

# ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОЕ СМЕШЕНИЕ В ЖИДКОЙ СУСПЕНЗИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРОЗРАЧНЫХ МИКРОСФЕР

*А. А. Афанасьев\**, *А. Н. Рубинов*, *С. Ю. Михневич\**, *И. Е. Ермолаев*

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси  
220072, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 6 декабря 2004 г.

Рассмотрен процесс четырехволнового смешения в искусственно созданной нелинейной гетерогенной среде — жидкой суспензии диэлектрических прозрачных микросфер. На основе уравнения Смолуховского исследована динамика концентрационного отклика под действием градиентных сил, действующих на микросферы в интерференционном поле взаимодействующих волн. С использованием разложения в ряд Фурье функции распределения микросфер получены кинетические уравнения для амплитуд светодифрагированных концентрационных решеток, участвующих в процессе четырехволнового смешения. Найдены значения отношений радиуса микросфер к периодам решеток, при которых результирующая градиентная сила равна нулю и соответственно суспензия диэлектрических микросфер не проявляет нелинейных свойств независимо от интенсивности взаимодействующих волн. Исследована кинетика процесса четырехволнового смешения при эффективном энергообмене между опорными, сигнальной и обратной волнами. Показано, что жидкая суспензия диэлектрических прозрачных микросфер является высокоэффективной широкополосной нелинейной средой для обращения волнового фронта низкоинтенсивного излучения непрерывных лазеров.

PACS: 42.65.Hw

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе развита теория четырехволнового смешения в жидкой суспензии прозрачных микросфер (гетерогенная среда), нелинейность которой обусловлена изменением их концентрации под действием градиентных сил в электромагнитном поле взаимодействующих волн [1, 2]. Известно [3], что в жидкой суспензии микросфер градиентные силы, возникающие в интерференционном поле лазерного излучения, втягивают микросферы с большим показателем преломления  $n_0 > \bar{n}$  (где  $n_0$  и  $\bar{n}$  — показатели преломления соответственно микросфер и жидкости) в область с максимальной интенсивностью (пучности интерференционного поля). Возрастающая концентрация микросфер в области с большей интенсивностью излучения приводит к увеличению показателя преломления суспензии и соответствующему уменьшению в области с меньшей интенсивностью (узлы интерференционного поля). В обратном случае, когда  $n_0 < \bar{n}$ , градиентные силы втягивают

микросферы в область с меньшей интенсивностью, увеличивая тем самым показатель преломления суспензии также в области с большей интенсивностью излучения. Таким образом, независимо от отношения  $\bar{n} = n_0/\bar{n}$  жидкая суспензия прозрачных микросфер — искусственно созданная гетерогенная среда — ведет себя подобно нелинейной самофокусирующей среде с положительным оптическим коэффициентом Керра  $n_2 > 0$  [3]. Впервые на возможность использования таких гетерогенных сред в качестве нелинейного оптического материала обращено внимание в работе [4].

Концентрационная нелинейность гетерогенной среды, обусловленная пространственной модуляцией относительно крупных частиц (микросфер) в вязкой жидкости характеризуется существенно большими временами установления, чем нелинейность обычных «атомарных» сред [5]. Поскольку микросферы обладают значительными размерами (порядка микрометров), их пространственная модуляция градиентными силами приводит к возникновению необычно больших нелинейных

\*E-mail: lvp@dragon.bas-net.by

коэффициентов. В работе [3] проведены эксперименты по четырехволновому смешению с целью определения оптического коэффициента Керра  $n_2$  в водной суспензии латексных микросфер радиуса  $a = 0.117$  мкм с использованием пучков излучения аргонового лазера ( $\lambda = 5145 \text{ \AA}$ ) мощностью около 100 мВт. Измеренный оптический коэффициент Керра  $n_2 = 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{МВт}$  при концентрации микросфер  $N_0 = 6.5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$  оказался в  $10^5$  раз большим, чем в  $\text{CS}_2$ . При этом времена установления концентрационных решеток микросфер для угла  $6.4^\circ$  схождения попутно распространяющихся пучков составили более 100 мс. Обладая высоким значением оптического коэффициента Керра  $n_2$ , жидкая суспензия диэлектрических микросфер может использоваться в качестве высокоэффективной широкополосной нелинейной среды для низкоинтенсивного лазерного излучения большой длительности.

В работе [6] развита теория четырехволнового смешения в жидких суспензиях прозрачных микросфер малых размеров в пределе слабого поля, когда эффектами насыщения пренебрегается (диффузионный предел). В диффузионном пределе градиентные силы модулируют концентрацию микросфер, создавая две ортогональные концентрационные решетки, когерентное рассеяние излучения на которых приводит к формированию обращенной волны и усилению пробной. Несмотря на то что при этом только малая часть микросфер вовлекается в процесс четырехволнового смешения, коэффициент отражения обращенной волны может достигать значительных величин ( $\eta > 1$ ). Существенно ограничивающим фактором применения результатов теории, развитой в работе [6], является приближение малых размеров микросфер, когда независимо от их пространственного положения на интерференционной картине поля интенсивность действующего излучения внутри их объема считается постоянной. В этом случае установившиеся амплитуды решеток не зависят от угла схождения взаимодействующих волн, а их коэффициент параметрической связи пропорционален квадрату объема микросферы, т. е. величине  $a^6$ . В частности, ниже будет показано, что развитая в приближении постоянной интенсивности излучения в объеме микросфер теория четырехволнового смешения [6] справедлива в весьма узком интервале значений радиуса микросфер, дает существенно завышенное значение коэффициента отражения  $\eta$  обращенной волны в области  $2ka \geq 1$  ( $k$  — волновое число) и не предсказывает осциллирующий характер зависимости  $\eta = \eta(a)$ . В данной работе развита

теория четырехволнового смешения, свободная от указанных ограничений, и полученные результаты содержат результаты работы [6] как частный случай.

