

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КОНЕЧНО-РАЗМЕРНОГО СКЕЙЛИНГА ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ АНДЕРСОНА. ЕСТЬ ЛИ ПЕРЕХОД В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ?

*И. М. Суслов\**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
117334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 18 мая 2005 г.

Примерно половина численных исследований перехода Андерсона основана на рассмотрении вспомогательных квазиодномерных систем и постулировании однопараметрического скейлинга для минимального показателя Ляпунова. Буквальное использование этого алгоритма приводит к однозначному предсказанию фазового перехода в двумерном случае. Этот переход относится к типу Костерлица – Таулеса и происходит между фазами с экспоненциальной и степенной локализацией (Пичард и Сарма, 1981). Этот вывод не противоречит численным результатам, если он сопоставляется с первичными данными численных экспериментов. Интерпретация же этих данных в терминах однопараметрического скейлинга является недопустимой: минимальный показатель Ляпунова не удовлетворяет скейлинговому соотношению. Скейлинг справедлив не для минимального, а для некоторого эффективного показателя Ляпунова, зависимость которого от параметров определяется условием существования скейлинга. При использовании эффективного показателя Ляпунова существование перехода в двумерном случае перестает быть однозначным, но остается все же вероятным. Дается интерпретация полученных результатов в терминах уравнения Гелл-Манна – Лоу.

PACS: 03.65.-w, 05.50.+q, 11.10.Ni, 71.23.An

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза однопараметрического скейлинга [1] приводит к выводу об отсутствии перехода Андерсона в двумерном ( $2D$ ) случае. С этого утверждения начался расцвет физики неупорядоченных систем: оно привело к развитию представлений о слабой локализации с многочисленными экспериментальными проявлениями [2]. Недавнее открытие перехода металл – диэлектрик в  $2D$ -системах [3–6] угрожает подорвать основы теории. В настоящее время неясно, возможен ли такой переход в случае чисто потенциального рассеяния или его существование следует приписать наличию осложняющих факторов — взаимодействия, спин-орбиты и т. д. Ниже показано, что первая возможность является вполне вероятной и не противоречит существующим скейлинговым представлениям [1].

Непосредственной мотивацией работы явилось

стремление разобраться в методических аспектах конечно-размерного скейлинга [7], который лежит в основе всех современных численных исследований перехода Андерсона [8–23]. Проблема состоит в том, что численные результаты имеют тенденцию противоречить всей прочей информации о критическом поведении [24]. Практически все теоретические и экспериментальные исследования согласуются с результатом, следующим из самосогласованной теории Волхардта и Вольфле [25, 26]

$$\nu = \begin{cases} 1/(d-2), & 2 < d < 4 \\ 1/2, & d > 4 \end{cases}, \quad s = 1, \quad 2 < d < \infty, \quad (1)$$

где  $s$  и  $\nu$  — критические индексы проводимости и корреляционного радиуса,  $d$  — размерность пространства. Действительно, результат (1):

а) выделяет значения  $d_{c1} = 2$  и  $d_{c2} = 4$  как нижнюю и верхнюю критические размерности, которые

\*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

известны из независимых соображений<sup>1)</sup>;

б) согласуется с результатом<sup>2)</sup> для  $d = 2 + \epsilon$  [33]:

$$\nu = \frac{1}{\epsilon} + 0 \cdot \epsilon^0 + 0 \cdot \epsilon^1 + O(\epsilon^2); \quad (2)$$

в) согласуется с результатами  $\nu = 1/2$  [35, 36] и  $s = 1$  [37] для  $d = \infty$ ;

г) удовлетворяет скейлинговому соотношению  $s = (d - 2)\nu$  [1] для  $d < d_{c2}$ ;

д) дает не зависящие от  $d$  критические индексы для  $d > d_{c2}$ , как это характерно для теории среднего поля;

е) согласуется с экспериментальными результатами для  $d = 3$ ,  $s \approx 1$ ,  $\nu \approx 1$ , следующими из измерений проводимости и диэлектрической проницаемости [38, 39]<sup>3)</sup>.

Что касается численных результатов, то они могут быть суммированы эмпирической формулой  $\nu \approx 0.8/(d - 2) + 0.5$  [17], содержащей очевидные фундаментальные дефекты [24].

Конечно-размерный скейлинг основан на философии, что любая безразмерная величина  $A$ , относящаяся к системе, пространственно ограниченной на масштабе  $L$ , является функцией отношения  $L/\xi$

$$A = F(L/\xi), \quad (3)$$

где  $\xi$  — корреляционный радиус. Мотивация соотношения (3) состоит в следующем. Представим зависимость величины  $A$  от параметров как ее зависимость от характерных масштабов размерности длины  $L$ ,  $\xi$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  . . . . Приняв  $\xi$  за единицу измерения, можно записать

$$A = F(L/\xi, l_1/\xi, l_2/\xi, \dots). \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Первое следует из теории однопараметрического скейлинга [1], второе — из многочисленных аргументов [27, 28], главным из которых является перенормируемость. Теория неупорядоченных систем математически точно сводится к полевой теории  $\varphi^4$  с «неправильным» знаком константы взаимодействия [29–31]. Последняя перенормируема при  $d \leq 4$  и неперенормируема при  $d > 4$  [32]. Для  $d \leq 4$  вся физика определяется большими расстояниями или малыми импульсами в соответствии с ожидаемой масштабной инвариантностью. Для  $d > 4$  атомный масштаб не может быть исключен из результатов и масштабная инвариантность невозможна.

<sup>2)</sup> Согласно Вегнеру [34], член порядка  $\epsilon^2$  в формуле (2) конечен и имеет большую отрицательную величину. Однако этот результат получен для нулькомпонентной  $\sigma$ -модели, соответствие которой с исходной неупорядоченной системой является приближенным и справедливым лишь при малых  $\epsilon$ ; поэтому различие может возникнуть в некотором порядке по  $\epsilon$ .

<sup>3)</sup> Эти замечательные свойства результата (1) вызывают подозрения, что он точный [40]. Фактически он может быть выведен без модельных приближений на основе симметричного анализа [41].

Вблизи критической точки корреляционный радиус  $\xi$  велик по сравнению с микроскопическими масштабами  $l_1, l_2, \dots$  и подстановка  $l_1/\xi = l_2/\xi = \dots = 0$  сводит (4) к (3). Существенное предположение, использованное при этом выводе, состоит в том, что предельный переход  $l_i/\xi \rightarrow 0$  не является сингулярным, так что правая часть равенства (4) не обращается в нуль или бесконечность. К сожалению, не существует простых критериев, позволяющих установить, когда такое предположение правильно<sup>4)</sup>. Если уравнение (3) справедливо, его достаточно для исследования зависимости  $\xi$  от параметров. Если же с соотношением (3) что-то не так, то оно становится источником ложной информации.

Ниже предлагается аналитическая реализация одного из общепринятых вариантов конечно-размерного скейлинга, основанного на использовании минимального показателя Ляпунова. Используемый подход основан на исследовании вторых моментов решения задачи Коши для квазиодномерного уравнения Шредингера (разд. 3), и в этом отношении он близок к подходу недавних работ [42, 43]. Однако обоснование метода (разд. 2) и интерпретация результатов (разд. 3) существенно отличаются от приведенных в работах [42, 43] и фактически мы не согласны с большинством утверждений этих работ.

Основные результаты настоящей работы состоят в следующем. Если концепция минимальной ляпуновской экспоненты используется в общепринятом варианте, то она приводит к однозначному утверждению о существовании фазового перехода в  $2D$ -случае (разд. 3). Этот переход не является обычным переходом Андерсона и относится скорее к типу Костерлица–Таулеса: он происходит между фазами с экспоненциальной и степенной локализацией [7]. Этот вывод не противоречит численным результатам [8–13] (разд. 4), если он сопоставляется с первичными данными численных экспериментов. Интерпретация же последних в терминах од-

<sup>4)</sup> Регулярная процедура для исследования таких вопросов существует в теоретико-полевой формулировке проблемы. Когда максимальный микроскопический масштаб  $l_1$  устремляется к нулю, теория становится расходящейся. В неперенормируемых теориях такие расходимости неустранимы и соотношение (3) заведомо неверно. Если теория перенормируема, то все расходимости поглощаются конечным числом параметров (таких как масса, заряд и пр.), так что перенормированные функции Грина (и величины, которые через них выражаются) не зависят от  $l_i$  и обладают масштабной инвариантностью. Если величина  $A$  не имеет прозрачной теоретико-полевой интерпретации, то практически невозможно установить ее независимость от «затравочной массы», «затравочного заряда» и пр. Последние величины зависят от  $l_i$  и являются наблюдаемыми в физике конденсированного состояния.

нопараметрического скейлинга является недопустимой: минимальный показатель Ляпунова не удовлетворяет скейлинговому соотношению (3). Справедливости этого соотношения следует ожидать не для минимального, а для некоторого эффективного показателя Ляпунова, зависимость которого от параметров определяется условием существования скейлинга (разд. 5). Если конечно-размерный скейлинг основан на использовании эффективного показателя Ляпунова, то существование фазового перехода в  $2D$ -случае перестает быть однозначным, но является все же вероятным (разд. 6). Его интерпретация в терминах уравнения Гелл-Манна — Лоу обсуждается в разд. 7.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Рассматриваемый вариант конечно-размерного скейлинга заимствован из теории фазовых переходов [44–46], и его удобно обсудить на примере ферромагнетика. Вместо бесконечной  $3D$ -системы рассмотрим систему с размерами  $L \times L \times L_z$ , где  $L_z \rightarrow \infty$ . Такая система топологически одномерна и потому не обладает дальним порядком: существует конечный корреляционный радиус  $\xi_{1D}$ , определяющий характерный масштаб, на котором усредненный по поперечному сечению магнитный момент меняет свое направление на противоположное. Обсудим связь  $\xi_{1D}$  с ферромагнитным переходом в  $3D$ -системе. При  $T > T_c$  (парамагнитная фаза)  $\xi_{1D}$  совпадает с корреляционным радиусом  $\xi$  трехмерной системы, если размер  $L$  достаточно велик:

$$\xi_{1D} \rightarrow \xi \quad \text{для} \quad L \rightarrow \infty. \quad (5)$$

При  $T < T_c$  (ферромагнитная фаза) справедливо утверждение

$$\frac{\xi_{1D}}{L} \rightarrow \infty \quad \text{для} \quad L \rightarrow \infty, \quad (6)$$

которое доказывается от противного. Пусть отношение  $c = \xi_{1D}/L$  конечно при всех  $L$ . Выберем  $n \gg c$  и рассмотрим систему с размерами  $L \times L \times nL$ . Ввиду условия  $nL \gg \xi_{1D}$ , корреляции вдоль длинного направления имеют парамагнитный характер и средний (по поперечному сечению) магнитный момент много раз меняет знак. Такая ситуация имеет место при всех  $L$  и сохраняется при  $L \rightarrow \infty$ ; но такой термодинамический предел топологически трехмерен, и система должна быть ферромагнитной. Полученное противоречие доказывает формулу (6).

