядка для первой гармоники находится в порядке $\{1, 3\}$ и записывается как

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_3} + i\beta_2 \frac{\partial^3 A_{10}}{\partial x_1^3} + iP_{21}|A_{10}|^2 \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} + \\ + iP_{22}A_{10}^2 \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} + sA_{10} \frac{\partial A_{00}}{\partial t_2} + \\ + \tilde{\rho}_{12}A_{10} \frac{\partial A_{01}}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Предпоследнее слагаемое в (42) (с коэффициентом s) может быть выражено с использованием (32) и (35):

$$\frac{\partial A_{00}}{\partial t_2} = -i\beta_1\gamma_1 \left(A_{10} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} - A_{10}^* \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right). \quad (43)$$

Его вклад в коэффициенты нелинейной дисперсии не был учтен в [12]. Тогда (42) записывается в виде

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_3} + i\beta_2 \frac{\partial^3 A_{10}}{\partial x_1^3} + i\tilde{\rho}_{21}|A_{10}|^2 \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} + \\ + i\tilde{\rho}_{22}A_{10}^2 \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} + \tilde{\rho}_{12}A_{10} \frac{\partial A_{01}}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Уравнение (44) включает в себя слагаемое нулевой гармоники. Уравнение для него находится в порядке $\{0, 3\}$:

$$\frac{\partial A_{01}}{\partial x_1} = i\gamma_2 \left(A_{10} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} - A_{10}^* \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right). \quad (45)$$

При выводе пары уравнений (44) и (45) кроме выше найденных соотношений были использованы условия

$$\frac{\partial A_{01}}{\partial t_1} + V \frac{\partial A_{01}}{\partial x_1} = 0 \quad (46)$$

и выражение для компоненты второй гармоники

$$A_{22} = \chi_2 A_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1}, \quad (47)$$

полученное в порядке $\{2, 2\}$. Объединяя (44) и (45), получаем второй порядок эволюционного уравнения:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_3} + i\beta_2 \frac{\partial^3 A_{10}}{\partial x_1^3} + i\tilde{\alpha}_{21}|A_{10}|^2 \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} + \\ + i\tilde{\alpha}_{22}A_{10}^2 \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Записывая (48) совместно с (27) и (35), с учетом (41) получаем полное уравнение, включающее члены двух порядков для огибающей смещения:

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + V \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right) + \varepsilon\beta_1 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \varepsilon\alpha_1 |\eta_{10}|^2 \eta_{10} + \\ + i\varepsilon^2\beta_2 \frac{\partial^3 \eta_{10}}{\partial x^3} + i\varepsilon^2\alpha_{21} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} + \\ + i\varepsilon^2\alpha_{22} \eta_{10}^2 \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\alpha_{21} = \tilde{\alpha}_{21}/\lambda^2, \quad \alpha_{22} = \tilde{\alpha}_{22}/\lambda^2.$$

Полное смещение поверхности записывается как

$$\begin{aligned} \eta = \varepsilon^2 \eta_{01} + \varepsilon \operatorname{Re} (\eta_{10} \exp(i\omega t - ikx)) + \\ + \varepsilon^2 \operatorname{Re} (\eta_{21} \exp(2i\omega t - 2ikx)) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (50)$$

и включает слагаемые нулевой, первой и второй гармоник. Выражения для компонент смещений найдены из решения (9) и имеют следующий вид:

$$\eta_{01} = \tilde{r}_{01}|A_{10}|^2 = r_{01}|\eta_{10}|^2, \quad r_{01} = \tilde{r}_{01}/\lambda^2, \quad (51)$$

$$\eta_{21} = \tilde{r}_{21}A_{10}^2 = r_{21}\eta_{10}^2, \quad r_{21} = -\tilde{r}_{21}/\lambda^2. \quad (52)$$

Уравнение вида (49) было получено в работе [12]. Его коэффициенты совпадают с полученными в настоящей работе, если положить $s = 0$. Оно является обобщением классического уравнения НУШ с учетом слагаемых следующего порядка малости. Однако в случае $kh \approx 1.363$ нелинейное слагаемое (при α_1) вырождается и оно так же, как и (37), становится непригодно для описания нелинейной волновой динамики. Потому рассмотрим следующий порядок эволюционного уравнения.

6. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ С УЧЕТОМ ТРЕХ ПОРЯДКОВ МАЛОСТИ

Выражение для первой гармоники смещения с учетом трех порядков малости имеет вид

$$\eta_1 = i\lambda A_{10} + \varepsilon^2 \eta_{12} + O(\varepsilon^3), \quad (53)$$

где

$$\eta_{12} = i\lambda \left(A_{12} + p_{21} \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + p_{22}|A_{10}|^2 A_{10} \right). \quad (54)$$

Снова воспользуемся свободой в определении A_{12} , положив

$$A_{12} = -p_{21} \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} - p_{22}|A_{10}|^2 A_{10}. \quad (55)$$

Тогда

$$\eta_1 = i\lambda A_{10} + O(\varepsilon^3). \quad (56)$$

Уравнение для первой гармоники, находящееся в порядке $\{1, 4\}$, имеет вид

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_4} + \beta_3 \frac{\partial^4 A_{10}}{\partial x_1^4} + P_{31} |A_{10}|^4 A_{10} + \\ + P_{32} |A_{10}|^2 \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + P_{33} A_{10}^2 \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + \\ + P_{34} A_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} + P_{35} A_{10}^* \left(\frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right)^2 + \\ + s A_{10} \frac{\partial A_{01}}{\partial t_2} + s A_{10} \frac{\partial A_{00}}{\partial t_3} + \tilde{\rho}_{12} A_{10} \frac{\partial A_{02}}{\partial x_1} = 0, \end{aligned} \quad (57)$$

а связанное с ним уравнение для нулевой гармоники имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{02}}{\partial x_1} = \gamma_{31} |A_{10}|^4 + \gamma_{32} \left(A_{10} \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + A_{10}^* \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} \right) + \\ + \gamma_{33} \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (58)$$

При выводе этих уравнений были использованы условия

$$\frac{\partial A_{02}}{\partial t_1} + V \frac{\partial A_{02}}{\partial x_1} = 0 \quad (59)$$

и выражения для компонент второй и третьей гармоник

$$\begin{aligned} A_{23} = i\chi_{31} |A_{10}|^2 A_{10}^2 + i\chi_{32} A_{10} \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + \\ + i\chi_{33} \left(\frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right)^2, \end{aligned} \quad (60)$$

$$A_{32} = \nu_1 A_{10}^3. \quad (61)$$

Производные от компонент нулевой гармоники, входящие в (57) при коэффициентах s , вычисляются с использованием ранее полученных соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{01}}{\partial t_2} = \gamma_2 \tilde{\alpha}_1 |A_{10}|^4 + \\ + \gamma_2 \beta_1 \left(A_{10} \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + A_{10}^* \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{00}}{\partial t_3} = -\gamma_1 \frac{\tilde{\alpha}_{21} + \tilde{\alpha}_{22}}{2} |A_{10}|^4 - \\ - \gamma_1 \beta_2 \left(A_{10} \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + A_{10}^* \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Подставляя выражения (62) и (63) в уравнение (57), получаем

