

# ПЕРЕСТРАИВАЕМЫЙ ТЕРАГЕРЦОВЫЙ ГЕНЕРАТОР НА ДВУХЪЯМНОЙ НАНОСТРУКТУРЕ С КОГЕРЕНТНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДСИСТЕМОЙ

*В. Ф. Елесин\**

*Московский инженерно-физический институт (государственный университет)  
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 27 июня 2005 г.

Развита теория когерентного резонансного туннелирования электронов в двухъямной наноструктуре (ДНС) в присутствии сильного электромагнитного поля. ДНС состоит из двух туннельно связанных одинаковых квантовых ям, к которым приложено постоянное электрическое поле. Излучательные переходы идут между двумя уровнями, возникающими из-за межъямной интерференции и постоянного электрического поля. Найдены волновые функции и токи поляризации ДНС для сильного электромагнитного поля, а также мощность генерации в зависимости от тока когерентной накачки и параметров структуры. Показано, что возможна генерация в актуальном терагерцовом диапазоне с плавной перестройкой частоты, осуществляемой постоянным полем. Обнаружено, что определяющую роль играет интерференция электронов между квантовыми ямами. Она приводит к обнаруженному в работе явлению существенного подавления влияния электромагнитного поля на резонансное туннелирование и росту эффективности генерации до максимально возможной. Доказано, что существует оптимальный режим генерации сильного поля без инверсной населенности и эффекта насыщения, присущих обычным лазерам.

PACS: 79.60.Jv, 73.23.-b

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В 1971 г. Казаринов и Сурис [1] предложили новый тип полупроводникового лазера, в котором излучательные переходы идут между резонансными уровнями (подзонами) квантовой ямы. Накачка электронов на верхний уровень и отвод с нижнего осуществляются с помощью резонансного туннелирования. Такие лазеры (получившие название «каскадных») были созданы в 1994 г. [2].

В 1997 г. в работе [3] было показано, что когерентность резонансного туннелирования (когерентная накачка) дает возможность создать принципиально новый лазер (будем, следуя [3], называть его для краткости «когерентный лазер»), в котором электронная подсистема является когерентной наряду с фотонной. В таком лазере генерация может осуществляться без участия диссипативных процессов и описываться чистыми состояниями квантовой механики. Когерентный лазер является примером кван-

тового прибора, в котором процессы интерференции электронов играют принципиальную роль. Когерентный лазер обладает особенностями и преимуществами по сравнению с обычным: генерация без инверсной населенности, высокая эффективность, отсутствие уширения контура усиления из-за сильного поля, устойчивость к многомодовой генерации и кулоновскому взаимодействию [3] и др.

Причина замечательных свойств когерентного лазера состоит в том, что электроны из эмиттера поставляются путем резонансного туннелирования (когерентная накачка) в оптимальный энергетический интервал с оптимальными фазами и когерентно отводятся в коллектор. В этих условиях каждый электрон, подводимый к верхнему уровню квантовой ямы, совершает только один излучательный переход и отводится в коллектор с нижнего уровня. Поэтому отсутствует присущий лазерам эффект насыщения, состоящий в выравнивании перенаселенности за счет многократных переходов электрона между уровнями и приводящий к установлению ста-

\*E-mail: VEF@supercon.mephi.ru

ционарного поля лазера. Эффект насыщения вызывает многие нежелательные явления: выжигание «дырки» в перенаселенности, многомодовую генерацию, уширение линии лазера и ограничение мощности [4].

В когерентных лазерах достижение стационарного поля происходит принципиально другим путем, а именно, за счет влияния электромагнитного поля на резонансное туннелирование. Поле уменьшает скорость резонансного туннелирования, изменяя энергию резонансных уровней. Отсутствие эффекта насыщения устраняет перечисленные выше недостатки обычных лазеров.

Основная проблема создания когерентных лазеров состоит в реализации условия когерентности электронной подсистемы в наноструктурах. Современный уровень технологии способен обеспечить когерентность на достаточно больших длинах (до десятка квантовых ям (см. [5])). Следует также подчеркнуть, что простое условие когерентного туннелирования  $\tau_T < \tau_{ph}$  ( $\tau_T$  — время нахождения электрона в яме,  $\tau_{ph}$  — время разрушения когерентности) может быть слишком жестким. Действительно, как показывает детальная теория, электрон-фононное взаимодействие не влияет при определенных условиях на затухание блоховских осцилляций [6], а резонансное туннелирование остается когерентным даже при  $\tau_T \gg \tau_{ph}$  [7]. Кроме того, ситуация сильно зависит от диапазона частоты генерации и конкретной наноструктуры.

В настоящей работе изучена двухъямная наноструктура (ДНС), состоящая из двух туннельно связанных одинаковых ям, к которым приложено постоянное электрическое напряжение  $V_{dc}$ . Излучательные переходы идут между двумя уровнями ДНС, возникающими из-за межъямной интерференции (расщепление уровня изолированной ямы) и постоянного электрического напряжения. Такая структура дает возможность генерации электромагнитного поля в актуальном терагерцовом диапазоне (труднодостижимом для каскадных лазеров) с плавной перестройкой частоты и облегчает выполнение условий когерентности (поскольку частота генерации меньше частоты оптического фонона), сохраняя при этом когерентному лазеру упомянутые выше преимущества.

Кроме того, ДНС представляет также интерес как первый шаг от одноямной структуры (обычно называемой резонансно-туннельным диодом (РТД)) к блоховской однозонной сверхрешетке.

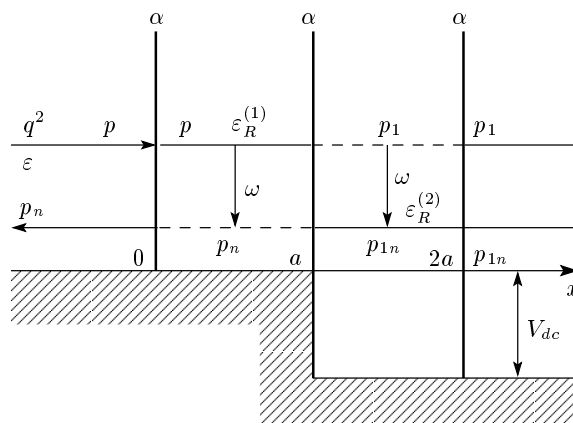
В работе развита последовательная теория генерации в ДНС, найдены волновые функции и токи

поляризации для сильного электромагнитного поля, а также мощность генератора в зависимости от тока когерентной накачки и параметров структуры. Показано, что существует оптимальный режим генерации сильного поля, при котором каждый электрон испускает один фотон (эффективность равна единице). Высокая эффективность на сравнительно малых частотах обусловлена обнаруженным в работе явлением существенного подавления влияния электромагнитного поля на резонансное туннелирование за счет межъямной интерференции и постоянного напряжения  $V_{dc}$ .

Впервые на возможность генерации в ДНС (с разными ямами и  $V_{dc} = 0$ ) было обращено внимание в работе [8]. В работе [9] была развита аналитическая теория ДНС из двух одинаковых ям и  $V_{dc} \neq 0$  для слабого электромагнитного поля, где было показано, что линейное усиление значительно превосходит усиление РТД и возможна перестройка частоты. Результаты численного решения уравнения Шредингера для этой структуры, хорошо согласующиеся с результатами [9], опубликованы в [10].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы изучим генерацию электромагнитного поля в двухъямной наноструктуре в рамках модели [9]. Рассматривается одномерная структура с  $\delta$ -функционными барьерами в точках  $x = 0, a, 2a$  (см. рисунок). Ко второй яме ДНС приложено постоянное электрическое поле  $V_{dc}$ . Слева ( $x \rightarrow -\infty$ ) к первой квантовой яме подводится стационарный поток электронов, пропорциональный  $q^2$ , с энергией  $\varepsilon$ , примерно равной энергии резонансного уровня  $\varepsilon_R^{(1)}$  первой ямы.



В области ДНС действует электромагнитное поле

$$E_z(z, t) = E \sin kz \cos \omega t \quad (1)$$

с амплитудой  $E$ , волновым вектором  $k$  и частотой  $\omega$ . Поле поляризовано перпендикулярно плоскости ямы, а волновой вектор направлен вдоль плоскости (по оси  $z$ ).

Волновая функция структуры  $\Psi(x, t)$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \alpha [\delta(x) + \delta(x-a) + \delta(x-2a)] \Psi - V_{dc} \theta(x-a) \Psi + \hat{V} \Psi. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha$  — «мощность» барьеров (равна произведению высоты барьера на ширину),  $\theta(x)$  — единичная функция,  $\hbar/2m^* = 1$ ,  $c = 1$ . Последнее слагаемое в (2)

$$\hat{V}(x, t) \Psi = i2eA_x(t) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = V(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (3)$$

$$V = -\frac{eE}{\omega},$$

описывает взаимодействие электронов с электромагнитным полем;  $A_x(t)$  — вектор-потенциал в кулоновской калибровке.

В данной работе мы следуем подходу [3], применяя форму взаимодействия (3) (с вектор-потенциалом), в отличие от [9], где использовалось взаимодействие в виде « $-xE$ ». Это дает возможность найти аналитические решения для сильного электромагнитного поля и построить теорию генерации. Мы покажем, что в случае слабого поля результаты для разных калибровок совпадают. Следует отметить, что в выражении (3), как и в [3] (см. также [4]) опущено квадратичное по  $A(t)$  слагаемое, что справедливо, если

$$V/p = eE/p\omega \ll 1$$

( $p$  — характерный импульс электрона), что предполагается далее выполненным.

Стационарное уравнение для амплитуды электромагнитного поля  $E$  имеет вид (см., например, [3])

$$\frac{E}{2\tau_0} = \frac{2\pi}{\varkappa} J_c, \quad (4)$$

$$J_c = \frac{1}{a} \left[ \int_0^a dx J_{1c}(x) + \int_a^{2a} dx J_{2c}(x) \right] \equiv \frac{J_{1c} + J_{2c}}{2}, \quad (5)$$

где  $J_{lc}$  — активный ток поляризации, описывающий переходы с испусканием (поглощением) фотонов в первой ( $l = 1$ ) и второй ( $l = 2$ ) ямах.

Как показано в работе [9], энергетический спектр ДНС состоит из двух уровней, возникающих из-за межъямной интерференции (расщепления уровней) и постоянного электрического поля  $V_{dc}$ . Параметры структуры подбираются таким образом, что энергии уровней  $\varepsilon_R^{(1)}$  и  $\varepsilon_R^{(2)}$  сдвинуты относительно энергии нижнего резонансного уровня изолированной ямы  $\varepsilon_R$  на величину, малую по сравнению с  $\varepsilon_R$ .