При  $T = T_c$  (точка перехода) возможно любое поведение типа

$$\xi_{1D} \propto L^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad \text{для} \quad L \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Действительно, отношение  $c = \xi_{1D}/L$  конечно или стремится к нулю, и рассмотренная выше система размером  $L \times L \times nL$  обладает парамагнитными корреляциями. Но это не настоящий парамагнетик, так как его корреляционный радиус  $\xi \sim \xi_{1D}$  расходится, как и положено в точке перехода.

Обычно соотношение (7) предполагается с  $\alpha = 1$ , так как это единственная возможность, совместимая с масштабной инвариантностью. Действительно, если величины  $\xi_{1D}$ ,  $\xi$  и  $L$  связаны соотношением, не содержащим микроскопических масштабов, то оно записывается в виде  $F(\xi_{1D}/L, \xi/L) = 0$ , если выбрать  $L$  в качестве единицы измерения. Разрешая это соотношение относительно  $\xi_{1D}/L$ , получим

$$\frac{\xi_{1D}}{L} = F\left(\frac{L}{\xi}\right), \quad (8)$$

что в критической точке дает  $\xi_{1D} = F(0)L$  в соответствии с формулой (7) при  $\alpha = 1$ .

Безразмерное отношение

$$g(L) = \frac{\xi_{1D}}{L} \quad (9)$$

может быть принято в качестве скейлинговой переменной, типичное поведение которой показано на рис. 1а: она постоянна в точке перехода, а при отклонении от нее стремится к нулю или бесконечности. Подчеркнем, однако, что величина  $\xi_{1D}$  чувствительна к фазовому переходу в  $3D$ -системе независимо от существования масштабной инвариантности; последняя отсутствует в случае ферромагнетика для размерности пространства  $d > 4$ .

2. Применение этого подхода к теории локализации основано на оценке корреляционного радиуса  $\xi_{1D}$  как величины, обратной минимальному показателю Ляпунова  $\gamma_{min}$ ,

$$\xi_{1D} \sim \frac{1}{\gamma_{min}}. \quad (10)$$

Показатели Ляпунова возникают при решении задачи Коши для уравнения Шредингера, описывающего введенную выше квазиодномерную систему, с начальными условиями, заданными на левом конце. Для примера рассмотрим одномерную модель Андерсона, описываемую дискретным уравнением Шредингера

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + V_n \psi_n = E \psi_n, \quad (11)$$

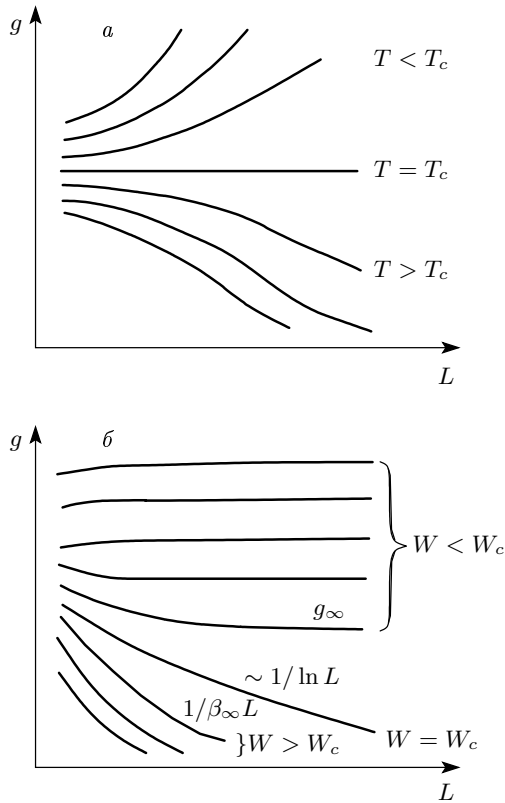


Рис. 1. а) Типичные зависимости  $g(L)$  в случае однопараметрического скейлинга. б) Зависимости  $g(L)$ , определяемые уравнением (51)

которое можно переписать в рекуррентной форме

$$\begin{vmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E - V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{vmatrix} \equiv T_n \begin{vmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{vmatrix}, \quad (12)$$

введя трансфер-матрицу  $T_n$ . Тогда формальное решение задачи Коши сводится к перемножению матриц

$$\begin{vmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{vmatrix} = T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1 \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Аналогичное соотношение справедливо для произвольной квазиодномерной системы, если функцию  $\psi_n(r_\perp)$ , зависящую от поперечных координат  $r_\perp$ , понимать как вектор  $\psi_n$ .

Попытаемся представить произведение матриц  $P_n$  в формуле (13) как  $n$ -ю степень постоянной матрицы  $T$ . Это оказывается возможным, но лишь для «эрмитовой части»  $P_n$ . Матрица  $P_n$ , как и любая

матрица, допускает представление в виде произведения унитарной матрицы  $U_n$  и эрмитовой матрицы  $H_n$

$$P_n = T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1 \equiv U_n H_n, \quad H_n^2 = P_n^+ P_n. \quad (14)$$

Эрмитова матрица  $H_n$  имеет действительные собственные значения и описывает систематический рост или убывание  $\psi_n$ , тогда как унитарная матрица  $U_n$  имеет собственные значения, по модулю равные единице, и отвечает за осциллирующее поведение. Представление  $H_n = T^n$  конструктивно, ввиду того что среднее геометрическое матриц

$$T = (P_n^+ P_n)^{1/2n} = (T_1^+ T_2^+ \dots T_n^+ T_n \dots T_2 T_1)^{1/2n} \quad (15)$$

стремится к детерминированному пределу при  $n \rightarrow \infty$  в силу теоремы Оселедца [47]. Раскладывая вектор начальных условий в формуле (13) по собственным векторам матрицы  $T$  и записывая ее собственные значения  $\lambda_s$  как  $\exp \gamma_s$ , получим следующее разбиение для  $\psi_n(r_\perp)$ :

$$\psi_n(r_\perp) = A_1 h_n^{(1)}(r_\perp) e^{\gamma_1 n} + A_2 h_n^{(2)}(r_\perp) e^{\gamma_2 n} + \dots + A_m h_n^{(m)}(r_\perp) e^{\gamma_m n}. \quad (16)$$

Величины  $h_n^{(s)}(r_\perp)$  не имеют систематического роста по  $n$ , а показатели Ляпунова  $\gamma_s$  стремятся при  $n \rightarrow \infty$  к постоянным значениям. Мы сохраняем в (16) лишь члены с положительными показателями, считая их перенумерованными в порядке убывания  $\gamma_s$ .

Согласно Мотту [48], собственные функции квазиодномерной системы могут быть получены путем сшивки двух решений типа (16), нарастающих с двух противоположных концов системы. Тогда убывание собственных функций на больших расстояниях определяется минимальным показателем Ляпунова  $\gamma_{min} \equiv \gamma_m$ , что и является основанием для соотношения (10).

3. Разбиение (16) справедливо для неусредненной функции  $\psi_n(r_\perp)$ , и его смысл состоит в выделении самоусредняющихся величин  $\gamma_s$ . Ниже показано (разд. 3), что среднее значение  $\psi_n(r_\perp)$  не имеет систематического роста,

$$\langle \psi_n(r_\perp) \rangle \sim 1, \quad (17)$$

тогда как для вторых моментов справедливо разбиение типа (16)

$$\langle \psi_n^2(r_\perp) \rangle = B_1(r_\perp) e^{\beta_1 n} + B_2(r_\perp) e^{\beta_2 n} + \dots + B_m(r_\perp) e^{\beta_m n} \quad (18)$$

с тем же числом положительных показателей  $\beta_s$ . Возведение формулы (16) в квадрат дает  $m^2$  членов, растущих как  $\exp(\gamma_i n + \gamma_j n)$ , и единственная возможность согласования с (18) состоит в предположении, что члены с  $i \neq j$  при усреднении обращаются в нуль, так что остаются лишь средние от  $m$  положительных величин, заведомо не исчезающих при усреднении:

$$\begin{aligned} \langle \psi_n^2(r_\perp) \rangle &= \left\langle \left[ A_1 h_n^{(1)}(r_\perp) \right]^2 e^{2\gamma_1 n} \right\rangle + \\ &+ \left\langle \left[ A_2 h_n^{(2)}(r_\perp) \right]^2 e^{2\gamma_2 n} \right\rangle + \dots + \\ &+ \left\langle \left[ A_m h_n^{(m)}(r_\perp) \right]^2 e^{2\gamma_m n} \right\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Члены в правых частях (18) и (19) находятся во взаимно однозначном соответствии, и соотношение показателей  $\gamma_s$  и  $\beta_s$  можно обсудить для чисто одномерного случая, когда правые части (16) и (18) содержат лишь по одному члену:

$$\psi_n \sim e^{\gamma n}, \quad \langle \psi_n \rangle \sim 1, \quad \langle \psi_n^2 \rangle \sim e^{\beta n}. \quad (20)$$

На фоне экспоненциального роста конечность  $\langle \psi_n \rangle$  несущественна и можно считать, что  $\langle \psi_n \rangle = 0$ . Фактически речь идет об общем соотношении между случайной величиной  $x$  и ее среднеквадратичным значением, которое сводится к следующему. Если  $\langle x \rangle = 0$  и  $\langle x^2 \rangle = \sigma^2$ , то типичное значение  $x$  не обязательно оказывается порядка  $\sigma$ : можно утверждать лишь, что  $|x| \lesssim \sigma$ . Действительно, согласно неравенству Чебышева [49], вероятность того, что  $|x|$  больше  $x_0$ , не превышает  $\sigma^2/x_0^2$ . Следовательно, значения  $x$ , существенно превышающие  $\sigma$ , маловероятны, и  $\sigma$  дает грубую оценку ширины распределения сверху. Нижней же оценки не существует ни в каком варианте: так, если распределение  $P(x)$  меняется на масштабе единицы и имеет хвост  $|x|^{-\alpha}$  с  $1 < \alpha < 3$ , то типичное значение  $x \sim 1$ , тогда как  $\langle x^2 \rangle = \sigma^2 = \infty$ . Из сказанного ясно, что для показателей  $\beta$  и  $\gamma$  в формуле (20) справедливо соотношение

$$\beta \geq 2\gamma, \quad (21)$$

в котором нет оснований для точного равенства.