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_4} + \beta_3 \frac{\partial^4 A_{10}}{\partial x_1^4} + \tilde{\rho}_{31} |A_{10}|^4 A_{10} + \\ + \tilde{\rho}_{32} |A_{10}|^2 \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + \tilde{\rho}_{33} A_{10}^2 \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + \\ + \tilde{\rho}_{34} A_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} + \\ + \tilde{\rho}_{35} A_{10}^* \left(\frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right)^2 + \tilde{\rho}_{12} A_{10} \frac{\partial A_{02}}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Объединяя уравнения (64) и (58), можно получить замкнутый порядок эволюционного уравнения для первой гармоники:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A_{10}}{\partial t_4} + \beta_3 \frac{\partial^4 A_{10}}{\partial x_1^4} + \tilde{\alpha}_{31} |A_{10}|^4 A_{10} + \\ + \tilde{\alpha}_{32} |A_{10}|^2 \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} + \tilde{\alpha}_{33} A_{10}^2 \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + \\ + \tilde{\alpha}_{34} A_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} + \tilde{\alpha}_{35} A_{10}^* \left(\frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (65)$$

а полное уравнение для смещения имеет вид

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + V \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right) + \varepsilon \beta_1 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \varepsilon \alpha_1 |\eta_{10}|^2 \eta_{10} + \\ + i\varepsilon^2 \beta_2 \frac{\partial^3 \eta_{10}}{\partial x^3} + i\varepsilon^2 \alpha_{21} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} + i\varepsilon^2 \alpha_{22} \eta_{10}^2 \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} + \\ + \varepsilon^3 \beta_3 \frac{\partial^4 \eta_{10}}{\partial x^4} + \varepsilon^3 \alpha_{31} |\eta_{10}|^4 \eta_{10} + \varepsilon^3 \alpha_{32} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \\ + \varepsilon^3 \alpha_{33} \eta_{10}^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}^*}{\partial x^2} + \varepsilon^3 \alpha_{34} \eta_{10} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} + \\ + \varepsilon^3 \alpha_{35} \eta_{10}^* \left(\frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{31} = \tilde{\alpha}_{31} / \lambda^4, \quad \alpha_{32} = \tilde{\alpha}_{32} / \lambda^2, \quad \alpha_{33} = \tilde{\alpha}_{33} / \lambda^2, \\ \alpha_{34} = \tilde{\alpha}_{34} / \lambda^2, \quad \alpha_{35} = \tilde{\alpha}_{35} / \lambda^2. \end{aligned}$$

Огибающая смещения поверхности определяется выражением

$$\begin{aligned} \eta = \varepsilon^2 (\eta_{01} + \varepsilon \eta_{02}) + \varepsilon \operatorname{Re} (\eta_{10} \exp(i\omega t - ikx)) + \\ + \varepsilon^2 \operatorname{Re} ((\eta_{21} + \varepsilon \eta_{22}) \exp(2i\omega t - 2ikx)) + \\ + \varepsilon^3 \operatorname{Re} (\eta_{32} \exp(3i\omega t - 3ikx)) + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (67)$$

компоненты которого определяются формулами (51) и (52) и соотношениями

$$\begin{aligned} \eta_{02} = i\tilde{r}_{02} \left(A_{10} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x} - A_{10}^* \frac{\partial A_{10}}{\partial x} \right) = \\ = ir_{02} \left(\eta_{10} \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} - \eta_{10}^* \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right), \quad r_{02} = \tilde{r}_{02} / \lambda^2, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \eta_{22} &= i\tilde{r}_{22}A_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial x} = ir_{22}\eta_{10} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x}, \\ r_{22} &= -\frac{\tilde{r}_{22}}{\lambda^2}, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\eta_{32} = i\tilde{r}_{32}A_{10}^3 = r_{32}\eta_{10}^3, \quad r_{32} = -\frac{\tilde{r}_{32}}{\lambda^3}. \quad (70)$$

Уравнение (66) является обобщением уравнения, полученного в работе [12] с учетом слагаемых следующего порядка малости.

Отметим, что правые части выражений (32), (45) и (58) (последнее — после взятия интеграла по частям) по своей форме напоминают подынтегральные выражения трех первых законов сохранения уравнения НУШ первого порядка [19]:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |A_{10}|^2 dx_1, \quad (71)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(A_{10} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} - A_{10}^* \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right) dx_1, \quad (72)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(|A_{10}|^4 - \frac{2\beta_1}{\tilde{\alpha}_1} \left| \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right|^2 \right) dx_1. \quad (73)$$

Этот факт тесно связан с возможностью записи производных от компонент нулевой гармоники потенциала в виде выражений, не содержащих интегральные слагаемые (43), (62) и (63). Действительно, из (32) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_1 |A_{10}|^2 dx_1 = \frac{\partial}{\partial t_2} A_{00} \Big|_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty}. \quad (74)$$

В силу (43) подстановка в интеграле (74) может быть вычислена, при этом интеграл оказывается равным нулю, что означает, что выражение под производной в левой части (74) — сохраняющаяся величина. Интеграл I_1 сохраняется также в НУШ с учетом членов двух порядков малости в силу (63), а выражение (62) доказывает, что интегралом движения НУШ первого порядка является I_2 . Известно, что классическое уравнение НУШ обладает бесконечным рядом законов сохранения. Можно, однако, убедиться, что интеграл I_1 в уравнении (66) сохраняется только для определенного соотношения коэффициентов нелинейной дисперсии α_{32} , α_{33} и α_{35} , что говорит в общем случае о потере интегралов сохранения уравнениями НУШ высокого порядка. Выражение (58), хотя и имеет схожую структуру с I_3 , в общем случае не совпадает с (73). Так как слагаемые типа тех, что содержатся с коэффициентами s

в уравнениях (42) и (57), будут, очевидно, появляться и в следующих порядках асимптотических разложений, уравнения более высоких порядков могут содержать нелокальные интегральные слагаемые (производные от компонент нулевой гармоники потенциала будут выражаться через неопределенные интегралы).

СЛУЧАЙ БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОЙ ВОДЫ ($kh \rightarrow \infty$)

Полученное нами уравнение (66) обладает расходящимися коэффициентами в пределе $kh \rightarrow \infty$. Это относится к коэффициентам нелинейной дисперсии α_{32} , α_{33} и α_{34} (см. таблицу и рисунок). Для применения асимптотических разложений необходима малость слагаемых высших порядков по отношению к низшим. Такая иерархия нарушается для ряда нулевой гармоники

$$\varphi_0 = \varepsilon\varphi_{00} + \varepsilon^2\varphi_{01} + \varepsilon^3\varphi_{02} + \varepsilon^4\varphi_{03} + \varepsilon^5\varphi_{04} + O(\varepsilon^6).$$

Действительно, в пределе $kh \rightarrow \infty$ соотношения (18) и (19) стремятся к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \varphi_{02} &\xrightarrow{kh \rightarrow \infty} A_{02} + \frac{k^2}{2\omega} \times \\ &\times \left(z + \frac{h}{2} + \frac{1}{8k} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} |A_{10}|^2, \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{03} &\xrightarrow{kh \rightarrow \infty} A_{03} - i \frac{k}{8\omega} \times \\ &\times \left(z + \frac{h}{2} - \frac{1}{8k} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_{10} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} - A_{10}^* \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (76)$$

Тогда при условии конечности значений A_{10} и A_{01} в глубоководном пределе следующие по порядку малости члены φ_{02} и φ_{03} оказываются не малы (бесконечны). Секулярные члены можно компенсировать, используя свободу записи A_{02} и A_{03} , выполнив замену

$$A_{02} \rightarrow A_{02} - \frac{k^2 h}{4\omega} \frac{\partial}{\partial x_1} |A_{10}|^2, \quad (77)$$

$$A_{03} \rightarrow A_{03} + i \frac{kh}{16\omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_{10} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} - A_{10}^* \frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \right). \quad (78)$$

Такой выбор был сделан в работе [12], хотя он не единственно возможный. Использование подобных преобразований не изменяет вида и коэффициентов замкнутого уравнения, но может изменять коэффициенты в системе уравнений для первой и нулевой гармоник.

