

# ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛАСТИНЕ С ОТСОСОМ

*И. И. Вигдорович\**

*Центральный институт авиационного моторостроения им. П. И. Баранова  
111116, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 24 мая 2005 г.

Предлагается теория, позволяющая на основе асимптотического анализа уравнений Рейнольдса и соотношений размерности без использования каких-либо специальных гипотез замыкания получить полное решение задачи о турбулентном пограничном слое на пластине с равномерным отсосом. Характеристики пограничного слоя с отсосом во всем возможном диапазоне параметров рассчитаны на основе данных, известных для одного эталонного течения, в качестве которого выбрано течение в пограничном слое на непроницаемой пластине. Профили скорости и касательного напряжения, распределение трения на стенке и интегральные параметры получены только на основе профиля скорости, известного для непроницаемой пластины. Нормальные напряжения Рейнольдса рассчитаны на основе аналогичных данных для эталонного течения. Результаты представлены в переменных подобия.

PACS: 44.05.+e, 44.20.+b, 47.27.-i

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Турбулентный пограничный слой традиционно является областью применения разного рода приближенных расчетных моделей, основанных на полумпирических гипотезах о характере молярного обмена, модельных уравнениях турбулентности и т. д. К числу немногих известных результатов, которые могут быть получены без формулировки специальных гипотез, относятся (если ограничиться гидродинамической задачей при безградиентном течении) закон стенки Прандтля, закон дефекта скорости Кармана, логарифмический профиль скорости, закон трения Кармана, а также некоторые правила подобия для компонент тензора Рейнольдса.

Перечисленные соотношения условно можно назвать «точными», поскольку при весьма общих предположениях они получены [1–3] (см. также [4]) только на основе анализа размерностей.

Как было показано [5–9], круг «точных» решений для турбулентного пограничного слоя может быть существенно расширен. Идея [5–7] состоит в использовании того факта, что течение в пристеночной области пограничного слоя со вдувом и отсосом

определяется конечным числом заданных параметров. Поэтому между турбулентным касательным напряжением и градиентом усредненной скорости существует универсальная связь. Для гидродинамической задачи это позволяет свести уравнение количества движения к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, исследование которого дает правило подобия для профиля скорости, обобщающее логарифмический закон на случай наличия потока массы на стенке.

Такая схема рассуждений основывается на тех же физических предположениях, что и классический метод [1–3], но, в отличие от него, кроме анализа размерностей существенно использует уравнения движения.

Подход, изложенный в работах [5–7], может быть распространен на другие задачи пограничного слоя, зависящие от конечного числа параметров. К ним, например, относится безградиентное течение на пластине с равномерным вдувом или отсосом. В этом случае, как было показано [8, 9], компоненты тензора Рейнольдса во всем пограничном слое есть универсальные функции градиента продольной скорости. При отсосе [9] эти зависимости могут быть полностью определены по данным, известным для одного эталонного течения, в качестве которого удобно

\*E-mail: ivigdorovich@ciam.ru

выбрать наиболее полно изученное течение в пограничном слое на непроницаемой пластине. В частности, для задания связи между касательным напряжением и градиентом скорости необходимо знать только профиль продольной скорости в эталонном течении.

Выведенное таким путем условие замыкания применено в настоящей работе к решению задачи во всем диапазоне параметра отсоса. Используется разработанный [10, 11] метод асимптотического решения уравнений турбулентного пограничного слоя при больших числах Рейнольдса.

Полученное «точное» решение для профилей скорости, компонент рейнольдсовых напряжений, трения на стенке, интегральных параметров сопоставлено в переменных подобия с имеющимися результатами прямого численного моделирования и экспериментальными данными, что позволяет критически оценить точность последних.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое на плоской гладкой пластине, обтекаемой равномерным потоком с постоянной по длине пластины скоростью  $U_e$  на внешней границе слоя и постоянной скоростью отсоса  $v_w$ , направленной по нормали к поверхности. Предположим, что турбулентное течение развивается непосредственно от передней кромки пластины. Уровень турбулентных пульсаций в набегающем потоке будем считать пренебрежимо малым и не оказывающим влияния на течение в пограничном слое.

### 2.1. Условие замыкания

Все усредненные величины, в частности, градиент продольной скорости, турбулентное касательное напряжение, толщина пограничного слоя  $\Delta$  являются функциями декартовых координат  $x$ ,  $y$  и определяющих параметров задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= F_1(x, y, \nu, v_w, U_e), \\ \langle u'v' \rangle &= F_2(x, y, \nu, v_w, U_e), \\ \Delta &= F_3(x, \nu, v_w, U_e). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости, начало декартовой системы координат находится на передней кромке пластины. В дальнейшем будет дано конкретное определение величины  $\Delta$ , которую

пока будем рассматривать как некоторый характерный поперечный масштаб течения в пограничном слое.

Выразим теперь  $x$  и  $U_e$  из первого и третьего уравнений (1) и подставим во второе уравнение (1), в результате получим

$$\langle u'v' \rangle = F_4\left(y, \nu, v_w, \Delta, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Применяя к этому соотношению П-теорему, будем иметь

$$\begin{aligned} \langle u'v' \rangle &= -\left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 S(R_l, \beta, \eta), \quad R_l = \frac{y^2}{\nu} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \beta &= \frac{v_w}{R_l y \partial u / \partial y}, \quad \eta = \frac{y}{\Delta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Как и функции  $F_1, \dots, F_4$ , функция  $S$  универсальна для рассматриваемого класса течений, зависящих от трех параметров  $\nu$ ,  $v_w$ ,  $U_e$ . Будем считать, что она непрерывна при

$$0 \leq R_l \leq \infty, \quad -\infty \leq \beta \leq 0, \quad 0 \leq \eta < \infty,$$

дифференцируема внутри этой области и удовлетворяет условию

$$S(\infty, 0, 0) \neq 0,$$

которое, как показано в работе [7], является условием существования логарифмического профиля скорости в пограничном слое на непроницаемой пластине (эталонном течении).

Соотношение (2) представляет собой выражение касательного напряжения через градиент усредненной скорости. Поскольку влияние скорости отсоса на эту зависимость должно убывать по мере удаления от стенки, параметр  $\beta$  выбран так, что в знаменателе стоит локальное число Рейнольдса  $R_l$ .

Для нормальных напряжений Рейнольдса аналогичным образом получим

$$\begin{aligned} \langle u'^2 \rangle &= \left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 S_1(R_l, \beta, \eta), \\ \langle v'^2 \rangle &= \left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 S_2(R_l, \beta, \eta), \\ \langle w'^2 \rangle &= \left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 S_3(R_l, \beta, \eta). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $S_1, S_2, S_3$  — некоторые универсальные функции. Однако условие непрерывности можно поставить только для функции  $S_2$ , описывающей поведение компоненты тензора Рейнольдса, связанной с поперечными пульсациями скорости. Согласно теоретическим представлениям [12, 13], которые подтверждаются данными измерений, эта компонента

ведет себя у стенки аналогично касательному напряжению. Таким образом, величина

$$S_2(\infty, 0, 0) = (\varkappa/\sigma_2)^2 \quad (4)$$

существует и не равна нулю. Здесь  $\varkappa = 0.41$  — постоянная Кармана, по экспериментальным данным постоянная  $\sigma_2 = 0.95$  [4].

Поведение компонент  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle w'^2 \rangle$ , связанных с пульсациями скорости в направлениях, параллельных стенке, имеет более сложный характер, согласно которому

$$\begin{aligned} S_1(\infty, 0, \eta) &= -A_1 \varkappa^2 \ln \eta + O(1), \\ S_3(\infty, 0, \eta) &= -A_3 \varkappa^2 \ln \eta + O(1), \quad \eta \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A_1, A_3$  — универсальные постоянные. По данным прямого численного моделирования течения в турбулентном пограничном слое на непроницаемой пластине [14], выполненного при низких числах Рейнольдса (вплоть до числа Рейнольдса, образованного по толщине вытеснения,  $R_{\delta^*} = 2000$ )<sup>1)</sup>,

$$A_1 = 1.1, \quad A_3 = 0.36. \quad (6)$$

Условия для функций  $S, S_1, S_2, S_3$  сформулированы на основе следующих физических предположений [12, 13]: вязкость существенна лишь в тонкой пристеночной области (вязком подслое), а внешний масштаб (толщина пограничного слоя) не влияет на поведение вблизи стенки компонент  $\langle u'v' \rangle$  и  $\langle v'^2 \rangle$ , но в силу существенной анизотропии пристенных вихрей сохраняет свое влияние на компоненты  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle w'^2 \rangle$ .

### 2.2. Замена переменных

В рассматриваемой задаче функция тока усредненного течения  $\psi(x, y)$  удовлетворяет уравнению пограничного слоя с нулевым градиентом давления:

$$\begin{aligned} \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} &= (\nu \psi_{yy} - \langle u'v' \rangle)_y, \\ x > 0, \quad y = 0: \quad \psi_y &= 0, \quad \psi_x = -v_w, \\ y \rightarrow \infty: \quad \psi_y &\rightarrow U_e, \quad \langle u'v' \rangle \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Перейдем в уравнении (7) к новым переменным по формулам [10]

$$\begin{aligned} \psi &= U_e \Delta \Psi(\xi, \eta), \quad \Lambda(\xi) = \frac{dR_\Delta}{dR_x}, \quad \xi = \ln R_\Delta, \\ R_x &= \frac{U_e x}{\nu}, \quad R_\Delta = \frac{U_e \Delta}{\nu}. \end{aligned} \quad (8)$$

<sup>1)</sup> В указанной работе приводится другое значение  $A_3 = 0.66$ , что, по-видимому, является опечаткой, поскольку обработка расчетных данных работы [14] дает величину (6).

В качестве независимых переменных  $\xi$  и  $\eta$  выбраны логарифм числа Рейнольдса, образованного по толщине пограничного слоя, и относительное расстояние до стенки. Кроме безразмерной функции тока  $\Psi(\xi, \eta)$  введена вторая неизвестная функция  $\Lambda(\xi)$ , имеющая физический смысл скорости продольного изменения масштаба  $\Delta$ . С учетом (2) для  $\Psi(\xi, \eta)$  и  $\Lambda(\xi)$  получим уравнение [10]

$$\begin{aligned} \Lambda[\Psi_\eta \Psi_{\xi\eta} - \Psi_{\eta\eta}(\Psi + \Psi_\xi)] &= \\ &= \left[ (\eta \Psi_{\eta\eta})^2 S(R_l, \beta, \eta) + e^{-\xi} \Psi_{\eta\eta} \right]_\eta, \\ R_l &= e^\xi \eta^2 \Psi_{\eta\eta}, \quad \beta = B (\eta R_l \Psi_{\eta\eta})^{-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \xi > -\infty, \quad \eta = 0: \\ \Psi_\eta &= 0, \quad \Lambda(\Psi + \Psi_\xi) = -B, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \Psi_\eta \rightarrow 1, \quad \eta \Psi_{\eta\eta} \sqrt{S(R_l, \beta, \eta)} \rightarrow 0. \quad (11)$$

Здесь  $B = v_w/U_e$  — параметр отсоса. Соотношения (10) задают условия на пластине, (11) — на внешней границе пограничного слоя. С учетом порядка дифференциального уравнения на внешней границе поставлено два условия — для скорости и касательного напряжения.

Будем искать асимптотическое представление решения задачи (9)–(11) при  $\xi \rightarrow \infty$ . Введем малый параметр  $\varepsilon$  и новую независимую переменную

$$\zeta = \varepsilon \xi, \quad 1/\zeta = O(1).$$

Таким образом, малый параметр в настоящей задаче есть величина, обратная логарифму числа Рейнольдса, образованного по характерному поперечному масштабу течения.

Скорость отсоса на стенке зададим в виде

$$B = \varepsilon^2 b, \quad b = O(1), \quad (12)$$

т. е. будем предполагать квадратичный порядок малости величины поперечной скорости на стенке.

Асимптотические разложения решения по малому параметру  $\varepsilon$  будут иметь различный вид для разных характерных областей течения. В направлении, перпендикулярном стенке, возникают две такие области: внешняя область, где молекулярной вязкостью в уравнении пограничного слоя можно пренебречь, а характерным масштабом является толщина пограничного слоя, и пристеночная область, характерный масштаб которой определяется из условия равенства по порядку величин турбулентных и вязких напряжений.