Фактически вопрос о связи  $\beta$  и  $\gamma$  можно обсудить более конструктивно, если учесть, что для  $\psi_n$  справедливо логарифмически-нормальное распределение [50], т. е. величина  $\tau = \ln |\psi_n|$  распределена по закону Гаусса

$$P(\tau) \sim \exp \left\{ -\frac{(\tau - an)^2}{2bn} \right\} \quad (22)$$



Рис. 2. Решение задачи Коши (а) и построенная по Мотту собственная функция 1D-системы (б) в ситуации  $a = 0, b > 0$

с линейно растущими по  $n$  первым и вторым моментами. Легко показать, что

$$\psi_n \sim e^{an}, \quad \langle \psi_n^2 \rangle \sim e^{(2a+2b)n} \quad (23)$$

и дисперсия величины  $\psi_n$  растет быстрее, чем квадрат ее типичного значения, в соответствии с неравенством (21). Для одномерной модели Андерсона (11) при  $E = 0$  имеем

$$a = b = \frac{1}{8} \langle V^2 \rangle, \quad \beta = \frac{1}{2} \langle V^2 \rangle \quad (24)$$

в области слабого беспорядка и

$$\gamma = a = \langle \ln |V| \rangle, \quad \beta = \ln \langle V^2 \rangle \quad (25)$$

в случае сильного беспорядка. Для распределений  $P(V)$ , характеризуемых одним параметром (например, прямоугольного или гауссова) результат (25) означает, что  $b \ll a$ . Аналогичные результаты справедливы для многих моделей и соотношение  $b \lesssim a$  следует считать типичным. В этом случае  $\beta \sim \gamma$  и  $1/\beta$  дает правильную оценку корреляционного радиуса  $\xi_{1D}$  одномерной системы.

Ситуацию  $b \gg a$  проиллюстрируем в ее экстремальном варианте, когда  $a = 0, b > 0$ . Тогда решение задачи Коши  $\psi_n$  не имеет систематического роста, но имеет редкие выбросы с возрастающей амплитудой (рис. 2а). При этом построенная по Мотту собственная функция представляет собой типичное гибридное состояние, являющееся суперпозицией локализованной и делокализованной функций (рис. 2б). Протяженность локализованной компоненты, очевидно, порядка  $1/\beta$ , так что показатель  $\beta$  дает существенную информацию, не содержащуюся в среднем значении  $\gamma$ . Эта информация

может иметь наблюдаемые проявления: параметр  $b$  определяет рост всех низших четных моментов  $\psi_n$  ( $\langle \psi_n^{2m} \rangle \sim \exp(2ma + 2m^2b)n$ ), тогда как четвертые моменты входят в формулу Кубо–Гринвуда для средней проводимости.

Согласно численным исследованиям (см., например, [11]), нормальное распределение справедливо для всех показателей Ляпунова  $\gamma_s$ , а следовательно, произвольный ( $s$ -й) член в уравнении (16) имеет распределение типа (22) с параметрами  $a_s$  и  $b_s$ . Поэтому соотношения  $\gamma_s = a_s$ ,  $\beta_s = 2a_s + 2b_s$  справедливы для произвольного  $s$ . Мы видим, что исследование вторых моментов  $\psi_n(r_\perp)$  позволяет получить существенную информацию: а) показатели  $\beta_s$  дают строгую верхнюю оценку для  $\gamma_s$ ,  $\beta_s \geq 2\gamma_s$ ; б) в типичном случае  $a_s \gtrsim b_s$  справедлива порядковая оценка  $\beta_s \sim \gamma_s$ ; в) в случае  $a_s \ll b_s$  показатели  $\beta_s$  связаны с флуктуациями  $\gamma_s$ . Что касается эвристической связи с переходом Андерсона, то использование минимальных показателей  $\gamma_{min}$  и  $\beta_{min}$  является практически равноценным. Так, скейлинговые соотношения

$$\frac{1}{\gamma_{min}L} = F\left(\frac{L}{\xi}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\beta_{min}L} = F\left(\frac{L}{\xi}\right) \quad (26)$$

могут быть постулированы на одном и том же уровне строгости. В недавней работе [11] утверждается существование эмпирического скейлинга как для величины  $\gamma_{min}L$ , так и для отношения  $b/a$ . Если к этому утверждению относиться серьезно, то оно обосновывает соотношение (26) для  $\beta_{min}L$ ; в действительности же скейлинг отсутствует для всех указанных величин (разд. 3–5).

### 3. ВТОРЫЕ МОМЕНТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Идея используемого ниже подхода может быть найдена в старом обзоре Таулеса [51]. Перепишем уравнение Шредингера (11) для одномерной модели Андерсона в виде рекуррентного соотношения, выражающего  $\psi_{n+1}$  через  $\psi_n$ ,  $\psi_{n-1}$ , и рассмотрим задачу Коши с фиксированными начальными условиями для  $\psi_1$  и  $\psi_0$ . Легко видеть, что  $\psi_2$  является функцией лишь  $V_1$ ,  $\psi_3$  — функцией  $V_2$ ,  $V_1$  и т. д. Следовательно,  $\psi_n$  и  $V_n$  статистически независимы и могут усредняться по отдельности:

$$\langle \psi_{n+1} \rangle = E \langle \psi_n \rangle - \langle \psi_{n-1} \rangle, \quad (27)$$

$$\langle \psi_{n+1}^2 \rangle = (W^2 + E^2) \langle \psi_n^2 \rangle - 2E \langle \psi_n \psi_{n-1} \rangle + \langle \psi_{n-1}^2 \rangle \quad \text{и т. д.} \quad (28)$$

Мы считаем, что величины  $V_n$  статистически независимы и

$$\langle V_n \rangle = 0, \quad \langle V_n V_{n'} \rangle = W^2 \delta_{nn'}. \quad (29)$$

Уравнение (27) имеет вид (11) с  $V_n \equiv 0$ , и его решения внутри разрешенной зоны имеют вид

$$\langle \psi_n \rangle \sim \exp(ipn) \quad (30)$$

с  $2 \cos p = E$ ; очевидно, они не имеют систематического роста и  $\langle \psi_n \rangle \sim 1$ . Уравнение (28) при  $E = 0$  является разностным уравнением для величины  $x_n = \langle \psi_n^2 \rangle$ ,

$$x_{n+1} = W^2 x_n + x_{n-1}, \quad (31)$$

и имеет решение

$$x_n = \langle \psi_n^2 \rangle \sim e^{\beta n}, \quad 2 \operatorname{sh} \beta = W^2, \quad (32)$$

экспоненциально растущее с  $n$ . При  $E \neq 0$  уравнение (28) незамкнуто и его нужно дополнить соотношением

$$\langle \psi_{n+1} \psi_n \rangle = E \langle \psi_n^2 \rangle - \langle \psi_n \psi_{n-1} \rangle, \quad (33)$$

что приводит к системе разностных уравнений для  $x_n = \langle \psi_n^2 \rangle$  и  $y_n = \langle \psi_n \psi_{n-1} \rangle$ :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (W^2 + E^2)x_n + x_{n-1} - 2E y_n, \\ y_{n+1} &= E x_n - y_n, \end{aligned} \quad (34)$$

решение которой также экспоненциально по  $n$ .

Этот подход легко обобщается на произвольные квазиодномерные системы. Проиллюстрируем его на примере двумерной модели Андерсона:

$$\begin{aligned} \psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} + V_{n,m} \psi_{n,m} = \\ = E \psi_{n,m}. \end{aligned} \quad (35)$$

Интерпретируя уравнение (35) как рекуррентное соотношение по  $n$ , разрешим его относительно величины  $\psi_{n+1,m}$  и, усредняя ее квадрат, выразим его через парные корреляторы  $\psi_{n,m}$ , содержащие меньшие значения  $n$ . Составляя аналогичные уравнения для парных корреляторов, приходим к замкнутой системе разностных уравнений для величин

$$\begin{aligned} x_{m,m'}(n) &\equiv \langle \psi_{n,m} \psi_{n,m'} \rangle, \\ y_{m,m'}(n) &\equiv \langle \psi_{n,m} \psi_{n-1,m'} \rangle, \\ z_{m,m'}(n) &\equiv \langle \psi_{n-1,m} \psi_{n,m'} \rangle, \end{aligned} \quad (36)$$

которая при  $E = 0$  имеет вид

$$x_{m,m'}(n+1) = W^2 \delta_{m,m'} x_{m,m'}(n) + x_{m+1,m'+1}(n) + x_{m-1,m'+1}(n) + x_{m+1,m'-1}(n) + x_{m-1,m'-1}(n) + x_{m,m'}(n-1) + y_{m+1,m'}(n) + y_{m-1,m'}(n) + z_{m,m'+1}(n) + z_{m,m'-1}(n), \quad (37)$$

$$y_{m,m'}(n+1) = -x_{m+1,m'}(n) - x_{m-1,m'}(n) - z_{m,m'}(n), \\ z_{m,m'}(n+1) = -x_{m,m'+1}(n) - x_{m,m'-1}(n) - y_{m,m'}(n).$$

Ввиду независимости коэффициентов от  $n$  решение ищется в экспоненциальной по  $n$  форме [52]:

$$x_{m,m'}(n) = x_{m,m'} e^{\beta n}, \quad y_{m,m'}(n) = y_{m,m'} e^{\beta n}, \\ z_{m,m'}(n) = z_{m,m'} e^{\beta n}. \quad (38)$$

Кроме того, сделаем формальную замену переменных

$$x_{m,m'} \equiv \tilde{x}_{m,m'-m} \equiv \tilde{x}_{m,l} \quad \text{и т. д.}, \quad (39)$$

где  $l = m' - m$ . Тогда получим, опуская тильды,

$$(e^\beta - e^{-\beta}) x_{m,l} = W^2 \delta_{l,0} x_{m,l} + x_{m+1,l} + x_{m-1,l} + x_{m+1,l-2} + x_{m-1,l+2} + y_{m+1,l-1} + y_{m-1,l+1} + z_{m,l+1} + z_{m,l-1}, \quad (40)$$

$$e^\beta y_{m,l} = -x_{m+1,l-1} - x_{m-1,l+1} - z_{m,l}, \\ e^\beta z_{m,l} = -x_{m,l+1} - x_{m,l-1} - y_{m,l}.$$

Коэффициенты не зависят от  $m$ , и зависимость решения от  $m$  является экспоненциальной:

$$x_{m,l} = x_l e^{i p m} \quad \text{и т. д.}, \quad (41)$$

где разрешенные значения  $p$ ,  $p_s = 2\pi s/L$ ,  $s = 0, 1, \dots, L-1$ , определяются периодическими граничными условиями в поперечном направлении:

$$\psi_{n,m+L} = \psi_{n,m}. \quad (42)$$

Исключая  $y_{m,l}$  и  $z_{m,l}$  из первого уравнения (40), приходим к задаче о точечном дефекте в периодической цепочке:

$$x_{l+2} e^{-i p} + x_{l-2} e^{i p} + V \delta_{l,0} x_l = \epsilon x_l, \quad x_{l+L} = x_l, \quad (43) \\ \epsilon = 2 \operatorname{ch} \beta, \quad V = \frac{W^2 \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos p}.$$

Для  $L \rightarrow \infty$  ее решение имеет вид  $x_l \sim \exp(i p l / 2 - \beta |l| / 2)$ , так что исходный коррелятор

$$\langle \psi_{n,m} \psi_{n,m'} \rangle \sim \exp \left\{ i p \frac{m+m'}{2} - \beta \frac{|m-m'|}{2} + \beta n \right\} \quad (44)$$

оказывается локализованным в поперечном направлении на том же масштабе  $1/\beta$ , на котором он изменяется как функция  $n$ . В результате радиус локализации  $\xi_{loc}$  для  $2D$ -системы совпадает с  $\xi_{1D}$ .