Коэффициенты уравнений в частных случаях

	Частные случаи обобщенного уравнения НУШ (66)			Обобщенное уравнение Диста (81)
	$kh \rightarrow 0$	$kh = 1.363$	$kh \rightarrow \infty$	
Vk/ω	1	0.6793	1/2	
$\beta_1 k^2/\omega$	$(kh)^2/2$	0.2657	1/8	
$\alpha_1/k^2/\omega$	$(-9/16)/(kh)^4$	0.0002	1/2	
$\beta_2 k^3/\omega$	$(kh)^2/6$	-0.1114	-1/16	
$\alpha_{21}/k/\omega$	$(-9/8)/(kh)^4$	0.6833	3/2	
$\alpha_{22}/k/\omega$	$(-27/16)/(kh)^4$	-0.2678	1/4	
$\beta_3 k^4/\omega$	$(19/72)(kh)^4$	-0.0066	-5/128	
$\alpha_{31}/k^4/\omega$	$(81/1024)/(kh)^{10}$	0.3864	1/2	
α_{32}/ω	$(-15/16)/(kh)^2$	-0.4433	$kh/6$	-5/8
α_{33}/ω	$(9/4)/(kh)^4$	0.7798	$kh/6$	3/32
α_{34}/ω	$(9/8)/(kh)^4$	0.2394	$kh/3$	-3/16
α_{35}/ω	$(-9/16)/(kh)^4$	-0.6467	-19/32	
$\gamma_1 \omega/k^3$	$(-3/4)/(kh)^2$	-0.4935	$-1/(2kh)$	-
$\gamma_2 \omega/k^2$	$(-3/4)/(kh)^2$	-0.1351	$1/(8kh)$	-
$\gamma_{31} \omega^3/k^7$	$(-81/64)/(kh)^4$	-0.6239	$-1/(8kh)$	-
$\gamma_{32} \omega/k$	$(3/4)/(kh)^2$	0.1343	$-kh/12$	-
$\gamma_{33} \omega/k$	$(-3/4)/(kh)^2$	-0.3705	$-kh/6$	-
r_{01}/k	$(-3/4)/(kh)^3$	-0.4479	$-1/(4kh)$	0
r_{02}	$(-3/4)/(kh)^3$	-0.3116	$(-1/32)/(kh)^2$	0
r_{21}/k	$(3/4)/(kh)^3$	0.8265	1/2	
r_{22}	$(-3/2)/(kh)^3$	-0.2669	1/2	
r_{32}/k^2	$(27/64)/(kh)^6$	0.8250	3/8	

Если рассмотреть компоненту φ_{04} в пределе $kh \rightarrow \infty$, то получим

$$\varphi_{04} \xrightarrow{kh \rightarrow \infty} A_{04} + \frac{k^6}{8\omega^3} \left(z + \frac{h}{2} + \frac{2}{k} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} |A_{10}|^4 + \frac{1}{\omega} P_1 \left(k^2 h^3, kh^2, k^2 h^2 z, h, khz, k^2 z^2 h, \frac{1}{k}, z, kz^2, k^2 z^3 \right) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_{10} \frac{\partial^2 A_{10}^*}{\partial x_1^2} + A_{10}^* \frac{\partial^2 A_{10}}{\partial x_1^2} \right) + \frac{1}{\omega} P_2 \left(k^2 h^3, kh^2, h, khz, k^2 z^2 h, \frac{1}{k}, z, kz^2, k^2 z^3 \right) \times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial A_{10}^*}{\partial x_1} \right), \quad (79)$$

где P_1 и P_2 — многочлены, включающие указанные в скобках слагаемые. Очевидно, что с помощью подбора вида A_{04} можно добиться ограниченности φ_{04}

всегда, но при $kh \rightarrow \infty$ будут неограниченными, например, значения производных от φ_{04} по z . Использование преобразований типа (77), (78) не изменяет принципиально вида (79). Поэтому в эволюционное уравнение войдут слагаемые с бесконечно растущими в пределе $kh \rightarrow \infty$ коэффициентами, а с точки зрения асимптотической техники это будет означать расходимость асимптотического ряда.

Причиной неограниченности членов ряда является невыполнение условия малости глубины h по сравнению с характерной длиной изменения нулевой гармоники L . Это условие необходимо для представления нулевой гармоники решения уравнения Лапласа в виде степенного ряда (записи (15)). Если для классического НУШ или уравнения с учетом двух порядков малости это условие не мешает нахождению предела $kh \rightarrow \infty$, то для уравнения (66) это не так, уравнение (66) не применимо к случаю бесконечно глубокой воды.

Чтобы записать эволюционное уравнение для случая $kh \rightarrow \infty$, можно воспользоваться путем Диста, выводя уравнение огибающей, подобное полученному в работе [11]. Предположим, что $h \gg L$ ($L/h = O(\mu)$), а модовую структуру наведенного течения не будем определять заранее:

$$\varphi_{0m} = A_{0m}(z, x_i, t_i), \quad m \geq 0. \quad (80)$$

Следуя аналогично выводу обобщенного уравнения НУШ (66), приходим к следующему виду обобщенного уравнения Диста:

$$\begin{aligned} & i \left(\frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + \frac{\omega}{2k} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\omega}{8k^2} \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\omega k^2}{2} |\eta_{10}|^2 \eta_{10} - \\ & - i \varepsilon^2 \frac{\omega}{16k^3} \frac{\partial^3 \eta_{10}}{\partial x^3} + i \varepsilon^2 \frac{3\omega k}{2} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} + i \varepsilon^2 \frac{\omega k}{4} \eta_{10}^2 \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} - \\ & - \varepsilon^3 \frac{5\omega}{128k^4} \frac{\partial^4 \eta_{10}}{\partial x^4} + \varepsilon^3 \frac{\omega k^4}{2} |\eta_{10}|^4 \eta_{10} - \varepsilon^3 \frac{5\omega}{8} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \\ & + \varepsilon^3 \frac{3\omega}{32} \eta_{10}^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}^*}{\partial x^2} - \varepsilon^3 \frac{3\omega}{16} \eta_{10} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} - \\ & - \varepsilon^3 \frac{19}{32} \eta_{10}^* \left(\frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right)^2 + k \eta_{10} \frac{\partial A_{02}}{\partial x} = 0, \quad (81) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A_{02}}{\partial z} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial}{\partial x} |\eta_{10}|^2, \quad z = 0, \quad (82)$$

$$\frac{\partial^2 A_{02}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_{02}}{\partial x^2} = 0, \quad -h < z < 0, \quad (83)$$

$$\frac{\partial A_{02}}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (84)$$

При записи (81) было использовано условие (59), а также $A_{00} \equiv 0, A_{01} \equiv 0$ и

$$\frac{\partial A_{03}}{\partial z} = -i \frac{\omega}{8k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_{10} \frac{\partial^2 \eta_{10}^*}{\partial x^2} - \eta_{10}^* \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} \right), \quad (85)$$

$$z = 0.$$

Отметим, что результаты (82) и (85) совпадают со значениями производных, следующими из (75) и (76). Слагаемое с наведенным течением (последнее в (81)) имеет такой же вид, как и в классическом уравнении Диста, что связано с выбором более жесткого условия $L/h = O(\mu)$ (против $L/h = O(1)$), что потребовалось для получения более простой формы уравнения. Для применимости (81) должно выполняться соотношение $kh \geq 1/\varepsilon^2$.