### 3. ПРИСТЕНОЧНАЯ ОБЛАСТЬ

В пристеночной области используем переменные

$$y_+ = \frac{yU_e\sqrt{c_f/2}}{\nu}, \quad u_+ = \frac{\psi_y}{U_e\sqrt{c_f/2}}, \quad (13)$$

$$v_+ = \frac{v_w}{U_e\sqrt{c_f/2}}.$$

Здесь  $c_f$  — коэффициент трения на пластине.

Как показано в работе [7], поскольку при отсосе  $v_+$  — малая величина (далее будет дана оценка  $v_+ = O(\varepsilon)$ ), профили скорости и касательного напряжения в пристеночной области можно представить через профиль скорости  $u_+^0(y_+)$ , отвечающий частному случаю течения в пограничном слое на непроницаемой пластине:

$$E \equiv \frac{2}{v_+} \left( \sqrt{1 + v_+ u_+} - 1 \right) = u_+^0(y_+) + O(v_+), \quad (14)$$

$$\frac{2}{v_+} \left( \sqrt{\frac{du_+}{dy_+} - \langle u'v' \rangle_+} - 1 \right) = u_+^0(y_+) + O(v_+), \quad (15)$$

$$y_+ \geq 0.$$

Среднеквадратичную поперечную пульсацию скорости также можно выразить через известные функции:

$$\sqrt{\langle v'^2 \rangle_+} = \sqrt{\langle v'^2 \rangle_+^0(y_+) + \frac{v_+}{2\sigma_2} u_+^0(y_+) + O(v_+)}, \quad (16)$$

$$y_+ \geq 0.$$

Первое слагаемое в правой части (16) задает профиль рассматриваемой величины в эталонном течении. Константа  $\sigma_2$  определена соотношением (4). В формулах (14)–(16) оценка остаточного члена  $O(v_+)$  равномерно пригодна при всех  $y_+ \geq 0$ .

Вне вязкого подслоя функция  $u_+^0$  имеет логарифмическую асимптотику:

$$u_+^0(y_+) = \frac{1}{\varkappa} (\ln y_+ + C_0) + w_+(y_+), \quad (17)$$

$$w_+(y_+) = O(y_+^{-\alpha}), \quad y_+ \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0.$$

Роль постоянной Кармана  $\varkappa$  играет величина  $\sqrt{S(\infty, 0, 0)}$ . Согласно экспериментальным данным  $C_0 = 2.05$  [4].

### 4. ВНЕШНЯЯ ОБЛАСТЬ

В пограничном слое с отсосом в общем случае образуются две характерные зоны вдоль по потоку [11, 15]. На начальном участке пластины реализуется режим умеренного отсоса, при котором напряжение сдвига на стенке имеет тот же порядок,

что и во внешней области. При постоянной скорости отсоса по мере роста числа Рейнольдса за зоной умеренного отсоса устанавливается режим сильного отсоса, когда касательное напряжение на стенке намного превосходит значения этой величины во внешней области. По порядку величины компоненты тензора Рейнольдса во внешней области совпадают с  $\Lambda^2(\xi)$ . Полученное в работе [11] решение для случая умеренного отсоса имеет особенность при

$$\zeta = 2\varkappa(-b)^{-1/2},$$

соответствующую обращению в нуль главного члена разложения функции  $\Lambda(\xi)$ .

Будем рассматривать далее окрестность этой особой точки (или линии для функций, зависящих от поперечной координаты), где имеет место сильный отсос. Перейдем к новой переменной  $s = O(1)$  по формуле [15]

$$s = \xi - 2\varkappa(-B)^{-1/2} - k \ln(-B) = \varepsilon^{-1} [\zeta - 2\varkappa(-b)^{-1/2}] - 2k \ln \varepsilon - k \ln(-b), \quad (18)$$

где  $k$  — некоторая подлежащая определению постоянная.

При умеренном отсосе функция  $\Lambda(\xi)$  имеет порядок  $\varepsilon$  и, как сказано выше, в особой точке обращается в нуль в главном члене [11]. В соответствии с этим при сильном отсосе решение будем искать в виде [15]

$$\Lambda(\xi) = -\varepsilon^2 b \lambda(s) + O(\varepsilon^3), \quad (19)$$

$$\Psi(\xi, \eta) = \Psi_w(\xi) + \eta - \varepsilon^2 b g(s, \eta) + O(\varepsilon^3). \quad (20)$$

Здесь  $\Psi_w(\xi)$  — значение функции тока на стенке, поэтому  $g(s, 0) = 0$ . Из второго условия на стенке (10) в силу (12), (19) имеем

$$\Psi_w(\xi) + \frac{d\Psi_w(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\lambda(s)} + O(\varepsilon). \quad (21)$$

Подстановка разложений (19)–(21) в уравнение (9) с учетом (18) после предельного перехода  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $s = O(1)$ ,  $1/\eta = O(1)$  дает для функций  $g(s, \eta)$  и  $\lambda(s)$  уравнение в частных производных:

$$\left[ (\eta g_{\eta\eta})^2 S \right]_{\eta} + (1 + \eta\lambda) g_{\eta\eta} = \lambda g_{s\eta}, \quad (22)$$

$$g(s, 0) = g_{\eta}(s, \infty) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta g_{\eta\eta} \sqrt{S} = 0.$$

Здесь и далее для сокращения записи  $S$  обозначает  $S(\infty, 0, \eta)$ .

Случаю умеренного отсоса отвечает предельный переход в уравнении (22):

$$s \rightarrow -\infty, \quad \lambda(s) \rightarrow \infty, \quad g(s, \eta) \rightarrow \lambda(s)f(\eta), \quad (23)$$

где функция  $f(\eta)$  удовлетворяет краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} [(\eta f'')^2 S]' + \eta f'' &= 0, \\ f(0) = f'(\infty) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta f'' \sqrt{S} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Решение краевой задачи (24) есть

$$f'(\eta) = - \int_{\eta}^{\infty} \frac{\Phi d\eta}{2\eta\sqrt{S}}, \quad \Phi(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{S}}. \quad (25)$$

Функция  $f'(\eta)$  задает профиль скорости в пограничном слое на непроницаемой пластине [10]. Ее асимптотика на стенке, как следует из (25), имеет вид

$$\begin{aligned} f'(\eta) &= \frac{F_1}{\varkappa} (\ln \eta + A_0 - \ln F_1) + O(\eta^\alpha), \\ \eta \rightarrow 0, \quad \alpha > 0, \quad F_1 \equiv \sqrt{-f(\infty)} &= \frac{\Phi(0)}{2}, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $A_0$  — некоторая постоянная. Последнее равенство (26) получено путем интегрирования выражения (25) с последующим взятием интеграла по частям.

Другой предельный случай,  $\lambda = 0$ , отвечает асимптотическому пограничному слою с отсосом — одномерному течению, в котором все усредненные величины зависят только от расстояния до стенки [9]. Такое течение на пластине достигается далеко вниз по потоку. Полагая в (22)  $\lambda = 0$ , получим, что функция  $g$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} [(\eta g'')^2 S]' + g'' &= 0, \\ g(0) = g'(\infty) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta g'' \sqrt{S} &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

и может быть представлена в виде

$$g' = -\frac{h^2}{4}, \quad h(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta\sqrt{S}}. \quad (28)$$

Из выражения (28) для функции  $h(\eta)$  получим логарифмическую асимптотику на стенке:

$$\begin{aligned} h(\eta) &= -\frac{1}{\varkappa} (\ln \eta + A_\infty - \ln F_1) + O(\eta^\alpha), \\ \eta \rightarrow 0, \quad \alpha > 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $A_\infty$  — некоторая постоянная.

Таким образом, решения уравнения (22) описывают все семейство профилей скорости в турбулентном пограничном слое с отсосом, включая предельные случаи непроницаемой пластины и асимптотического пограничного слоя.

Уравнение (22) имеет первый интеграл в виде

$$(\eta g_{\eta\eta})^2 S + (1 + \lambda\eta)g_\eta - \lambda(g + g_s) = G, \quad (30)$$

$$G(s) = -\lambda(s) \left[ g(s, \infty) + \frac{d}{ds} g(s, \infty) \right]. \quad (31)$$

Далее будем рассматривать также функцию  $\gamma(s, \eta)$ , связанную с  $g(s, \eta)$  равенством

$$g_\eta = -\gamma^2/4 - \gamma\sqrt{G}. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (30), будем иметь

$$(\eta\gamma_\eta)^2 S = 1 + O(\eta), \quad \eta \rightarrow 0.$$

Отсюда получим асимптотику функции  $\gamma(s, \eta)$  на стенке:

$$\gamma(s, \eta) = -\frac{1}{\varkappa} [\ln \eta + A(s) - \ln F_1] - w(s, \eta), \quad (33)$$

$$w(s, \eta) = O(\eta^\alpha), \quad \eta \rightarrow 0, \quad \alpha > 0,$$

где  $A(s)$  — некоторая функция.

### 5. СРАЩИВАНИЕ РЕШЕНИЙ

Коэффициент трения на пластине будем искать в виде [15]

$$\frac{c_f}{2} = -\varepsilon^2 b + \varepsilon^4 b^2 t(s) + O(\varepsilon^5). \quad (34)$$

Проведем теперь асимптотическое сращивание решений во внешней и пристеночной областях пограничного слоя, опираясь на соотношения (14), (17) и (32), (33). Связь между переменными стенки  $y_+$ ,  $u_+$  и внешними переменными  $\eta$ ,  $\Psi_\eta$  задается равенствами (13), первое из которых на основании (18) можно записать в виде

$$y_+ = \varepsilon^{2k} (-b)^k \sqrt{\frac{c_f}{2}} \exp\left(\frac{2\varkappa}{\varepsilon\sqrt{-b}} + s\right) \eta. \quad (35)$$

Из формул (12), (34) получим

$$v_+ = -\varepsilon\sqrt{-b} + O(\varepsilon^2). \quad (36)$$

Согласно (20), (32) будем иметь

$$\Psi_\eta = 1 + \varepsilon^2 b \left[ \frac{\gamma^2(s, \eta)}{4} + \gamma(s, \eta) \sqrt{G(s)} \right] + O(\varepsilon^3). \quad (37)$$

Перейдем в (14) к внешним переменным по формулам (13), (35) с учетом (34), (36), (37) и при  $s = O(1)$ ,  $1/\eta = O(1)$  разложим обе части равенства (14) по малому параметру  $\varepsilon$  до членов порядка единицы включительно. Разложение левой части записанного во внешних переменных равенства (14) имеет вид

$$\frac{2}{\varepsilon\sqrt{-b}} - \sqrt{\gamma^2 + 4\gamma\sqrt{G} + 4t} + O(\varepsilon). \quad (38)$$

Разложение правой части на основании асимптотического представления (17) есть

$$\frac{2}{\varepsilon\sqrt{-b}} + \frac{2k+1}{\varkappa} \ln \varepsilon + \frac{1}{\varkappa} \left[ \ln \eta + s + \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln(-b) + C_0 \right] + O(\varepsilon). \quad (39)$$

Приравнявая в (38), (39) подобные члены, будем иметь  $k = -1/2$  и

$$\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma\sqrt{G} + 4t} = -\frac{1}{\varkappa} (\ln \eta + s + C_0).$$

Сопоставив теперь, согласно принципу асимптотического сращения [16], это равенство с асимптотикой (33), получим два соотношения:

$$t(s) = G(s), \quad (40)$$

$$A(s) - \ln F_1 = s + C_0 - 2\varkappa\sqrt{G(s)}, \quad (41)$$

последнее из которых позволяет замкнуть краевую задачу (22) для двух искомым функций  $g(s, \eta)$  и  $\lambda(s)$ , а первое с учетом (31) есть представление трения на стенке через решение этой краевой задачи. Соотношение (40) можно также получить из интегрального уравнения импульсов для пограничного слоя.