Положительные показатели  $\beta_s$  для нечетных  $L$  определяются уравнением

$$2(\operatorname{ch} \beta_s - \cos p_s) = W^2 \operatorname{cth}(\beta_s L / 2), \\ p_s = 2\pi s / L, \quad s = 0, 1, \dots, L-1. \quad (45)$$

Их число равно  $L$  и совпадает с числом положительных показателей Ляпунова  $\gamma_s$  для той же задачи<sup>5)</sup>. При больших  $L$  разрешенные значения  $p_s$  и  $\beta_s$  сгущаются и величины  $\beta$  и  $p$  можно считать непрерывными:

$$2(\operatorname{ch} \beta - \cos p) = W^2 \operatorname{cth}(\beta L / 2). \quad (46)$$

Минимальное значение  $\beta$  реализуется при  $p = \pi$  и легко находится в пределе  $L \rightarrow \infty$ :

$$\beta_{min} = \begin{cases} \operatorname{arch}(W^2/2 - 1), & W^2 > 4, \\ \frac{2}{L} \operatorname{arth}(W^2/4), & W^2 < 4, \\ \frac{2 \ln L - 2 \ln \ln L + \dots}{L}, & W^2 = 4. \end{cases} \quad (47)$$

Характер решения качественно изменяется при критическом значении  $W_c = 2$ . При  $W > W_c$  уравнение (46) решается в предположении  $\beta \sim 1$ ,  $\beta L \rightarrow \infty$  и параметр  $\beta_{min}$  стремится к постоянному пределу в пределе больших  $L$ . При  $W < W_c$  уравнение (46) имеет решение при  $\beta L = \operatorname{const}$ ,  $\beta \rightarrow 0$ , обеспечивая поведение<sup>6)</sup>  $\beta_{min} \propto 1/L$  для  $L \rightarrow \infty$ . При  $W = W_c$  решение ищется при условиях  $\beta L \gg 1$ ,  $\beta \ll 1$ , когда уравнение (46) сводится к  $\beta^2 = 8 \exp(-\beta L)$  и может быть решено итерациями.

Оценивая корреляционный радиус  $\xi_{1D}$  как  $1/\beta_{min}$  и сопоставляя это с соображениями разд. 2, приходим к выводу, что состояние с дальним порядком (в данном случае — металлическая фаза) не возникает. При  $W > W_c$  конечность  $\xi_{1D}$  означает существование экспоненциальной локализации, тогда как во всей области  $W < W_c$  реализуется критическое поведение  $\xi_{1D} \sim L$ , характерное для точки перехода. Последняя ситуация соответствует локализованным состояниям с расходящимся радиусом локализации  $\xi_{loc} \sim L$  и, по-видимому, должна

<sup>5)</sup> Матрица  $T$  в формуле (15) имеет размерность  $2L \times 2L$ , но ее собственные значения появляются парами  $e^{\gamma_s}$  и  $e^{-\gamma_s}$ , так что число положительных показателей  $\gamma_s$  равно  $L$ . В случае четных  $L$  число решений с положительными  $\beta_s$  отлично от  $L$  и возникают трудности в сопоставлении формул (16) и (18).

<sup>6)</sup> Исчезновение  $\beta_{min}$  для  $L = \infty$  было получено в недавней работе [42].

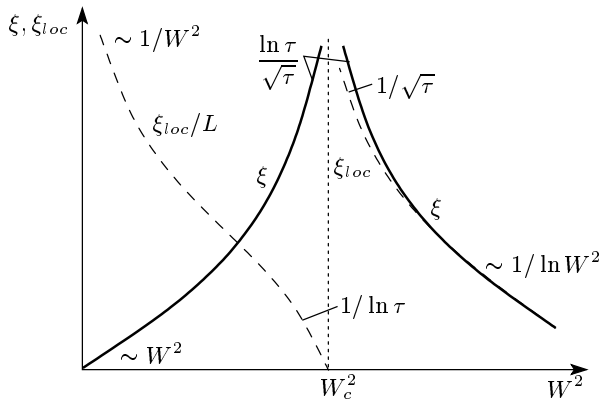


Рис. 3. Характерные масштабы  $\xi$  и  $\xi_{loc}$ , полученные в предположении  $\xi_{1D} \sim 1/\beta_{min}$

интерпретироваться как степенная локализация. Таким образом, переход в точке  $W = W_c$  не является обычным переходом Андерсона и скорее относится к типу Костерлица – Таулеса.

Вычисляя первые поправки к формуле (47), связанные с конечностью  $L$ , получим для  $W > W_c$

$$\begin{aligned} \beta_{min} &= \beta_\infty + \frac{W^2}{\text{sh } \beta_\infty} e^{\beta_\infty L}, \\ \beta_\infty &= \text{arch} \left( \frac{W^2 - 2}{2} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

и для  $W < W_c$

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{\beta_{min} L} = g_\infty + \frac{2(\text{sh } 1/2g_\infty)^2}{W^2 L^2}, \\ g_\infty &= \frac{1}{2 \text{arth}(W^2/4)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Определяя корреляционный радиус  $\xi$  как масштаб, на котором зависимости (48), (49) выходят на свои асимптотики (т. е. когда поправочные члены сравниваются с главными), имеем (рис. 3)

$$\xi \sim \begin{cases} 1/\ln W^2, & W^2 \rightarrow \infty, \\ \frac{\ln(1/\tau)}{\sqrt{\tau}}, & \tau = |W - W_c| \rightarrow 0, \\ W^2, & W^2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (50)$$

При  $W > W_c$  корреляционный радиус  $\xi$  совпадает с радиусом локализации  $\xi_{loc} \sim \xi_{1D}$  с точностью до логарифмических поправок. При  $W < W_c$  масштабы  $\xi$  и  $\xi_{loc}$  существенно различны, как это характерно для металлической фазы (рис. 3).

Поведение скейлингового параметра  $g = 1/\beta_{min} L$  как функции  $L$  определяется уравнением

$$2 \text{ch} \frac{1}{gL} - 2 \cos p = W^2 \text{cth} \frac{1}{2g} \quad (51)$$

с  $p = \pi$  и показано на рис. 1б. Нетрудно видеть существенное отличие от типичной скейлинговой ситуации, представленной на рис. 1а. Отсутствие скейлинга на рис. 1б ясно уже из того, что параметр  $g$  не является постоянным при  $W = W_c$ , как это должно быть согласно формулам (8), (9). Это еще более очевидно в области  $W < W_c$ , когда различные кривые выходят при  $L \rightarrow \infty$  на различные постоянные пределы и заведомо не могут быть совмещены друг с другом масштабным преобразованием.

Выше мы оценивали  $\xi_{1D}$  как  $1/\beta_{min}$ , что может вызвать сомнения, так как при отсутствии скейлинга величины  $\beta_{min}$  и  $\gamma_{min}$  могут существенно различаться. Фактически замена  $\beta_{min}$  на  $\gamma_{min}$  не изменит качественных выводов. Действительно,  $\beta_{min}$  обеспечивает строгую верхнюю оценку для  $\gamma_{min}$  и из формулы (47) следует, что

$$\gamma_{min} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad L \rightarrow \infty \quad \text{для} \quad W < W_c. \quad (52)$$

Этого достаточно для утверждения о существовании фазового перехода, поскольку в области больших  $W$  наличие экспоненциальной локализации не вызывает сомнений, а конечность  $\gamma_{min}$  надежно устанавливается численным расчетом [8–11]. Конечно, верхняя оценка для величины  $\gamma_{min}$  не запрещает ей убывать быстрее, чем  $1/L$ , как это должно быть в случае настоящего металлического состояния; однако такая возможность надежно исключается численными результатами (разд. 4). Тем не менее замена  $\beta_{min}$  на  $\gamma_{min}$  может изменить положение точки перехода и характер критического поведения. Поэтому представленные количественные результаты носят скорее иллюстративный характер.

Влияние фазового перехода на проводимость системы можно понять из следующих соображений. Кондактанс  $G$  квазиодномерной системы длиной  $l$  оценивается как  $\exp\{-2\gamma_{min} l\}$  (см. [11] и ссылки там), и экстраполяция к  $l \sim L$  дает зависимость  $G \sim \exp\{-\text{const } L\}$  для  $W > W_c$ , тогда как при  $W < W_c$  экспонента сводится к константе и зависимость  $G(L)$  определяется предэкспоненциальным множителем.



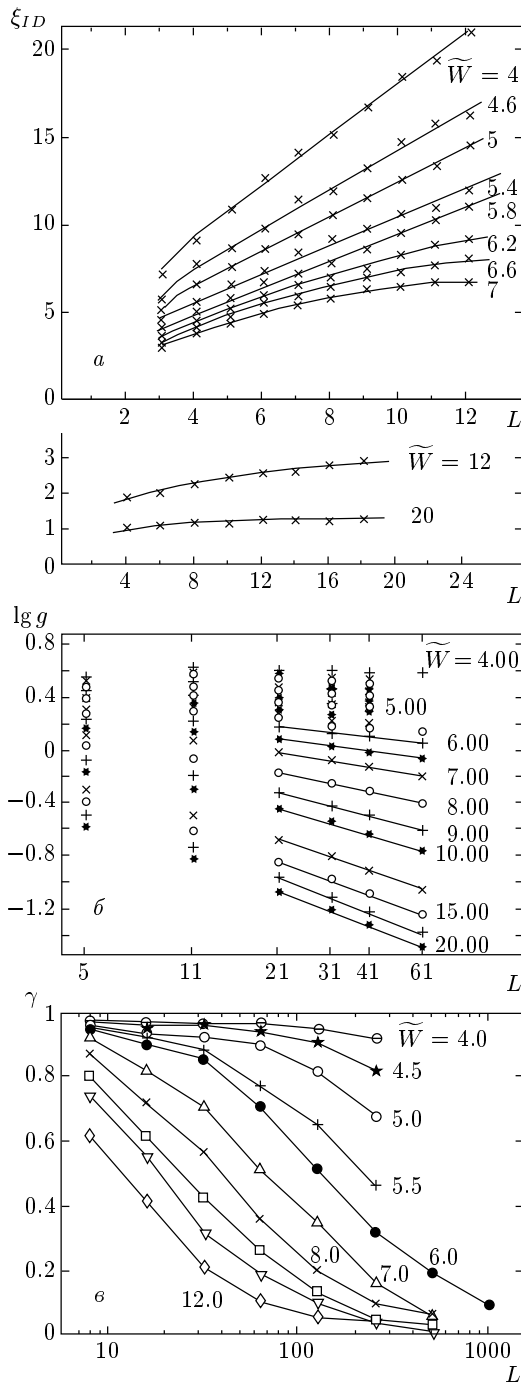


Рис. 4. Численные результаты для  $\xi_{1D}$  [7],  $g = 1/\gamma_{min}L$  [10] и параметра  $\gamma(L)$ , связанного со статистикой энергетических уровней [13]

#### 4. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

Идея степенной локализации высказывалась Ластом и Таулесом [53] и затем обсуждалась в ряде ра-

бот [54]. Утверждения, буквально соответствующие результатам разд. 3, сделаны Пичардом и Сармой в 1981 году [7] на основе численного исследования двумерной модели Андерсона. Полученные ими зависимости  $\xi_{1D}$  от  $L$  показаны на рис. 4а. Указанные значения беспорядка соответствуют величине

$$\tilde{W} = W\sqrt{12} \tag{53}$$

(так что  $\tilde{W}_c = \sqrt{48} = 6.928\dots$ ), поскольку для  $V_n$  использовалось прямоугольное распределение ширины  $\tilde{W}$ , для которого  $\langle V^2 \rangle = \tilde{W}^2/12 \equiv W^2$ . При  $\tilde{W} < 6$  зависимости явно линейные, тогда как при  $\tilde{W} > 6$  возникает тенденция к выходу на константу, отчетливо выраженная при больших  $\tilde{W}$ .