Пренебрегая вкладом последнего слагаемого в уравнении (81), получаем уравнение НУШ с учетом слагаемых трех порядков малости в пределе бесконечно глубокой воды. Как видно, его коэффициенты совпали с полученными нами ранее конечными коэффициентами уравнения (66) (см. таблицу). Отметим, что вклад нулевой гармоники (наведенного течения) не ограничивается последним слагаемым в уравнении (81), он входит в другие нелинейные коэффициенты уравнения.

Полное поле огибающей смещения, описываемой уравнением (81), определяется выражением (67). Как следует из пределов коэффициентов r_{ij} с учетом малости $(kh)^{-1}$, вклад нулевой гармоники оказывается вне рамок выбранной точности описания, хотя в модели Диста ее вклад учитывается [13].

7. СЛУЧАЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ ($kh \rightarrow 0$)

В пределе $kh \rightarrow 0$ поведение коэффициентов приведено в таблице, они стремятся к бесконечности (в использованных нормировках), но асимптотические ряды остаются малыми. Коэффициент α_{31} при уходе с мелководья меняет знак с положительного на отрицательный, а затем снова становится положительным (см. рисунок).

НУШ для случая $kh \rightarrow 0$ может быть выведено и на основе уравнения для волн на мелкой воде — уравнения КдВ [5]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3\sqrt{gh}}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2 \sqrt{gh}}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (86)$$

Такой метод вывода уравнения для огибающей был использован нами для тестирования полученных коэффициентов. При этом было получено полное соответствие. Найденное нами уравнение с учетом слагаемых трех порядков, описывающее слабые

модуляции волн в рамках КдВ, имеет вид (66), но в нем $\alpha_{32} = 0$, остальные коэффициенты даны в таблице (для $kh \rightarrow 0$). Вырождение коэффициента α_{32} следует из таблицы (он имеет другую степень зависимости от kh).

Учет следующих по порядку малости слагаемых в уравнении КдВ ведет к малым (по параметру kh) поправкам к коэффициентам уравнения для огибающей. Так, поправки к коэффициенту α_1 , связанные с включением в уравнение (86) слагаемого кубической нелинейности, могут в общем случае сменить тип уравнения огибающей на фокусирующий [20]. Для волн на воде этот случай, однако, не реализуется.

Уравнения для огибающей высокого порядка выводились для обобщенного уравнения КдВ с учетом дополнительного слагаемого кубической нелинейности в [16, 20]. В первой работе использовалось модифицированное соотношение между малыми параметрами, следуя [15], и явно использовалось условие вырождения нелинейности в уравнении огибающей первого порядка. Нами было получено уравнение огибающей для волн в рамках обобщенного КдВ без предположения об упомянутом вырождении (классическое соотношение между малыми параметрами) и получено соответствие с работой [16] в области вырождения коэффициента α_1 . Во второй работе [20] решение искалось в виде ряда по слагаемым двух порядков малости, хотя, как следует из настоящего вывода, вклад в коэффициент α_{31} дают поправки и третьего порядка.

8. СЛУЧАЙ ВЫРОЖДЕНИЯ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ($kh \approx 1.363$)

Нелинейное эволюционное уравнение для модуляции огибающей в случае $kh \rightarrow 1.363$ было впервые получено в работе [14], а затем в [15]. В первой работе были приведены численные значения коэффициентов при $kh = 1.363$, во второй — выражения для коэффициентов как функции глубины (которые давали отличные от первой работы результаты и расходились в пределе бесконечно глубокой жидкости).

Чтобы записать эволюционное уравнение для случая $kh \approx 1.363$, удобно переписать (66), явно обозначив малые множители, связанные со слабой нелинейностью (δ) и дисперсией (μ):

$$i \left(\varepsilon \frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + \mu V \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right) + \mu^2 \beta_1 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \delta^2 \alpha_{10} |\eta_{10}|^2 \eta_{10} + \\ + i \mu^3 \beta_2 \frac{\partial^3 \eta_{10}}{\partial x^3} + i \delta^2 \mu \alpha_{21} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} + i \delta^2 \mu \alpha_{22} \eta_{10}^2 \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} + \\ + \mu^4 \beta_3 \frac{\partial^4 \eta_{10}}{\partial x^4} + \delta^4 \alpha_{31} |\eta_{10}|^4 \eta_{10} + \delta^2 \mu^2 \alpha_{32} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \\ + \delta^2 \mu^2 \alpha_{33} \eta_{10}^2 \frac{\partial^2 \eta_{10}^*}{\partial x^2} + \delta^2 \mu^2 \alpha_{34} \eta_{10} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} + \\ + \delta^2 \mu^2 \alpha_{35} \eta_{10}^* \left(\frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (87)$$

Отбрасывая слагаемое с α_1 и требуя учета следующего нелинейного (с α_{31}) и первого дисперсионного (с β_1) членов в одном порядке малости, получаем новое соотношение между малыми параметрами нелинейности и дисперсии: $\delta^2 \sim \mu$. Тогда, учитывая только первые поправки к волновому уравнению, получаем модифицированное уравнение:

$$i \left(\frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + V \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} \right) + \varepsilon \beta_1 \frac{\partial^2 \eta_{10}}{\partial x^2} + \sqrt{\varepsilon} \alpha_1 |\eta_{10}|^2 \eta_{10} + \\ + i \varepsilon \alpha_{21} |\eta_{10}|^2 \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} + i \varepsilon \alpha_{22} \eta_{10}^2 \frac{\partial \eta_{10}^*}{\partial x} + \\ + \varepsilon \alpha_{31} |\eta_{10}|^4 \eta_{10} = 0. \quad (88)$$

В нем $\varepsilon = \mu = \delta^2$, а слагаемое с кубической нелинейностью удержали, полагая α_1 меньше или порядка $\varepsilon^{1/2}$.

Уравнение (88) описывает нелинейную динамику поверхностных волн в области $kh \approx 1.363$ и должно использоваться вместо (37) в указанной области. Хотя слагаемые в уравнении (88) получены с использованием разложений до порядка ε^5 включительно, по сути, это уравнение первого порядка. В настоящей работе его коэффициенты определены, в отличие от [14], для любой глубины kh и всегда имеют конечное значение, в отличие от [15]. Для случая $kh = 1.363$ они приведены в таблице. Смещение поверхности определяется формулой (38).