Развитая ниже теория базируется на совместной системе укороченных волновых уравнений и двумерного уравнения Смолуховского для концентрации микросфер, решение которого представлено в виде ряда Фурье с зависящими от времени амплитудами концентрационных решеток кратных периодов, индуцированных взаимодействующими волнами. Возникающие в интерференционном поле попутно и встречно распространяющихся волн градиентные силы вычислены в приближении Рэлея — Ганса. Амплитуды градиентных сил, определяемые интегралом перекрытия микросферы с периодически модулированной интенсивностью действующего излучения, учитывающим ее неоднородность внутри объема микросферы, получены в явной форме с использованием для вычислений сферической системы координат. Предсказан эффект подавления процесса четырехволнового смешения вследствие обращения в нуль результирующих компонент градиентных сил для определенных размеров микросфер и углов схождения взаимодействующих волн. Исследована динамика формирования и релаксации концентрационных решеток, светоиндуцированных взаимодействующими волнами. Проведен анализ стационарного режима четырехволнового смешения в диффузионном пределе и определены условия возникновения параметрической генерации пары взаимно сопряженных волн с учетом потерь излучения, обусловленных рассеянием Рэлея на микросферах. Обсуждены границы применимости результатов работы [6] и характерные особенности процесса четырехволнового смешения в диффузионном пределе, возникающие в результате неоднородности действующего излучения в объеме микросфер. Приведены результаты численного эксперимента процесса четырехволнового смешения без ограничений на амплитуды взаимодействующих волн.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Процесс четырехволнового смешения в жидкой суспензии прозрачных микросфер будем рассматривать в приближении Рэлея — Ганса [7]:

$$|\bar{m} - 1| \ll 1 \quad \text{и} \quad 4\pi a |\bar{m} - 1| \ll \lambda, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина волны излучения. При выполнении неравенств (1) процессами дифракции излучения на

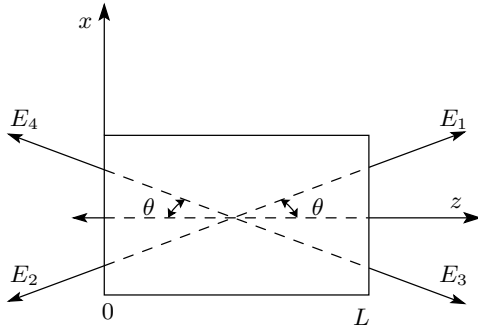


Рис. 1. Геометрия четырехволнового смещения:  $2\theta$  — угол схождения волн,  $L$  — длина кюветы с суспензией

микросферах можно пренебречь [7], считая действующее поле заданным, т. е. воспользоваться так называемым электростатическим приближением [8].

Представим действующее электромагнитное поле в виде суммы линейно поляризованных плоских волн с частотой  $\omega$ :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 E_l(z, t) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{с.с.}, \quad (2)$$

где  $E_l(z, t)$  — амплитуды волн,  $\mathbf{k}_l$  — волновые векторы (см. рис. 1). Будем считать, что взаимодействующие волны поляризованы в направлении, перпендикулярном плоскости  $zx$ .

При четырехволновом смещении микросферы находятся в поле двух пар встречных волн сравнимой интенсивности. Поэтому незначительными по величине радиационными силами светового давления в рассматриваемой теории можно пренебречь [8, 9]. При этом определяющий вклад в процесс светоиндуцированного формирования концентрационного отклика играют градиентные силы, амплитуда которых определяется выражением [10]

$$\mathbf{F}_\nabla = \alpha_0 \int_V \nabla |\bar{E}|^2 dV, \quad (3)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{3}{4\pi} \bar{n}^2 \frac{\bar{m}^2 - 1}{\bar{m}^2 + 2} \quad (4)$$

— удельная поляризуемость микросферы,

$$|\bar{E}|^2 = \frac{1}{2} \{ |E_0|^2 + [E_1 E_2^* \exp(2i(k_z z + k_x x)) + E_3 E_4^* \exp(2i(k_z z - k_x x)) + (E_1 E_4^* + E_2^* E_3) \exp(2ik_z z) + (E_1 E_3^* + E_2^* E_4) \times \exp(2ik_x x) + \text{с.с.}] \} \quad (5)$$

— средняя по времени интенсивность действующего излучения,  $|E_0|^2 = \sum_{l=1}^4 U_l$ ,  $V = (4\pi/3)a^3$  — объем микросферы,  $k_z = k \cos \theta$  и  $k_x = k \sin \theta$  — соответствующие проекции волнового вектора,  $k = (\omega/c)\bar{n}$ ,  $U_l = |E_l|^2$ . Интеграл в выражении (3) по существу является интегралом перекрытия микросферы с неоднородной интенсивностью действующего излучения.

Будем считать, что произведения комплексно-сопряженных амплитуд взаимодействующих волн являются медленными функциями продольной координаты,

$$\frac{\partial |E_l E_{l'}^*|}{\partial z} \ll k_z |E_l E_{l'}^*|. \quad (6)$$

В этом приближении интеграл в выражении (3) с учетом соотношения (5) в сферических координатах может быть вычислен точно [11]. Выполнив в (3) интегрирование, для градиентной силы находим

$$\mathbf{F}_\nabla = \mathbf{j} F_x + \mathbf{k} F_z, \quad (7)$$

где  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  — единичные векторы,

$$F_\kappa = F_{\kappa 0} \exp[2i(k_z z - k_x x)] + F_{\kappa 1} \exp[2i(k_z z + k_x x)] + F_{\kappa 2} \exp(2ik_\kappa \kappa) + \text{с.с.} \quad (8)$$

— компоненты вектора градиентной силы  $\mathbf{F}_\nabla$ ,  $\kappa = \{x, z\}$ . Амплитуды гармоник компонент  $F_\kappa$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} F_{x0} &= -i\alpha_0 k_x E_3 E_4^* V_0 = -(k_x/k_z) F_{z0}, \\ F_{x1} &= i\alpha_0 k_x E_1 E_2^* V_0 = (k_x/k_z) F_{z1}, \\ F_{x2} &= i\alpha_0 k_x (E_1 E_3^* + E_2^* E_4) V_\kappa, \\ F_{z2} &= i\alpha_0 k_z (E_1 E_4^* + E_2^* E_3) V_\kappa, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} V_0 &= (a\Lambda_0)^{3/2} J_{3/2}(2\pi a/\Lambda_0), \\ V_\kappa &= (a\Lambda_\kappa)^{3/2} J_{3/2}(2\pi a/\Lambda_\kappa), \end{aligned} \quad (10)$$