Результаты [7] считаются устаревшими [8–11], поэтому полезно проанализировать первичные данные работы [10], которые в рамках метода трансфер-матрицы считаются наилучшими (рис. 4б). Скейлинговый параметр  $g = 1/\gamma_{min}L$  убедительно убывает с ростом  $L$  только при больших  $\tilde{W}$ . В области промежуточного беспорядка ( $\tilde{W} = 4-7$ ) довольно трудно сказать, имеется ли тенденция к неограниченному убыванию или выходу на константу. Для слабого беспорядка ( $\tilde{W} < 4$ ) результаты отсутствуют вообще.

Из сказанного ясно, что представленные на рис. 4б «сырые» данные отнюдь не указывают на отсутствие фазового перехода в 2D-случае, как это утверждают их авторы [10]. Последний вывод основан на интерпретации этих данных в рамках однопараметрического скейлинга, которая заведомо несправедлива. Отсутствие скейлинга для  $\beta_{min}$  указывает на отсутствие скейлинга для  $\gamma_{min}$ , что подтверждается схожестью зависимостей на рис. 1б и рис. 4б. Использование  $\beta_{min}$  как верхней оценки для  $\gamma_{min}$  приводит к выводу, что зависимости для  $W < W_c$  на рис. 4б не могут убывать до нуля и должны выходить на конечные пределы. Скейлинговое соотношение (8) может быть формально выполнено лишь в случае, если эти конечные пределы одинаковы для всех кривых с  $W < W_c$ . Такая возможность выглядит маловероятной на рис. 4б и фактически может считаться исключенной: нижняя оценка, определяемая величиной  $1/\beta_{min}L$ , в области слабого беспорядка лежит выше всех кривых на рис. 4б.

В работах [8–11] признается, что скейлинговое соотношение (26) для  $\gamma_{min}$  не является доказанным, но утверждается, что оно хорошо подтверждается эмпирически: это иллюстрируется впечатляющими по качеству скейлинговыми кривыми  $g = F(L/\xi)$ ,

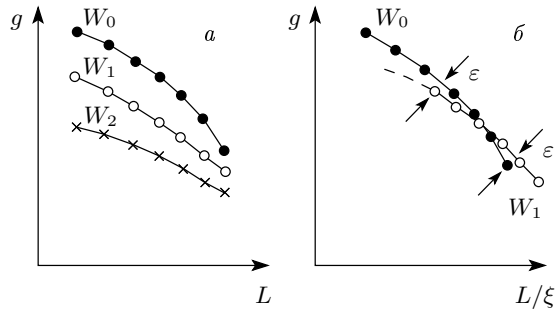


Рис. 5. Построение скейлинговых кривых при отсутствии скейлинга

приведенными в работе [10]. Однако к эмпирическим доказательствам скейлинга нужно относиться с большой осторожностью. Нетрудно предложить алгоритм, который позволяет «доказать» эмпирический скейлинг практически в любой ситуации.

Рассмотрим подробнее процедуру построения скейлинговых кривых. Как уже отмечалось, первичные данные представляют собой зависимости  $g(L)$  для фиксированных значений беспорядка  $W_0, W_1, W_2, \dots$  (рис. 5а). Их нужно представить на рис. 5б как функции  $L/\xi$ , выбирая значение  $\xi$  для каждой кривой так, чтобы все кривые по возможности совпали. Если масштаб вдоль оси  $L$  выбран логарифмическим, то такая процедура сводится к простой трансляции. Пусть кривая для  $W_0$  выбрана в качестве реперной и соответствующее ей значение  $\xi_0$  принято за единицу; тогда эта кривая переносится на рис. 5б без изменений. Кривая для  $W_1$  транслируется до наилучшего совпадения с кривой для  $W_0$ , чем определяется значение  $\xi_1$ , и т. д. В логарифмических координатах зависимости  $g(L)$  имеют простую форму (см. рис. 4б) и могут быть аппроксимированы чем-нибудь вроде парабол. Тогда для близких значений  $W_0$  и  $W_1$  соответствующие кривые являются параболой со слегка различными коэффициентами и при подходящей трансляции они почти совпадут в их значительной части. Выберем допустимую погрешность  $\epsilon$  и наложим кривые крест-накрест, как показано на рис. 5б. Если какая-то часть кривой для  $W_1$  не укладывается в допустимую погрешность (штрихи), то соответствующие точки можно отбросить на разумном основании: скейлинг есть свойство больших масштабов и первичные данные для малых  $L$  менее надежны. Аналогичным образом укладывается кривая для  $W_2$  и т. д. При наличии некоторого разброса точек такое построение будет выглядеть

естественным. Если же разброс точек мал, то шаг по  $W$  нужно выбрать более мелким: тогда многочисленные кривые плотно заполнят полосу шириной  $\epsilon$  и результирующая скейлинговая кривая будет выглядеть аккуратно.

Из сказанного ясно, что эмпирически довольно трудно отличить ситуацию с отсутствием скейлинга от ситуации, когда скейлинг имеет место, но имеются существенные поправки к нему. В рассматриваемом случае соотношение (26) тривиально выполняется при  $L \gtrsim \xi$  в локализованной фазе, когда  $\beta_{min} \approx 1/\xi$  и  $g \approx \xi/L$  в соответствии с формулой (26) при  $F(x) \approx 1/x$ ; поэтому в некотором смысле ситуация близка к скейлингу.

Несколько слов о варианте конечно-размерного скейлинга, основанном на статистике уровней [12]. В этом случае используются довольно большие системы, с размерами до  $1024^2$  [13], и существование локализации всех состояний в  $2D$ -системах выглядит убедительно уже на уровне первичных данных (рис. 4в), без апелляции к однопараметрическому скейлингу. Однако в этом подходе обсуждается лишь переход от металлического режима при малых  $L$  к локализованному режиму при больших  $L$  и не делается попытки провести различие между экспоненциальной и степенной локализацией.

## 5. ВОЗМОЖЕН ЛИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СКЕЙЛИНГ?

В разд. 3 мы показали нарушение однопараметрического скейлинга для величины  $\beta_{min}$ . Если  $\beta_{min} \sim \gamma_{min}$ , то, очевидно, скейлинга нет и для  $\gamma_{min}$ . Если же  $\beta_{min}$  и  $\gamma_{min}$  существенно различны, то собственные функции квазиодномерной системы имеют структуру, характеризуемую двумя масштабами,  $1/\beta_{min}$  и  $1/\gamma_{min}$  (см. рис. 2), и скейлинг невозможен по физическим причинам. Эти соображения подтверждаются анализом первичных численных данных (разд. 4). Полученный результат допускает две интерпретации:

I) гипотеза однопараметрического скейлинга [1] в принципе ошибочна;

II) минимальный показатель Ляпунова не является правильной скейлинговой переменной.

Возможность I) не так абсурдна, как может казаться. Обоснования скейлинга в формализме  $\sigma$ -моделей [33] фактически провалились из-за катастрофы высших градиентов [55, 56], а отсутствие скейлинга на уровне функций распределения [57] делает нетривиальным вопрос о выборе скейлинговых пере-

менных. Что касается эксперимента, то он подтверждает скорее «теорию квантовых поправок», чем «теорию слабой локализации». Тем не менее гипотеза однопараметрического скейлинга представляется физически убедительной. В ее пользу свидетельствуют а) аналитический скейлинг в квазислучайных системах [58–60]; б) справедливость скейлингового соотношения  $s = \nu(d - 2)$  в теориях типа Волхардта и Вольфле [25, 26, 41]; в) перенормируемость при  $d < 4$  в точной теоретико-полевой формулировке проблемы [29–31] (см. примечание 1).

Перейдем к обсуждению возможности II). Как ясно из разд. 2, существование скейлинга для величины  $\xi_{1D}$  выглядит достаточно убедительным и подтверждается опытом теории фазовых переходов [44–46]. Соотношение же (10) между  $\xi_{1D}$  и  $\gamma_{min}$  не столь очевидно, как может казаться: так, в квазислучайных системах известны ситуации, когда  $\gamma_{min} > 0$ , но  $\xi_{1D} = \infty$  [58, 59, 61]<sup>7)</sup> (см. также обсуждение в работе [50] математических аспектов вопроса). Основанием для формулы (10) является конструирование по Мотту собственных функций квазиодномерной системы путем сшивки двух решений типа (16), нарастающих с противоположных концов системы. Для точной сшивки требуется наличие всех членов в разложении (16), что означает конечность коэффициента  $A_m$  и присутствие  $1/\gamma_{min}$  в качестве максимального масштаба длины. Эти соображения правильны при небольшом числе членов в разложении (16). Однако в пределе больших  $L$  спектр ляпуновских экспонент  $\gamma_s$  становится квазинепрерывным, а число слагаемых в разложении (16) стремится к бесконечности. В такой ситуации никакой конкретный член в разложении (16) не имеет значения, а существен лишь интегральный эффект, соответствующий некоторому участку спектра  $\gamma_s$ .