Исследование модуляционной устойчивости простейшего решения уравнения (88) — плоской волны — проводилось в работах [15, 16]. Если записать решение в виде

$$\eta_{10} = A \exp(i((\Omega + \omega)t - (K + k)x)), \quad (89)$$

где K и Ω — волновое число и частота отстройки, то критерий модуляционной неустойчивости будет иметь вид

$$\beta_1 \alpha_1 + D > 0, \quad D = \beta_1 K (\alpha_{22} - \alpha_{21}) + \\ + A^2 \left(2\beta_1 \alpha_{31} - \frac{1}{2} \alpha_{22}^2 \right). \quad (90)$$

Область неустойчивых возмущений волновых чисел определяется соотношением

$$0 < \Delta K < \left| \frac{A}{\beta_1} \right| \sqrt{2(\beta_1 \alpha_1 + D)} \quad (91)$$

(полное волновое число возмущения равно $k + K + \Delta K$), а максимальный инкремент неустойчивости равен

$$(\text{Im } \Omega)_{max} = \frac{A^2}{\beta_1} (\beta_1 \alpha_1 + D) \quad (92)$$

при $\Delta K_{max} = \left| \frac{A}{\beta_1} \right| \sqrt{\beta_1 \alpha_1 + D}$.

В зависимости от знака параметра D реализуются различные типы неустойчивости. По данным таблицы можно получить, что при $kh = 1.363$

$$D \approx \omega^2 \left(-0.2527 \frac{K}{k} + 0.2311 (kA)^2 \right). \quad (93)$$

Коэффициенты в соотношении (93) отличны от найденных в работе [15], однако для волны Стокса ($K = 0$) знак D совпадает с определенным в этой работе, а потому сделанные в ней выводы о характере неустойчивости сохраняются: в сверхкритическом случае ($kh > 1.363$) всегда существует область неустойчивых возмущений волны Стокса, а в докритическом случае ($kh < 1.363$) для существования модуляционной неустойчивости необходимо выполнение условия

$$D > -\beta_1 \alpha_1 > 0, \quad (94)$$

которое сдвигает порог возникновения неустойчивости $kh = 1.363$ для интенсивных волн в область более мелкой воды. Оценим этот сдвиг, положив $K = 0$ и $kA = 0.1$ (типичная крутизна морских волн), тогда пороговое значение глубины равно $kh \approx 1.3508$; при выборе $kA = 0.4$ следует значение $kh \approx 1.2520$.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено обобщенное уравнение НУШ с учетом поправок трех порядков малости для волн на воде конечной глубины. Оно является обобщением уравнения, полученного в работе [12]. При этом не использовалось предположение о совпадении скорости наведенного течения с групповой скоростью фундаментальной волны в высших порядках точности. Для применимости найденного уравнения требуется выполнение условия малости глубины по сравнению с длиной модуляции, малой крутизны волн и узости спектра. Первое из условий

нарушается при формальном переходе к пределу $kh \rightarrow \infty$ (степенное представление компонент нулевой гармоники потенциала скорости становится неадекватным), и в этом случае получено обобщение уравнений Диста с конечными коэффициентами, содержащее слагаемые трех порядков малости и учитывающее слабое наведенное течение. В пределе мелкой воды полученное обобщенное уравнение НУШ согласуется с уравнением для огибающей волн в рамках уравнения КдВ. В частном случае вырождения кубической нелинейности ($kh \approx 1.363$) получено обобщение уравнения НУШ первого порядка, определены его коэффициенты. Проведенный анализ модуляционной устойчивости волн в этом случае показал, что для интенсивных волн порог возникновения модуляционной неустойчивости сдвигается в область более мелкой воды.

Автор благодарен Ю. В. Седleckому за стимулирующие дискуссии и Е. Н. Пелиновскому за внимание к работе. Исследование выполнено при поддержке ИНТАС (грант № 04-83-3032), РФФИ (грант № 05-05-64265) и ведущей Научной школы В. И. Таланова (грант № НШ-1637.2003.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициенты уравнений

В приведенных ниже выражениях коэффициенты при слагаемых высших порядков малости выражены через коэффициенты при низших порядках. Такое представление удобно для проверки выкладок и понимания вкладов различных эффектов. Выражение для скорости V в некоторых уравнениях подставлено в коэффициенты, а в некоторых нет с целью сократить размер формул.

Коэффициенты выбора компонент поля

$$p_1 = h\sigma + \frac{V}{\omega},$$

$$p_{21} = \frac{\beta_1}{\omega} + k^2 h^2 \frac{3\sigma^4 - 2\sigma^2 + 1}{4k^2 \sigma^2} + \frac{kh}{2k^2 \sigma} + \frac{1}{4k^2},$$

$$p_{22} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\omega} + \frac{k^2 V \sigma^2 - \omega k}{\omega^2} \gamma_1 + k^2 \frac{-\sigma^4 - 2\sigma^2 + 1}{\omega(\sigma^2 + 1)} \chi_1 + k^4 \frac{\sigma^2(5\sigma^2 - 8)}{8\omega^2}.$$

Коэффициенты нелинейных взаимодействий

$$\chi_1 = 3k^2 \frac{\sigma^4 - 1}{8\omega\sigma^2},$$

$$\chi_2 = \left(kh \frac{-\sigma^2 + 3}{k\sigma} + \frac{1}{k} \right) \chi_1 + 3k^2 h \frac{(\sigma^4 - 1)(3\sigma^2 + 1)}{16\omega\sigma^3} + 9k \frac{-\sigma^4 + 1}{16\omega\sigma^2},$$

$$\begin{aligned} \chi_{31} = & -2 \frac{\sigma^2 + 1}{\omega\sigma^2} \tilde{\alpha}_1 \chi_1 + k^2 \frac{\sigma^4 + 4\sigma^2 + 3}{8\omega^2\sigma^2} \tilde{\alpha}_1 + \left(k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 - 1)}{2\omega\sigma^3} + k \frac{\sigma^2 + 5}{2\omega\sigma^2} \right) \gamma_1 \chi_1 + \\ & + \left(k^4 h \frac{(\sigma^2 - 1)^2(\sigma^2 + 1)}{4\omega^2\sigma} - k^3 \frac{2\sigma^6 + \sigma^4 + 2\sigma^2 + 3}{8\omega^2\sigma^2} \right) \gamma_1 + k^4 \frac{\sigma^4 - 4\sigma^2 + 19}{4\omega^2} \chi_1 + \\ & + 3k^2 \frac{(1 - \sigma^4)(5\sigma^2 + 3)}{4\omega\sigma^2(3\sigma^2 + 1)} \nu_1 + k^6 \frac{-21\sigma^6 + 4\sigma^4 - 27\sigma^2 - 52}{96\omega^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{32} = & -2 \frac{\sigma^2 + 1}{\omega\sigma^2} \beta_1 \chi_1 + k^2 \frac{\sigma^4 + 4\sigma^2 + 3}{8\omega^2\sigma^2} \beta_1 + \left(kh \frac{\sigma^2 - 3}{2k\sigma} - \frac{1}{2k} \right) \chi_2 + \\ & + \left(k^2 h^2 \frac{\sigma^6 - 9\sigma^4 + 15\sigma^2 + 1}{8k^2\sigma^4} + kh \frac{-\sigma^4 + 6\sigma^2 - 1}{4k^2\sigma^3} + \frac{\sigma^2 + 1}{8k^2\sigma^2} \right) \chi_1 + \\ & + k^2 h^2 \frac{-17\sigma^8 + 4\sigma^6 + 14\sigma^4 - 4\sigma^2 + 3}{32\omega\sigma^4} + kh \frac{(\sigma^4 - 1)(9\sigma^2 + 1)}{16\omega\sigma^3} - \frac{(\sigma^2 + 1)^2}{32\omega\sigma^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{33} = & \left(kh \frac{\sigma^2 - 3}{2k\sigma} - \frac{1}{2k} \right) \chi_2 + \left(k^2 h^2 \frac{\sigma^6 - 9\sigma^4 + 15\sigma^2 + 1}{8k^2\sigma^4} + kh \frac{-\sigma^4 + 6\sigma^2 - 1}{4k^2\sigma^3} + \frac{\sigma^2 + 1}{8k^2\sigma^2} \right) \chi_1 - \\ & - k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2(1 + \sigma^2)}{8\omega\sigma^2} + kh \frac{(\sigma^4 - 1)(2\sigma^2 + 1)}{8\omega\sigma^3} + \frac{-\sigma^4 + 1}{8\omega\sigma^2}, \end{aligned}$$

$$\nu_1 = k^2 \frac{-3\sigma^6 - 13\sigma^4 + 5\sigma^2 + 3}{8\omega\sigma^2(\sigma^2 + 1)} \chi_1 + k^4 \frac{(\sigma^2 - 1)(9\sigma^4 - 1)}{64\omega^2\sigma^2}.$$