$J_{3/2}(\xi)$  — цилиндрическая функция Бесселя,  $\Lambda_0 = \pi/k$  и  $\Lambda_\kappa = \pi/k_\kappa$  — периоды интерференционной картины соответствующих пар волн. Постоянные коэффициенты  $V_0$  и  $V_\kappa$  в (9) появляются в результате интегрирования выражения (3) и учитывают неоднородность излучения внутри объема микросфер. Нетрудно показать, что  $V_0 = V_\kappa = V$  при  $\xi \ll 1$ . Очевидно, что  $|F_x/F_z| \propto \text{tg } \theta$  и, соответственно, в области малых углов  $\theta \ll \pi/2$  доминирующую роль в процессе формирования концентрационного отклика играет продольная ( $z$ -я) компонента градиентной

силы. Как следует из соотношений (9), для определенных отношений радиуса микросфер к периодам  $\Lambda_\kappa$  интерференционной картины поля, а именно, при  $2\pi a/\Lambda_\kappa = \xi_i$  (где  $\xi_i$  — корни цилиндрической функции Бесселя  $J_{3/2}(\xi)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ), независимо от положения микросфер соответствующая компонента градиентной силы равна нулю. Так называемый эффект «нулевой силы» обусловлен равнодействием противоположно направленных ее составляющих, действующих на соответствующие элементы микросферы. Этот эффект был независимо теоретически предсказан в работах [8, 11]. Из выражений (9) следует, что при определенных значениях параметров системы (например, при  $2k_x a = \xi_1$ ,  $2k_z a = \xi_2$ ) компоненты градиентных сил  $F_{\kappa 2}$  равны нулю (т. е.  $V_\kappa = 0$ ) независимо от интенсивности действующего излучения. Используя значения первых двух корней функций Бесселя  $J_{3/2}(\xi)$  [12], можно показать, что условие  $V_\kappa = 0$  выполняется при  $a/\lambda = 0.709$  и

$$\operatorname{tg} \theta = \xi_1/\xi_2 \approx 0.58,$$

т. е.  $\theta \approx 30^\circ$ . Очевидно, что это условие выполняется также при  $\theta = 45^\circ$  и  $\sqrt{2}ka = \xi_i$ . В этом случае минимальное значение отношения  $a/\lambda$  соответствует  $\xi_i = \xi_1$  и равно  $a/\lambda = 0.506$ . В силу неравенств (1) полученные выше условия могут быть выполнены в суспензиях с малым значением относительного показателя преломления  $|\bar{m} - 1| \leq 10^{-2}$ .

Таким образом, вследствие проявления эффекта нулевой силы процесс четырехволнового смешения, основной вклад в который дают компоненты  $F_{\kappa 2}$ , может быть практически полностью подавлен при соответствующих значениях размеров микросфер и угла схождения взаимодействующих волн. Отметим также, что в зависимости от радиуса микросфер амплитуды градиентных сил (9) являются знакопеременными функциями. Поэтому микросферы соответствующих размеров могут втягиваться как в пучности (при  $J_{3/2}(\xi) > 0$ ), так и в узлы (при  $J_{3/2}(\xi < 0)$ ) интерференционной картины поля. Такое движение микросфер физически объясняется их «стремлением» перекрыть максимальное число пучностей интерференционной картины поля [8, 11].

Для определения концентрационного отклика микросфер, индуцированного электромагнитным полем (см. (1)), воспользуемся двумерным уравнением Смолуховского<sup>1)</sup> (см., например, [13])

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta_\perp N - b \left[ N \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) + \left( F_x \frac{\partial N}{\partial x} + F_z \frac{\partial N}{\partial z} \right) \right], \quad (11)$$

где  $N$  — концентрация микросфер ( $\text{см}^{-3}$ ),  $D = k_B T/6\pi\nu a$  — коэффициент диффузии ( $\text{см}^2/\text{с}$ ),  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура (К),  $\nu$  — вязкость жидкости,  $b = D/k_B T$  — подвижность микросфер,  $\Delta_\perp = \partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial x^2$ . Уравнение (11) справедливо в области  $t > t^*$  при условии, что градиентная сила  $\mathbf{F}_\nabla$  является медленной функцией на временных  $t^*$  и пространственных  $l^*$  масштабах, определяемых соотношениями [13, 14]

$$t^* = bm_0, \quad l^* = \sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} t^*, \quad (12)$$

где  $m_0$  — масса микросферы. В частности, для используемой в эксперименте [3] водной суспензии латексных микросфер радиуса  $a = 1.17 \cdot 10^{-5}$  см с плотностью  $1 \text{ г/см}^3$  при комнатной температуре имеем  $t^* \approx 3 \cdot 10^{-9}$  с и  $l^* \approx 7 \cdot 10^{-9}$  см.

Решение уравнения (11) удобно представить в виде гармонического ряда

$$N(x, z, t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} N_{mn}(t) \exp[2i(mk_z z + nk_x x)], \quad (13)$$

где  $N_{00} = \langle N \rangle_{x,z} = N_0 = \text{const}$  — начальная концентрация микросфер,  $\langle \dots \rangle_{x,z}$  означает пространственное усреднение, причем  $N_{mn}^* = N_{-m,-n}$ . Подстановка решения (13) в уравнение (11) с учетом выражения (8) приводит к следующей системе кинетических уравнений для амплитуд  $N_{mn}(t)$  концентрационных гармоник:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + W_{mn} \right) N_{mn} = & a_{mn} N_{m-1,n+1} - \\ & - a_{mn}^* N_{m+1,n-1} + b_{mn} N_{m-1,n-1} - \\ & - b_{mn}^* N_{m+1,n+1} + c_n N_{m,n-1} - c_n^* N_{m,n+1} + \\ & + d_m N_{m-1,n} - d_m^* N_{m+1,n}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} W_{mn} = & 4D [(mk_z)^2 + (nk_x)^2], \\ a_{mn} = & 2\alpha_0 b (mk_z^2 - nk_x^2) E_3 E_4^* V_0, \\ b_{mn} = & 2\alpha_0 b (mk_z^2 + nk_x^2) E_1 E_2^* V_0, \\ c_{mn} = & 2\alpha_0 b n k_x^2 (E_1 E_3^* + E_2^* E_4) V_x, \\ d_{mn} = & 2\alpha_0 b m k_z^2 (E_1 E_4^* + E_2^* E_3) V_z. \end{aligned} \quad (15)$$

<sup>1)</sup> В англоязычной литературе это уравнение известно как уравнение Планка – Нернста [6].