Рассмотрим коэффициенты  $A_s$  в формуле (16), определяемые построением Мотта, в зависимости от  $\gamma_s$  (рис. 6). При этом возможны две качественно различные ситуации. В первой из них (рис. 6а) все  $A_s$  оказываются одного порядка; тогда окрестность  $\gamma_{min}$  дает существенный вклад и масштаб  $1/\gamma_{min}$  действительно соответствует длине локализации  $\xi_{1D}$ . В другой ситуации (рис. 6б) вклад окрестности  $\gamma_{min}$  сильно подавлен и масштаб  $1/\gamma_{min}$  не

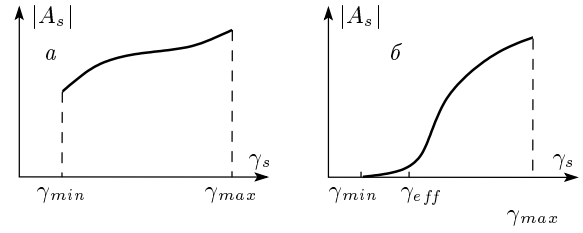


Рис. 6. Коэффициенты  $A_s$ , возникающие при конструировании собственной функции квазиодномерной системы путем сшивки двух разложений типа (13), в зависимости от  $\gamma_s$

имеет физического значения. Длина локализации  $\xi_{1D}$  определяется некоторым эффективным показателем  $\gamma_{eff}$ , который обеспечивает подходящее обрезание<sup>8)</sup> в области малых  $\gamma_s$  (рис. 6б)

$$\xi_{1D} \sim \frac{1}{\gamma_{eff}}. \quad (54)$$

Согласно формуле (8), скейлинговое соотношение (26) нужно постулировать не для  $\gamma_{min}$ , а для  $\gamma_{eff}$ <sup>9)</sup>. После этого зависимость  $\gamma_{eff}$  от параметров может быть установлена из условия существования скейлинга.

Поясним последнее в рамках обсуждавшегося выше численного алгоритма. Вернемся к рис. 5, но будем считать, что кривые для  $W_0, W_1, \dots$  относятся не к  $g = 1/\gamma_{min}L$ , а к  $g = 1/\gamma_{n_0}L$ , где  $\gamma_{n_0}$  — показатель Ляпунова с фиксированным номером  $n_0$ . Попытка совместить кривые для  $W_0$  и  $W_1$  масштабным преобразованием в общем случае оказывается неудачной. Поэтому при пере-

<sup>8)</sup> Из уравнения (44) ясно, что  $s$ -й член в разбении (18) локализован в поперечном направлении на том же масштабе  $1/\beta_s$ , что и масштаб, на котором он изменяется в продольном направлении. Аналогичное свойство ожидается для уравнения (16), что обеспечивает равенство продольной и поперечной длин локализации. Последнее фундаментальное свойство не нарушается при замене нижней границы спектра  $\gamma_{min}$  на эффективное обрезание  $\gamma_{eff}$ .

<sup>9)</sup> Квазиодномерная собственная функция содержит много характерных масштабов  $1/\gamma_1, 1/\gamma_2, \dots, 1/\gamma_m$  и все они существенны вблизи ее центра. Малые масштабы последовательно «вымирают» по мере смещения от максимума собственной функции к ее хвостам, пока не остается единственный масштаб  $1/\gamma_m$ . Однако в ситуации рис. 6б это происходит на таких расстояниях, где собственную функцию можно считать нулем для всех практических целей. Выбором единственного параметра  $\xi_{1D}$  нельзя в полной мере охарактеризовать весь набор масштабов  $1/\gamma_s$ : в лучшем случае это возможно для наиболее существенных из них, которые определяют общую форму собственной функции и соответствуют эффективному обрезанию  $\gamma_{eff}$ .

<sup>7)</sup> В одномерной модели (11) с  $V_n = V \cos(2\pi\beta n)$  и иррациональным  $\beta$  переход Андерсона происходит при  $V = 2$  [58, 59, 61]. Показатель Ляпунова  $\gamma$  положителен при всех иррациональных  $\beta$  в области  $V > 2$  [61]. Тем не менее радиус локализации расходитсся для некоторых значений  $\beta$ , аномально близких к рациональным числам [59].

ходе от  $W_0$  к  $W_1$  заменим  $\gamma_{n_0}$  на  $\gamma_{n_1}$ , т. е. изменим номер ляпуновской экспоненты. Тогда кривая для  $W_1$  изменит свою форму и подбором  $\Delta n = n_1 - n_0$  можно добиться ее наилучшего совпадения с кривой для  $W_0$  после трансляции. Аналогично, для  $W_2$  подберем  $\gamma_{n_2}$  с номером  $n_2$  и т. д. В результате скейлинговое построение определит не только зависимость  $\xi(W)$ , но и зависимость  $n(W)$ . Разумеется, такое построение будет содержать несколько больший произвол, чем в исходном варианте алгоритма [7–11]: не только общий масштаб для  $\xi$ , но и начальный номер  $n_0$  остается произвольным.

Таким образом, мы пришли к конструктивной модификации общепринятого численного алгоритма. Эта модификация позволяет улучшить качество скейлинга и возможно приведет к устранению противоречий, отмеченных в разд. 1.

### 6. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СКЕЙЛИНГ

Предложенный алгоритм может быть реализован аналитически, если первичные данные для скейлингового построения заданы в виде зависимости  $g = 1/\gamma_p L$  от  $p, W, L$ :

$$g = Q(p, W, \tau), \quad \tau = \ln L, \quad (55)$$

где  $p$  — непрерывный номер ляпуновской экспоненты, аналогичный использованному в уравнении (51). Линеаризуем (55) вблизи некоторого значения  $\tau_0$ ,

$$g = Q(p, W, \tau_0) + Q'_\tau(p, W, \tau_0)(\tau - \tau_0) \equiv \equiv g_0 + A(\tau - \tau_0). \quad (56)$$

Аналогичная линеаризация для  $W = W_1$  вблизи значения  $\tau_1$ , выбранного из условия  $Q(p, W_1, \tau_1) = Q(p, W, \tau_0)$ ,

$$g = Q(p, W_1, \tau_1) + Q'_\tau(p, W_1, \tau_1)(\tau - \tau_1) \equiv \equiv g_0 + B(\tau - \tau_1) \quad (57)$$

дает другой наклон линейной зависимости, в результате чего линейные участки (56), (57) не могут быть совмещены масштабным преобразованием. Проведем в формуле (57) изменение  $p$  таким образом, чтобы обеспечить равенство  $A = B$ :

$$g = Q(p_1, W_1, \tau_1) + Q'_\tau(p_1, W_1, \tau_1)(\tau - \tau_1) \equiv \equiv g_0 + A(\tau - \tau_1). \quad (58)$$

Считая  $p_1, W_1, \tau_1$  близкими к  $p, W, \tau_0$ , получим из соответствия (56) и (58)

$$Q'_p(p, W, \tau_0)\Delta p + Q'_W(p, W, \tau_0)\Delta W + Q'_\tau(p, W, \tau_0)\Delta\tau = 0, \quad (59)$$

$$Q''_{\tau p}(p, W, \tau_0)\Delta p + Q''_{\tau W}(p, W, \tau_0)\Delta W + Q''_{\tau\tau}(p, W, \tau_0)\Delta\tau = 0$$

или, разрешая относительно  $\Delta p$  и  $\Delta\tau$ ,

$$\Delta p = \frac{Q'_\tau Q''_{\tau W} - Q'_W Q''_{\tau\tau}}{Q'_p Q''_{\tau\tau} - Q'_\tau Q''_{\tau p}} \Delta W, \quad (60)$$

$$\Delta\tau = \frac{Q'_W Q''_{\tau p} - Q'_p Q''_{\tau W}}{Q'_p Q''_{\tau\tau} - Q'_\tau Q''_{\tau p}} \Delta W.$$

Интерпретируя изменение  $\tau$  как изменение  $\ln \xi$ ,

$$\Delta\tau = \Delta \ln \xi, \quad (61)$$

перепишем (58) в виде

$$\Delta g = Q'_\tau(p, W, \tau_0) \Delta \ln(L/\xi). \quad (62)$$

Переходя в формулах (60)–(62) к бесконечно малым приращениям, получим систему уравнений

$$\frac{dp}{dW} = -\frac{Q'_W(p, W, \tau_0)Q''_{\tau\tau}(p, W, \tau_0) - Q'_\tau(p, W, \tau_0)Q''_{\tau W}(p, W, \tau_0)}{Q'_p(p, W, \tau_0)Q''_{\tau\tau}(p, W, \tau_0) - Q'_\tau(p, W, \tau_0)Q''_{\tau p}(p, W, \tau_0)},$$

$$\frac{d \ln \xi}{dW} = -\frac{Q'_p(p, W, \tau_0)Q''_{\tau W}(p, W, \tau_0) - Q'_W(p, W, \tau_0)Q''_{\tau p}(p, W, \tau_0)}{Q'_p(p, W, \tau_0)Q''_{\tau\tau}(p, W, \tau_0) - Q'_\tau(p, W, \tau_0)Q''_{\tau p}(p, W, \tau_0)}, \quad (63)$$

$$\frac{dg}{d \ln(L/\xi)} = Q'_\tau(p, W, \tau_0),$$

последовательно определяющих зависимости  $p(W)$ ,  $\xi(W)$  и  $g = F(L/\xi)$ . Уравнения (63) соответствуют обычному скейлинговому построению (разд. 4, 5) для максимального размера системы  $L_0 = \exp \tau_0$ , при котором зависимости  $g(\ln L)$  линеаризуются вблизи  $\ln L_0$  и только их линейные участки (отмечены на рис. 4б) совмещаются при масштабных пре-

образованиях. Для самосогласованности подхода зависимость от  $\tau_0$  должна исчезать в пределе  $\tau_0 \rightarrow \infty$ .

Если зависимость (55) задана в неявной форме:

$$G(g, p, W, \tau) = 0, \quad (64)$$

то уравнения (63) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dW} &= -\frac{G'_W(G''_{g\tau}G'_\tau - G''_{\tau\tau}G'_g) - G'_\tau(G''_{gW}G'_\tau - G''_{\tau W}G'_g)}{G'_p(G''_{g\tau}G'_\tau - G''_{\tau\tau}G'_g) - G'_\tau(G''_{gp}G'_\tau - G''_{\tau p}G'_g)}, \\ \frac{d \ln \xi}{dW} &= -\frac{G'_p(G''_{gW}G'_\tau - G''_{\tau W}G'_g) - G'_W(G''_{gp}G'_\tau - G''_{\tau p}G'_g)}{G'_p(G''_{g\tau}G'_\tau - G''_{\tau\tau}G'_g) - G'_\tau(G''_{gp}G'_\tau - G''_{\tau p}G'_g)}, \\ \frac{dg}{d \ln(L/\xi)} &= -\frac{G'_\tau}{G'_g}. \end{aligned} \tag{65}$$

Все функции в правой части зависят от  $g_0, p, W, \tau_0$ , где  $\tau_0$  — фиксированный параметр, а  $g_0$  определяется как функция  $p, W$  из уравнения связи  $G(g_0, p, W, \tau_0) = 0$ .