Коэффициенты линейной дисперсии

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3}, \quad \beta_3 = \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \omega}{\partial k^4}.$$

Эти выражения могут быть вычислены по дисперсионной зависимости (26), мы не приводим их вида.

Коэффициенты компонент наведенного течения

$$\gamma_1 = \frac{k^2 V(\sigma^2 - 1) - 2\omega k}{4V_d^2},$$

$$\gamma_2 = 2 \frac{V}{V_d^2} \gamma_1 \beta_1 + k^2 \frac{\sigma^2 - 1}{4V_d^2} \beta_1 + \frac{\omega^2 - k^2 V^2(\sigma^2 + 1)}{4\omega V_d^2},$$

$$\begin{aligned} \gamma_{31} = & k^2 \frac{\sigma^2 - 1}{8V_d^2} (\tilde{\alpha}_{21} + \tilde{\alpha}_{22}) + \frac{V}{V_d^2} (\tilde{\alpha}_{21} + \tilde{\alpha}_{22}) \gamma_1 - \\ & - 2 \frac{V}{V_d^2} \tilde{\alpha}_1 \gamma_2 - \frac{1}{V_d^2} \tilde{\alpha}_1 \gamma_1 \beta_1 + \frac{k\omega + 3k^2V(\sigma^2 + 1)}{4\omega V_d^2} \tilde{\alpha}_1 - 3 \frac{V}{2V_d^2} \gamma_1^2 + \left(k^3 h \frac{\sigma^4 - 1}{4\sigma V_d^2} - k^2 \frac{\sigma^2 + 1}{2V_d^2} \right) \gamma_1 + \\ & + \left(\omega k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(-7\sigma^4 - 2\sigma^2 + 1)}{2\sigma(\sigma^2 + 1)^2 V_d^2} + \omega k \frac{3\sigma^4 - 6\sigma^2 - 5}{2(\sigma^2 + 1)^2 V_d^2} \right) \chi_1^2 + \\ & + \left(k^4 h \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (7\sigma^2 + 1)}{4\sigma(\sigma^2 + 1) V_d^2} + k^3 \frac{-2\sigma^4 + 5\sigma^2 + 1}{2(\sigma^2 + 1) V_d^2} \right) \chi_1 + k^6 h \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)(-3\sigma^2 + 11)}{32\omega V_d^2} + k^5 \frac{\sigma^2(3\sigma^2 - 23)}{32\omega V_d^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{32} = & -2 \frac{V}{V_d^2} \gamma_2 \beta_1 + 2 \frac{V}{V_d^2} \gamma_1 \beta_2 - \frac{1}{V_d^2} \gamma_1 \beta_1^2 + h^2 \frac{V_d^2 - 2V^2}{6V_d^2} \gamma_1 + k^2 \frac{\sigma^2 - 1}{4V_d^2} \beta_2 + k^2 V \frac{\sigma^2 + 1}{2\omega V_d^2} \beta_1 + \omega k^3 h^3 \frac{(\sigma^2 - 1)^4}{32k\sigma^3 V_d^2} + \\ & + 3\omega k^2 h^2 \frac{(-\sigma^2 + 1)^3}{32k\sigma^2 V_d^2} + \omega k h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1)}{32k\sigma V_d^2} - \omega \frac{\sigma^2 + 3}{32kV_d^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{33} = & 4 \frac{V}{V_d^2} \gamma_2 \beta_1 - 2 \frac{V}{V_d^2} \gamma_1 \beta_2 + \frac{2}{V_d^2} \gamma_1 \beta_1^2 + h^2 \frac{V_d^2 - 2V^2}{3V_d^2} \gamma_1 + k^2 \frac{-\sigma^2 + 1}{4V_d^2} \beta_2 + \frac{k\omega - k^2V(\sigma^2 + 1)}{2\omega V_d^2} \beta_1 + \\ & + \omega k^3 h^3 \frac{(\sigma^2 - 1)^3 (\sigma^2 + 1)}{32k\sigma^3 V_d^2} + \omega k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (-3\sigma^2 + 1)}{32k\sigma^2 V_d^2} + \omega k h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 - 1)}{32k\sigma V_d^2} - \omega \frac{\sigma^2 + 1}{32kV_d^2}. \end{aligned}$$

Коэффициенты уравнений

$$\tilde{\rho}_{11} = k^2 \frac{\sigma^4 - 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_1 + k^4 \frac{-5\sigma^4 + 16\sigma^2 - 3}{16\omega},$$

$$\tilde{\rho}_{12} = \frac{2\omega k - k^2 V (\sigma^2 - 1)}{2\omega},$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\rho}_{11} + \tilde{\rho}_{12} \gamma_1,$$

$$\begin{aligned} P_{21} = & \left(k^2 h^2 \frac{-4\sigma^6 + 7\sigma^4 - 2\sigma^2 - 1}{8\sigma^2} + kh \frac{4\sigma^4 - 9\sigma^2 + 3}{4\sigma} + \frac{-4\sigma^2 + 19}{8} \right) \gamma_1 + k^2 \frac{-\sigma^4 + 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_2 + \\ & + \left(k^2 h \frac{-3\sigma^6 + 7\sigma^4 - 9\sigma^2 - 3}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} + 3k \frac{\sigma^4 - 5}{4(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_1 + k^4 h \frac{11\sigma^6 - 23\sigma^4 + 9\sigma^2 + 3}{16\omega\sigma} + k^3 \frac{-11\sigma^4 + 40\sigma^2 - 9}{16\omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{22} = & \left(-k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2}{8} + kh \frac{\sigma^4 - 5\sigma^2 + 2}{4\sigma} + \frac{-\sigma^2 + 8}{8} \right) \gamma_1 + \\ & + \left(k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(\sigma^4 + 3)}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} - k \frac{\sigma^4 + 3}{4(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_1 + k^4 h \frac{-3\sigma^6 - 5\sigma^4 + 11\sigma^2 - 3}{32\omega\sigma} + 3k^3 \frac{\sigma^4 - 1}{32\omega}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\rho}_{21} = P_{21} + s\beta_1 \gamma_1, \quad \tilde{\rho}_{22} = P_{22} - s\beta_1 \gamma_1,$$