Для решения краевой задачи (22) с дополнительным условием (41) необходимо знать только функцию  $S(\infty, 0, \eta)$ . В силу уравнения (24) эта функция однозначно связана с  $f'(\eta)$  и может быть выражена через нее в квадратурах

$$S = \frac{f - f(\infty) - \eta f'}{(\eta f'')^2}. \quad (42)$$

Поскольку функция  $f'(\eta)$  задает профиль скорости в пограничном слое на непроницаемой пластине, она хорошо известна из экспериментальных данных. Для ее вычисления будем использовать эмпирическую формулу Коулса [17]:

$$\frac{f'(\eta)}{F_1} = \frac{1}{\varkappa} [\ln \eta - 0.55(1 + \cos(\pi\eta))], \quad (43)$$

$$0 < \eta \leq 1, \quad F_1 = \frac{1.55}{\varkappa}, \quad \eta = \frac{y}{\Delta}.$$

Здесь  $\Delta$  — расстояние до стенки, на котором продольная составляющая усредненной скорости на 0.5% отличается от  $U_e$ . Именно так и выберем толщину пограничного слоя, связав ее конкретное определение со способом задания профиля скорости в эталонном течении.

## 6. ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ

### 6.1. Трение и толщина вытеснения

Введем переменные подобия

$$Z_{\{x^{\delta^*}\}} \equiv (-B)^{1/2\mp 1} \exp\left(\frac{-2\varkappa}{\sqrt{-B}}\right) R_{\{x^{\delta^*}\}}. \quad (44)$$

На основании (20) толщина вытеснения равна

$$\delta^* = -\varepsilon^2 b e^\xi [g(s, \infty) + O(\varepsilon)]. \quad (45)$$

Согласно определению функции  $\Lambda(\xi)$  (8) имеем

$$R_x = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{de^\xi}{\Lambda(\xi)}.$$

Эти два равенства вместе с (18), (19) в области сильного отсоса дают

$$Z_{\delta^*} = -g(s, \infty)e^s + O(\varepsilon), \quad (46)$$

$$Z_x = \int_{-\infty}^s \frac{e^s}{\lambda(s)} ds + O(\varepsilon). \quad (47)$$

Представления (46), (47), формулировка краевой задачи для функций  $g(s, \eta)$  и  $\lambda(s)$  (22), (31), (41), а также выражение для  $t(s)$  (40) позволяют заключить, что справедливы следующие правила подобия для распределения трения и толщины вытеснения на пластине при сильном отсосе:

$$\begin{aligned} \ln Z_{\{x^{\delta^*}\}} &= \Phi_{\{1/2\}}(t) + O(\sqrt{-B}), \\ t &= \frac{c_f/2 + B}{B^2} + O(\sqrt{-B}), \end{aligned} \quad (48)$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  — универсальные функции.

На рис. 1а в переменных подобия (44), (48) представлены экспериментальные данные [18, 19] по распределению трения на пластине. Диапазон чисел Рейнольдса и параметра отсоса,  $4 \leq R_x \cdot 10^{-5} \leq 20$ ,  $1.2 \leq -B \cdot 10^3 \leq 2.4$  [18] и  $3.8 \leq R_x \cdot 10^{-5} \leq 35$ ,

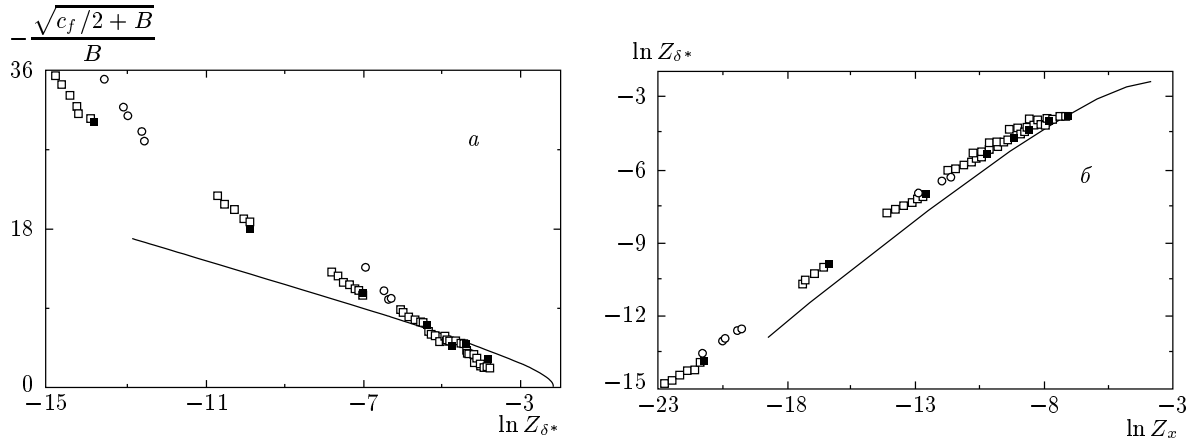


Рис. 1. Экспериментальные данные [18, 19] по распределению трения на пластине (а) и толщине вытеснения (б) в переменных подобия для области сильного отсоса и расчетные кривые (сплошные);  $\circ$  — [18],  $\square$  — [19] (непрямые методы),  $\blacksquare$  — [19] (плавающие элементы)

$1 \leq -B \cdot 10^3 \leq 3.6$  [19], соответствует развитому турбулентному течению в пограничном слое. В работе [18] трение определялось непрямым методом, путем обработки измеренных профилей скорости, в [19] — тремя различными непрямыми методами, а также непосредственно с помощью «плавающих элементов» на обтекаемой поверхности.

Малые значения переменной  $Z_{\delta^*}$  отвечают умеренному отсосу. В соответствии со сформулированным правилом подобия по мере увеличения  $Z_{\delta^*}$  все экспериментальные точки на рис. 1а начинают следовать одной кривой и приближаются к расчетной зависимости, которая получена в результате численного решения краевой задачи (22), (41) (см. разд. 10).

Экспериментальные данные из работ [18, 19] для распределения толщины вытеснения представлены на рис. 2б. Видно, что результаты измерений, построенные в переменных (44), могут быть описаны одной кривой, которая, однако, близка к расчетной зависимости только на небольшом участке, отвечающем области сильного отсоса.

### 6.2. Скорость и компоненты тензора Рейнольдса

Разрешив (37) как квадратное уравнение относительно  $\gamma$ , с учетом (40) получим

$$E_e - E = \frac{2(U_e - u)}{U_e \left( \sqrt{c_f/2+B} + \sqrt{c_f/2+Bu/U_e} \right)} = \gamma(q, \eta) + O(\sqrt{c_f}), \quad (49)$$

$$q \equiv \frac{B}{\sqrt{c_f/2+B}} = -\frac{1}{\sqrt{t}} + O(\sqrt{c_f}), \quad -\infty \leq q \leq 0.$$

Здесь использовано обозначение (14),  $E_e$  — значение, которое функция  $E$  принимает на внешней границе пограничного слоя. Соотношение (49) показывает, что профили скорости в пограничном слое с отсосом вне вязкого подслоя могут быть описаны семейством кривых, зависящих от одного параметра  $q$ . При  $q = 0$  правило подобия (49) выражает известный закон дефекта скорости для непроницаемой пластины и на основании (23), (31), (40) будем иметь

$$\gamma(0, \eta) = -\frac{f'(\eta)}{F_1}. \quad (50)$$

Другой предельный случай  $q = -\infty$  отвечает асимптотическому пограничному слою, когда

$$\gamma(-\infty, \eta) = h(\eta).$$

Для представления результатов удобно использовать поперечный масштаб, определенный равенством

$$\Delta_* = \int_0^\infty (E_e - E) dy. \quad (51)$$

В частном случае непроницаемой пластины эта величина, равная  $\delta^*/\sqrt{c_f/2}$ , есть толщина пограничного слоя, введенная Клаузером [20]. Связь между  $\Delta_*$  и  $\Delta$  согласно (49) имеет вид

$$\frac{\Delta_*}{\Delta} = \int_0^\infty \gamma(q, \eta) d\eta + O(\sqrt{c_f}). \quad (52)$$

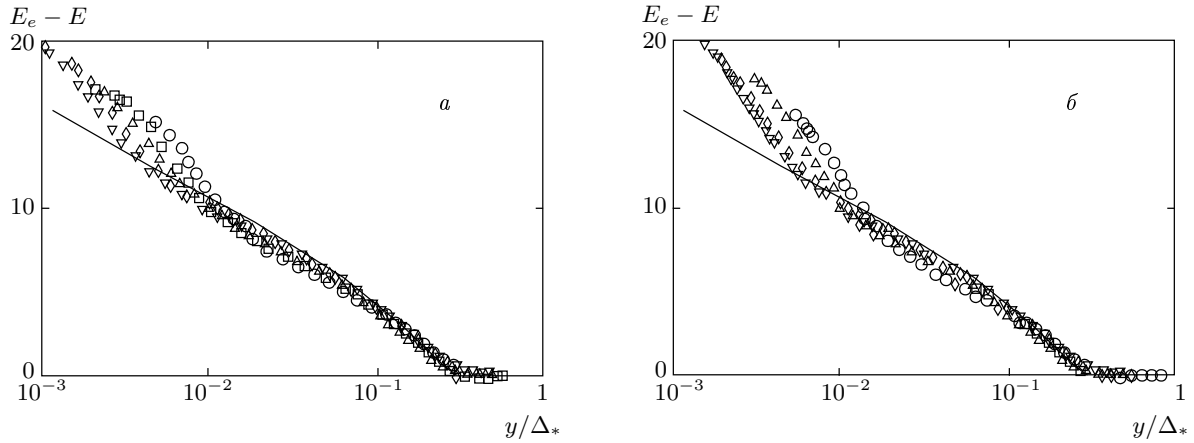


Рис. 2. Экспериментальные профили скорости [21] в переменных подобия:  $R_x \cdot 10^{-5} = 4.0$  ( $\circ$ ),  $6.8$  ( $\square$ ),  $9.3$  ( $\triangle$ ),  $12$  ( $\triangleright$ ),  $15$  ( $\diamond$ ),  $20$  ( $\nabla$ );  $a - B = -0.0012, -0.036 \leq q \leq -0.029$ ,  $b - B = -0.0024, -0.1 \leq q \leq -0.072$

Отсюда при  $q = 0$  в силу (50) получим

$$\frac{\Delta_*}{\Delta} = F_1 + O(\sqrt{c_f}).$$

На рис. 2 в переменных подобия (49) построены профили скорости в турбулентном пограничном слое на пластине с отсосом, измеренные при разных числах Рейнольдса для двух значений величины  $B$  [21]. Диапазон изменения параметра подобия  $q$  указан в подписи к рис. 2. Сплошные кривые — профили скорости в пограничном слое на непроницаемой пластине. Поскольку для экспериментальных данных параметр  $q$  мал, все профили скорости в согласии с законом подобия (49) достаточно близко расположены к кривой, соответствующей непроницаемой пластине. От нее отклоняются только точки, отвечающие вязкому подслою.

Компоненты тензора Рейнольдса также подчиняются однопараметрическим законам подобия. Подставляя (37) в (2) и (3), получим

$$\frac{\sqrt{\nu \partial u / \partial y - \langle u'v' \rangle}}{U_e \left( \sqrt{c_f/2} + B - B \right)} = Q(q, \eta) \sqrt{S(\infty, 0, \eta)} + O(\sqrt{c_f}), \quad (53)$$

$$\frac{\sqrt{\langle v'^2 \rangle}}{U_e \left( \sqrt{c_f/2} + B - B \right)} = Q(q, \eta) \sqrt{S_2(\infty, 0, \eta)} + O(\sqrt{c_f}), \quad (54)$$

$$Q(q, \eta) = \frac{\eta \gamma_\eta(q, \eta)}{1 - q} \left( \frac{q \gamma(q, \eta)}{2} - 1 \right), \quad -\infty \leq q \leq 0.$$

Формулы для компонент  $\langle u'^2 \rangle$  и  $\langle w'^2 \rangle$  полностью аналогичны записи (54). Соотношения для касательного напряжения и среднеквадратичной поперечной пульсации скорости должны выполняться всюду вне вязкого подслоя. Область применимости законов подобия для продольных пульсаций уже и у стенки ограничена областью, где справедливы асимптотические представления (5).