К сожалению, зависимость (64) для стандартных ляпуновских показателей  $\gamma_s$  неизвестна; поэтому ниже представлены иллюстративные вычисления для показателей  $\beta_s$ , когда уравнение (64) имеет вид (51). Последнее уравнение можно упростить путем разложения  $\text{ch}(1/gL)$  без существенных физических последствий<sup>10)</sup>:

$$G(g, p, W, \tau) = \frac{\exp(-2\tau_0)}{g^2} + \varphi(p) - W^2 f(g) = 0, \tag{66}$$

где

$$\varphi(p) = 2(1 - \cos p), \quad f(g) = \text{cth}(1/2g).$$

Тогда уравнения (65) приводятся к виду

$$\frac{d\varphi(p)}{dW^2} = -\frac{g_0^2 f(g_0) W^2 - \exp(-2\tau_0)}{g_0^2 W^2} = \frac{\varphi(p)}{W^2}, \tag{67}$$

$$\frac{d \ln \xi}{d \ln W} = -1, \tag{68}$$

$$\frac{dg}{d \ln \xi} = \frac{2g_0 \exp(-2\tau_0)}{2 \exp(-2\tau_0) + W^2 g_0^3 f'(g_0)}, \tag{69}$$

где  $g_0$  является функцией  $p, W$ , определяемой уравнением  $G(g_0, p, W, \tau_0) = 0$ , что учтено во втором равенстве (67). Решая уравнения (67), (68)

$$\varphi(p) = 2(1 - \cos p) = c_0 W^2, \quad \xi = \frac{c_1}{W} \tag{70}$$

и используя равенство (66), получим соотношения

$$W^2 = \frac{\exp(-2\tau_0)}{g_0^2 [f(g_0) - c_0]}, \quad \frac{dg}{dg_0} = 1, \tag{71}$$

с помощью которых функция  $g = F(L/\xi)$  находится в неявной форме:

$$c_1^2 g^2 [f(g) - c_0] = (\xi/L)^2. \tag{72}$$

Здесь  $c_0$  и  $c_1$  — произвольные постоянные. Ввиду ограниченности величины  $\varphi(p)$ ,  $0 \leq \varphi(p) \leq 4$ , однопараметрический скейлинг оказывается возможным лишь при условии

$$W^2 < \frac{4}{c_0} \equiv W_{c1}^2. \tag{73}$$

Для  $W > W_{c1}$  следует полагать  $p = \pi$ , что возвращает нас к концепции минимальной ляпуновской экспоненты и отсутствию скейлинга — при этом сохраняются все результаты разд. 3.

Ситуация оказывается качественно различной для  $c_0 < 1$  и  $c_0 > 1$ , когда соответственно  $W_{c1} > W_c$  и  $W_{c1} < W_c$ . Скейлинговая функция  $g = F(\xi/L)$ , определяемая уравнением (72), показана на рис. 7а: для  $c_0 < 1$  она близка к эмпирически найденной в работе [10], тогда как в случае  $c_0 > 1$  возникает конечный предел  $g^* = 1/2 \text{arth}(1/c_0)$  при  $\xi/L \rightarrow 0$ . Зависимости  $g(L)$  для  $W < W_{c1}$  получаются из формулы (66) после подстановки  $\varphi(p)$  из формулы (70), тогда как при  $W > W_{c1}$  они остаются такими же, как в разд. 3 (рис. 7б, в). Поведение характерных масштабов для  $c_0 > 1$  и  $c_0 < 1$  показано соответственно на рис. 8а и рис. 8б.

Как видно на рис. 7, 8, при  $c_0 < 1$  имеет место экспоненциальная локализация всех состояний в соответствии с общепринятыми представлениями; при  $c_0 > 1$  сохраняется фаза со степенной локализацией, но поведение характерных масштабов изменяется по сравнению с результатами разд. 3. Сингулярность в точке  $W_{c1}$  в действительности фиктивна и связана с тем, что при  $W < W_{c1}$  мы постулировали точный скейлинг. В действительности же скейлинг является приближенным, так как корреляционный радиус  $\xi$  конечен вблизи  $W_{c1}$  и поправки к скейлингу, связанные с  $l_i/\xi$  (см. (4)), не могут считаться пренебрежимо малыми. С учетом последних качественное различие между областью  $W < W_{c1}$  и областью  $W > W_{c1}$  исчезает: имеется хороший скейлинг при  $W \lesssim W_{c1}$  и его отсутствие при  $W \gtrsim W_{c1}$ , но разрушение скейлинга происходит постепенно, путем нарастания поправок к нему.

<sup>10)</sup> Это дает лишь ограничение со стороны малых  $L$  в области  $g \ll 1$ .

Остановимся на физическом смысле параметра  $c_0$ . Формально он возникает из-за того, что условие скейлинга определяет лишь форму дифференциальных уравнений (63), но не начальные условия к ним. В конкретной модели Андерсона значение  $c_0$  фиксировано и никаким произволом не обладает. Однако выше мы не фиксировали функцию распределения  $P(V)$  и использовали лишь ее первый и второй моменты (см. (27)). Поэтому исходное уравнение связи (66) описывает не одну, а целое множество моделей Андерсона, в которых значения константы  $c_0$  различны. Естественно ожидать, что путем изменения модели значение  $c_0$  можно менять в достаточно широких пределах, чтобы перекрыть области как  $c_0 < 1$ , так и  $c_0 > 1$ . Тогда все двумерные системы распадаются на два класса, в одном из которых имеется фазовый переход, в другом — экспоненциальная локализация всех состояний<sup>11)</sup>. В экспериментальном аспекте такое утверждение высказывалось Заварицкой в середине 1980-х годов (см. работу [62] и ссылки в ней).

Подчеркнем, что проведенное рассмотрение носит иллюстративный характер. Для стандартных ляпуновских показателей  $\gamma_s$  исходное уравнение (66) имеет другой вид, что может привести к существенному изменению полученных зависимостей. В частности, для корреляционного радиуса  $\xi$  вместо формулы (70) ожидается экспоненциальная зависимость  $\xi \sim \exp(\text{const}/W^2)$ , следующая из однопараметрического скейлинга [1] или теории Волхардта–Вольфле [25].

## 7. СВЯЗЬ С УРАВНЕНИЕМ ГЕЛЛ-МАННА — ЛОУ

В теории однопараметрического скейлинга [1] в качестве скейлинговой переменной  $g(L)$  используется полная проводимость (кондактанс)  $G_L$  конечного блока размером  $L^d$  в единицах  $e^2/h$ . Для нее справедливо уравнение Гелл-Манна — Лоу

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g), \quad (74)$$

где функция  $\beta(g)$  имеет асимптотики

$$\beta(g) = \begin{cases} (d-2) + \frac{A}{g} + \dots & (A < 0), \quad g \gg 1, \\ \ln g, & g \ll 1. \end{cases} \quad (75)$$

Нулевой член первой асимптотики связан с существованием конечной удельной проводимости  $\sigma$  в металлическом состоянии (так что  $G_L \sim \sigma L^{d-2}$ ), а поправочный член  $A/g$  определяется суммированием «веерных» диаграмм [63]. Вторая асимптотика связана с предположением об экспоненциальной локализации, благодаря которой  $G_L \sim \exp(-\text{const} L)$ .

Последнее предположение в общем случае неверно: так, для степенной локализации  $G_L \sim L^{-\alpha}$  и

$$\beta(g) = -\alpha, \quad g \ll 1. \quad (76)$$

Из изложенного выше ясно, что в  $2D$ -системах  $\beta$ -функция не является универсальной в области малых  $g$  и может иметь различное поведение в разных случаях (рис. 9). Этот вывод является совершенно естественным с точки зрения общей теории фазовых переходов [29]. Скейлинг является свойством больших масштабов, и уравнение (74) имеет реальный смысл лишь при  $|\beta(g)| \ll 1$  (т.е. в узкой полоске вблизи горизонтальной оси на рис. 9), когда  $g(L)$  медленно меняется. В противном случае  $g(L)$  изменяется на атомном масштабе, где нет никаких оснований ни для масштабной инвариантности, ни для универсальности. С общей точки зрения существование универсальных асимптотик (75) выглядит достаточно случайным, а предположение об универсальности  $\beta(g)$  для всех  $g$  [1] является очевидной идеализацией (экспериментальные аспекты этого см. в работе [62]).

При  $d > 2$  уравнение (74) имеет неподвижную точку  $g^*$ , с которой и связан переход Андерсона. При  $d = 2 + \epsilon$  неподвижная точка находится в области больших  $g$  и исчезает в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ . Этот вывод об отсутствии перехода Андерсона в  $2D$ -системах остается неизменным, так как металлическая фаза действительно отсутствует (разд. 3). Обсуждавшийся выше переход происходит в глубине локализованной фазы и соответствует «переключению» с одной  $\beta$ -функции на другую при изменении внешних параметров. Следовательно, никакой существенной ревизии в области слабой локализации не требуется.

<sup>11)</sup> Конечно, могут существовать принципиальные ограничения, которые делают невозможной реализацию случая  $c_0 > 1$ , но в настоящее время для этого не видно оснований.

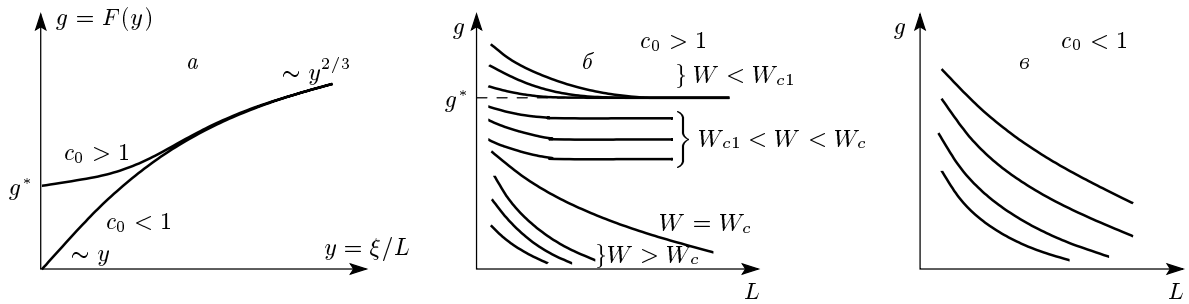


Рис. 7. а) Скейлинговая функция  $g = F(\xi/L)$ , определяемая уравнением (72). б, в) Зависимости  $g(L)$  для  $c_0 > 1$  и  $c_0 < 1$