В случае малых радиусов микросфер,  $a \ll \Lambda_0$ , и углов схождения взаимодействующих волн,  $\theta \ll \pi/2$ , когда составляющей  $F_x$  градиентной силы можно пренебречь, система уравнений (14) принимает более простой вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + W_{mn}\right) N_{mn} = 2\alpha_0 b V m k_z^2 [E_3 E_4^* N_{m-1, n+1} - E_3^* E_4 N_{m+1, n-1} + E_1 E_2^* N_{m-1, n-1} - E_1^* E_2 N_{m+1, n+1} + (E_1 E_4^* + E_2^* E_3) N_{m-1, n} - (E_1^* E_4 + E_2 E_3^*) N_{m+1, n}]. \quad (16)$$

Нелинейная поляризация суспензии микросфер, обусловленная изменением их концентрации под действием градиентных сил, определяется соотношением [6]

$$P = \frac{1}{2} \alpha_0 V N(x, z, t) \times \sum_{l=1}^4 E_l(z, t) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.} \quad (17)$$

Подстановка выражений (2) и (17) в волновое уравнение приводит к следующей системе укороченных уравнений для амплитуд взаимодействующих волн:

$$\begin{aligned} \cos\theta \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial E_1}{\partial t} &= i\gamma (E_1 + \chi_{11} E_2 + \chi_{01} E_3 + \chi_{10} E_4) - \rho E_1, \\ -\cos\theta \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial E_2}{\partial t} &= i\gamma (E_2 + \chi_{11}^* E_1 + \chi_{10}^* E_3 + \chi_{01}^* E_4) - \rho E_2, \\ \cos\theta \frac{\partial E_3}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial E_3}{\partial t} &= i\gamma (E_3 + \chi_{01}^* E_1 + \chi_{10} E_2 + \chi_{1,-1} E_4) - \rho E_3, \\ -\cos\theta \frac{\partial E_4}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial E_4}{\partial t} &= i\gamma (E_4 + \chi_{10}^* E_1 + \chi_{01} E_2 + \chi_{1,-1}^* E_3) - \rho E_4, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $v = c/\bar{n}$  — скорость света в суспензии,

$$\gamma = 2\pi \frac{k}{\bar{n}^2} \alpha_0 V N_0, \quad \chi_{mn} = \frac{N_{mn}}{N_0}.$$

В уравнениях (18) учтено соотношение  $N_{mn}^* = N_{-m, -n}$  и феноменологически введен амплитудный коэффициент потерь [6, 14]

$$\rho = \frac{8\pi}{3} N_0 k^4 \left(\frac{\bar{m}^2 - 1}{\bar{m}^2 + 2}\right)^2 a^6, \quad (19)$$

обусловленный рассеянием Рэлея на микросферах. Из уравнений (18) следует, что из всего спектра возбуждаемых концентрационных решеток (13) в процессе четырехволнового смешения непосредственно

участвуют две пары: одна пара ортогональных решеток,

$$N_\kappa \propto \cos(2k_\kappa \kappa), \quad \kappa = x, z,$$

приводит к параметрической связи волн и энергообмену между ними, а вторая,

$$N_\pm \propto \cos[2(k_z z \pm k_x x)],$$

— к эффектам самовоздействия. Вследствие пространственного усреднения волновых уравнений остальные концентрационные решетки не дают прямого вклада в процесс четырехволнового смешения. Их опосредованная роль сводится лишь к влиянию на значение амплитуд основных решеток  $N_\kappa$  и  $N_\pm$ .

Совместная система волновых (18) и кинетических (14) уравнений с соответствующими граничными

$$\begin{aligned} E_1(0, t) = E_{10}(t), \quad E_2(L, t) = E_{20}(t), \\ E_3(0, t) = E_{30}(t), \quad E_4(L, t) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

и начальными

$$\begin{aligned} N_{mn}(t = -\infty) = 0 \quad m \neq 0, \quad n \neq 0, \\ N_{00}(t = -\infty) = N_0 \end{aligned} \quad (21)$$

условиями описывает процесс четырехволнового смешения волн произвольной интенсивности на концентрационной нелинейности, обусловленной действием градиентных сил на прозрачные микросферы.

### 3. КИНЕТИКА КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ РЕШЕТКИ МИКРОСФЕР

На основании уравнений (14) рассмотрим кинетику концентрационной решетки микросфер, индуцированной интерференционным полем двух волн. Для определенности положим  $E_2 = E_4 = 0$ . В этом случае  $a_{mn} = b_{mn} = d_m = 0$ ,  $c_n = 2\alpha_0 b n k_x^2 V_x E_1 E_3^*$  и, соответственно, амплитуды концентрационных решеток  $N_{mn}$  и релаксационные постоянные  $W_{mn}$  зависят только от индекса  $n$  ( $N_{mn} \equiv N_n$  и  $W_{mn} \equiv W_n$ ). При этом уравнения (14) существенно упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial N_n}{\partial t} + W_n N_n = n(A N_{n-1} - A^* N_{n+1}), \quad (22)$$

где  $W_n = 4D n^2 k_x^2$ ,  $A = 2\alpha_0 b k_x^2 V_x E_1 E_3^*$ .

Для относительно слабых волн, когда решетками высших порядков ( $n > 2$ ) можно пренебречь, из уравнений (22) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} + \Gamma N_1 &= (A N_0 - A^* N_2), \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} + 4\Gamma N_2 &= 2A N_1, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\Gamma = 4Dk_x^2$ .