Очевидно, что переходы между уровнями наиболее интенсивны, если частота электромагнитного поля примерно равна разности  $\varepsilon_R^{(1)} - \varepsilon_R^{(2)}$ . В резонансном приближении, установившееся решение (2) можно искать в виде [9]

$$\Psi_1(x, t) = e^{-i\varepsilon t} [\Psi_{10}(x) + e^{i\omega t} \Psi_{11}(x)], \quad 0 \leq x \leq a, \quad (6)$$

$$\Psi_2(x, t) = e^{-i\varepsilon t} [\Psi_{20}(x) + e^{i\omega t} \Psi_{21}(x)], \quad a \leq x \leq 2a. \quad (7)$$

Волновые функции  $\Psi_{ln}$  ( $l = 1, 2$  — номер ямы,  $n = 0, 1$  — номер уровня) соответствуют состояниям с квазиэнергиями  $\varepsilon$  и  $\varepsilon - \omega$  и удовлетворяют системе уравнений

$$p^2 \Psi_{10} + \Psi_{10}'' = V \Psi_{11}', \quad p_n^2 \Psi_{11} + \Psi_{11}'' = -V \Psi_{10}' \quad (8)$$

$$p^2 = \varepsilon, \quad p_n^2 = \varepsilon - \omega,$$

$$p_1^2 \Psi_{20} + \Psi_{20}'' = V \Psi_{21}', \quad p_{1n}^2 \Psi_{21} + \Psi_{21}'' = -V \Psi_{20}' \quad (9)$$

$$p_1^2 = \varepsilon + V_{dc}, \quad p_{1n}^2 = p_1^2 - \omega$$

и граничным условиям (см. [3, 9])

$$\begin{aligned} \Psi_{10}(0)(1 - \beta) + \Psi_{10}'(0)/ip &= 2q, \\ \beta &= \alpha/ip, \\ \Psi_{20}(2a)(1 - \beta_1) - \Psi_{20}'(2a)/ip_1 &= 0, \\ \beta_1 &= \alpha/ip_1, \\ \Psi_{10}(a) &= \Psi_{20}(a), \\ \Psi_{20}'(a) - \Psi_{10}'(a) &= \alpha \Psi_{10}(a), \\ \Psi_{11}(0)(1 - \beta_n) + \Psi_{11}'(0)/ip_n &= 0, \\ \beta_n &= \alpha/ip_n, \\ \Psi_{21}(2a)(1 - \beta_{1n}) - \Psi_{21}'(2a)/ip_{1n} &= 0, \\ \beta_{1n} &= \alpha/ip_{1n}, \\ \Psi_{11}(a) &= \Psi_{21}(a), \\ \Psi_{21}'(a) - \Psi_{11}'(a) &= \alpha \Psi_{11}(a). \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия описывают поток электронов, подводимых из  $x = -\infty$ , их отражение, уход в область  $x > 2a$ , а также непрерывность и скачок производной волновых функций  $\Psi_{ln}$  при  $x = 0, a, 2a$ .

Ток  $J_c(x)$  можно выразить через функции  $\Psi_{ln}(x)$ :

$$J_{lc} = -ie [(\Psi_{l0}^* \Psi'_{l1} + \Psi_{l1}^* \Psi'_{l0}) - \text{с.с.}] \quad (11)$$

Система уравнений (8)–(11) позволяет рассчитать токи  $J_c$  и мощность генерации на ДНС в зависимости от тока накачки и параметров структуры.

### 3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ДНС

Следуя [3], будем искать общее решение уравнений (8) и (9) в форме

$$\Psi_{1n}(x) = \sum_j A_{1n}^j \exp(\gamma_j x), \quad (12)$$

$$\Psi_{2n}(x) = \sum_j A_{2n}^j \exp(\bar{\gamma}_j x). \quad (13)$$

Комплексные собственные значения  $\gamma_j$  и  $\bar{\gamma}_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \gamma^4 + 2\gamma^2 \left( p_n^2 + \frac{V^2 + \omega}{2} \right) + p^2 p_n^2 &= 0, \\ \bar{\gamma}^4 + 2\bar{\gamma}^2 \left( p_{1n}^2 + \frac{V^2 + \omega}{2} \right) + p_1^2 p_{1n}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

а коэффициенты  $A_{ln}^j$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} A_{11}^j &= \varepsilon_j A_{10}^j, \quad A_{21}^j = \bar{\varepsilon}_j A_{20}^j, \quad A_{l0}^j \equiv A_{lj}, \\ \varepsilon_j &= -\frac{\gamma_j V}{p_n^2 + \gamma_j^2}, \quad \bar{\varepsilon}_j = -\frac{\bar{\gamma}_j V}{p_{1n}^2 + \bar{\gamma}_j^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Собственные значения обладают следующим свойством:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 + \gamma_4 = 0,$$

$$\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_3 + \bar{\gamma}_4 = 0.$$

Подставляя  $\Psi_{ln}(x)$  из (12), (13) в граничные условия (10), приходим к системе алгебраических уравнений для коэффициентов

$$\tilde{A}_{1j} = A_{1j} e^{\gamma_j a}, \quad \tilde{A}_{2j} = A_{2j} e^{\bar{\gamma}_j a},$$

которые запишем в виде матричного уравнения

$$\mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{Q}, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{E}_3 & \tilde{E}_4 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \bar{\varepsilon}_1 & \bar{\varepsilon}_2 & \bar{\varepsilon}_3 & \bar{\varepsilon}_4 \\ \varepsilon_1 n_1 & \varepsilon_2 n_2 & \varepsilon_3 n_3 & \varepsilon_4 n_4 & \bar{\varepsilon}_1 \bar{\gamma}_1 & \bar{\varepsilon}_2 \bar{\gamma}_2 & \bar{\varepsilon}_3 \bar{\gamma}_3 & \bar{\varepsilon}_4 \bar{\gamma}_4 \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{M}_1 & \tilde{M}_2 & \tilde{M}_3 & \tilde{M}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \bar{\gamma}_3 & \bar{\gamma}_4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} \\ \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{13} \\ \tilde{A}_{14} \\ \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{22} \\ \tilde{A}_{23} \\ \tilde{A}_{24} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} E_j &= \varepsilon_j M_{jn}, & \widetilde{E}_j &= \widetilde{M}_{jn} \bar{\varepsilon}_j \\ M_{jn} &= m_{jn} e^{-\gamma_j}, & \widetilde{M}_{jn} &= -\widetilde{m}_{jn} e^{\bar{\gamma}_j}, \\ M_j &= m_j e^{-\gamma_j}, & \widetilde{M}_j &= -\widetilde{m}_j e^{\bar{\gamma}_j}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{jn} &= 1 - \frac{\alpha - \gamma_j}{ip_n}, & \widetilde{m}_{jn} &= 1 - \frac{\alpha + \gamma_j}{ip_n}, \\ \widetilde{m}_{jn} &= 1 - \frac{\alpha + \bar{\gamma}_j}{ip_n}, & m_j &= 1 - \frac{\alpha - \gamma_j}{ip}, \\ \widetilde{m}_j &= 1 - \frac{\alpha + \gamma_j}{ip}, \\ \widetilde{m}_j &= 1 - \frac{\alpha + \bar{\gamma}_j}{ip_1}, & n_j &= \alpha + \gamma_j. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Используя малость параметра  $V/p$ , корни уравнений (14) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \pm ip_n \left(1 - \frac{V^2}{\omega}\right)^{1/2}, \\ \gamma_{3,4} &= \pm ip \left(1 + \frac{V^2}{\omega}\right)^{1/2}, \\ \bar{\gamma}_{1,2} &= \pm ip_{1n} \left(1 - \frac{V^2}{\omega}\right)^{1/2}, \\ \bar{\gamma}_{3,4} &= \pm ip_1 \left(1 + \frac{V^2}{\omega}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Соответственно, величины  $\varepsilon_j$  и  $\bar{\varepsilon}_j$  принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{3,4} &= \pm i\widetilde{V}, & \varepsilon_{1,2} &= \mp \frac{i}{\widetilde{V}} \frac{p}{p_n}, \\ \bar{\varepsilon}_{3,4} &= \pm i\widetilde{V} \frac{p_1}{p}, & \bar{\varepsilon}_{1,2} &= \mp \frac{i}{\widetilde{V}} \frac{p}{p_{1n}}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\widetilde{V} = \frac{Vp}{\omega}. \quad (21)$$

Далее, следуя [3], будем рассматривать интервал полей, в котором безразмерный параметр  $\widetilde{V}$  можно считать малым. Это значительно упрощает вычисления, хотя и не является принципиально необходимым. Для  $\widetilde{V} \ll 1$  величины  $\varepsilon_3, \varepsilon_4$  являются малыми, а  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — наоборот, большими.

#### 4. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ СИСТЕМЫ

Ключевой величиной является определитель системы (16)  $\Delta(\lambda)$ , который описывает резонансные свойства ДНС в электромагнитном поле и, в частности, влияние сильного поля на резонансное туннелирование. Чтобы избежать излишней громоздкости,

мы подробно рассмотрим ситуацию в отсутствие постоянного напряжения смещения  $V_{dc}$ , а затем обобщим на случай  $V_{dc} \neq 0$ .

Если

$$V_{dc} = 0,$$

то

$$\begin{aligned} p_1 &= p, & p_{1n} &= p_n, & \bar{\varepsilon}_j &= \varepsilon_j, & \bar{\gamma}_j &= \gamma_j, \\ \widetilde{E}_j &= \widetilde{E}_j, & \widetilde{M}_j &= \widetilde{M}_j. \end{aligned}$$

Определитель системы уравнений (16)  $\Delta(\lambda)$  можно записать в виде суммы слагаемых, представляющих собой произведение матриц  $\Pi_{iklm}$ ,  $\Pi_{iklm}^n$ ,  $K_{iklm}$ ,  $\widetilde{K}_{iklm}$ ,  $K_{iklm}^n$ ,  $\widetilde{K}_{iklm}^n$ , которые имеют вид

$$\Pi_{iklm} = \begin{vmatrix} M_i & M_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{M}_l & \widetilde{M}_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & n_k & \gamma_l & \gamma_m \end{vmatrix}, \quad (22)$$

$$\Pi_{iklm}^n = \begin{vmatrix} M_{in} & M_{kn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{M}_{ln} & \widetilde{M}_{mn} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & n_k & \gamma_l & \gamma_m \end{vmatrix}, \quad (23)$$

$$K_{iklm} = \begin{vmatrix} M_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{M}_k & \widetilde{M}_l & \widetilde{M}_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & \gamma_k & \gamma_l & \gamma_m \end{vmatrix}, \quad (24)$$

$$\widetilde{K}_{iklm} = \begin{vmatrix} M_i & M_k & M_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{M}_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & n_k & n_l & \gamma_m \end{vmatrix}, \quad (25)$$

$$K_{iklm}^n = \begin{vmatrix} M_{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{M}_{kn} & \widetilde{M}_{ln} & \widetilde{M}_{mn} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & \gamma_k & \gamma_l & \gamma_m \end{vmatrix}, \quad (26)$$

$$\widetilde{K}_{iklm}^n = \begin{vmatrix} M_{in} & M_{kn} & M_{ln} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{M}_{mn} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & n_k & n_l & \gamma_m \end{vmatrix}, \quad (27)$$

и коэффициентов  $\varepsilon_j$ .