Формулы (53) в предельных случаях  $q = 0$  и  $q = -\infty$  в силу уравнений (24), (27) соответственно принимают вид

$$\frac{\nu \partial u / \partial y - \langle u'v' \rangle}{c_f U_e^2 / 2} = 1 + \frac{\eta f'(\eta) - f(\eta)}{f(\infty)} + O(\sqrt{c_f}), \quad (55)$$

$$\frac{\sqrt{\nu \partial u / \partial y - \langle u'v' \rangle}}{-v_w} = \frac{h(\eta)}{2} + O(\sqrt{c_f}).$$

Используя (4), (5) и асимптотику (33), для компонент рейнольдсовых напряжений получим следующие разложения:

$$\sqrt{\nu \frac{\partial u}{\partial y} - \langle u'v' \rangle} = \frac{v_w}{2\chi} \ln \eta + O(1),$$

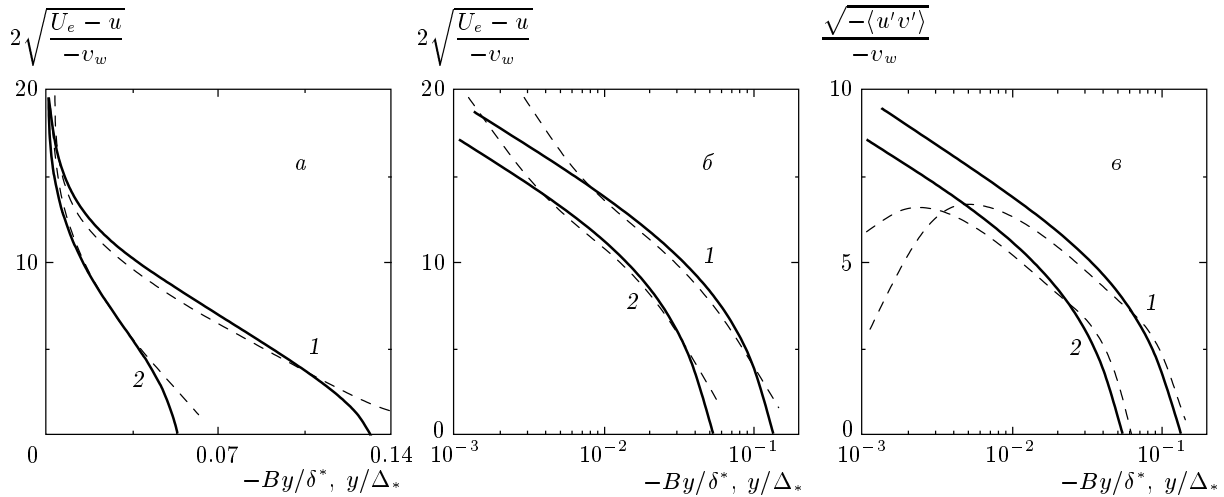
$$\sqrt[3]{\langle u'^2 \rangle} = -\sqrt[3]{\frac{A_1 v_w^2}{4\chi^2}} \ln \eta + O(1), \quad (56)$$

$$\sqrt{\langle v'^2 \rangle} = \frac{v_w}{2\chi\sigma_2} \ln \eta + O(1),$$

$$\sqrt[3]{\langle w'^2 \rangle} = -\sqrt[3]{\frac{A_3 v_w^2}{4\chi^2}} \ln \eta + O(1), \quad \eta \rightarrow 0,$$

которые показывают, что вблизи стенки существует область, где корень из касательного напряжения и среднеквадратичная поперечная пульсация скорости пропорциональны логарифму расстояния до





**Рис. 3.** Профили скорости (*a, б*) и турбулентного касательного напряжения (*е*) в асимптотическом пограничном слое: сплошные кривые — расчет по формуле (28), штриховые кривые — прямое численное моделирование [22, 23]. В качестве поперечного масштаба используются  $\Delta_*$  (1) и  $-\delta^*/B$  (2)

стенки, а среднеквадратичные продольные пульсации — логарифму в степени 3/2. Все входящие в (56) постоянные известны из экспериментальных данных для непроницаемой пластины.

**6.3. Асимптотический пограничный слой**

В случае асимптотического пограничного слоя соотношения (49), (51) принимают вид

$$2\sqrt{\frac{U_e - u}{-v_w}} = h(\eta) + O(\sqrt{c_f}), \tag{57}$$

$$\Delta_* = 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{U_e - u}{-v_w}} dy.$$

Интегрирование выражения (28) с последующим взятием интеграла по частям дает

$$\int_0^\infty h d\eta = 2F_1.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_*}{\Delta} = 2F_1 + O(\sqrt{c_f}).$$

Таким образом, значения интеграла (52) при  $q = 0$  и  $q = -\infty$  различаются в два раза.

Возведя обе части (57) в квадрат и проинтегрировав полученное равенство поперек слоя, придем к соотношению

$$-\frac{\delta^*}{B\Delta} = \int_0^\infty \frac{h^2}{4} d\eta + O(\sqrt{c_f}).$$

Имеет место равенство

$$\int_0^\infty \frac{h^2}{4} d\eta = \frac{F_1 D}{\varkappa}, \quad D = A_0 - A_\infty, \tag{58}$$

для получения которого запишем, принимая во внимание (28), интеграл (25) в виде

$$f' = \int_\eta^\infty \frac{\Phi h' d\eta}{2} = -\frac{h\Phi}{2} + \frac{\eta h^2}{4} + \int_\eta^\infty \frac{h^2}{4} d\eta. \tag{59}$$

Полагая здесь, что  $\eta = 0$ , из асимптотических представлений (26), (29) получим искомый результат.

На рис. 3*a, б* представлены профили скорости в асимптотическом пограничном слое с отсосом, соответственно, в линейном и полулогарифмическом масштабах, а на рис. 3*в* — профиль турбулентного касательного напряжения. Сплошным кривым отвечает расчет по формуле (28). Штриховые кривые построены по результатам прямого численного моделирования течения, выполненного для  $B = -0.00361$  и  $R_{\delta^*} = 1000$  [22, 23]. Несмотря на небольшое число Рейнольдса, при котором проводилось моделирование, вне вязкого подслоя сплошные и штриховые кривые на рис. 3*a, б* весьма близки и достаточно близки на рис. 3*в*. На рис. 3*б, в* видно, что в соответствии с выводами теории штриховые кривые имеют относительно короткий, в силу низкого числа Рейнольдса, логарифмический участок, наклон которого приблизительно равен наклону сплошных кривых.

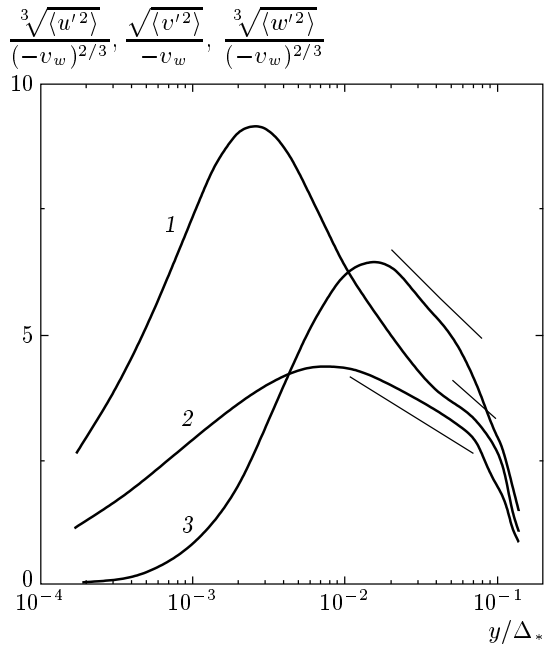


Рис. 4. Профили среднеквадратичных пульсаций в асимптотическом пограничном слое по данным работ [22, 23]: 1 —  $\langle u'^2 \rangle$ , 2 —  $\langle v'^2 \rangle$ , 3 —  $\langle w'^2 \rangle$

Форма экспериментальных [21] и расчетных [22, 23] профилей скорости и касательного напряжения, построенных на рис. 2, 3 в переменных подобия для внешней области, находится в хорошем соответствии с теорией. Эти же данные в переменных подобия для пристеночной области не следуют законам подобия (14), (15). Профили скорости имеют логарифмический участок с наклоном, близким к величине  $1/\kappa$ , однако заметно сдвинуты по отношению к профилю скорости для непроницаемой пластины. Для расчетных данных [22, 23] такое расхождение можно объяснить низким числом Рейнольдса, при котором проводилось моделирование, для данных эксперимента [21] — погрешностями измерений скорости в пристеночной области, которые, как указано в работе [24], дает при вдуве и отсосе методика, использующая трубку Пито–Прандтля.

На рис. 4 представлены профили среднеквадратичных пульсаций скорости в асимптотическом пограничном слое с отсосом [22, 23]. Для сравнения там же даны отрезки прямых с наклоном, соответствующим правым частям асимптотических представлений (56), в которых все постоянные выбраны по данным, известным для непроницаемой пластины. Как видно на рис. 4, по крайней мере кривые 2 и 3, отвечающие пульсациям в направлении осей  $y$  и  $z$ , имеют выраженные логарифмические участки.

### 6.4. Формпараметры пограничного слоя

Профиль скорости во внешней области на основании (20) можно представить в виде

$$\frac{U_\varepsilon - u}{v_w} = g_\eta(s, \eta) + \varepsilon g_1(s, \eta, \varepsilon),$$

$$g_1(s, \eta, \varepsilon) = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда для интегральных параметров пограничного слоя получим

$$\frac{\delta^*}{B\Delta} = g(s, \infty) + \varepsilon I_1(s),$$

$$\frac{\theta}{B\Delta} = g(s, \infty) + \varepsilon I_1(s) + Bg(s, \infty)I(s) + O(\varepsilon^3), \quad (60)$$

$$\frac{\delta^{**}}{2B\Delta} = g(s, \infty) + \varepsilon I_1(s) + \frac{3B}{2}g(s, \infty)I(s) + O(\varepsilon^3),$$

$$I_1(s) = \int_0^\infty g_1(s, \eta, \varepsilon) d\eta,$$

$$I(s) = - \int_0^\infty \frac{[g_\eta(s, \eta)]^2 d\eta}{g(s, \infty)}.$$

Здесь  $\theta$ ,  $\delta^{**}$  — толщины потери, соответственно, импульса и энергии. Из (60) следуют соотношения

$$\frac{1}{B} \left( 1 - \frac{\theta}{\delta^*} \right) = I(s) + O(\varepsilon),$$

$$\frac{1}{B} \left( \frac{2}{3} - \frac{\delta^{**}}{\delta^*} \right) = I(s) + O(\varepsilon),$$

которые вместе с (40) дают зависимость формпараметров пограничного слоя от скорости отсоса и трения на пластине. Эти соотношения можно представить в виде

$$\frac{1 - \theta/\delta^*}{\sqrt{c_f/2 + B} - B} = \Phi(q) + O(\sqrt{c_f}),$$

$$\frac{2/3 - \delta^{**}/\delta^*}{\sqrt{c_f/2 + B} - B} = \Phi(q) + O(\sqrt{c_f}), \quad (61)$$

$$\Phi(q) = \frac{qI(s)}{q - 1}.$$

На основании (32) и (50) в предельном случае непроницаемой пластины

$$\Phi(0) = \int_0^\infty \frac{f'^2 d\eta}{F_1^3}.$$

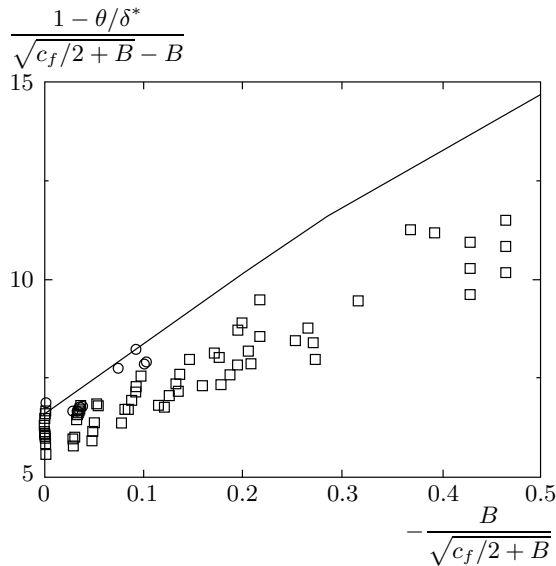


Рис. 5. Экспериментальные значения формпараметра пограничного слоя [18, 19] в переменных подобию и расчетная кривая. Обозначения экспериментальных точек такие же, как на рис. 1

Этот интеграл известен как формпараметр Клаузера [20]; вычисления, основанные на формуле Коулса (43), дают

$$\Phi(0) = 6.61. \tag{62}$$

Другому предельному случаю асимптотического пограничного слоя отвечает величина

$$\Phi(-\infty) = \frac{\varkappa \int_0^\infty h^4 d\eta}{16F_1 D}.$$

Численное значение  $\Phi(-\infty) = 39.3$ . Используя его с помощью (61) при  $B = -0.00361$  можно определить величину формпараметра для асимптотического пограничного слоя  $\delta^*/\theta = 1.17$ ; согласно расчетным данным [22, 23] эта величина равна 1.29.