$$s = k^2 \frac{\sigma^2 - 1}{2\omega},$$

$$\tilde{\alpha}_{21} = \tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{12} \gamma_2, \quad \tilde{\alpha}_{22} = \tilde{\rho}_{22} + \tilde{\rho}_{12} \gamma_2,$$

$$\begin{aligned}
P_{31} = & \frac{1}{2\omega} \tilde{\alpha}_1^2 + \frac{k^2 V(\sigma^2 - 1) - 2\omega k}{2\omega^2} \tilde{\alpha}_1 \gamma_1 + k^2 \frac{3\sigma^2 + 1}{\omega(\sigma^2 + 1)} \tilde{\alpha}_1 \chi_1 + 3k^4 \frac{\sigma^4 - 12\sigma^2 + 3}{16\omega^2} \tilde{\alpha}_1 + \\
& + \left(k^4 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^3}{8\omega} - k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)^3}{4\omega\sigma} + k^2 \frac{\sigma^4 - \sigma^2 + 4}{8\omega} \right) \gamma_1^2 + \\
& + \left(k^4 h \frac{(\sigma^2 - 1)(2\sigma^6 - 7\sigma^4 + 8\sigma^2 + 1)}{4\omega\sigma(\sigma^2 + 1)} + k^3 \frac{-2\sigma^6 + 7\sigma^4 - 20\sigma^2 - 5}{4\omega(\sigma^2 + 1)} \right) \gamma_1 \chi_1 + \\
& + \left(k^6 h \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^2(-7\sigma^2 + 13)}{16\omega^2} + k^5 \frac{7\sigma^6 - 23\sigma^4 + 49\sigma^2 - 9}{16\omega^2} \right) \gamma_1 + \\
& + k^2 \frac{\sigma^4 - 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_{31} + k^4 \frac{\sigma^2(\sigma^6 - 17\sigma^4 - \sigma^2 + 37)}{2\omega(\sigma^2 + 1)^2} \chi_1^2 + 3k^2 \frac{-\sigma^4 - 4\sigma^2 + 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_1 \nu_1 + \\
& + k^6 \frac{-36\sigma^8 + 318\sigma^6 - 561\sigma^4 - 82\sigma^2 + 27}{48\omega^2(\sigma^2 + 1)} \chi_1 + 3k^4 \frac{19\sigma^6 + 5\sigma^4 - 51\sigma^2 + 3}{16\omega(3\sigma^2 + 1)} \nu_1 + \\
& + k^8 \frac{\sigma^2(117\sigma^6 - 578\sigma^4 + 1175\sigma^2 - 378)}{384\omega^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{32} = & \frac{2}{\omega} \tilde{\alpha}_1 \beta_1 + \frac{V_d^2 - 2\omega h \sigma V}{\omega^2} \tilde{\alpha}_1 + \left(-k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2}{8} + kh \frac{\sigma^4 - 5\sigma^2 + 2}{4\sigma} + \frac{-\sigma^2 + 8}{8} \right) \gamma_2 + \\
& + \frac{k^2 V(\sigma^2 - 1) - 2\omega k}{2\omega^2} \gamma_1 \beta_1 + \left(-k^3 h^3 \frac{(\sigma^2 - 1)^2(12\sigma^4 + \sigma^2 + 1)}{16k\sigma^3} + \right. \\
& + \left. k^2 h^2 \frac{24\sigma^6 - 53\sigma^4 + 16\sigma^2 + 5}{16k\sigma^2} + kh \frac{-12\sigma^4 + 27\sigma^2 - 7}{16k\sigma} + \frac{3}{16k} \right) \gamma_1 + k^2 \frac{-\sigma^2 + 1}{2\omega} \beta_1 \chi_1 + \\
& + k^4 \frac{5\sigma^4 - 16\sigma^2 + 3}{8\omega^2} \beta_1 + k^2 \frac{\sigma^4 - 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_{32} + \left(k^2 h \frac{-3\sigma^6 + 7\sigma^4 - 9\sigma^2 - 3}{8\sigma(\sigma^2 + 1)} + 3k \frac{\sigma^4 - 5}{8(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_2 + \\
& + \left(k^2 h^2 \frac{-7\sigma^8 + 5\sigma^6 + \sigma^4 + 11\sigma^2 - 2}{8\sigma^2(\sigma^2 + 1)} + kh \frac{3\sigma^6 - 4\sigma^4 + 9\sigma^2 + 4}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} + \frac{\sigma^4 - \sigma^2 + 6}{8(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_1 + \\
& + 3k^4 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(11\sigma^6 - 17\sigma^4 - \sigma^2 - 1)}{32\omega\sigma^2} + k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)(-17\sigma^4 + 28\sigma^2 + 3)}{16\omega\sigma} + k^2 \frac{\sigma^4 - 10\sigma^2 + 3}{32\omega},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{33} = & \frac{V_d^2 - 2\omega h \sigma V}{2\omega^2} \tilde{\alpha}_1 + \left(k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2}{8} + kh \frac{-\sigma^4 + 5\sigma^2 - 2}{4\sigma} + \frac{\sigma^2 - 8}{8} \right) \gamma_2 + \\
& + \left(-3k^3 h^3 \frac{(\sigma^2 - 1)^2(\sigma^2 + 1)}{16k\sigma} + k^2 h^2 \frac{5\sigma^6 - 18\sigma^4 + 3\sigma^2 + 2}{16k\sigma^2} + kh \frac{-\sigma^4 + 13\sigma^2 - 4}{16k\sigma} + \frac{-\sigma^2 + 2}{16k} \right) \gamma_1 + \\
& + k^2 \frac{\sigma^4 + 6\sigma^2 + 1}{2\omega(\sigma^2 + 1)} \beta_1 \chi_1 + k^4 \frac{-7\sigma^4 - 4\sigma^2 + 3}{16\omega^2} \beta_1 + \left(k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(-5\sigma^6 - 4\sigma^4 + 3\sigma^2 - 2)}{8\sigma^2(\sigma^2 + 1)} + \right. \\
& + \left. kh \frac{(\sigma^2 - 1)^2(\sigma^2 + 2)}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} + \frac{3\sigma^4 - 5\sigma^2 - 6}{8(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_1 + k^4 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(21\sigma^6 - 43\sigma^4 + \sigma^2 - 3)}{64\omega\sigma^2} + \\
& + k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)(-5\sigma^4 + 10\sigma^2 - 3)}{32\omega\sigma} + k^2 \frac{-11\sigma^4 + 46\sigma^2 - 9}{64\omega},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{34} = & \frac{2}{\omega} \tilde{\alpha}_1 \beta_1 + 2 \frac{V_d^2 - 2\omega h \sigma V}{\omega^2} \tilde{\alpha}_1 + \left(k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (3\sigma^2 + 1)}{8\sigma^2} + kh \frac{(\sigma^2 - 1)(-3\sigma^2 + 1)}{4\sigma} + \frac{3\sigma^2 - 11}{8} \right) \gamma_2 + \\
 & + \left(-k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1)}{4\omega\sigma} + 3k \frac{\sigma^2 - 1}{4\omega} \right) \gamma_1 \beta_1 + \left(-k^3 h^3 \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (7\sigma^2 + 3)}{8k\sigma} + \right. \\
 & + k^2 h^2 \frac{13\sigma^6 - 38\sigma^4 + 11\sigma^2 + 6}{8k\sigma^2} + kh \frac{-5\sigma^4 + 25\sigma^2 - 8}{8k\sigma} + \left. \frac{-\sigma^2 + 2}{8k} \right) \gamma_1 + \\
 & + \left(k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(\sigma^4 + 3)}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} - k \frac{\sigma^4 + 3}{4(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_2 + \left(k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(-7\sigma^6 - 33\sigma^4 - 9\sigma^2 + 1)}{8\sigma^2(\sigma^2 + 1)} + \right. \\
 & + kh \frac{-\sigma^6 + 11\sigma^4 - 11\sigma^2 + 9}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} + \left. \frac{(\sigma^2 - 1)(9\sigma^2 + 5)}{8(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_1 + k^4 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(21\sigma^6 - 41\sigma^4 - 7\sigma^2 + 3)}{32\omega\sigma^2} + \\
 & + k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)(-\sigma^4 + 18\sigma^2 - 3)}{16\omega\sigma} + k^2 \frac{-19\sigma^4 + 44\sigma^2 - 3}{32\omega},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{35} = & \frac{1}{\omega} \tilde{\alpha}_1 \beta_1 + \frac{V_d^2 - 2\omega h \sigma V}{\omega^2} \tilde{\alpha}_1 + \left(-k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)^2 (3\sigma^2 + 1)}{8\sigma^2} + kh \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 - 1)}{4\sigma} + \frac{-3\sigma^2 + 11}{8} \right) \gamma_2 + \\
 & + \left(k^2 h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1)}{4\omega\sigma} + 3k \frac{-\sigma^2 + 1}{4\omega} \right) \gamma_1 \beta_1 + \left(-k^3 h^3 \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^2}{2k} + k^2 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(2\sigma^4 - 3\sigma^2 - 1)}{2k\sigma^2} + \right. \\
 & + kh \frac{-\sigma^4 + 3\sigma^2 - 1}{2k\sigma} \left. \right) \gamma_1 + k^2 \frac{\sigma^4 - 3}{2(\sigma^2 + 1)} \chi_{33} + \left(k^2 h \frac{-3\sigma^6 + 7\sigma^4 - 9\sigma^2 - 3}{8\sigma(\sigma^2 + 1)} + 3k \frac{\sigma^4 - 5}{8(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_2 + \\
 & + \left(k^2 h^2 \frac{-7\sigma^8 + 5\sigma^6 + \sigma^4 + 11\sigma^2 - 2}{8\sigma^2(\sigma^2 + 1)} + kh \frac{3\sigma^6 - 4\sigma^4 + 9\sigma^2 + 4}{4\sigma(\sigma^2 + 1)} + \frac{\sigma^4 - \sigma^2 + 6}{8(\sigma^2 + 1)} \right) \chi_1 + \\
 & + k^4 h^2 \frac{(\sigma^2 - 1)(47\sigma^6 - 51\sigma^4 - 17\sigma^2 - 3)}{64\omega\sigma^2} + k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)(-27\sigma^4 + 28\sigma^2 + 9)}{32\omega\sigma} + k^2 \frac{7\sigma^4 - 40\sigma^2 + 15}{64\omega},
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\rho}_{31} = P_{31} + s \left(\gamma_2 \tilde{\alpha}_1 - \gamma_1 \frac{\tilde{\alpha}_{21} + \tilde{\alpha}_{22}}{2} \right), \quad \tilde{\rho}_{32} = P_{32} + s(\gamma_2 \beta_1 - \gamma_1 \beta_2),$$