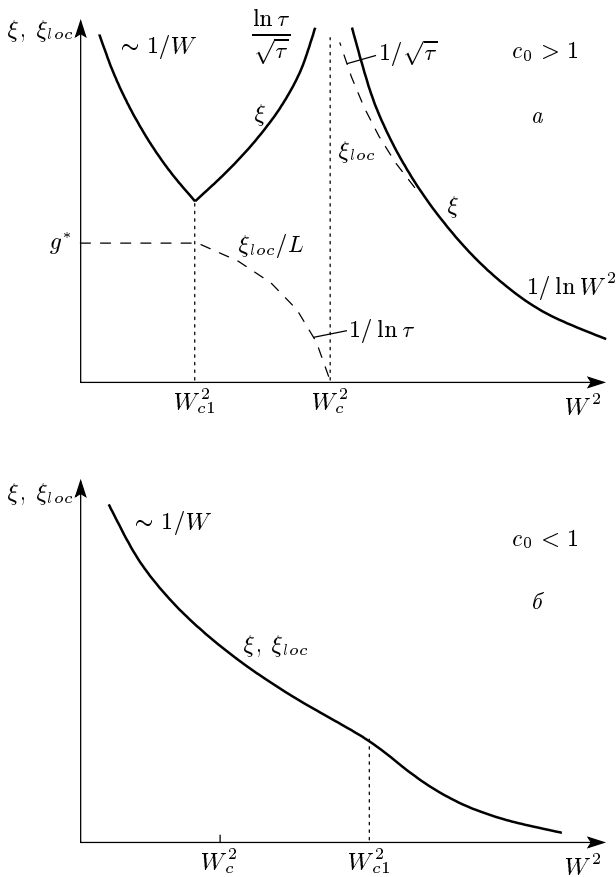


Рис. 8. Поведение характерных масштабов при  $c_0 > 1$  (а) и  $c_0 < 1$  (б)

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что общепринятый численный алгоритм, основанный на методе трансфер-матрицы, является дефектным, так как минимальный показатель Ляпунова не удовлетворяет однопараметрическому скейлингу. Для восстановления скейлинга

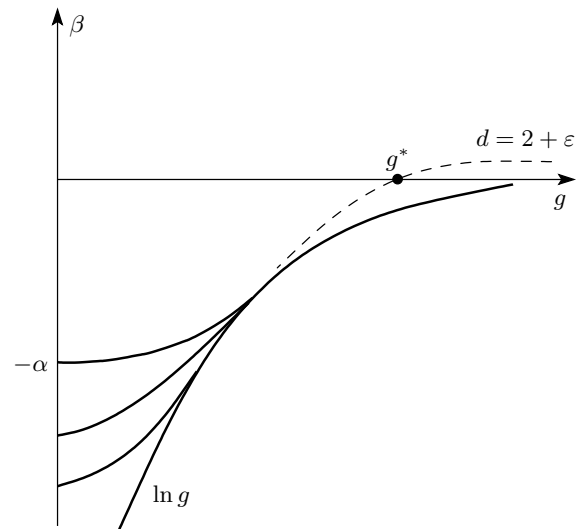


Рис. 9. Функция Гелл-Манна — Лоу  $\beta(g)$  не является универсальной в области малых  $g$

требуется модификация алгоритма, конструктивно сводящаяся к изменению номера ляпуновской экспоненты в процессе скейлинговых построений. Эта модификация не связана с большим увеличением вычислительной работы, так как высшие показатели Ляпунова все равно определяются в процессе нахождения  $\gamma_{min}$  [22]. Фактически авторы работ [8–11] могут использовать уже имеющиеся первичные данные и дать им другую интерпретацию. Возможно, это приведет к разрешению противоречий, отмеченных в разд. 1.

Уже на настоящем этапе можно понять странный дрейф результатов для  $d = 3$  по мере увеличения размеров системы:  $\nu = 0.66$  [7],  $\nu = 1.2 \pm 0.3$  [8],  $\nu = 1.35 \pm 0.15$  [15],  $\nu = 1.54 \pm 0.08$  [16],  $\nu = 1.58 \pm 0.02$  [21]. Для малых  $L$  число членов в уравнении (16) сравнительно невелико и максималь-

ный масштаб  $1/\gamma_{min}$  действительно соответствует корреляционному радиусу  $\xi_{1D}$ ; описание перехода Андерсона получается очень грубым, но результаты являются правильными в пределах своей грубости. Для больших  $L$  различие между минимальным и эффективным показателями Ляпунова становится существенным и результаты, формально уточняясь, в действительности становятся неверными.

Буквальное использование концепции минимальной ляпуновской экспоненты приводит к однозначному выводу о существовании в  $2D$ -системах фазового перехода типа Костерлица–Таулеса между экспоненциальной и степенной локализацией. В результате указанной модификации алгоритма возникает представление о двух классах  $2D$ -систем, в одном из которых имеется фазовый переход, в другом — экспоненциальная локализация всех состояний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-17519).

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
2. B. L. Al'tshuler, A. G. Aronov, D. E. Khmel'nitskii, and A. I. Larkin, in *Quantum Theory of Solids*, ed. by I. M. Lifshitz, Mir Publishers, Moscow, 1982.
3. S. V. Kravchenko, G. V. Kravchenko, J. E. Furneaux, V. M. Pudalov, and M. D. Iorio, *Phys. Rev. B* **50**, 8039 (1994).
4. S. V. Kravchenko, W. E. Mason, G. E. Bowker, J. E. Furneaux, V. M. Pudalov, and M. D. Iorio, *Phys. Rev. B* **51**, 7038 (1995).
5. S. V. Kravchenko, D. Simonian, M. P. Sarachik et al., *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4938 (1996).
6. E. Abrahams, S. V. Kravchenko, and M. P. Sarachik, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 251 (2001).
7. J. L. Pichard and G. Sarma, *J. Phys. C: Sol. St. Phys.* **14**, L127 (1981); **14**, L617 (1981).
8. A. MacKinnon and B. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1546 (1981).
9. A. MacKinnon and B. Kramer, *Z. Phys.* **53**, 1 (1983).
10. M. Schreiber and M. Ottomeier, *J. Phys.: Condens. Matter* **4**, 1959 (1992).
11. K. Slevin, Y. Asada, and L. I. Deych, E-print archives, cond-mat/0404530.
12. B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears et al., *Phys. Rev. B* **47**, 11487 (1993).
13. I. Kh. Zharekeshev and B. Kramer, *Phys. Rev. B* **51**, 17239 (1995).
14. B. Kramer, K. Broderix, A. MacKinnon, and M. Schreiber, *Physica A* **167**, 163 (1990).
15. E. Hofstetter and M. Schreiber, *Europhys. Lett.* **21**, 933 (1993).
16. A. MacKinnon, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, 2511 (1994).
17. M. Schreiber and H. Grussbach, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1687 (1996).
18. I. Kh. Zharekeshev and B. Kramer, *Phys. Rev. B* **51**, 17239 (1995).
19. I. Kh. Zharekeshev and B. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 717 (1997).
20. I. Kh. Zharekeshev and B. Kramer, *Ann. Phys. (Leipzig)* **7**, 442 (1998).
21. K. Slevin and T. Ohtsuki, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 382 (1999).
22. P. Markos, *J. Phys. A: Math Gen* **33**, L393 (2000).
23. P. Markos and M. Heneke, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, L765 (1994).
24. I. M. Suslov, E-print archives, cond-mat/0105325, cond-mat/0106357.
25. D. Vollhardt and P. Wölfle, *Phys. Rev. B* **22**, 4666 (1980); *Phys. Rev. Lett.* **48**, 699 (1982); D. Vollhardt and P. Wölfle, in *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*, ed. by V. M. Agranovich and A. A. Maradudin, v. 32, North-Holland, Amsterdam (1992).
26. A. Kawabata, *Sol. St. Comm.* **38**, 823 (1981); B. Shapiro, *Phys. Rev. B* **25**, 4266 (1982); A. В. Мясников, М. В. Садовский, *ФТТ* **34**, 3569 (1982).
27. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **102**, 1951 (1992).
28. И. М. Суслов, *УФН* **168**, 503 (1998).
29. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
30. A. Nitzan, K. F. Freed, and M. N. Cohen, *Phys. Rev. B* **15**, 4476 (1977).
31. М. В. Садовский, *УФН* **133**, 223 (1981).



32. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).
33. F. Wegner, Z. Phys. B **35**, 207 (1979); L. Schäfer and F. Wegner, Z. Phys. B **38**, 113 (1980); S. Hikami, Phys. Rev. B **24**, 2671 (1981); К. Б. Ефетов, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ **79**, 1120 (1980); К. В. Efetov, Adv. Phys. **32**, 53 (1983).
34. F. Wegner, Nucl. Phys. B **316**, 663 (1989).
35. H. Kunz, R. Souillard, J. de Phys. Lett. **44**, L411 (1983).
36. К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **93**, 1125 (1987); **94**, 357 (1988).
37. B. Shapiro, Phys. Rev. Lett. **50**, 747 (1983).
38. D. Belitz and T. R. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **66**, 261 (1994).
39. Н. Г. Жданова, М. С. Каган, Е. Г. Ландсберг, ЖЭТФ **117**, 761 (2000).
40. H. Kunz and R. Souillard, J. de Phys. Lett. **44**, L506 (1983).
41. И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).
42. V. N. Kuzovkov et al., J. Phys.: Condens. Matter **14**, 13777 (2002).
43. V. N. Kuzovkov and W. von Niessen, Eur. Phys. J. B **42**, 529 (2004).
44. M. P. Nightingale, Physica A **83**, 561 (1976).
45. B. Derrida and J. Vannimenus, J. de Phys. Lett. **41**, L473 (1980).
46. B. Derrida, J. Phys. A: Math Gen **14**, L5 (1981).
47. В. И. Оселедец, Труды Моск. мат. общества, **19**, 197 (1968).
48. Н. Мотт, Ф. Дэвис, *Электронные процессы в некристаллических веществах*, Мир, Москва (1982).
49. Г. А. Корн, Т. М. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1977).
50. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
51. D. J. Thouless, Phys. Rep. **13**, 92 (1974).
52. А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, Москва (1967).
53. B. J. Last and D. J. Thouless, J. Phys. C: Sol. St. Phys. **7**, 699 (1974).
54. R. Haydock, Phil. Mag. B **43**, 203 (1981); N. F. Mott and M. Kaveh, Adv. Phys. **34**, 329 (1985).
55. В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, В. И. Юдсон, ЖЭТФ **94**, 255 (1988).
56. F. Wegner, Z. Phys. B **78**, 33 (1990).
57. Б. Л. Альтшулер, В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, ЖЭТФ **91**, 2276 (1986).
58. И. М. Суслов, ЖЭТФ **83**, 1079 (1982).
59. И. М. Суслов, ЖЭТФ **84**, 1792 (1983).
60. И. М. Суслов, ЖЭТФ **92**, 1433 (1987).
61. S. Aubry and G. Andre, Ann. Israel. Phys. Soc. **3**, 133 (1980).
62. Э. И. Заварицкая, ЖЭТФ **93**, 952 (1987).
63. Л. П. Горьков, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, Письма в ЖЭТФ **30**, 248 (1979).