На рис. 5 в переменных подобию (61) представлены экспериментальные значения формпараметра пограничного слоя [18, 19]. Там же дана расчетная кривая, полученная в разд. 10. По результатам измерений [18] формпараметр Клаузера лежит в интервале 6.4–6.9, измерения [19] дают значения 5.6–6.4, что заметно ниже рекомендованной в [20] величины 6.8 и значения (62), принятого в настоящей работе. Данные [19], полученные при отсосе, также лежат ниже расчетной кривой.

### 7. РЕЖИМ, БЛИЗКИЙ К РЕЖИМУ УМЕРЕННОГО ОТСОСА

Сумма

$$\lambda f' - h^2/4$$

двух предельных значений функции  $g_\eta$  является решением уравнения (22) с нулевой правой частью. Сделаем в уравнении (22) подстановку

$$g_\eta = \lambda f' - h^2/4 + \varphi_\eta \tag{63}$$

и от переменной  $s$  перейдем к независимой переменной  $\tau = 1/\lambda$ . Пара функций  $\varphi(\tau, \eta)$  и

$$\Omega(\tau) = -\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\tau}{\tau^2 ds} \tag{64}$$

будет удовлетворять краевой задаче

$$(\Phi + \tau h) \left( \eta \sqrt{S} \varphi_{\eta\eta} \right)_\eta + \tau \left[ \left( \eta \sqrt{S} \varphi_{\eta\eta} \right)^2 \right]_\eta = \Omega \left( \tau^2 \varphi_{\tau\eta} - f' \right), \tag{65}$$

$$\varphi(\tau, 0) = \varphi_\eta(\tau, \infty) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta \sqrt{S} \varphi_{\eta\eta} = 0, \tag{66}$$

$$s(\tau) = A(\tau) - \ln F_1 - C_0 - 2\varkappa \sqrt{t(\tau)}, \tag{67}$$

$$t(\tau) = \frac{F_1^2}{\tau^2} + \frac{F_1 D}{\varkappa \tau} - \frac{F_1^2 \Omega(\tau)}{\tau} - \frac{\varphi(\tau, \infty)}{\tau} - \tau \Omega(\tau) \frac{d\varphi(\tau, \infty)}{d\tau}, \quad 0 \leq \tau < \infty. \tag{68}$$

Выражение (68) есть соотношение (31), переписанное с учетом (63), при этом использовано равенство (58).

#### 7.1. Асимптотика решения краевой задачи

Асимптотику решения краевой задачи (65)–(67) при  $\tau \rightarrow 0$  будем искать в виде регулярных разложений по переменной  $\tau$ :

$$\varphi(\tau, \eta) = \varphi_0(\eta) + \tau \varphi_1(\eta) + O(\tau^2), \tag{69}$$

$$s(\tau) = \sigma_1 \tau^{-1} + \sigma_2 + O(\tau). \tag{70}$$

Продифференцировав (70), с учетом определения функции  $\Omega(\tau)$  (64) получим

$$\Omega(\tau) = \Omega(0) + O(\tau^2). \tag{71}$$

На основании (68), (69), (71) будем иметь

$$\sqrt{t} = F_1 \tau^{-1} + O(1), \quad \tau \rightarrow 0. \quad (72)$$

Переходя в (32) к пределу при  $\tau \rightarrow 0$  и принимая во внимание (40), (72), получим

$$\gamma = -f'/F_1 + O(\tau).$$

Следовательно,  $A(\tau) = A_0 + O(\tau)$  и дифференцирование равенства (67) с учетом (72) и (64) дает

$$\Omega(0) = 1/2\kappa F_1.$$

Подстановка (69), (71) в (65) дает для функций  $\varphi_0, \varphi_1$  линейные обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\Phi \left( \eta \sqrt{S} \varphi_0'' \right)' + \frac{f'}{2\kappa F_1} = 0, \quad (73)$$

$$\Phi \left( \eta \sqrt{S} \varphi_1' \right)' + \left[ (\eta \varphi_0'')^2 S \right]' + h \left( \eta \sqrt{S} \varphi_0'' \right)' = 0. \quad (74)$$

Решение уравнения (73), удовлетворяющее условиям в набегающем потоке (66), есть

$$\varphi_0' = \int_{\eta}^{\infty} \frac{N_1 d\eta}{2\kappa \eta \sqrt{S}} = \frac{hN_1 - N_2}{2\kappa}, \quad (75)$$

$$N_1 = - \int_{\eta}^{\infty} \frac{f' d\eta}{F_1 \Phi}, \quad N_2 = - \int_{\eta}^{\infty} \frac{hf' d\eta}{F_1 \Phi}.$$

Удовлетворяющее условиям на внешней границе слоя решение уравнения (74) с учетом (75) имеет вид

$$\varphi_1' = - \int_{\eta}^{\infty} \frac{N_3 d\eta}{2\kappa F_1 \eta \sqrt{S}} = \frac{N_4 - hN_3}{2\kappa F_1}, \quad (76)$$

$$N_3 = \int_{\eta}^{\infty} \left( \frac{N_1}{\kappa} - h \right) \frac{f' d\eta}{\Phi^2},$$

$$N_4 = \int_{\eta}^{\infty} \left( \frac{N_1}{\kappa} - h \right) \frac{hf' d\eta}{\Phi^2}.$$

Поскольку функция  $S$  задана выражением (42), второй интеграл (25) может быть вычислен в конечном виде:

$$\Phi = 2\sqrt{f - f(\infty) - \eta f'}.$$

Для вычисления необходимых в дальнейшем величин  $\varphi_0(\infty), \varphi_1(\infty)$  используем первый интеграл уравнения (65), который имеет вид

$$\begin{aligned} & \eta \sqrt{S} (\Phi + \tau h) \varphi_{\eta\eta} + \tau \left( \eta \sqrt{S} \varphi_{\eta\eta} \right)^2 + \\ & + (\tau + \eta) \varphi_{\eta} - \varphi + \Omega (f - \tau^2 \varphi_{\eta}) = \\ & = \Omega \left[ f(\infty) - \tau^2 \frac{d\varphi(\tau, \infty)}{d\tau} \right] - \varphi(\tau, \infty). \end{aligned} \quad (77)$$

Подставим (69), (71) в уравнение (77) и, принимая во внимание (75), (76), найдем значение левой части уравнения (77) при  $\eta = 0$ . В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_0(\infty) &= \frac{F_1}{\kappa} \left( N_1(0) - \frac{1}{2} \right), \\ \varphi_1(\infty) &= \frac{N_2(0) - 2N_3(0)}{2\kappa} - \frac{N_1^2(0)}{4\kappa^2}. \end{aligned} \quad (78)$$

Аналогичным образом из (77) найдем асимптотическое разложение заданной равенством (68) величины  $t$ , откуда получим

$$\begin{aligned} \sqrt{t} &= \frac{F_1}{\tau} + a_0 + \frac{a_1 \tau}{F_1} + O(\tau^2), \quad \tau \rightarrow 0, \\ a_0 &= \frac{D - N_1(0)}{2\kappa}, \\ a_1 &= \frac{2N_3(0) - N_2(0)}{4\kappa} - \frac{D^2 - 2DN_1(0)}{8\kappa^2}. \end{aligned} \quad (79)$$

## 7.2. Асимптотика универсальных функций

Теперь разложение функции  $\gamma$  для режима, близкого к режиму умеренного отсоса, будем искать в виде

$$\begin{aligned} \gamma(q, \eta) &= - \frac{f'(\eta)}{F_1} + \frac{\gamma_1(\eta)}{\sqrt{t}} + \frac{\gamma_2(\eta)}{t} + O(t^{-3/2}), \\ t &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (80)$$

Подставим (80) в равенство (32) и, используя разложение (79), сопоставим полученное разложение с (63), (69). В результате, принимая во внимание (75), (76), получим

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{h^2}{4} - \frac{f'^2}{4F_1^2} + \frac{a_0 f'}{F_1} - \frac{hN_1 - N_2}{2\kappa}, \\ \gamma_2 &= \frac{(\gamma_1 + 2a_1) f'}{2F_1} + \frac{hN_3 - N_4}{2\kappa}. \end{aligned} \quad (81)$$

Отсюда с учетом выражений для коэффициентов  $a_0, a_1$  и асимптотических представлений (26), (29) найдем

$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= \frac{D^2 - 2DN_1(0)}{4\kappa^2} + \frac{N_2(0)}{2\kappa}, \\ \gamma_2(0) &= \frac{DN_3(0)}{2\kappa^2} - \frac{N_4(0)}{2\kappa}. \end{aligned} \quad (82)$$

Таким образом, первый член разложения (80) имеет логарифмическую асимптотику, а функции  $\gamma_1, \gamma_2$  особенностей на стенке не имеют. Расчеты, выполненные на основе формулы (43), дают следующие значения величин, входящих в (82):

$$A_0 = 0.230, \quad A_\infty = -1.809, \quad N_1(0) = 0.601, \\ N_2(0) = 6.233, \quad N_3(0) = 3.354, \quad N_4(0) = 38.35.$$

Асимптотическое разложение функции  $A$ , входящей в (33), теперь можно записать в виде

$$A = A_0 - \varkappa \gamma_1(0)t^{-1/2} - \varkappa \gamma_2(0)t^{-1} + O(t^{-3/2}), \quad (83) \\ t \rightarrow \infty.$$

Вычислим асимптотику функций  $\Phi_1, \Phi_2$ , определенных соотношениями (46), (47). Интегрируя (63), получим с учетом равенства (58) и разложения (69)

$$g(\tau, \infty) = -F_1^2 \tau^{-1} - F_1 D / \varkappa + \varphi_0(\infty) + \varphi_1(\infty) \tau + O(\tau^2), \\ \tau \rightarrow 0.$$

С помощью (79) перейдем в этом разложении к переменной  $t$ . Используя (67), (78), (83), получим асимптотику функции  $\Phi_1$  в следующем виде:

$$\Phi_1(t) = \Phi_1^\infty(t) + b_1 t^{-1/2} + b_2 t^{-1} + O(t^{-3/2}), \\ t \rightarrow \infty, \quad (84)$$

$$\Phi_1^\infty(t) = -2\varkappa \sqrt{t} + \ln \sqrt{t} + A_0 - C_0, \\ b_1 = \frac{D - N_1(0) + 1}{2\varkappa} - \varkappa \gamma_1(0),$$

$$b_2 = \frac{2N_3(0) - N_2(0)}{4\varkappa} + \\ + \frac{N_1^2(0) - 2D + 2N_1(0) - 1}{8\varkappa^2} - \varkappa \gamma_2(0).$$

Интегрируя (47) по частям, будем иметь

$$\Phi_2 = s + \ln \tau - \Omega(0)\tau + \frac{3}{2}\Omega^2(0)\tau^2 + O(\tau^3), \quad \tau \rightarrow 0.$$