Решение системы уравнений (23) для импульсов прямоугольной формы ( $E_l(t) = E_l = \text{const}$  при  $t \geq 0$ ,  $l = 1, 3$ ) может быть найдено в явном виде (см. Приложение А). Из решения (А.3) следует, что вследствие возбуждения решетки  $N_2$  второго порядка амплитуда основной решетки  $N_1$  содержит две компоненты, времена установления которых меньше времени  $t = 1/\Gamma$ . При этом большее из времен установления основной решетки  $N_1$  оценивается соотношением

$$\begin{aligned} \tau_1 &\approx \frac{1}{\Gamma} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{|A|^2}{\Gamma^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4Dk_x^2} \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{\alpha_0 b V_x}{D} \right)^2 U_1 U_3 \right], \end{aligned} \quad (24)$$

которое справедливо при  $U_1 U_3 < 6D^2/(\alpha_0 b V_x)^2$ . Таким образом, в рассматриваемом приближении время  $\tau_1$  установления основной решетки линейно уменьшается с ростом произведения интенсивностей возбуждающих волн. Из уравнений (23) следует, что времена релаксации  $\bar{\tau}_n$  концентрационных решеток определяются коэффициентом диффузии и их периодами:

$$\bar{\tau}_n = 1/n^2 \Gamma, \quad n = 1, 2.$$

В частности, для соответствующих эксперименту [3] значений параметров  $D = 1.88 \cdot 10^{-8}$  см<sup>2</sup>/с и  $\Lambda_x = 3.5 \cdot 10$  см<sup>-4</sup> имеем  $\bar{\tau}_1 = 165$  мс, что хорошо согласуется со временем релаксации  $\bar{\tau}_1 = 140 \pm 40$  мс основной решетки  $N_1$ , измеренным в [3].

На рис. 2 приведены временные зависимости нормированной амплитуды основной решетки для различных значений интенсивности действующего излучения, рассчитанные из уравнений (22). На рис. 3 представлены зависимости времени установления  $\tau_1$  основной решетки от интенсивности излучения  $I = (c\bar{n}/8\pi)U_0$  и угла схождения  $\theta$  взаимодействующих волн. Анализ показывает, что для наибольшего выбранного значения интенсивности взаимодействующих волн в уравнениях (22) достаточно ограничиться решетками с  $n \leq 8$ .

#### 4. ТЕОРИЯ ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОГО СМЕШЕНИЯ В ДИФFUЗИОННОМ ПРЕДЕЛЕ

Диффузионное приближение [6],

$$N(z, x, t) = N_0 + \bar{N}(z, x, t), \quad |\bar{N}| \ll N_0, \quad (25)$$

накладывает ограничение на интенсивность взаимодействующих волн и соответствует пренебрежению

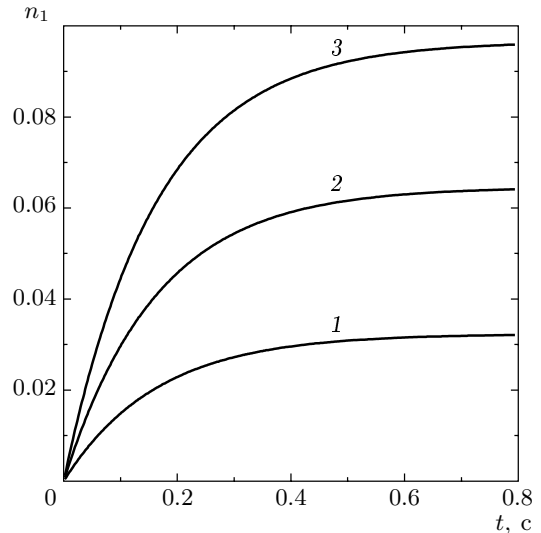


Рис. 2. Кинетика амплитуды  $n_1 = N_1/N_0$  основной решетки при  $\xi = 2ka = 3.8$  и  $\theta = 3.2^\circ$  для значений параметра  $|\mathcal{E}_0|^2 = 2\alpha_0 V \sqrt{U_1 U_2}/k_B T = 0.2 \cdot 10^{-7}$  (1),  $0.4 \cdot 10^{-7}$  (2),  $0.6 \cdot 10^{-7}$  (3)

в правой части уравнений (14) слагаемыми, пропорциональными амплитудам концентрационных решеток  $N_{mn}$  ( $m, n \neq 0$ ). При этом для компонент  $\chi_{mn}$ , определяющих процесс четырехволнового смешения, из уравнений (14) получаем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + 4Dk_x^2 \right) \chi_{01} &= 2\alpha_0 V_x b k_x^2 (E_1 E_3^* + E_2^* E_4), \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + 4Dk_z^2 \right) \chi_{10} &= 2\alpha_0 V_z b k_z^2 (E_1 E_4^* + E_2^* E_3), \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + 4Dk^2 \right) \chi_{11} &= 2\alpha_0 V_0 b k^2 E_1 E_2^*, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + 4Dk^2 \right) \chi_{1,-1} &= 2\alpha_0 V_0 b k^2 E_3 E_4^*. \end{aligned} \quad (26)$$

В диффузионном пределе времена установления концентрационных решеток,

$$\tau_0 = \frac{1}{4Dk^2} = \frac{(\Lambda_0/2\pi)^2}{D}, \quad \tau_\kappa = \frac{1}{4Dk_\kappa^2} = \frac{(\Lambda_\kappa/2\pi)^2}{D},$$

не зависят от интенсивности излучения и определяются коэффициентами диффузии и периодами интерференционной картины, создаваемой взаимодействующими волнами. Из уравнений (26) и (10) следует, что вследствие неоднородности интенсивности излучения внутри объема микросфер установившиеся амплитуды концентрационных решеток зависят от угла схождения  $\theta$  волн и принимают ограниченные значения с ростом радиуса  $a$  микросфер. Отметим, что для малых радиусов микросфер (при