При сравнительно слабых полях, когда безразмерное поле  $\tilde{V}$  мало (см. (21)), можно ограничиться двумя типами членов. Остальные вносят малый вклад, пропорциональный  $\tilde{V}^4$ ,  $\tilde{V}^6$  и  $\tilde{V}^8$ . В результате приходим к следующему выражению для  $\Delta(\lambda)$ :

$$\Delta(\lambda) \approx \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \left\{ \Pi_{3434} \Pi_{1212}^n - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} [\Pi + K] \right\}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & [\Pi_{3424} \Pi_{1213}^n + \Pi_{3423} \Pi_{1214}^n + \Pi_{2434} \Pi_{1312}^n + \\ & + \Pi_{2334} \Pi_{1412}^n + \Pi_{3414} \Pi_{1213}^n + \Pi_{3413} \Pi_{1234}^n + \\ & + \Pi_{1434} \Pi_{2312}^n + \Pi_{1334} \Pi_{2412}^n], \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K = & [K_{4234} \tilde{K}_{1231}^n + K_{3234} \tilde{K}_{1241}^n + \tilde{K}_{2344} K_{1123}^n + \\ & + \tilde{K}_{2343} K_{1124}^n + K_{4134} \tilde{K}_{1232}^n + K_{3134} \tilde{K}_{1242}^n + \\ & + \tilde{K}_{1344} K_{2123}^n + \tilde{K}_{1343} K_{2124}^n]. \quad (30) \end{aligned}$$

Симметричные матрицы  $\Pi_{3434}$  и  $\Pi_{1212}^n$  представляют собой определители ДНС в отсутствие электромагнитного поля для верхнего уровня с энергией  $\varepsilon = p^2$  и нижнего с  $\varepsilon - \omega = p_n^2$ , соответственно:

$$\begin{aligned} \Pi_{3434} &= (-ip) e^{-2ipa} \Delta_0(2), \\ \Pi_{1212}^n &= (-ip_n) e^{-2ip_n a} \Delta_n(2), \\ \Delta_0(2) &= (2 - \beta)^3 - 2\beta^2(2 - \beta) e^{2ipa} - \\ &\quad - \beta^2(2 + \beta) e^{4ipa}, \\ \Delta_n(2) &= (2 - \beta_n)^3 - 2\beta_n^2(2 - \beta) e^{2ip_n a} - \\ &\quad - \beta_n^2(2 + \beta_n) e^{4ip_n a}. \end{aligned} \quad (31)$$

Свойства определителей  $\Delta_0(2)$  и  $\Delta_n(2)$  детально изучены в работе [9], где было показано, что вблизи резонанса их можно представить в виде

$$\Delta_0(2) \approx \frac{8i}{\Gamma t_0} [\varepsilon - \varepsilon_R^{(1)} + i\Gamma] [\varepsilon - \varepsilon_R^{(2)} + i\Gamma], \quad (32)$$

$$\Delta_n(2) \approx \frac{8i}{\Gamma t_0} [\varepsilon - \omega - \varepsilon_R^{(1)} + i\Gamma] [\varepsilon - \omega - \varepsilon_R^{(2)} + i\Gamma]. \quad (33)$$

Здесь  $\varepsilon_R^{(1)}$  и  $\varepsilon_R^{(2)}$  — энергии уровней в ДНС, возникающих в результате расщепления резонансного уровня изолированной ямы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_R^{(1)} &= p_0^2 - \frac{2p_0\delta}{a}, \quad \varepsilon_R^{(2)} = p_0^2 - \frac{6p_0\delta}{a}, \\ p_0 &= \frac{\pi}{a}, \quad \delta = \frac{p_0}{\alpha}, \end{aligned} \quad (34)$$

$t_0$  — величина расщепления:

$$t_0 = \varepsilon_R^{(1)} - \varepsilon_R^{(2)} = \frac{4p_0^2}{\alpha a}, \quad (35)$$

$\Gamma$  — ширина резонансных уровней (одинаковая для обоих уровней)

$$\Gamma = \frac{2p_0^3}{\alpha^2 a}. \quad (36)$$

Отметим, что в  $\varepsilon_R^{(1,2)}$  и  $t_0$  для простоты мы опустили квадратичные поправки по  $\delta$  (см. [9]). Выражения (32) и (33) справедливы вблизи резонанса, когда энергия подводимых из эмиттера электронов близка к  $\varepsilon_R^{(1)}$  или  $\varepsilon_R^{(2)}$  ( $\varepsilon - \varepsilon_R^{(1)} \ll \varepsilon_R^{(1)}$ ). В дальнейшем это условие считается выполненным.

Кроме того, обычно предполагается [3, 9], что ширина  $\Gamma$  значительно меньше энергий  $\varepsilon_R$ , или  $\Gamma/\varepsilon_R = 2\delta^2/\pi \ll 1$ . Именно при таких условиях проявляются замечательные свойства квантовых ям. Нетрудно видеть, что величина расщепления  $t_0/\varepsilon_R \approx \delta \ll 1$  также мала по сравнению с  $\varepsilon_R$ .

Слагаемые  $\Pi$  описывают вклад за счет переходов электронов между уровнями в первой и второй ямах, а  $K$  — переходов из первой во вторую. Если безразмерное поле  $\tilde{V}$  (21) мало, то отношение

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \approx \tilde{V}^2 \ll 1 \quad (37)$$

также является малым и в определителе достаточно ограничиться двумя слагаемыми (28), (30). Вычисление  $\Pi$  и  $K$  представляет определенные трудности, поскольку, как мы увидим ниже, происходит компенсация главных по параметру  $\alpha/p$  членов из-за интерференции вкладов от двух ям.

Начнем с вычисления слагаемого  $K$ . Матрицы  $K_{iklm}$ ,  $\tilde{K}_{iklm}$ ,  $K_{iklm}^n$  и  $\tilde{K}_{iklm}^n$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} K_{iklm} &= M_i \tilde{L}_{klm}, \quad \tilde{K}_{iklm} = \tilde{M}_m L_{ikl}, \\ K_{iklm}^n &= M_{in} \tilde{L}_{klm}^n, \quad \tilde{K}_{iklm}^n = \tilde{M}_{mn} L_{ikl}^n, \end{aligned} \quad (38)$$

где матрицы  $L_{klm}$  даются выражениями

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_{234} &= -L_{134} = ip \left\{ -2Z_n(2 - \beta)e^{-ipa} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2x}{p}e^{-ipna} - \frac{x}{p}e^{-ipn\psi_0} \right\}, \\
 \tilde{L}_{134} &= -L_{234} = \\
 &= ip \left\{ 2Z_n\beta e^{ipna} + \frac{2x}{p}e^{ipna} + \frac{x}{p}e^{-ip\psi_0} \right\}, \\
 \tilde{L}_{123}^n &= -L_{124}^n = ip_n \left\{ -2Z_n\beta_n e^{ipna} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2x}{p_n}e^{ipa} + \frac{x}{p_n}e^{-ipn\psi_n} \right\}, \\
 \tilde{L}_{124}^n &= -L_{123}^n = ip_n \left\{ -2Z_n(2 - \beta_n)e^{-ipa} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2x}{p_n}e^{-ipa} - \frac{x}{p_n}e^{-ipn\psi_n} \right\}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \psi_n &= [2 + \beta_n(e^{2ipna} - 1)], \\
 \psi_0 &= [2 + \beta(e^{2ipa} - 1)],
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$Z_n = e^{i(p-p_n)a} - 1, \quad x = p - p_n. \tag{41}$$

Подставляя (38) и (39) в (30), получим после ряда преобразований

$$\begin{aligned}
 K &= (ipip_n)2 \left\{ 4Z_n^2\varphi^2 - \frac{2x^2}{pp_n}Z_n\varphi(4 - \tilde{\psi}_0\tilde{\psi}_n) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{x^2}{pp_n}[4 - \tilde{\psi}_0\tilde{\psi}_n]^2 \right\},
 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi &= -\beta_n \left[ (2 - \beta)Z_n^* + \frac{x}{p} \right], \\
 \tilde{\psi}_n &= e^{-ipna}\psi_n, \quad \tilde{\psi}_0 = e^{-ipa}\psi_0.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Оценим вклад трех слагаемых в (42). Прежде всего рассмотрим важный фактор  $Z_n$  (41), описывающий силу излучательных переходов между уровнями. Если переходы идут между резонансными уровнями пространственного квантования одной ямы (как в «когерентном лазере» [3]), то  $p \approx 2\pi/a$ ,  $p_n \approx \pi/a$ , фактор  $Z_n \approx -2$  принимает максимально возможное значение. В случае ДНС, когда расщепление  $t_0$ , а следовательно, и резонансная частота  $\omega \approx t_0$  малы по сравнению с  $\varepsilon_R$ , фактор  $Z_n$  и величина  $x$  равны

$$\begin{aligned}
 Z_n &\approx i(p - p_n)a \approx i\frac{\omega a}{2p} \ll 1, \\
 x = p - p_n &= \frac{\omega}{2p}, \quad x/p \ll 1.
 \end{aligned} \tag{44}$$

То есть  $Z_n$  и  $x/p$  являются малыми величинами порядка  $\delta = p/\alpha$ . Отсюда нетрудно видеть, что основной вклад в  $K$  вносит первое слагаемое в фигурных скобках, равное

$$4Z_n^2\varphi^2 \approx 4Z_n^2\beta_n^2\beta^2Z_n^{*2} = 4|Z_n|^4\beta_n^2\beta^2,$$

так что, используя условие  $\omega = t_0$ , получаем

$$K = (ipip_n) \cdot 64 \cdot 2. \tag{45}$$

Следует отметить, что каждое слагаемое в  $K$  (см. (30)) в отдельности имеет порядок

$$ip \left( \frac{\alpha}{p} \right)^4 4Z_n^2 \approx ip \left( \frac{\alpha}{p} \right)^2 \cdot 16,$$

т. е. превосходит  $K/8$  в  $(\alpha/p)^2$  раз. Следовательно, ведущие по  $\alpha/p$  члены в  $K$  компенсируются из-за интерференции в ДНС. Аналогичная ситуация имеет место и для вклада от  $\Pi_{iklm}$  в  $\Pi$ .