$$\tilde{\rho}_{33} = P_{33} + s(\gamma_2 \beta_1 - \gamma_1 \beta_2), \quad \tilde{\rho}_{34} = P_{34} + s(\gamma_1 \beta_2 - 2\gamma_2 \beta_1), \quad \tilde{\rho}_{35} = P_{35},$$

$$\tilde{\alpha}_{31} = \tilde{\rho}_{31} + \tilde{\rho}_{12} \gamma_{31}, \quad \tilde{\alpha}_{32} = \tilde{\rho}_{32} + \tilde{\rho}_{12} \gamma_{32}, \quad \tilde{\alpha}_{33} = \tilde{\rho}_{33} + \tilde{\rho}_{12} \gamma_{32},$$

$$\tilde{\alpha}_{34} = \tilde{\rho}_{34} + \tilde{\rho}_{12} \gamma_{33}, \quad \tilde{\alpha}_{35} = \tilde{\rho}_{35}.$$

Коэффициенты построения полного поля

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_{01} &= \sigma k \frac{k^2(\sigma^2 - 1) + 4V\gamma_1}{4\omega^2}, \\
 \tilde{r}_{02} &= k \frac{\sigma V}{\omega^2} \gamma_2 + k \frac{\sigma}{\omega^2} \beta_1 \gamma_1 + k^2 \sigma \frac{\omega - kV(1 + \sigma^2)}{4\omega^3}, \\
 \tilde{r}_{21} &= 2k \frac{\sigma}{\omega} \chi_1 + k^3 \frac{\sigma(-3\sigma^2 + 1)}{4\omega^2}, \\
 \tilde{r}_{22} &= -2k \frac{\sigma}{\omega} \chi_2 + \left(kh \frac{-\sigma^4 + 8\sigma^2 + 1}{\omega(\sigma^2 + 1)} + \frac{\sigma}{\omega} \right) \chi_1 + k^3 h \frac{(\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1)}{4\omega^2} + k^2 \frac{\sigma(-3\sigma^2 + 1)}{4\omega^2}, \\
 \tilde{r}_{32} &= k^3 \frac{\sigma(-\sigma^4 - 6\sigma^2 + 1)}{\omega^2(\sigma^2 + 1)} \chi_1 - 3k \frac{\sigma}{\omega} \nu_1 + 3k^5 \frac{\sigma^5}{8\omega^3}.
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **2**, 218 (1965).
2. P. L. Kelley, Phys. Rev. Lett. **15**, 1005 (1965).
3. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн: Учебное пособие*, Наука, Москва (1984).
4. В. Е. Захаров, ПМТФ **2**, 86 (1968).
5. H. Hasimoto and J. Оно, J. Phys. Soc. Jpn. **33**, 805 (1972).
6. A. Davey, J. Fluid Mech. **53**, 769 (1972).
7. T. B. Benjamin and J. E. Feir, J. Fluid Mech. **27**, 417 (1967).
8. D. J. Benney and G. J. Roskes, Stud. Appl. Math. **48**, 377 (1969).
9. A. Davey and K. Stewartson, Proc. R. Soc. Lond. A **338**, 101 (1974).
10. Е. М. Громов, В. И. Таланов, ЖЭТФ **110**, 137 (1996).
11. K. B. Dysthe, Proc. R. Soc. Lond. A **369**, 105 (1979).
12. Ю. В. Седлецкий, ЖЭТФ **124**, 200 (2003).
13. K. Trulsen, I. Kliakhandler, K. B. Dysthe et al., Phys. Fluids **12**, 2432 (2000).
14. R. S. Johnson, Proc. R. Soc. London A **357**, 131 (1977).
15. T. Kakutani and K. Michihiro, J. Phys. Soc. Jpn. **52**, 4129 (1983).
16. E. J. Parkes, J. Phys. A: Math. Gen. **20**, 2025 (1987).
17. А. В. Слюняев, Е. Н. Пелиновский, ЖЭТФ **116**, 318 (1999).
18. А. В. Слюняев, ЖЭТФ **119**, 606 (2001).
19. R. S. Johnson, *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997).
20. R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky et al., Physica D **159**, 35 (2001).