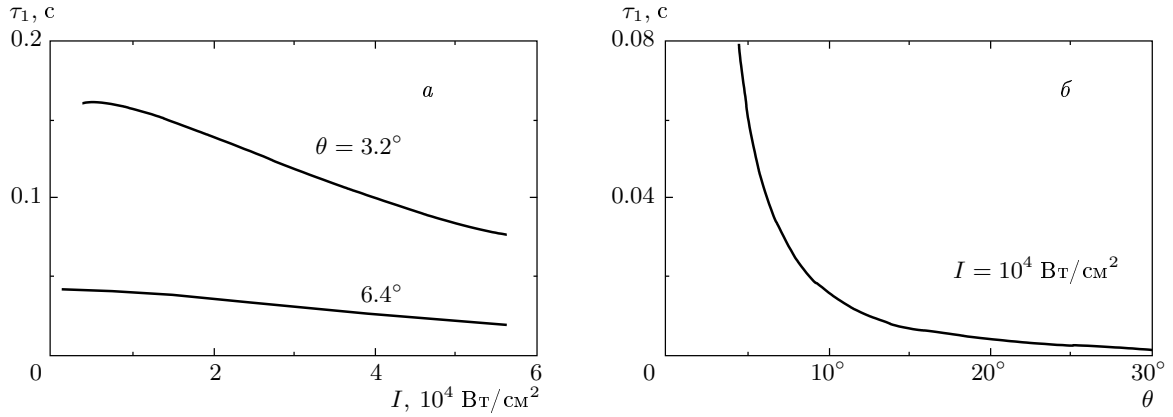


Рис. 3. Зависимости времени установления  $\tau_1$  основной решетки от интенсивности  $I$  действующего излучения (а) и от угла схождения  $\theta$  волн (б) при  $\xi = 2ka = 3.8$ ,  $k = 1.6 \cdot 10^5$  см<sup>-1</sup>,  $\alpha_0 = 5.3 \cdot 10^{-2}$ ,  $k_B T = 4.14 \cdot 10^{-14}$  эрг

$V_0 = V_\kappa = V$ ) [6] значения амплитуд концентрационных решеток не зависят от угла  $\theta$  и неограниченно возрастают с увеличением радиуса микросфер.

В стационарном режиме (при  $t \gg \tau_\kappa$ ) уравнения (18) с учетом (26) принимают вид

$$\begin{aligned}
 \cos \theta \frac{dE_1}{dz} &= \\
 &= i\gamma \left\{ \left[ 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} (V_0 U_2 + V_x U_3 + V_z U_4) \right] E_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_0 b}{2D} (V_x + V_z) E_2^* E_3 E_4 \right\} - \rho E_1, \\
 -\cos \theta \frac{dE_2}{dz} &= \\
 &= i\gamma \left\{ \left[ 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} (V_0 U_1 + V_z U_3 + V_x U_4) \right] E_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_0 b}{2D} (V_x + V_z) E_1^* E_3 E_4 \right\} - \rho E_2, \\
 \cos \theta \frac{dE_3}{dz} &= \\
 &= i\gamma \left\{ \left[ 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} (V_x U_1 + V_z U_2 + V_0 U_4) \right] E_3 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_0 b}{2D} (V_x + V_z) E_4^* E_1 E_2 \right\} - \rho E_3, \\
 -\cos \theta \frac{dE_4}{dz} &= \\
 &= i\gamma \left\{ \left[ 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} (V_z U_1 + V_x U_2 + V_0 U_3) \right] E_4 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_0 b}{2D} (V_x + V_z) E_3^* E_1 E_2 \right\} - \rho E_4.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Пренебрегая обратным влиянием слабых волн  $E_3$  и  $E_4$  на мощные опорные волны  $E_1$  и  $E_2$ , из уравнений (27) при  $\rho = 0$  находим

$$\begin{aligned}
 \cos \theta \frac{dE_3}{dz} &= i \left\{ \bar{\kappa}_3 E_3 + \beta E_4^* E_{10} E_{20} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp \left[ i \bar{\kappa}_1 \hat{z} + i \bar{\kappa}_2 (\hat{L} - \hat{z}) \right] \right\}, \\
 -\cos \theta \frac{dE_4^*}{dz} &= -i \left\{ \bar{\kappa}_4 E_4^* + \beta E_3 E_{10}^* E_{20}^* \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp \left[ -i \bar{\kappa}_1 \hat{z} - i \bar{\kappa}_2 (\hat{L} - \hat{z}) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{\kappa}_1 &= \gamma \left[ 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} V_0 U_2 \right], \\
 \bar{\kappa}_2 &= \gamma \left[ 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} V_0 U_1 \right], \\
 \bar{\kappa}_3 &= \gamma \left[ 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} (V_x U_1 + V_z U_2) \right], \\
 \bar{\kappa}_4 &= \gamma \left[ 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} (V_z U_1 + V_x U_2) \right],
 \end{aligned} \tag{29}$$

$\beta = (\gamma \alpha_0 b / 2D) (V_x + V_z)$  — коэффициент параметрической связи,  $\hat{z} = z / \cos \theta$ ,  $\hat{L} = L / \cos \theta$ . Решение уравнений (28) с граничными условиями  $E_3(0) = E_{30}$  и  $E_4^*(\hat{L}) = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 E_3(z) &= E_{30} \exp \left[ i \left( \frac{\Delta}{2} + \bar{\kappa}_3 \right) \hat{z} \right] \times \\
 &\times \frac{2\Gamma \cos \left[ \Gamma \left( \hat{L} - \hat{z} \right) \right] + i\Delta \sin \left[ \Gamma \left( \hat{L} - \hat{z} \right) \right]}{2\Gamma \cos(\Gamma \hat{L}) + i\Delta \sin(\Gamma \hat{L})}, \\
 E_4^*(z) &= 2i\beta E_{30} \sqrt{U_1 U_2} \times \\
 &\times \exp \left[ -i \left( \frac{\Delta}{2} - \bar{\kappa}_4 \right) \hat{z} + \bar{\kappa}_2 \hat{L} \right] \times \\
 &\times \frac{\sin \left[ \Gamma \left( \hat{L} - \hat{z} \right) \right]}{2\Gamma \cos(\Gamma \hat{L}) + i\Delta \sin(\Gamma \hat{L})},
 \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\Gamma = \sqrt{\beta^2 U_1 U_2 + \Delta^2 / 4} \tag{31}$$

— инкремент параметрического усиления слабого излучения,

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \bar{\kappa}_1 - \bar{\kappa}_2 - \bar{\kappa}_3 + \bar{\kappa}_4 = \\
 &= \gamma \frac{\alpha_0 b}{2D} (V_0 + V_x - V_z)(U_2 - U_1) \tag{32}
 \end{aligned}$$

— фазовая расстройка взаимодействующих волн.

Очевидно, что амплитуда обращенной волны  $E_4$  пропорциональна коэффициенту  $\beta$  параметрической связи. Используя соотношения (10), можно показать, что для определенных значений радиуса  $a$  микросфер и угла  $\theta$  схождения взаимодействующих волн коэффициент  $\beta$  обращается в нуль. При этих значениях параметров  $a$  и  $\theta$  вследствие эффекта нулевой силы ответственные за четырехволновое смещение концентрационные решетки с периодами  $\Lambda_\kappa$  не возбуждаются и, соответственно, параметрической генерации обращенной волны  $E_4$  не происходит. На рис. 4 приведено семейство кривых на плоскости  $a\theta$ , показывающее значения параметров  $a$  и  $\theta$ , при которых коэффициент параметрической связи равен нулю ( $\beta = 0$ ).