Этот результат является принципиально важным, поскольку, благодаря компенсации, резко ослабляется влияние переменного поля на резонансное туннелирование и, как следствие, увеличивается эффективность генерации.

Переходим к вычислению  $\Pi$ . Прежде всего можно показать, что последние четыре слагаемых в  $\Pi$  в точности совпадают с первыми четырьмя. Входящие в них  $\Pi_{iklm}$  и  $\Pi_{iklm}^n$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \Pi_{3424} &= ip e^{-2ipa} \left\{ -Z_n(2 - \beta)\Pi_0(1) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x}{p} \left[ \Pi_0(1)e^{i(p-p_n)a} - (2 - \beta)\psi_0 \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{3423} &= ip \left\{ \Delta_0(2)e^{-2ipa} + Z_n(2 - \beta)\Delta_0(1) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x}{p} \left[ -\Delta_0(1)e^{i(p-p_n)a} + \beta\psi_0 \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{2434} &= ip \left\{ Z_n^*\beta\Delta_0(1)e^{2ipa} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x}{p} \left[ -\Delta_0(1)e^{i(p+p_n)a} + \beta\psi_0 \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{2334} &= ip \left\{ \Delta_0(2)e^{-2ipa} - Z_n^*\beta\Pi_0(1) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x}{p} \left[ \Pi_0(1)e^{ipna} - (2 - \beta)\tilde{\psi}_0 \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{49}$$

$$\Pi_{1213}^n = ip_n \left\{ Z_n \beta_n \Delta_n(1) e^{2ip_n a} + \frac{x}{p_n} \left[ \Delta_n(1) e^{i(p+p_n)a} - \beta_n \psi_n \right] \right\}, \quad (50)$$

$$\Pi_{1214}^n = ip_n \left\{ -\Delta_n(2) e^{-2ip_n a} - Z_n^*(2 - \beta_n) \Delta_n(1) + \frac{x}{p_n} \left[ -\Delta_n(1) e^{i(p_n-p)a} + \beta_n \psi_n \right] \right\}, \quad (51)$$

$$\Pi_{1312}^n = ip_n \left\{ -Z_n^*(2 - \beta_n) \Pi_n(1) e^{-2ip_n a} + \frac{x}{p_n} e^{-2ip_n a} \left[ -\Pi_n(1) e^{i(p_n-p)a} + (2 - \beta_n) \psi_n \right] \right\}, \quad (52)$$

$$\Pi_{1412}^n = ip_n \left\{ -\Delta_n(2) e^{-2ip_n a} + Z_n \beta_n \Pi_n(1) + \frac{x}{p_n} e^{-ip_n a} \left[ \Pi_n(1) e^{ip_n a} - (2 - \beta_n) \tilde{\psi}_n \right] \right\}. \quad (53)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Delta_0(1) = (2 - \beta)^2 e^{-2ipa} - \beta^2, \quad (54)$$

$$\Pi_0(1) = \beta [(2 - \beta) + (2 + \beta) e^{2ipa}], \quad (55)$$

$$\Delta_n(1) = (2 - \beta_n)^2 e^{-2ip_n a} - \beta_n^2, \quad (56)$$

$$\Pi_n(1) = \beta_n [(2 - \beta_n) + (2 + \beta_n) e^{2ip_n a}]. \quad (57)$$

Подставляя (46)–(53) в выражение для  $\Pi$  (29) и опуская малые по сравнению с единицей члены, находим после весьма громоздких преобразований

$$\begin{aligned} \Pi = -2ip \cdot ip_n \left\{ |Z|^4 [\beta_n(2 - \beta) \Pi_0(1) \Delta_n(1) + \right. \\ \left. + \beta(2 - \beta_n) \Pi_n(1) \Delta_0(1)] + \right. \\ \left. + 2\Delta_0(2) \Delta_n(2) e^{-2i(p+p_n)a} + \right. \\ \left. + e^{-2ipa} \Delta_n(2) 2Z_n \left[ \beta \Pi_0 e^{2i(p-p_n)a} + \beta_n \Pi_n \right] \right\}. \quad (58) \end{aligned}$$

Для одноявных определителей  $\Delta_n(1)$  и  $\Delta_0(1)$ , а также  $\Pi_n(1)$  и  $\Pi_0(1)$  можно получить следующие приближенные по параметру  $p/\alpha$  выражения (ср. [9]):

$$\begin{aligned} \Pi_0(p^{(1)}) &\approx 2\beta \left[ 1 + \frac{1}{\alpha a} (1 - i\pi) \right], \\ \Pi_n(p^{(1)}) &= \Pi_0(p^{(2)}) = -2\beta \left[ 1 + \frac{3}{\alpha a} (1 - i\pi) \right], \\ \Delta_0(p^{(1)}) &\approx -2\beta, \quad \Delta_n(p^{(1)}) = \Delta_0(p^{(2)}) = 2\beta. \end{aligned} \quad (59)$$

Подставляя (59) в (58) и используя (32) и (33), приходим к следующему результату:

$$\Pi = ip \cdot ip_n \cdot 64 \cdot 2 \left[ 1 - \frac{2i}{\pi} \right]. \quad (60)$$

Окончательно имеем:

$$\Pi + K = ip \cdot ip_n \cdot 64 \cdot 4 \left( 1 - \frac{i}{\pi} \right). \quad (61)$$

Собирая результаты, находим определитель системы:

$$\Delta(\lambda) = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 p p_n \frac{64}{\Gamma^2} \tilde{\Delta}(\lambda), \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\lambda) = \left[ (\varepsilon - \varepsilon_R^{(1)} + i\Gamma)(\varepsilon - \omega - \varepsilon_R^{(2)} + i\Gamma) - \right. \\ \left. - \lambda^2 \left( 1 - \frac{i}{\pi} \right) \right], \quad (63) \end{aligned}$$

$$\lambda^2 = 4\tilde{V}^2 \Gamma^2 = \left( 16 \frac{p^2}{a^2} \tilde{V}^2 \right) \left( \frac{p}{\alpha} \right)^4. \quad (64)$$

Полученное выражение (63) для определителя ДНС формально аналогично выражению для одноявного «когерентного лазера», где излучательные переходы идут между резонансными уровнями одной ямы [3]. Разница состоит в том, что в определение  $\lambda^2$  входит добавочный малый множитель  $(p/\alpha)^4$ . Он обусловлен уже упомянутой выше компенсацией главных по  $\alpha/p$  членов из-за интерференции и малости частоты  $\omega \ll \varepsilon_R$ . Второе отличие состоит в появлении слагаемого  $\lambda^2 i/\pi$ . Оно приводит к некоторой асимметрии в режиме подстройки (см. ниже разд. 5).

Член  $\lambda^2$  в формуле (63) описывает нелинейные свойства и отражает влияние электромагнитного поля на резонансное туннелирование [3], которое становится существенным, если

$$\lambda > \Gamma. \quad (65)$$

Такие поля называем сильными [3]. Тот факт, что из-за компенсации  $\lambda$  резко уменьшается, означает ослабление влияния поля. Это играет принципиальную роль для увеличения эффективности генерации поля. Следует также отметить, что из-за появления множителя  $(p/\alpha)^4$  резко сужается область применимости приближения  $\tilde{V}^2 < 1$ . Далее мы ограничимся полями  $\tilde{V}^2 \lesssim 1/3$  из-за чрезмерной громоздкости вычислений при  $\tilde{V}^2 > 1$ . Анализ результатов в широком интервале полей, сделанный численными методами [10], показывает применимость этого приближения. Кроме того, в наиболее интересном случае,



когда напряжение смещения превосходит расщепление  $V_{dc} \gg t_0$ , область  $\tilde{V}^2 < 1$  снова расширяется (см. ниже разд. 5).

Представляет интерес сравнить значения  $\lambda^2$  (64) для ДНС и когерентного лазера [3]

$$\lambda_l^2 = \frac{16pp_n \tilde{V}^2}{a^2}. \quad (66)$$

Они различаются, как уже отмечалось, на  $(p/\alpha)^4$ , но и частоты, входящие в  $\tilde{V}^2$ , существенно разные. Так, для ДНС следует подставить малую частоту

$$\omega = t_0 = \frac{4p^2}{\alpha a},$$

а для когерентного лазера

$$\omega = \frac{3\pi^2}{a^2} = \frac{3}{4}p^2.$$

В результате получаем

$$\lambda = \frac{eEa}{4} = \frac{V_{ac}}{8}, \quad \lambda_l = \frac{8eEa}{9\pi^2} = V_{ac}^l \frac{8}{9\pi^2}, \quad (67)$$

$$V_{ac} = 2eEa, \quad V_{ac}^l = eEa.$$

Критерии сильного поля для ДНС и когерентного лазера принимают вид

$$V_{ac} > 8\Gamma, \quad V_{ac}^l > \frac{9\pi^2}{8}\Gamma. \quad (68)$$

Следовательно, поле становится сильным, если энергия, набираемая электроном на длине структуры, сравнивается с шириной уровня. Видим, что разница между  $V_{ac}$  и  $V_{ac}^l$  только численная.

### 5. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ И ТОК ПОЛЯРИЗАЦИИ ПЕРВОЙ ЯМЫ

Найдем волновую функцию и ток только в первой яме, поскольку токи первой и второй ям совпадают. Действительно, для слабого поля это доказано в работе [9]. В случае сильного поля изменения касаются в основном определителя системы  $\Delta(\lambda)$ , который является общим для двух ям. Кроме того, численное вычисление токов [10] также подтверждает их равенство.