Переходя в этом разложении с помощью (79) к переменной  $t$  и принимая во внимание (67), (83), найдем

$$\Phi_2(t) = \Phi_2^\infty(t) + \left(b_1 - \frac{1}{\varkappa}\right)t^{-1/2} + \\ + \left(b_2 + \frac{1}{2\varkappa^2}\right)t^{-1} + O(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (85)$$

$$\Phi_2^\infty(t) = -2\varkappa \sqrt{t} - \ln \sqrt{t} + A_0 - C_0.$$

### 8. РЕЖИМ, БЛИЗКИЙ К РЕЖИМУ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Для исследования другого предельного случая  $\lambda \rightarrow 0$ , т.е. режима течения, близкого к режиму асимптотического пограничного слоя, сделаем в уравнении (22) подстановку

$$g_\eta = -h^2/4 + \lambda \psi_\eta \quad (86)$$

и от переменной  $s$  перейдем к независимой переменной  $\lambda$ . Пара функций  $\psi(\lambda, \eta)$  и

$$\Omega_1(\lambda) = -\frac{d\lambda}{ds} = \Omega(\lambda^{-1}) \quad (87)$$

будет удовлетворять краевой задаче

$$h \left( \eta \sqrt{S} \psi_{\eta\eta} \right)_\eta + \lambda \left[ \left( \eta \sqrt{S} \psi_{\eta\eta} \right)_\eta^2 \right]_\eta + \lambda \eta \psi_{\eta\eta} + \\ + \Omega_1(\lambda \psi_{\lambda\eta} + \psi_\eta) + \frac{h}{2\sqrt{S}} = 0, \quad (88)$$

$$\psi(\lambda, 0) = \psi_\eta(\lambda, \infty) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta \sqrt{S} \psi_{\eta\eta} = 0, \quad (89)$$

$$s(\lambda) = A(\lambda) - \ln F_1 - C_0 - 2\varkappa \sqrt{t(\lambda)}, \quad (90)$$

$$t(\lambda) = \frac{F_1 D}{\varkappa} \lambda + \lambda \psi(\lambda, \infty) [\Omega_1(\lambda) - \lambda] + \\ + \lambda^2 \Omega_1(\lambda) \frac{d\psi(\lambda, \infty)}{d\lambda}, \quad 0 \leq \lambda < \infty. \quad (91)$$

#### 8.1. Задача на собственные значения

Как следует из (88), функция  $\psi_0(\eta) \equiv \psi(0, \eta)$  есть решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$h \left( \eta \sqrt{S} \psi_0'' \right)' + \frac{\omega \psi_0'}{F_1} + \frac{h}{2\sqrt{S}} = 0, \\ \omega = F_1 \Omega_1(0), \quad (92)$$

$$\psi_0(0) = \psi_0'(\infty) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta \sqrt{S} \psi_0'' = 0.$$

Переходя в (92) к независимой переменной  $h$ , для функции  $z(h) = \psi_0'$  получим уравнение

$$\frac{d^2 z}{dh^2} + \frac{\omega \eta \sqrt{S} z}{F_1 h} + \frac{\eta}{2} = 0,$$

$$z(0) = \frac{dz(0)}{dh} = 0, \quad 0 \leq h < \infty,$$

решение которого вблизи стенки можно представить в виде

$$z = F_1 [Z_1(\omega)h + Z_2(\omega)] + O(e^{-\varkappa h}), \quad h \rightarrow \infty. \quad (93)$$

Здесь  $Z_1(\omega)$ ,  $Z_2(\omega)$  — некоторые функции, а оценка остаточного члена следует из (29). Следовательно,  $\psi'_0$  имеет логарифмическую асимптотику на стенке.

Решая соотношение (32) с учетом (86) как квадратное уравнение, найдем функцию  $\gamma$ :

$$\gamma = \sqrt{h^2 - 4\lambda\psi_\eta + 4t - 2\sqrt{t}}.$$

Отсюда, принимая во внимание асимптотические представления (29), (33), (93), будем иметь

$$A = A_\infty + 2\varkappa F_1 \lambda Z_1(\omega) + 2\varkappa \sqrt{t} + O(\lambda^2), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (94)$$

Подставим это выражение в условие замыкания (90) и продифференцируем полученное равенство по переменной  $\lambda$ ; принимая во внимание (87), придем к уравнению для параметра  $\omega$ :

$$2\varkappa\omega Z_1(\omega) + 1 = 0. \quad (95)$$

Таким образом, для определения главных членов асимптотики искомых функций получена задача на собственные значения (92), (95).

Перенесем два последних слагаемых из левой в правую часть уравнения (92) и решим, учитывая условия на внешней границе слоя, полученное равенство как уравнение второго порядка с известной правой частью. Уравнение с начальными условиями сводится, таким образом, к эквивалентному интегральному уравнению

$$\psi'_0(\eta) = \omega \int_\eta^\infty \left[ 1 - \frac{h(\eta)}{h(\eta_1)} \right] \frac{\psi'_0(\eta_1)}{F_1} d\eta_1 + f'(\eta), \quad (96)$$

которое, в частности, позволяет представить искомую функцию в виде ряда по параметру  $\omega$ . Два первых члена ряда есть

$$\psi'_0(\eta) = f'(\eta) + \omega F_1 \left[ h(\eta)M(\eta) - 1 - \frac{f(\eta)}{F_1^2} \right] + O(\omega^2),$$

$$\omega \rightarrow 0, \quad M = - \int_\eta^\infty \frac{f' d\eta}{F_1^2 h}.$$

Отсюда, используя (26), (29), найдем

$$Z_1(\omega) = -1 + M(0)\omega + O(\omega^2), \quad \omega \rightarrow 0,$$

$$M(0) = 0.40.$$

Численное решение интегрального уравнения (96) показывает, что на положительной полуоси

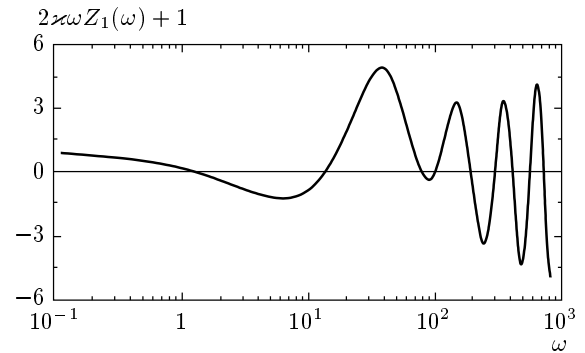


Рис. 6. График правой части уравнения (95)

уравнение (95) имеет бесконечно много корней (график правой части уравнения дан на рис. 6), на отрицательной полуоси корней нет. Наименьший корень равен  $\omega = 1.423$ .

Таким образом, искомая асимптотика не может быть однозначно определена только из анализа решения краевой задачи для параболического уравнения (88)–(90) в окрестности  $\lambda = 0$ . Окончательный выбор величины  $\omega$  будет сделан в результате численного решения задачи, учитывающего начальные условия при  $\lambda = \infty$  (см. разд. 10).

### 8.2. Асимптотика универсальных функций

Из равенства (91) будем иметь

$$t = \left[ \frac{F_1 D}{\varkappa} + \frac{\omega\psi_0(\infty)}{F_1} \right] \lambda + O(\lambda^2), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (97)$$

Асимптотику функции  $\Phi_1$ , заданной соотношением (46), получим из (86), (90), (94):

$$\Phi_1 = D_1 + \ln \frac{D}{\varkappa} - \left[ \frac{F_1}{\omega} + \frac{\varkappa\psi_0(\infty)}{F_1 D} \right] \lambda + O(\lambda^2),$$

$$\lambda \rightarrow 0, \quad D_1 = A_\infty - C_0.$$

Это выражение с учетом (97) принимает вид

$$\Phi_1 = D_1 + \ln \frac{D}{\varkappa} - \frac{\varkappa t}{\omega D} + O(t^2), \quad t \rightarrow 0. \quad (98)$$

Исходя из соотношений (47), (90), (94), для функции  $\Phi_2$  будем иметь

$$\exp \Phi_2 = - \frac{\exp D_1}{\omega} \ln \lambda + O(1), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Или с учетом (97)

$$\exp \Phi_2 = - \frac{\exp D_1}{\omega} \ln t + O(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (99)$$

Исключив из (98), (99) параметр  $t$ , получим зависимость толщины вытеснения от продольной координаты

$$Z_{\delta^*} = \frac{D}{\varkappa} \exp D_1 - \frac{1}{\omega} \exp (D_1 - Z_x \omega \exp D_1) + \dots, \\ Z_x \rightarrow \infty.$$

Из полученных соотношений видно, что режим асимптотического пограничного слоя достигается не на конечном расстоянии от передней кромки, а лишь в пределе, при  $R_x \rightarrow \infty$ . При этом величина  $c_f/2 + B$  и разность между текущим и предельным значениями толщины вытеснения экспоненциально стремятся к нулю.

### 9. ЗАКОН ТРЕНИЯ. ПРОФИЛИ СКОРОСТИ И РЕЙНОЛЬДСОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

#### 9.1. Универсальный закон трения

В работе [11] получены формулы для трения на пластине при умеренном отсосе и в частном случае непроницаемой пластины, которые можно записать в виде

$$W_{\{x^{\delta^*}\}} \equiv \frac{(c_f/2)^{1/2}}{(c_f/2 + B)^{\pm 1/2}} \exp \left[ \frac{2\varkappa}{B} \left( \sqrt{\frac{c_f}{2}} - \sqrt{\frac{c_f}{2} + B} \right) - A_0 + C_0 \right] R_{\{x^{\delta^*}\}} = O(\sqrt{c_f}). \quad (100)$$

Объединим теперь зависимости (100) и (48) в один универсальный закон трения. Подставим в (100) выражение для коэффициента трения (34) и при  $t = O(1)$  перейдем к пределу при  $B \rightarrow -0$ . В результате получим

$$\ln W_{\{x^{\delta^*}\}} = \ln Z_{\{x^{\delta^*}\}} - \Phi_{\{2\}}^{\infty}(t) + O(\sqrt{-B}). \quad (101)$$

Здесь функции  $\Phi_1^{\infty}$ ,  $\Phi_2^{\infty}$  задаются выражениями (84), (85). Универсальный закон трения, справедливый во всем диапазоне изменения скорости отсоса, имеет вид

$$\ln W_{\{x^{\delta^*}\}} = \Gamma_{\{1\}}(t) + O(\sqrt{c_f}), \quad (102)$$

$$\Gamma_i(t) \equiv \Phi_i(t) - \Phi_i^{\infty}(t), \quad i = 1, 2.$$

При умеренном отсосе, которому соответствует  $1/t = O(B)$ , соотношения (102) в силу асимптотических представлений (84), (85) совпадают с (100). При сильном отсосе, когда  $t = O(1)$ , равенство (102) на основании (101) равносильно (48).

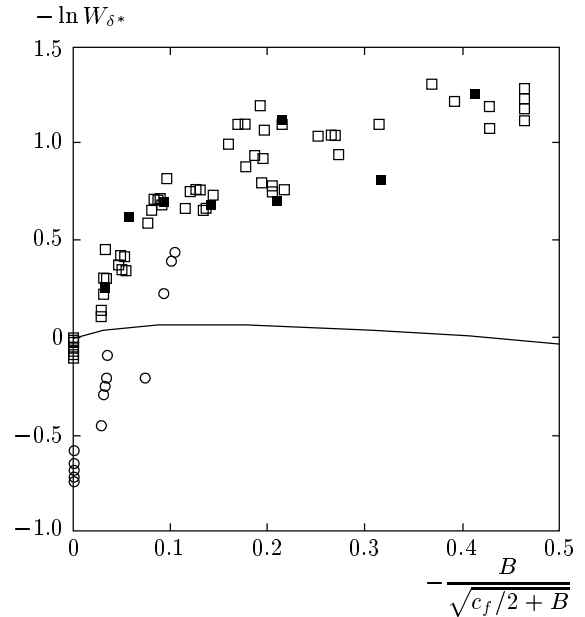


Рис. 7. Данные измерений [18, 19] коэффициента трения на непроницаемой пластине и пластине с отсосом в универсальных переменных и расчетная кривая. Обозначения экспериментальных точек такие же, как на рис. 1

Для режима, близкого к режиму умеренного отсоса, из асимптотических представлений (84), (85) получим

$$\Gamma_1(t) = b_1 t^{-1/2} + b_2 t^{-1} + O(t^{-3/2}), \\ \Gamma_2(t) = \left( b_1 - \frac{1}{\varkappa} \right) t^{-1/2} + \left( b_2 + \frac{1}{2\varkappa^2} \right) t^{-1} + O(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (103)$$

Для режима, близкого к режиму асимптотического пограничного слоя, из (98), (99) будем иметь

$$\Gamma_1(t) = -\ln \sqrt{t} - D + \ln \frac{D}{\varkappa} + 2\varkappa \sqrt{t} - \frac{\varkappa t}{\omega D} + O(t^2), \\ \Gamma_2(t) = \ln \sqrt{t} + \ln(-\ln t) - D - \ln \omega + 2\varkappa \sqrt{t} + O\left(\frac{1}{\ln t}\right), \quad t \rightarrow 0. \quad (104)$$

На рис. 7 результаты измерений [18, 19] даны в форме универсального закона трения (102). Там же построена величина  $-\Gamma_1$  как функция  $t^{-1/2} = -q$ , полученная в результате численного решения краевой задачи. В соответствии с асимптотикой (103)

расчетная кривая имеет в начале координат положительный наклон  $-b_1 = 1.19$ , достигает максимума при  $-q = 0.15$  и при  $-q \rightarrow \infty$  на основании (104) стремится к  $-\infty$ .