Из решений (30) следует, что линейная теория четырехволнового смещения при  $\Delta = 0$  ( $\Gamma = \Gamma_0 = |\beta| \sqrt{U_1 U_2}$ ) накладывает ограничение на интенсивности опорных волн, связанное с возможной параметрической генерацией пары взаимно сопряженных волн  $E_3$  и  $E_4^*$ , порог которой определяется из условия [15]

$$\Gamma_0 L / \cos \theta = \pi / 2. \tag{33}$$

С учетом определения коэффициента связи  $\beta$  из (33) находим

$$2k N_0 \frac{\alpha_0^2 b}{\bar{n}^2 D} V |V_x + V_z| \sqrt{U_1 U_2} \frac{L}{\cos \theta} = 1. \tag{34}$$

Из соотношения (32) следует, что условие  $\Delta = 0$  достигается в двух случаях: либо при  $U_1 = U_2$ , либо

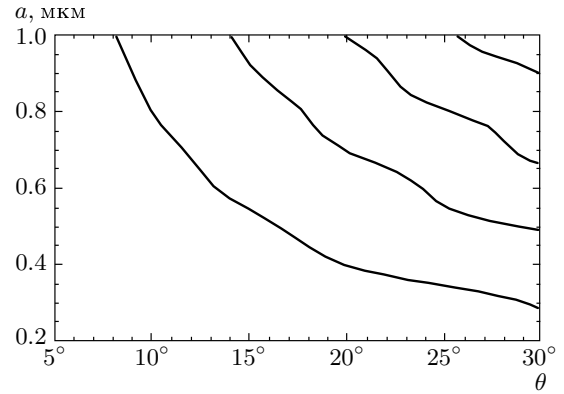


Рис. 4. Семейство решений уравнения  $\beta(a, \theta) = 0$  при  $k = 1.6 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$

при  $V_0 + V_x - V_z \equiv \bar{V} = 0$ . Заметим, что  $V_0 = V\kappa = V$  для микросфер малых размеров  $a \ll \Lambda_0$  и, соответственно, условие  $\Delta = 0$  достигается, как и для обычных сред с керровской нелинейностью [15], только при  $U_1 = U_2$ .

На рис. 5 приведены зависимости параметра  $\bar{V}$  от угла  $\theta$  для различных значений коэффициента  $\xi = 2ka$ . На рис. 5 видно, что параметр  $\bar{V}(\theta)$  может быть равным нулю в области  $\xi \geq 2.5$ . Пороговому значению коэффициента  $\xi = \xi_{thr} \approx 2.5$ , при котором параметр  $\bar{V} = 0$ , соответствует угол  $\theta = \pi/2$ . При  $\xi > 2.5$  соответствующие значения углов  $\theta$  могут быть существенно меньшими. Следовательно, в области  $\xi > 2.5$  ( $a > 0.2\lambda$ ) для соответствующих значений угла  $\theta$  схождения волн можно реализовать условия параметрической генерации слабого излучения при неравных интенсивностях опорных волн,  $U_1 \neq U_2$ . Отметим, что для относительно больших значений углов  $\theta \geq \pi/6$  уравнения (18) должны содержать производные по поперечной координате ( $\sin \theta \partial / \partial x$ ).

Сравнение полученных в диффузионном пределе результатов с аналогичными результатами теории [6] иллюстрирует рис. 6, на котором приведены рассчитанные из второго уравнения (30) зависимости коэффициента отражения  $\eta$  обращенной волны от размера микросфер при  $U_1 = U_2 = U_0$  для различных значений угла  $\theta$  схождения волн. Для сравнения штриховой кривой на рис. 6 показана также зависимость коэффициента отражения  $\eta = \eta(\xi)$ , рассчитанная из теории [6]. На рис. 6 видно, что теория [6], в которой градиентная сила определена в приближении однородной интенсивности внутри объема микросфер,  $\mathbf{F}_\nabla = \alpha_0 V \nabla |\bar{E}|^2$ , предсказывает