Ограничиваясь главными членами разложения по  $\tilde{V}$ , найдем из выражения (16) после весьма громоздких вычислений коэффициенты  $A_{1j}$  (15) волновой функции (12)

$$\varepsilon_1 A_{11} \equiv A_1 = A_1^{(1)} + A_1^{(2)} = \frac{2q\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3}{\Delta(\lambda)} ip \cdot ip_n \{ \Delta_0(1) \Pi_{1212} - \beta_n [M_1 - \Phi_1] \}, \quad (69)$$

$$\varepsilon_2 A_{12} \equiv B_1 = B_1^{(1)} + B_1^{(2)} = \frac{2q\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3}{\Delta(\lambda)} \times ip \cdot ip_n \{ -\Pi_0(1) \Pi_{1212} - (2 - \beta_n) [M_1 - \Phi_1] \}, \quad (70)$$

$$A_{13} \frac{\Delta(\lambda)}{2q} = -ip \Delta_0(1) \Pi_{1212} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2, \quad (71)$$

$$A_{14} \frac{\Delta(\lambda)}{2q} = -ip \Pi_0(1) \Pi_{1212} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2, \quad (72)$$

$$M_1 = [Z_n \Delta_0(1) \Pi_n(1) + Z_n^* \Pi_0(1) \Delta_n(1)], \quad (73)$$

$$\Phi_1 = 4[Z_n \beta(2 - \beta_n) + Z_n^* \beta_n(2 - \beta)].$$

В предельном случае слабого поля  $\lambda \ll \Gamma$  коэффициенты  $A_{1j}$  в выражениях (69)–(72) совпадают с полученными ранее в работе [9]. Коэффициенты  $A_1$  и  $B_1$  представлены в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое  $A_1^{(1)}$  ( $B_1^{(1)}$ ) содержит расходимость при  $\omega \rightarrow 0$  (подробнее см. [9]). Второе слагаемое  $A_1^{(2)}$  ( $B_1^{(2)}$ ) конечно при  $\omega \rightarrow 0$ , и только оно вносит вклад в ток поляризации.

Найдем волновые функции  $\Psi_{10}$  и  $\Psi_{11}$  (12). В функции  $\Psi_{10}$  нужно оставить вклад только от  $A_{13}$  и  $A_{14}$ , опуская малые квадратичные по  $\tilde{V}$  поправки от  $A_{11}$  и  $A_{12}$ :

$$\Psi_{10}(x) \approx A_{13} e^{\gamma_3 x} + A_{14} e^{\gamma_4 x}.$$

В этом же приближении собственные значения  $\gamma_j$  (19) можно записать в виде

$$\gamma_3 = -\gamma_4 = ip, \quad \gamma_1 = -\gamma_2 = ip_n, \quad (74)$$

С учетом того, что при  $\alpha/p \gg 1$ , согласно (59),

$$\Delta_0(1) \approx -\Pi_0(1), \quad A_{13} \approx -A_{14},$$

волновая функция  $\Psi_{10}(x)$  оказывается равной

$$\Psi_{10}(x) \approx 2i A_{13} \sin px. \quad (75)$$

В функции  $\Psi_{11}$  все четыре слагаемых имеют одинаковый порядок малости по  $\tilde{V}$ . Нетрудно показать, что с точностью до малых членов  $\omega/p^2$  слагаемые при  $e^{ipx}$  и  $e^{-ipx}$  компенсируются слагаемыми  $A_1^{(1)}$  при  $e^{ip_n x}$  и  $B_1^{(1)}$  при  $e^{-ip_n x}$ . Эта процедура аналогична устранению инфракрасной расходимости в слабом поле [9]. Учитывая, что в главном приближении по  $(\alpha/p)$   $A_1^{(2)} \approx -B_1^{(2)}$ , волновую функцию  $\Psi_{11}$  можно представить в виде

$$\Psi_{11}(x) = 2i A_1^{(2)} \sin p_n x. \quad (76)$$

Таким образом, волновая функция  $\Psi_{11}(x)$  зависит только от коэффициента  $A_1^{(2)}$ , конечного при  $\omega \rightarrow 0$  (см. (80)).

Найдем  $M_1$  и  $\Phi_1$ . Полагая, как обычно, что энергия подводимых к ДНС электронов близка к энергии верхнего уровня  $\varepsilon_R^{(1)}$  (т. е.  $p \approx p^{(1)}$ ) и используя формулы (59) для  $\Delta_0(1)$ ,  $\Pi_0(1)$ ,  $\Delta_n(1)$  и  $\Pi_n(1)$ , получим

$$M_1 \approx \frac{\alpha^2 a^2}{p^4} \omega^2. \quad (77)$$

Соответственно, для  $\Phi_1$  имеем

$$\Phi_1 \approx -\frac{\alpha^2 a^2}{p^4} \omega^2, \quad (78)$$

так что интересующая нас разность равна

$$M_1 - \Phi_1 = 2 \frac{\alpha^2 a^2}{p^4} \omega^2. \quad (79)$$

Подставляя разность  $M_1 - \Phi_1$  в (69), находим  $A_1^{(2)}$ :

$$A_1^{(2)} = -\frac{Ua(16q)\alpha}{\Delta(\lambda)\Gamma p}. \quad (80)$$

Обратим внимание на сокращение частоты в знаменателе коэффициента  $A_1^{(2)}$ , который становится конечным при  $\omega \rightarrow 0$ .

В пределе слабого поля выражение для  $A_1^{(2)}$  (80) в точности совпадает с соответствующим в [9]. При этом важно отметить, что в [9] и в настоящей работе использовались разные формы взаимодействия с электромагнитным полем. Действительно, взаимодействие (3) описывается с помощью вектор-потенциала, в то время как в [9] — в виде « $-xE$ ».

Найденные волновые функции  $\Psi_{10}(x)$  и  $\Psi_{11}(x)$  оказываются аналогичными соответствующим функциям когерентного лазера на одноямной структуре [3], что позволяет найти ток, следуя методу [3]. Подставляя  $\Psi_{10}(x)$  и  $\Psi_{11}(x)$  в (11), получаем активную составляющую приведенного тока поляризации:

$$J_{1c} = -i4eM_{12}[A_1^{(2)}A_{13}^* - \text{с.с.}]. \quad (81)$$

Матричный элемент перехода  $M_{12}$  вычисляем, имея в виду, что резонансная частота  $\omega$  мала по сравнению с  $\varepsilon_R$ :

$$M_{12} = \frac{1}{a} \int_0^a dx [p \sin p_n x \cos px - p_n \sin px \cos p_n x] \approx \approx \frac{\omega a}{4}. \quad (82)$$

Подставляя  $A_1^{(2)}$  и  $A_{13}$  в (81), приходим к окончательному выражению для тока первой ямы:

$$J_{1c} = Ua(ep4q^2) \frac{64(\alpha/p)(\Delta_n(2) + \Delta_n^*(2))}{\Gamma|\tilde{\Delta}(\lambda)|^2}, \quad (83)$$

которое совпадает с соответствующим током в [9] в пределе слабого поля. В общем случае ток (83) удобно представить в форме, аналогичной активному току когерентного лазера [3]:

$$J_{1c} = -\frac{E\Gamma^2 Q \eta}{|\tilde{\Delta}(\lambda)|^2}, \quad Q = pq^2, \quad \eta = \frac{e^2 p^2}{\alpha}, \quad (84)$$

$$|\tilde{\Delta}(\lambda)|^2 = \left[ (\lambda^2 + \Gamma^2 - \xi^2)^2 + \left( 2\Gamma\xi + \frac{\lambda^2}{\pi} \right)^2 \right]. \quad (85)$$

При выводе формулы (84) использовалось соотношение

$$\Delta_n(2) + \Delta_n^*(2) = 16.$$

Из выражения (84) видно, что ДНС можно рассматривать как когерентный лазер, в котором излучательные переходы идут между уровнями энергии  $\varepsilon_R^{(1)}$  и  $\varepsilon_R^{(2)}$ . Из-за малости частоты фотонов в точке (84) появляется дополнительная малая величина  $p/\alpha$ . В определителе  $\tilde{\Delta}(\lambda)$  при  $\tilde{V}^2$  возникает множитель  $(p/\alpha)^4$ , играющий принципиальную роль, и поправка  $\lambda^2/\pi$  (см. формулу (64)).

Ток  $J_{1c}$  описывает нелинейные свойства усиления и позволяет построить теорию генерации, изложенную ниже в разд. 7. Легко показать, что при фиксированной энергии  $\xi$  ток вначале растет с ростом  $\lambda$ , достигает максимума при  $\lambda = \lambda_0$ , а затем убывает пропорционально  $1/\lambda^3$ . В частности, при  $\xi = 0$  имеем

$$\lambda_0^2 \approx \frac{\Gamma^2}{3} \left( 1 - \frac{1}{4\pi^2} \right),$$

что соответствует значению  $V_{ac}^{(0)} \approx 4.6\Gamma$ .

Для расчета эффективности процесса излучения фотонов, следуя [3], введем величину

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \int_0^{2a} dx J_c(x, t) E(t) = \frac{J_{1c} E a}{\omega}, \quad (86)$$

имеющую смысл числа фотонов, испускаемых ДНС в единицу времени. Очевидно, что максимально возможная эффективность достигается, если каждый из  $2pq^2$  подводимых к ДНС электронов испускает фотон, т. е.

$$P_{max} = 2pq^2.$$

Тогда эффективность естественно характеризовать следующим параметром:

$$\tilde{P} = \frac{P}{2pq^2} = \frac{2\lambda^2\Gamma^2}{|\tilde{\Delta}(\lambda)|^2}. \quad (87)$$

Для случая  $\xi = 0$  эффективность  $\tilde{P}$  растет с ростом  $\lambda$ , достигает при  $\lambda_0 = \Gamma$  максимального значения  $\tilde{P} = 1/2$  и затем убывает. Здесь мы пренебрегли малой поправкой  $1/\pi^2$ . Рассмотренная ситуация аналогична «когерентному лазеру» [3] с той лишь разницей, что эффективность лазера равнялась единице. В работе [3] было показано, что возможен режим с наивысшей эффективностью при любых  $\lambda$ , если энергию  $\xi_0$  менять с ростом  $\lambda$ . Исходя из условия максимальной

$$\frac{dP}{d\xi} = 0,$$

получим уравнение для  $\xi_0$ :

$$\xi_0^3 + \xi_0^2(\Gamma^2 - \lambda^2) + \frac{\lambda^2\Gamma}{\pi} = 0. \quad (88)$$

Если пренебречь последним слагаемым, то решения (88) имеют вид

$$\xi_{01} = 0, \quad \xi_0^2 = \lambda^2 - \Gamma^2, \quad \lambda > \Gamma. \quad (89)$$

Первое решение дает максимум при  $\lambda = \Gamma$ . Симметричные решения

$$\xi_{02}, \xi_{03} = \pm \sqrt{\lambda^2 + \Gamma^2}$$

реализуются при  $\lambda > \Gamma$  и обеспечивают эффективность

$$\tilde{P} = \frac{2\lambda^2\Gamma^2}{4\lambda^2\Gamma^2} = \frac{1}{2} \quad (90)$$

для любых  $\lambda$ . Забегая вперед, отметим, что приложение постоянного напряжения  $V_{ac} > t_0$  увеличивает эффективность до  $\tilde{P} = 1$  (см. разд. 6).