Данные измерений [18] заметно отличаются от расчетных значений даже для случая непроницаемой пластины. Экспериментальные точки [19] при  $q = 0$  располагаются достаточно близко к началу координат, но с ростом отсоса существенно отклоняются от теоретической кривой.

Использование переменной  $W_{\delta^*}$  позволяет выделить главную часть зависимости между числом Рейнольдса, скоростью отсоса и коэффициентом трения, так что при  $q = O(1)$  функция  $\Gamma_1$  представляет собой относительно малую поправку к известному главному члену (её экспериментальные значения вычисляются как разность двух больших величин). Поэтому для величины  $\sqrt{c_f/2}$  разница между данными измерений [19] и теоретическими значениями, определенными с помощью закона трения (102), не превышает 7%. Расхождение теории и эксперимента можно объяснить отмеченной выше неточностью измерений скорости вблизи стенки, которые в работе [19] также выполнены с помощью трубки Пито–Прандтля.

Перенесем функции  $\Phi_1^\infty, \Phi_2^\infty$  в левую часть равенств (102). Учитывая выражение (48) для параметра  $t$ , после приведения подобных членов получим другую форму универсального закона трения:

$$\ln Z_{\{x^*\}}^* = \Phi_{\{2\}}(t) + O(\sqrt{c_f}), \quad (105)$$

$$Z_{\{x^*\}}^* \equiv (-B)^{\mp 1} \sqrt{\frac{c_f}{2}} \exp\left(\frac{2\kappa\sqrt{c_f/2}}{B}\right) R_{\{x^*\}}^*.$$

На основании равенства (101) при  $t = O(1)$  переменные  $Z_x, Z_{\delta^*}$  и  $Z_x^*, Z_{\delta^*}^*$  совпадают с точностью  $O(\sqrt{-B})$ . Однако, в отличие от правила подобия (48), справедливого только в области сильного отсоса, универсальный закон (105) описывает экспериментальные данные во всем диапазоне скоростей отсоса. Это показывает рис. 8а, где в переменных (105) представлены те же данные, что на рис. 1а. Теперь экспериментальные точки следуют одной кривой во всем диапазоне параметров и достаточно близки к построенной расчетной зависимости. В переменных (105) различия между экспериментальными данными [18, 19] и теоретической кривой менее заметны, чем в переменных (102), однако наибольшее расхождение также наблюдается при сильном отсосе.

На рис. 8б распределение толщины вытеснения представлено в модифицированных перемен-

ных (105), что также позволяет уменьшить разброс экспериментальных точек по сравнению с рис. 1б и получить удовлетворительное согласование с расчетными данными во всем диапазоне параметров.

Сформулированный выше универсальный закон трения можно вывести другим способом. Сложим почленно равенства (14) и (49), учитывая при этом асимптотические представления (17), (33) и связь между переменными,

$$y_+ = \sqrt{\frac{c_f}{2}} R_\Delta \eta, \quad (106)$$

и перейдем к двойному пределу  $y_+ \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0$ . В результате будем иметь

$$\ln R_\Delta = \frac{2\kappa}{B} \left( \sqrt{\frac{c_f}{2}} + B - \sqrt{\frac{c_f}{2}} \right) - \ln \sqrt{\frac{c_f}{2}} + A(q) - C_0 - \ln F_1 + O(\sqrt{c_f}). \quad (107)$$

Принимая во внимание выражение для толщины вытеснения (45), а также равенства (41) и (46), получим, что выражение (107) дает тот же результат, что и соответствующее выражение (105).

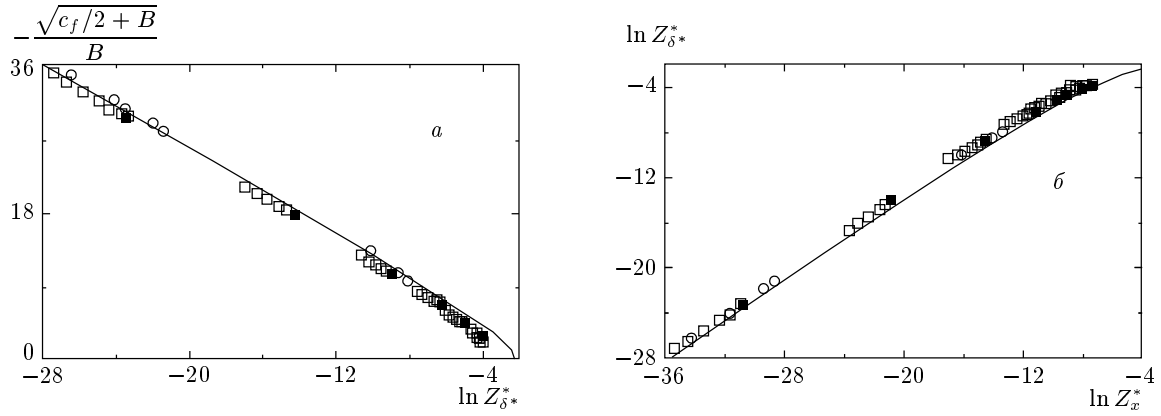
### 9.2. Профили скорости и рейнольдсовых напряжений

Закон подобия (49) описывает распределение скорости во всем пограничном слое, кроме вязкого подслоя вблизи стенки, а закон подобия (14) справедлив в пристеночной области и той части внешней области, где функция  $E$  имеет логарифмический профиль. Составное разложение, объединяющее представление (49) и (14), можно записать в двух формах:

$$\begin{aligned} E &= u_+^0(y_+) + w(q, \eta) + O(\sqrt{c_f}), \\ E_e - E &= \gamma(q, \eta) - w_+(y_+) + O(\sqrt{c_f}), \\ 0 &\leq \eta < \infty. \end{aligned} \quad (108)$$

Функции  $u_+^0(y_+)$  и  $\gamma(q, \eta)$  задают распределения скорости в пристеночной и внешней областях, а  $w_+(y_+)$  и  $w(q, \eta)$  — отклонение этих распределений от логарифмического закона, соответственно, в вязком подслое и вблизи внешней границы пограничного слоя. При  $y_+ = O(1), R_\Delta \rightarrow \infty$  первое соотношение (108) совпадает с (14) в силу связи между переменными  $\eta$  и  $y_+$  (106) и асимптотики функции  $w(q, \eta)$  (33). При





**Рис. 8.** Распределение коэффициента трения на пластине (а) и толщины вытеснения (б) в универсальных переменных по результатам расчета (сплошные кривые) и экспериментальным данным [18, 19]. Обозначения экспериментальных точек такие же, как на рис. 1

$1/\eta = O(1)$ ,  $R_\Delta \rightarrow \infty$ , учитывая асимптотику (17), будем иметь

$$E = \frac{1}{\varkappa} \left( \ln \eta + \ln R_\Delta + \ln \sqrt{\frac{c_f}{2}} + C_0 \right) + w(q, \eta) + O(\sqrt{c_f}).$$

Принимая во внимание выражения (49), (107), получим, что последнее равенство совпадает с (33). Аналогичным образом доказывается равномерная пригодность второго представления (108).

Как следует из (107), масштабный коэффициент  $R_\Delta \sqrt{c_f/2}$ , который согласно (106) связывает поперечные координаты во внешней и пристеночной областях, является функцией двух аргументов,  $v_+$  и  $q$ . Поэтому на основании (108) полный профиль скорости также зависит от двух параметров подобия,  $v_+$  и  $q$ .

Построим теперь составные разложения, описывающие полные профили касательного напряжения и среднеквадратичной поперечной пульсации скорости. Используя асимптотику (33), представим правые части выражений (53), (54) в виде

$$Q(q, \eta) \sqrt{S(\infty, 0, \eta)} = P(q, \eta) + \Pi(q, \eta),$$

$$Q(q, \eta) \sqrt{S_2(\infty, 0, \eta)} = \frac{P(q, \eta)}{\sigma_2} + \Pi_2(q, \eta),$$

$$P(q, \eta) = \frac{q}{2\varkappa(1-q)} [\ln \eta + A(q) - \ln F_1] + \frac{1}{1-q},$$

$$\Pi(q, \eta) = O(\eta^\alpha), \quad \Pi_2(q, \eta) = O(\eta^\alpha), \quad \eta \rightarrow 0.$$

Объединяя соотношения подобия (15), (53) и (16),

(54), получим представления касательного напряжения:

$$\frac{\sqrt{\nu \partial u / \partial y - \langle u'v' \rangle}}{U_e \left( \sqrt{c_f/2 + B} - B \right)} = Q(q, \eta) \sqrt{S(\infty, 0, \eta)} + \frac{qw_+(y_+)}{2(1-q)} + O(\sqrt{c_f}),$$

$$\frac{2}{v_+} \left( \sqrt{\frac{du_+}{dy_+} - \langle u'v' \rangle_+} - 1 \right) = u_+^0(y_+) + \frac{2(1-q)\Pi(q, \eta)}{q} + O(\sqrt{c_f}),$$

и среднеквадратичной поперечной пульсации скорости:

$$\frac{\sqrt{\langle v'^2 \rangle}}{U_e \left( \sqrt{c_f/2 + B} - B \right)} = Q(q, \eta) \sqrt{S_2(\infty, 0, \eta)} + \frac{qw_+(y_+)}{2\sigma_2(1-q)} + \frac{q}{v_+(1-q)} \left( \sqrt{\langle v'^2 \rangle_+^0(y_+)} - \frac{1}{\sigma_2} \right) + O(\sqrt{c_f}),$$

$$\sqrt{\langle v'^2 \rangle_+} = \sqrt{\langle v'^2 \rangle_+^0(y_+)} + \frac{v_+}{2\sigma_2} u_+^0(y_+) + \frac{v_+(1-q)}{q} \Pi_2(q, \eta) + O(\sqrt{c_f}), \quad 0 \leq \eta < \infty,$$

равномерно пригодные во всем пограничном слое.

**10. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ**

Для численных расчетов использовались две формулировки краевой задачи. Сначала на отрезке  $0 \leq \tau \leq a$  ( $0.8 \leq a \leq 1.5$ ) решалась задача (65)–(67), затем для  $0 \leq \lambda \leq 1/a$  — задача (88)–(90).