Учет в выражении (88) слагаемого  $\lambda_0^2\Gamma/\pi$  приводит к небольшой асимметрии второго и третьего решений и сдвигу  $\xi_{01}$  от нулевого значения.

### 6. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ И ТОК ПОЛЯРИЗАЦИИ ДНС В ПРИСУТСТВИИ НАПРЯЖЕНИЯ

Обобщим полученные выше результаты. Пусть к ДНС приложено постоянное напряжение (см. рисунок). Волновые функции первой ямы ищем в виде (12) с коэффициентами  $A_{lj}$ , удовлетворяющими системе уравнений (16) с  $p_1 \neq p$ ,  $p_{1n} \neq p_n$ .

Определитель  $\tilde{\Delta}(\lambda)$  дается выражениями (28)–(30), в которых надо сделать замены

$$\begin{aligned} \Pi_{iklm} &\rightarrow \bar{\Pi}_{iklm}, & \Pi_{iklm}^n &\rightarrow \bar{\Pi}_{iklm}^n, & K_{iklm} &\rightarrow \bar{K}_{iklm}, \\ \tilde{K}_{iklm} &\rightarrow \tilde{\bar{K}}_{iklm}, & K_{iklm}^n &\rightarrow \bar{K}_{iklm}^n, & \tilde{K}_{iklm}^n &\rightarrow \tilde{\bar{K}}_{iklm}^n. \end{aligned}$$

Новые матрицы (с прямой чертой) имеют вид

$$\bar{\Pi}_{iklm} = \begin{vmatrix} M_i & M_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{M}_l & \tilde{M}_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & n_k & \bar{\gamma}_l & \bar{\gamma}_m \end{vmatrix}, \quad (91)$$

$$\bar{\Pi}_{iklm}^n = \begin{vmatrix} M_{in} & M_{kn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{M}_{ln} & \tilde{M}_{mn} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & n_k & \bar{\gamma}_l & \bar{\gamma}_m \end{vmatrix}, \quad (92)$$

$$\bar{K}_{iklm} = \begin{vmatrix} M_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{M}_k & \tilde{M}_l & \tilde{M}_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & \bar{\gamma}_k & \bar{\gamma}_l & \bar{\gamma}_m \end{vmatrix}, \quad (93)$$

$$\tilde{\bar{K}}_{iklm} = \begin{vmatrix} M_i & M_k & M_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{M}_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & n_k & n_l & \bar{\gamma}_m \end{vmatrix}, \quad (94)$$

$$\bar{K}_{iklm}^n = \begin{vmatrix} M_{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{M}_{kn} & \tilde{M}_{ln} & \tilde{M}_{mn} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & \bar{\gamma}_k & \bar{\gamma}_l & \bar{\gamma}_m \end{vmatrix}, \quad (95)$$

$$\tilde{\bar{K}}_{iklm}^n = \begin{vmatrix} M_{in} & M_{kn} & M_{ln} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{M}_{mn} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_i & n_k & n_l & \bar{\gamma}_m \end{vmatrix}. \quad (96)$$

Симметричные матрицы  $\bar{\Pi}_{3434}$  и  $\bar{\Pi}_{1212}$  представляют собой определители ДНС в отсутствие электромагнитного поля:

$$\bar{\Pi}_{3434} = (-ip_1)e^{-2ip_1a}\Delta_{10}(2), \quad (97)$$

$$\bar{\Pi}_{1212} = (-ip_{1n})e^{-2ip_{1n}a}\Delta_{1n}(2). \quad (98)$$

Свойства  $\Delta_{10}(2)$  и  $\Delta_{1n}(2)$  детально изучены в работе [9], где было показано, что вблизи резонанса и при  $V_{dc} \ll \varepsilon_R$  их можно представить в виде

$$\Delta_{10}(2) \approx \frac{8i}{\Gamma t_0} [\varepsilon - \varepsilon_R^{(1)}(1) + i\Gamma] [\varepsilon - \varepsilon_R^{(2)}(1) + i\Gamma], \quad (99)$$

$$\Delta_{1n}(2) = \frac{8i}{\Gamma t_0} [\varepsilon - \omega - \varepsilon_R^{(1)}(1) + i\Gamma] \times [\varepsilon - \omega - \varepsilon_R^{(2)}(1) + i\Gamma]. \quad (100)$$

Здесь  $\varepsilon_R^{(1)}(1)$  и  $\varepsilon_R^{(2)}(1)$  — энергии уровней в ДНС, возникшие из-за расщепления резонансного уровня изолированной ямы и приложенного напряжения  $V_{dc}$

$$\varepsilon_R^{(1,2)}(1) = p_0^2 + \frac{2p_0x_1^{(1,2)}}{a}, \quad (101)$$

$$x_1^{(1,2)} = \delta \left[ -(2+V_0) \pm \sqrt{1+V_0^2} \right], \quad V_0 = \frac{V_{dc}}{t_0}. \quad (102)$$

Величина энергетического расщепления

$$t = \varepsilon_R^{(1)}(1) - \varepsilon_R^{(2)}(2) = t_0 \sqrt{1 + V_0^2} \quad (103)$$

увеличивается с ростом  $V_{dc}$ . При  $V_{dc} \gg t_0$  ( $V_0 \gg 1$ ) расщепление определяется только постоянным напряжением, т.е.  $t \approx V_{dc}$ . Ширина уровней  $\Gamma$  не зависит от  $V_{dc}$  и дается формулой (36).

Следует отметить, что в выражениях (101), (102) и (103) опущены слагаемые порядка  $\delta^2$ ,  $(V_{dc}/\varepsilon_R)^2$  и  $(V_{dc}/\varepsilon_R)\delta$  из-за громоздкости. Они не играют существенной роли и при необходимости могут быть учтены.

Для интересующего нас резонансного случая частота растёт с ростом  $V_{dc}$ :

$$\omega = t = t_0 \sqrt{1 + V_0^2}. \quad (104)$$

Предполагая, как обычно, что энергия электронов накачки (подводимых к структуре из эмиттера) близка к энергии верхнего уровня ( $\xi = \varepsilon - \varepsilon_R^{(1)}(1) \ll t$ ), определители  $\Delta_{10}(2)$  и  $\Delta_{1n}(2)$  можно представить в виде

$$\Delta_{10}(2) \approx \frac{8i}{\Gamma} (\xi + i\Gamma) \sqrt{1 + V_0^2}, \quad (105)$$

$$\Delta_{1n}(2) \approx -\frac{8i}{\Gamma} (\xi + i\Gamma) \sqrt{1 + V_0^2} \quad (106)$$

Из выражений (105), (106) следует, что  $\Delta_{10}(2)$  и  $\Delta_{1n}(2)$  увеличиваются с ростом  $V_{dc}$  из-за расстрой-ки точного резонанса. Это приводит, в частности, к уменьшению коэффициента прохождения через ДНС:

$$T(\varepsilon_R^{(1)}) = \frac{t_0^2}{t_0^2 + V_{dc}^2} = \frac{1}{1 + V_0^2}. \quad (107)$$

Несимметричные матрицы  $\bar{\Pi}_{iklm}$  и  $\bar{\Pi}_{iklm}^n$  описывают переходы электронов между уровнями под действием переменного поля в первой и второй ямах, в то время как матрицы  $\bar{K}_{iklm}$ ,  $\tilde{K}_{iklm}$ ,  $\bar{K}_{iklm}^n$  и  $\tilde{K}_{iklm}^n$  — между ямами.

Начнем вычисления с матриц  $K$ , которые можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{K}_{iklm} &= M_i \tilde{L}_{iklm}, & \tilde{K}_{iklm} &= \tilde{M}_m L_{ikl}, \\ \bar{K}_{iklm}^n &= M_{in} \tilde{L}_{iklm}^n, & \tilde{K}_{iklm}^n &= \tilde{M}_{mn} L_{ikl}^n. \end{aligned} \quad (108)$$

Для  $\tilde{L}_{ikl}$   $\tilde{L}_{ikl}^n$  справедливы выражения (39), если в них сделать замены

$$p \rightarrow p_1, \quad p_n \rightarrow p_{1n}, \quad Z_n \rightarrow Z_{1n},$$

где

$$Z_{1n} = e^{i(p_1 - p_{1n})a} - 1. \quad (109)$$

Подставляя (108) в (30), получаем после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} \bar{K} &= [M_4 L_{123}^n + M_3 L_{124}^n] [\tilde{M}_{14} \tilde{L}_{234} + \tilde{M}_{24} \tilde{L}_{134}] + \\ &+ [M_{14} L_{234} + M_{24} L_{134}] [\tilde{M}_3 \tilde{L}_{124}^n + \tilde{M}_4 \tilde{L}_{123}^n]. \end{aligned} \quad (110)$$

Имея в виду свойства симметрии

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{234} &= -\bar{L}_{134}, & \tilde{L}_{134} &= -\bar{L}_{234}, \\ \tilde{L}_{124}^n &= -\bar{L}_{123}^n, & \tilde{L}_{123}^n &= -\bar{L}_{124}^n, \\ \bar{M}_{14} &= -\tilde{M}_{24}, & \bar{M}_{24} &= -\tilde{M}_{14}, \\ \bar{M}_3 &= -\tilde{M}_4, & \bar{M}_4 &= -\tilde{M}_3, \end{aligned} \quad (111)$$

приходим к следующему выражению:

$$\bar{K} = L_1 \bar{L}_2 + \bar{L}_1 L_2, \quad (112)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= M_4 L_{123}^n + M_3 L_{124}^n, \\ L_2 &= M_{14} L_{234} + M_{24} L_{134}, \\ \bar{L}_1 &= \bar{M}_4 \bar{L}_{123}^n + \bar{M}_3 \bar{L}_{124}^n, \\ \bar{L}_2 &= \bar{M}_{14} \bar{L}_{234} + \bar{M}_{24} \bar{L}_{134}. \end{aligned} \quad (113)$$

В отсутствие напряжения смещения ( $V_{dc} = 0$ ),  $\bar{L}_1 = L_1$ ,  $\bar{L}_2 = L_2$  и  $\bar{K}$  совпадает с (42).

Вычисляя  $L_i$ ,  $\bar{L}_i$ , получаем

$$L_1 = 2ip_n \left\{ |Z_n|^2 \beta_n (2 - \beta) + 2Z_n (\beta_n - \beta) + \frac{2x}{p_n} - \frac{x}{2p_n} e^{-i(p+p_n)a} \Psi_n \Psi_0 \right\}, \quad (114)$$

$$\bar{L}_1 = 2ip_{1n} \left\{ |Z_{1n}|^2 \beta_{1n} (2 - \beta_1) + 2Z_{1n} (\beta_{1n} - \beta_1) + \frac{2x_1}{p_{1n}} - \frac{x_1}{2p_{1n}} e^{-i(p_1+p_{1n})a} \Psi_{1n} \Psi_{10} \right\}, \quad (115)$$

$$L_2 = 2ip \left\{ |Z_n|^2 \beta_n (2 - \beta) + 2Z_n (\beta_n - \beta) - \frac{2x}{p} + \frac{x}{2p} e^{-i(p+p_n)a} \Psi_n \Psi_0 \right\}, \quad (116)$$

$$\bar{L}_2 = 2ip_1 \left\{ |Z_{1n}|^2 \beta_{1n} (2 - \beta_1) + 2Z_{1n} (\beta_{1n} - \beta) - \frac{2x_1}{p_1} + \frac{2x_1}{p_1} e^{-i(p_1+p_{1n})a} \Psi_{1n} \Psi_{10} \right\}. \quad (117)$$

Принимая во внимание малость

$$Z_{1n} \approx i \frac{\omega a}{2p_1}$$

и

$$\frac{x_1}{p_1} \approx \frac{\omega}{2p_1^2},$$

нетрудно показать, что основной вклад в (114)–(117) вносят первые слагаемые. Опуская малые члены, получаем

$$\bar{K} \approx 8|Z_n|^2 |Z_{1n}|^2 ip_1 \cdot ip_{1n} \beta \beta_1 \beta_n \beta_{1n}. \quad (118)$$

Снова (как и при  $V_{dc} = 0$ ) имеет место компенсация ряда слагаемых из-за интерференции в ДНС. В отличие от  $K$ , в  $\bar{K}$  входит частота, растущая с ростом  $V_{dc}$ :

$$Z_n = i \frac{at_0}{2p_n} \sqrt{1 + V_0^2}, \quad Z_{1n} = i \frac{at_0}{2p_{1n}} \sqrt{1 + V_0^2}. \quad (119)$$

Поэтому в  $\bar{K}$  появляется дополнительный по сравнению с  $K$  множитель  $(1 + V_0^2)^2$ :

$$\bar{K} \approx ip_1 \cdot ip_{1n} \cdot 64 \cdot 2(1 + V_0^2)^2. \quad (120)$$

После очень громоздких вычислений можно получить для  $\bar{\Pi}$  выражение

$$\bar{\Pi} = ip_1 \cdot ip_{1n} \cdot 64 \cdot 2(1 + V_0^2)^2. \quad (121)$$

Для упрощения формул мы опустили малую добавку  $i/\pi$ .

Таким образом, суммарный вклад в определитель  $\bar{\Delta}(\lambda)$  (см. (28))

$$\bar{K} + \bar{\Pi} = ip_1 \cdot ip_{1n} \cdot 64 \cdot 4(1 + V_0^2)^2 \quad (122)$$

увеличивается с ростом напряжения  $V_{dc}$  быстрее, чем вклад от  $\Delta_{10}(2)\Delta_{1n}(2)$ . Однако этот множитель в точности сокращается с множителем, возникающим из-за величины  $\omega$  в знаменателе выражения для  $\tilde{V}^2$  (см. (37) и (21)). Следовательно, напряжение  $V_{dc}$  не оказывает влияния на вклад в  $\bar{\Delta}(\lambda)$  от переходов между уровнями. Это согласуется с результатом работы [9] о независимости матричных элементов переходов от  $V_{dc}$  (см. ниже выражения (134)). Собирая результаты, находим определитель ДНС при  $V_{dc} \neq 0$ :

$$\bar{\Delta}(\lambda) = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \frac{64}{\Gamma^2} (1 + V_0^2) \tilde{\Delta}(\lambda), \quad (123)$$

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \left[ (\varepsilon - \varepsilon_R^{(1)}(1) + i\Gamma) \times (\varepsilon - \omega - \varepsilon_R^{(2)}(1) + i\Gamma) - \bar{\lambda}^2 \right], \quad (124)$$

$$\bar{\lambda}^2 = 4\Gamma^2 \tilde{V}^2 (1 + V_0^2) = \frac{V_{ac}^2}{64(1 + V_0^2)}. \quad (125)$$

Из сравнения  $\bar{\Delta}(\lambda)$  и  $\Delta(\lambda)$  видим, что в  $\bar{\Delta}(\lambda)$  возникает множитель  $(1 + V_0^2)$ , а в  $\tilde{\Delta}(\lambda)$   $V_{ac}^2$  заменяется на  $V_{ac}^2/(1 + V_0^2)$ . Таким образом, из-за роста произведения резонансных определителей  $\Delta_{10}(2)\Delta_{1n}(2)$  действие переменного поля на резонансное туннелирование ослабляется. Это принципиально важный результат, приводящий к увеличению эффективности генерации.

Кроме того, при  $V_{dc} \neq 0$  расширяется область применимости приближения  $\tilde{V}^2 < 1$  (при  $V_0^2 \gg 1$ ), поскольку критерии сильного поля принимают вид

$$\bar{\lambda}^2 \geq \Gamma^2, \quad \tilde{V}^2 \geq \frac{1}{4(1 + V_0^2)}, \quad \frac{V_{ac}}{\Gamma} \geq 8\sqrt{1 + V_0^2}. \quad (126)$$

Найдем волновую функцию первой ямы при  $V_{dc} \neq 0$ . Коэффициенты  $A_{1j}$  даются выражениями (69)–(73), в которых надо заменить

$$\begin{aligned} \Pi_{iklm} &\rightarrow \bar{\Pi}_{iklm}, & \Delta_0(1) &\rightarrow \Delta_{10}(1), & \Delta_n(1) &\rightarrow \Delta_{1n}(1), \\ \Pi_0(1) &\rightarrow \Pi_{10}(1), & \Pi_n(1) &\rightarrow \Pi_{1n}(1), & M_1 &\rightarrow \bar{M}_1, \end{aligned}$$

$$\Phi_1 \rightarrow \bar{\Phi}_1, \quad Z_n \rightarrow Z_{1n},$$

где

$$\bar{M}_1 = [\Delta_{10}(1)\Pi_{1n}Z_{1n} + \Pi_{10}(1)\Delta_{1n}(1)Z_{1n}^*], \quad (127)$$

$$\bar{\Phi}_1 = 4[\beta_1(2 - \beta_{1n})Z_{1n} + \beta_{1n}(2 - \beta_1)Z_{1n}^*], \quad (128)$$

$$\Delta_{10}(1) = (2 - \beta_1) \left( 1 + \frac{p_1}{p} - \beta \right) e^{-2ip_1a} - \beta_1 \left( \beta + \frac{p_1}{p} - 1 \right), \quad (129)$$

$$\Delta_{1n}(1) = (2 - \beta_{1n}) \left( 1 + \frac{p_{1n}}{p_n} - \beta_n \right) e^{-2ip_{1n}a} - \beta_{1n} \left( \beta_n + \frac{p_{1n}}{p_n} - 1 \right), \quad (130)$$

$$\Pi_{10}(1) = (2 - \beta_1) \left( \beta + 1 - \frac{p_1}{p} \right) + \beta_1 \left( \beta + \frac{p_1}{p} + 1 \right) e^{2ip_1a}, \quad (131)$$

$$\Pi_{1n}(1) = \left( 1 + \beta_n - \frac{p_{1n}}{p_n} \right) (2 - \beta_{1n}) + \beta_{1n} \left( 1 + \frac{p_{1n}}{p_n} + \beta_1 \right) e^{2ip_{1n}a}. \quad (132)$$

Мы опустим громоздкие вычисления тока, которые аналогичны случаю  $V_{dc} = 0$ . Отметим только несколько важных моментов.

Как было показано нами ранее в работе [9], в главном по  $p/\alpha$  приближении (при  $p \approx p^{(1)}$ ) имеем

$$\Delta_{1n}(1) \approx -\Pi_{1n}(1) = \frac{2i\alpha}{p_n} \left[ V_0 - \sqrt{1 + V_0^2} \right], \quad (133)$$

$$\Delta_{10}(1) \approx -\Pi_{10}(1) = \frac{2i\alpha}{p_0} \left[ V_0 + \sqrt{1 + V_0^2} \right].$$

Используя выражения (133), нетрудно убедиться, что поле  $V_{dc}$  выпадает из произведений  $\Delta_{10}(1)\Pi_{1n}(1)$  и  $\Pi_{10}(1)\Delta_{1n}(1)$ , так что

$$\bar{M}_1 = M_1, \quad \bar{\Phi}_1 = \Phi_1. \quad (134)$$

Кроме того, в коэффициент  $A_{13}$  входит  $\Delta_{10}(1)$ , который, согласно (133), зависит от  $V_0$ . Учитывая, что выполняется соотношение

$$\Delta_{1n}(2) + \Delta_{1n}^*(2) = 16\sqrt{1 + V_0^2},$$

приходим к окончательному выражению для тока первой ямы:

$$\bar{J}_{1c} = -\frac{EQ\Gamma^2\bar{\eta}}{|\tilde{\Delta}(\lambda)|^2}, \quad \bar{\eta} = \frac{e^2p^2}{\alpha} \frac{[V_0 + \sqrt{1 + V_0^2}]}{(1 + V_0^2)}, \quad (135)$$

$$|\tilde{\Delta}(\lambda)|^2 = [(\xi + i\Gamma)(\xi + i\Gamma) - \bar{\lambda}^2], \quad (136)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{V_{ac}}{8\sqrt{1 + V_0^2}}. \quad (137)$$

В слабом поле  $\bar{\lambda} \ll \Gamma$  выражение для тока  $\bar{J}_{1c}$  совпадает с соответствующим выражением в [9]. Сравнение выражений (135)–(137) с выражением для тока когерентного лазера на одноямной структуре [11] показывает, что генератор на ДНС можно рассматривать как когерентный лазер, в котором излучательные переходы идут между расщепленными уровнями ДНС в присутствии постоянного напряжения  $V_{dc}$ .