Перепишем (65) в виде

$$\left(\eta\sqrt{S}\varphi_{\eta\eta}\right)_{\eta} = G_1, \tag{109}$$

$$G_1(\tau, \eta) = \frac{\Omega(\tau^2\varphi_{\tau\eta} - f')}{\Phi + \tau h + 2\tau\eta\sqrt{S}\varphi_{\eta\eta}}$$

и решим (109) как уравнение второго порядка с известной правой частью. Учитывая условия (66) на внешней границе слоя, получим интегро-дифференциальное уравнение для функции  $\varphi_{\eta}$ :

$$\varphi_{\eta}(\tau, \eta) = \int_{\eta}^{\infty} [h(\eta) - h(\eta_1)] G_1(\tau, \eta_1) d\eta_1.$$

Чтобы искомая функция не имела особенности на стенке, сделаем замену

$$\varphi_{\eta} = hy.$$

В результате для  $y(\tau, \eta)$  получим уравнение

$$y(\tau, \eta) = \int_{\eta}^{\infty} \left[1 - \frac{h(\eta_1)}{h(\eta)}\right] G_2(\tau, \eta_1) d\eta_1, \tag{110}$$

$$G_2(\tau, \eta) = \frac{\Omega(\tau^2hy_{\tau} - f')}{\Phi + \tau h + 2\tau\eta\sqrt{S}hy_{\eta} - 2\tau y}$$

Из (67) следует условие замыкания

$$\Omega(\tau) = \left[2\kappa F_1 + 2\kappa\tau^2 \frac{dy(\tau, 0)}{d\tau}\right]^{-1}. \tag{111}$$

Система уравнений (110), (111) для двух функций  $y(\tau, \eta)$  и  $\Omega(\tau)$  решалась численно методом итераций. Разностная сетка в прямоугольнике  $0 \leq \tau \leq a$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$  имела равномерное разбиение по  $\tau$  и  $\eta^2$ . При заданной функции  $\Omega(\tau)$  (на первом шаге итераций  $\Omega(\tau) \equiv \Omega(0)$ ) для определения  $y(\tau, \eta)$  из (110) на каждом слое по переменной  $\tau$  интеграл заменялся суммой по формуле Грегори (модифицированная формула трапеций, точная для многочленов третьей степени), что позволяло последовательно для всех  $\eta$  по явной формуле вычислить искомую функцию.

<sup>2)</sup> Поскольку, как сказано выше, для вычисления функции  $S(\infty, 0, \eta)$  используется формула Коулса (43), переменная  $\eta$  изменяется на конечном интервале  $[0, 1]$ .

Для аппроксимации частной производной по  $\tau$  использовались значения функции на текущем и предыдущем слоях по  $\tau$  (схема, таким образом, полностью неявная по  $\tau$ ). После определения  $y(\tau, \eta)$  с помощью численного дифференцирования со сглаживанием из (111) вычислялись новые значения  $\Omega(\tau)$ .

Расчет показал, что функция  $\Omega(\tau)$  на интервале  $0 \leq \tau \leq a$  почти постоянна, и итерационный процесс можно завершить после третьего шага.

Аналогичным образом решалась краевая задача (88)–(90). Уравнение (88) после представления в виде

$$\left(\eta\sqrt{S}\psi_{\eta\eta}\right)_{\eta} = -H_1 - \frac{1}{2\sqrt{S}},$$

$$H_1(\lambda, \eta) = \frac{\Omega_1(\lambda\psi_{\lambda\eta} + \psi_{\eta})}{h + 2\lambda\eta\sqrt{S}\psi_{\eta\eta}}$$

сводится к интегро-дифференциальному уравнению

$$\psi_{\eta}(\tau, \lambda) = \int_{\eta}^{\infty} [h(\eta_1) - h(\eta)] H_1(\lambda, \eta_1) d\eta_1 + f'(\eta),$$

которое в результате замены

$$\psi_{\eta} = hz$$

принимает вид

$$z(\lambda, \eta) = \int_{\eta}^{\infty} \left[\frac{h(\eta_1)}{h(\eta)} - 1\right] H_2(\lambda, \eta_1) d\eta_1 + \frac{f'(\eta)}{h(\eta)}, \tag{112}$$

$$H_2(\lambda, \eta) = \frac{\Omega_1(z_{\lambda} + z)}{1 + 2\lambda\eta\sqrt{S}z_{\eta} - 2\lambda z/h}$$

Условие замыкания есть

$$\Omega_1(\lambda) = - \left[2\kappa z(\lambda, 0) + 2\kappa\lambda \frac{dz(\lambda, 0)}{d\lambda}\right]^{-1}. \tag{113}$$

Начальные значения  $z(1/a, \eta)$  вычислялись по функции  $y(a, \eta)$  на основе связи, которая вытекает из (63), (86); на первом шаге итераций  $\Omega_1(\lambda) \equiv \Omega(1/a)$ .

Как и в первом случае, функция  $\Omega_1(\lambda)$  на интервале  $[0, 1/a]$  изменяется мало, и итерационный процесс можно завершить после третьего шага.

Заметим, что результаты расчета устойчивы по отношению к малым изменениям единственной использованной эмпирической функции  $f'(\eta)$ .

Вычисленное предельное значение функции  $F_1\Omega_1(\lambda)$  при  $\lambda = 0$  совпадает с наименьшим корнем уравнения (95). Таким образом, функция  $-F_1 d\lambda/ds$  почти постоянна во всей области изменения переменной  $\lambda$  и монотонно растет от величины

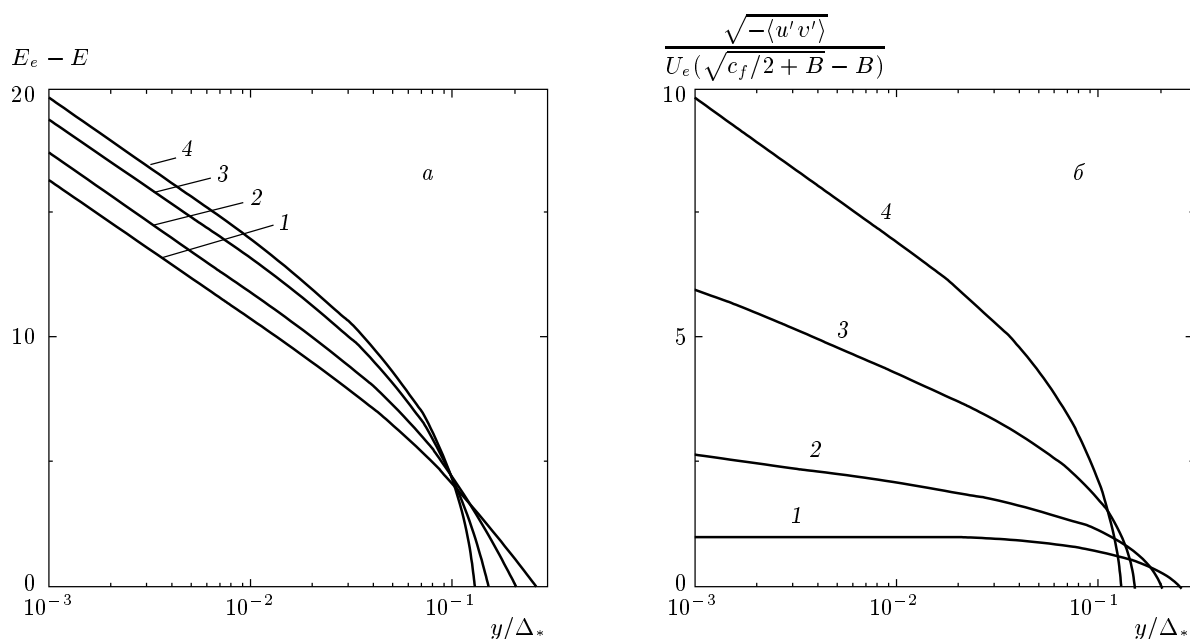


Рис. 9. Расчетные профили скорости (а) и турбулентного касательного напряжения (б) в пограничном слое:  $q = 0$  (1),  $-0.25$  (2),  $-1.5$  (3),  $-\infty$  (4)

$1/2\kappa = 1.220$ , соответствующей  $\lambda = \infty$ , до значения 1.423, отвечающего  $\lambda = 0$ .

На рис. 9 даны расчетные профили скорости и касательного напряжения для разных значений параметра подобия  $q$ . Кривые, отвечающие предельным значениям  $q = 0, -\infty$ , на рис. 9а построены соответственно по формулам (43) и (38), а на рис. 9б — по формулам (55).

Соответствующие расчетные кривые даны также на рис. 1, 5, 7, 8.

## 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для турбулентного пограничного слоя на пластине с отсосом получено условие замыкания в виде универсальной связи касательного напряжения и градиента усредненной скорости, для определения которой достаточно знать одну эмпирическую функцию — построенный в переменных подобия профиль скорости в пограничном слое на непроницаемой пластине. Для расчетов существенным является только наличие у этого профиля логарифмического участка вблизи стенки.

В результате, распределения скорости, касательного напряжения, трения на пластине во всем диапазоне параметров вычислены на основе усреднен-

ных уравнений без привлечения специальных гипотез при физических предположениях самого общего характера.

Развитая теория позволяет рассчитать среднеквадратичную поперечную пульсацию скорости во всем поле течения и среднеквадратичные продольные пульсации во внешней области пограничного слоя. Для этого необходимо знать только профили соответствующих величин в частном случае непроницаемой пластины.

В пристеночной области пограничного слоя скорость, касательное напряжение, среднеквадратичная поперечная пульсация скорости в переменных подобия имеют универсальные распределения. Вне вязкого подслоя эти величины в переменных подобия описываются семейством кривых, зависящих от одного параметра  $q$ , а их профили во всем пограничном слое есть функции двух переменных  $v_+$  и  $q$ .

Для компонент тензора Рейнольдса, связанных с продольными пульсациями скорости, во внешней области пограничного слоя также справедливы однопараметрические законы подобия.

Вблизи стенки существует область, где корень из касательного напряжения и среднеквадратичная поперечная пульсация скорости пропорциональны логарифму расстояния до стенки, а среднеквадратичные продольные пульсации — логарифму в степени  $3/2$ .

Распределение трения на стенке во всем диапазоне скоростей отсоса при разных числах Рейнольдса в переменных подобия описывается одной кривой.

Предельной формой течения на пластине далеко вниз по потоку является асимптотический пограничный слой — одномерное течение, в котором все усредненные параметры зависят только от поперечной координаты. Такой режим достигается не на конечном расстоянии от передней кромки, а лишь при  $R_x \rightarrow \infty$ . При этом величина  $c_f/2 + B$  и разность между текущим и предельным значениями толщины вытеснения экспоненциально стремятся к нулю.

Работа выполнена в рамках Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1635.2003).

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Изаксон, ЖЭТФ **7**, 919 (1937).
2. С. В. Millikan, in *Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech.*, Wiley, New York (1939), p. 386.
3. R. von Mises, in *Th. von Kármán Anniversary Volume*, Calif. Inst. Techn. Press, Pasadena (1941), p. 317.
4. Б. А. Кадер, А. М. Яглом, *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа*, ВИНТИ, Москва (1980), т. 18, с. 81.
5. И. И. Вигдорович, ДАН **392**(3), 340 (2003).
6. I. I. Vigdorovich, in *Advances in Turbulence X, Proc. 10th Europ. Turbulence Conf.* ed. by H. I. Andersson and P.-A. Krogstad, CIMNE, Barcelona (2004), p. 129.
7. И. И. Вигдорович, ЖЭТФ **126**, 1180 (2004).
8. I. I. Vigdorovich, in *Proc. 4th Int. Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, ed. by K. Hanjalic et al., Begell Hous, Inc., New York (2003), p. 147.
9. И. И. Вигдорович, ДАН **396**, 47 (2004).
10. И. И. Вигдорович, Изв. АН, МЖГ № 4, 106 (1993).
11. И. И. Вигдорович, ДАН **331**, 443 (1993).
12. A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Univ. Press, Cambridge (1976).
13. A. E. Perry, S. Henbest, and M. S. Chong, *J. Fluid Mech.* **165**, 163 (1986).
14. P. R. Spalart, *J. Fluid Mech.* **187**, 61 (1988).
15. И. И. Вигдорович, ДАН **356**, 42 (1997).
16. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости*, Мир, Москва (1967).
17. D. Coles, *J. Fluid Mech.* **1**, Pt. 2, 191 (1956).
18. R. L. Simpson, R. J. Moffat, and W. M. Kays, *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**, 771 (1969).
19. К. Depooter, PhD Thesis, Univ. Waterloo, Canada (1973).
20. F. H. Clauser, *Adv. Appl. Mech.* **4**, 1 (1956).
21. R. L. Simpson, R. J. Moffat, and W. M. Kays, *Rep. HMT-2*, Stanford Univ. (1967).
22. P. Mariani, P. Spalart, and W. Kollmann, in *Proc. Int. Conf. Near-Wall Turbulent Flows*, ed. R. M. C. So et al., Elsevier, Amsterdam (1993).
23. R. A. Antonia, P. R. Spalart, and P. Mariani, *Phys. Fluids* **6**, 430 (1994).
24. P. S. Andersen, W. M. Kays, and R. J. Moffat, *J. Fluid Mech.* **69**, Pt. 2, 353 (1975).