Исходя из этой аналогии, можно ожидать, что, как показано в работе [3], должен существовать оптимальный режим генерации, когда энергия подводимых к ДНС электронов  $\xi_0$  удовлетворяет условию

$$\xi_0 = 0, \quad \bar{\lambda} = \Gamma, \quad \xi_0^2 = \bar{\lambda}^2 - \Gamma^2, \quad \bar{\lambda} > \Gamma, \quad \frac{V_{ac}}{\Gamma} > 8\sqrt{1 + V_0^2}. \quad (138)$$

Рассмотрим теперь эффективность процесса излучения фотонов аналогично тому, как это сделано в разд. 5:

$$\tilde{P} = \frac{\bar{P}}{2epq^2} = \frac{2\bar{\lambda}^2\Gamma^2 [V_0 + \sqrt{1 + V_0^2}]}{|\tilde{\Delta}(\lambda)|^2 [1 + V_0^2]}. \quad (139)$$

Выражение для  $\tilde{P}$  отличается от выражения для  $\bar{P}$  заменой  $\lambda$  на  $\bar{\lambda}$  и присутствием множителя

$$\frac{V_0 + \sqrt{1 + V_0^2}}{1 + V_0^2}.$$

Нетрудно видеть, что при  $\xi_0 = 0$  ( $\bar{\lambda} = \Gamma$ ) и  $\xi_0^2 = \bar{\lambda}^2 - \Gamma^2$  ( $\bar{\lambda} > \Gamma$ ) выражение для эффективности  $\tilde{P}$  принимает вид

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} \frac{(V_0 + \sqrt{1 + V_0^2})}{\sqrt{1 + V_0^2}}. \quad (140)$$

Если  $V_0 = 0$ , то значение  $\tilde{P} = 1/2$  совпадает с (90), а при  $V_0 \gg 1$  имеем  $\tilde{P} = 1$ , т. е. эффективность достигает максимально возможной величины, когда каждый подводимый к ДНС электрон излучает фотон и проходит структуру без отражения.

Этот результат весьма нетривиален. Действительно, переходы идут с излучением частоты  $\omega$ , малой по сравнению с энергией резонансного уровня квантовой ямы, так что величина  $Z_{1n}$ , характеризующая частотный резонанс, мала,  $Z_{1n} \ll 1$ . Для сравнения, в когерентном лазере [3], где  $p = 2\pi/a$ ,  $p_n = \pi/a$ , величина  $Z_n = -2$ .

Причина высокой эффективности ДНС связана с подавлением влияния электромагнитного поля на резонансное туннелирование из-за компенсации ряда слагаемых за счет межъямной интерференции (множитель  $p/\alpha$  при  $\tilde{V}^2$  в определителе). Напряжение  $V_{dc}$  дополнительно уменьшает влияние переменного поля из-за роста определителей  $\Delta_{10}(2)$  и  $\Delta_{1n}(2)$ .

Напряжение  $V_{dc}$  приводит также к увеличению максимального значения тока при  $\xi = 0$

$$\bar{J}_{1c}^m = J_{1c}^m \frac{[V_0 + \sqrt{1 + V_0^2}]}{\sqrt{1 + V_0^2}}, \quad (141)$$

достигаемого при значении

$$\frac{V_{ac}^m}{\Gamma} = \frac{8}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + V_0^2}. \quad (142)$$

При  $V_0 \gg 1$  максимальное значение удваивается.

### 7. ГЕНЕРАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДНС

Ввиду аналогии тока поляризации ДНС  $\bar{J}_{1c}$  и когерентного лазера для описания генерации электромагнитного поля в ДНС воспользуемся теорией генерации когерентного лазера [3]. Уравнение для амплитуды поля получаем после подстановки в (4) выражения для тока  $\bar{J}_{1c}$  (135):

$$1 = \frac{\Gamma^2 \tilde{Q}}{|\tilde{\Delta}(\bar{\lambda})|^2}, \quad \tilde{Q} = \frac{4\pi\tau_0 Q \bar{\eta}}{\varkappa}. \quad (143)$$

Вообще говоря, необходимо еще уравнение для частоты генерации. Но, как показано в работе [3], при условии малости коэффициента стабилизации,  $S = 1/\Gamma\tau_0 \ll 1$ , частота совпадает с частотой резонатора  $\omega = \Omega$ . Поскольку  $\Omega$  можно менять, будем считать  $\omega$  свободным параметром.

Найдем величину  $\bar{\lambda}^2$  как функцию тока накачки  $\tilde{Q}$  из уравнения (143):

$$\bar{\lambda}^2 = \xi^2 + \Gamma \left[ \sqrt{\tilde{Q} - 4\xi^2} - \Gamma \right]. \quad (144)$$

Минимальный пороговый ток накачки  $Q_{th}$  получается, если положить  $\bar{\lambda} = 0$ ,  $\xi = 0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{th} &= \Gamma^2, \\ Q_{th} &= \left[ \frac{\varkappa\Gamma^2}{4\pi\tau_0\eta_0} \right] \left[ \frac{\alpha(1 + V_0^2)}{p(V_0 + \sqrt{1 + V_0^2})} \right], \\ \eta_0 &= e^2 p. \end{aligned} \quad (145)$$

Анализ величины  $Q_{th}$  проведен ниже в разд. 8.

Следуя [3] (см. также разд. 5), можно показать, что существует оптимальный режим генерации, если энергия подводимых к ДНС электронов удовлетворяет условию

$$\xi_0^2 = \bar{\lambda}^2 - \Gamma^2, \quad \bar{\lambda} > \Gamma. \quad (146)$$

В этом режиме  $\bar{\lambda}^2$  линейно зависит от тока накачки:

$$\bar{\lambda}^2 = \tilde{Q}/4 \quad (147)$$

и эффективность максимальна. Если выразить  $\bar{\lambda}^2$  через число излучаемых структурой в единицу времени фотонов  $N$  частоты  $\omega$ , то из выражения (147) получим

$$N = \bar{P} = \frac{J_{1c} E 2a}{2\omega} = Q \frac{V_0 + \sqrt{1 + V_0^2}}{\sqrt{1 + V_0^2}}. \quad (148)$$

Таким образом, при  $V_0 \gg 1$  эффективность генерации равна 100%.

### 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. СРАВНЕНИЕ С РТД И КОГЕРЕНТНЫМ ЛАЗЕРОМ НА ОДНОЙ ЯМЕ

Представляет интерес провести сравнение полученных результатов с соответствующими для РТД и когерентного лазера. Согласно [11], пороговый ток РТД равен

$$\begin{aligned} Q_{th}^{РТД} &= \left( \frac{\varkappa}{\pi e^2 \tau_0 a} \right) \times \\ &\times \frac{[(\varepsilon - \varepsilon_R - \omega)^2 + \Gamma^2][(\varepsilon - \varepsilon_R + \omega)^2 + \Gamma^2]}{(\varepsilon - \varepsilon_R)\Gamma^2}. \end{aligned} \quad (149)$$

В низкочастотном режиме  $\omega \ll \Gamma$  и при  $\varepsilon = \varepsilon_R + \Gamma$  он превышает  $Q_{th}$  для ДНС в  $\alpha/p$  раз (типичное значение  $\alpha/p \approx 20-100$ ). В высокочастотном «квантовом режиме» [11]  $\varepsilon - \varepsilon_R = \omega \gg \Gamma$  отношение

$$\frac{Q_{th}^{РТД}}{Q_{th}^{ДНС}} \approx \frac{\alpha \omega}{p \Gamma}$$

становится еще больше, а в «классическом» ( $\varepsilon - \varepsilon_R \sim \Gamma$ ,  $\omega \gg \Gamma$ ) достигает величины  $(\alpha/p)(\omega/\Gamma)^4$ .

Если сравнить с когерентным лазером на одной яме [3], в котором излучательные переходы идут между резонансными уровнями ямы ( $p - p_n = \pm \pi/a$ ) и частота  $\omega \approx 3\pi^2/a^2$ , то получим, что порог  $Q_{th}^{ДНС}$  выше в  $\alpha/p$  раз. Это обусловлено малостью частоты  $\omega$  по сравнению с  $\varepsilon_R$ , так как величина  $Z_{1n}$  (см. (109)), характеризующая силу излучательных переходов  $Z_n \sim \omega$ , мала. Но именно такая частота соответствует востребованному терагерцовому диапазону. В то же время в оптимальном режиме генерации ДНС эффективность генерации достигает 100% даже на этой малой частоте терагерцового диапазона. Причина этого весьма нетривиальна и изложена в разд. 6.

Имеются еще и другие достоинства. Во-первых, возможность плавной перестройки частоты генерации с помощью постоянного напряжения смещения  $V_{dc}$ , которое раздвигает резонансные уровни. Во-вторых, облегчаются условия когерентности, так как из-за малости частоты генерации  $\omega$  по сравнению с частотой оптического фона  $\omega_0$  выключается самый опасный механизм релаксации. В-третьих, легко достигается оптимальный режим генерации, поскольку ширины резонансных уровней одинаковы.

В то же время сохраняются достоинства когерентного лазера: высокая эффективность без инверсной населенности, узкий контур усиления, отсутствие эффектов насыщения и др. Это позволяет предсказать перспективность перестраиваемых высокочастотных генераторов на ДНС.

Можно сделать еще одно предсказание. Как уже отмечалось во Введении, ДНС представляет собой простейшую структуру на пути от РТД к одно-

зонной блоховской сверхрешетке. Поэтому можно ожидать, что явление компенсации из-за интерференции будет присуще и когерентному генератору на однозонной блоховской сверхрешетке («штарковской лестнице»), а следовательно, высокой эффективности генерации. Для двухзонной «штарковской лестницы» возможность оптимального режима генерации была доказана в работе [12].

Работа выполнена в рамках программы Федерального агентства по науке и инновациям.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. В. Копаеву и И. Ю. Катееву за плодотворные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Kazarinov and R. Suris, *Sov. Phys. Semicond.* **5**, 207 (1971).
2. J. Faist, F. Capasso, D. Sivco et al., *Science* **264**, 553 (1994).
3. В. Ф. Елесин, *ЖЭТФ* **112**, 483 (1997); **122**, 131 (2002).
4. В. М. Галицкий, В. Ф. Елесин, *Резонансное взаимодействие электромагнитных полей с полупроводниками*, Энергоатомиздат, Москва (1986).
5. S. Haas et al., *Phys. Rev. B* **57**, 14860 (1998).
6. И. А. Дмитриев, Р. А. Сурис, *ФТП* **112**, 1460 (2002).
7. В. Ф. Елесин, *ЖЭТФ* **96**, 966 (2003).
8. В. Ф. Елесин, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, А. В. Цуканов, *Письма в ЖЭТФ* **66**, 704 (1997).
9. В. Ф. Елесин, *ЖЭТФ* **127**, 131 (2005).
10. В. Ф. Елесин, И. Ю. Катеев, послана в печать в *ФТП* (2005).
11. В. Ф. Елесин, *ЖЭТФ* **116**, 704 (1999).
12. В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, *ЖЭТФ* **123**, 1308 (2003).