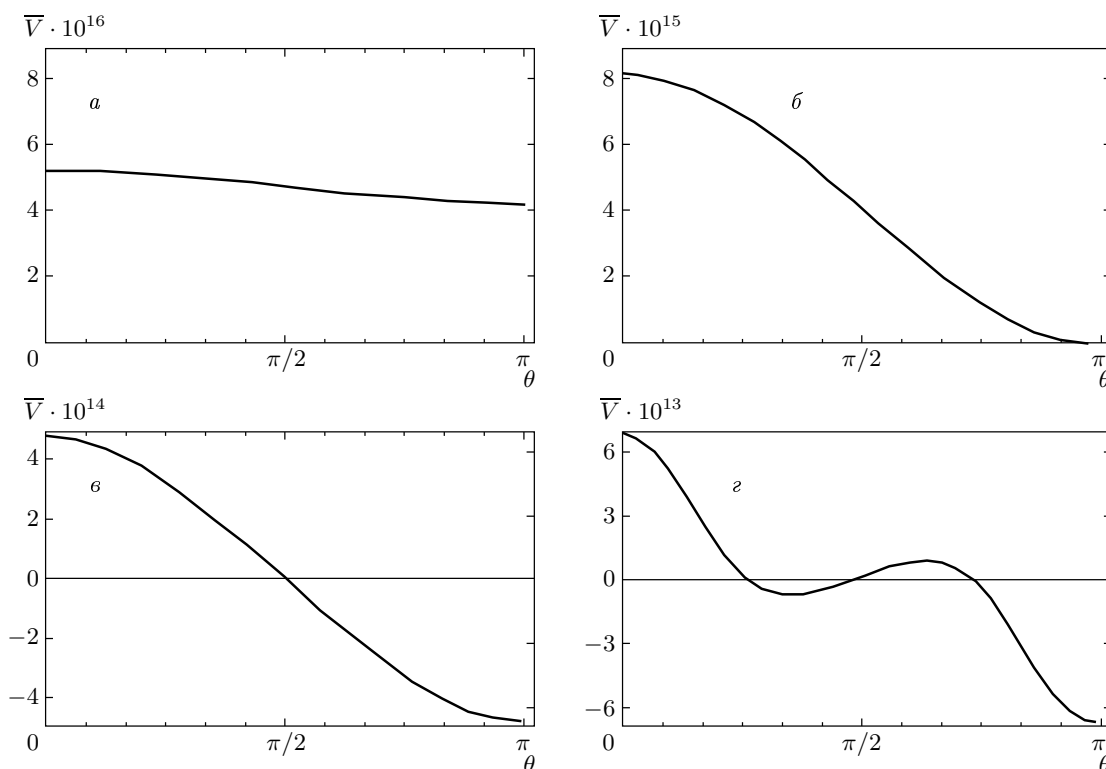


Рис. 5. Зависимости параметра  $\bar{V}$  от угла  $\theta$  для различных значений коэффициента  $\xi = 2ka$  при  $k = 10^5 \text{ см}^{-1}$ :  
 а —  $\xi = 1.0$ ; б —  $\xi = 2.5$ ; в —  $\xi = 4.5$ ; г —  $\xi = 10.9$

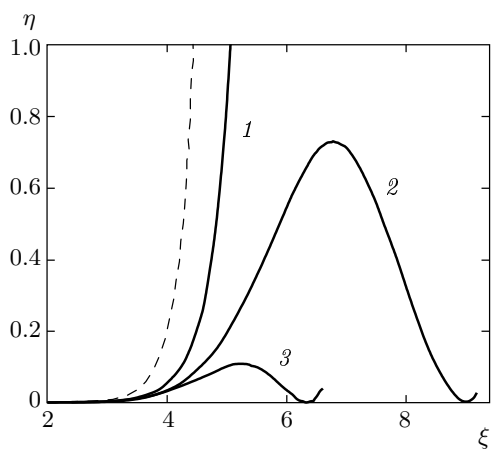


Рис. 6. Зависимости коэффициента отражения  $\eta$  обращенной волны от параметра  $\xi$  при  $\gamma\alpha_0 V U_0 L / k_B T = 10^{-4} \xi^6$  для различных значений угла  $\theta$  схождения волн: 1 —  $\theta = 3.2^\circ$ ; 2 —  $\theta = 30^\circ$ ; 3 —  $\theta = 45^\circ$ ; штриховая кривая — расчет из теории [6]

существенно завышенное значение  $\eta$  и справедливо в области малых  $\xi \ll 1$ . В рамках приближений, использованных в теории [6], коэффициент  $\eta$  не зависит от угла  $\theta$  схождения волн и, соответственно, одинаков для любых значений  $\theta$ . На рис. 6 видно, что при сравнительно больших углах  $\theta$ , когда степень перекрытия микросфер с интерференционной картиной поля становится существенной, коэффициент отражения  $\eta(\xi)$  немонотонно зависит от их размера и при углах  $\theta = 30^\circ$  и  $\theta = 45^\circ$  (соответственно в точках  $\xi \approx 8.9$  и  $\xi \approx 6.36$ ) обращается в нуль. Как отмечалось выше, эти значения параметров соответствуют условиям подавления процесса четырехволнового смешения вследствие равенства нулю результирующих компонент  $F_{\kappa 2}$  градиентной силы.

Можно показать, что учет линейных потерь ( $\rho \neq 0$ ) в случае  $\bar{V} = 0$  приводит к следующему соотношению, определяющему порог параметрической генерации слабых волн (см. Приложение В):

$$\text{tg}(\hat{\Gamma}\hat{L}) = -\hat{\Gamma}/\rho, \tag{35}$$

где  $\hat{\Gamma} = \sqrt{\beta^2 U_1 U_2 \exp(-2\rho\hat{L}) - \rho^2} > 0$ .

На рис. 7 приведены зависимости порогового зна-

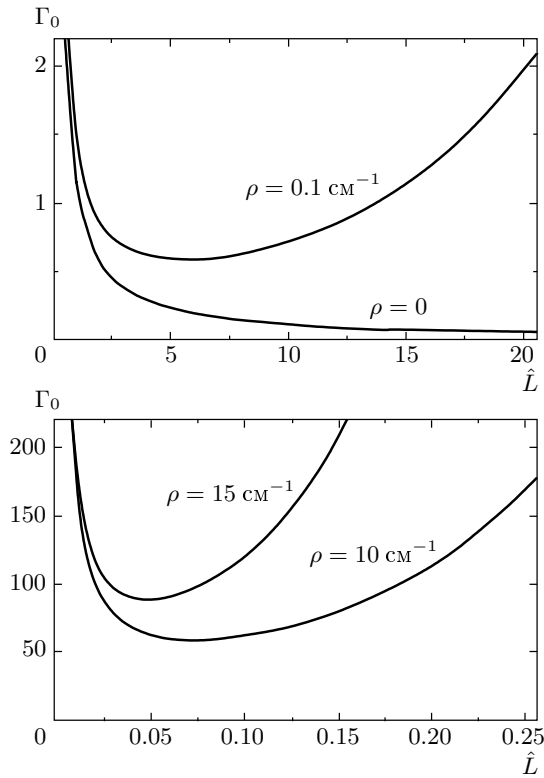


Рис. 7. Зависимости нормированной пороговой интенсивности  $\Gamma_0$  опорных волн от длины  $\hat{L}$  для различных значений коэффициента  $\rho$

чения величины  $\Gamma_0 = |\beta| \sqrt{U_1 U_2}$  от длины  $\hat{L}$  для различных значений амплитудного коэффициента потерь  $\rho$ . Видно, что при  $\rho \neq 0$  оптимальное значение длины  $\hat{L}$  составляет  $(\rho \hat{L})_{opt} \approx 0.74$ . Для сравнения заметим, что в обычной среде с кубической нелинейностью приближенные аналитические оценки дают значение  $(\rho \hat{L})_{opt} \approx 0.69$  [16].

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные выше результаты показывают, что концентрационная нелинейность жидкой суспензии прозрачных микросфер в рамках используемых в работе [6] приближений в широкой области параметров не может быть корректно рассчитана. В частности, строгий расчет концентрационной нелинейности дает существенно меньшие значения коэффициента отражения обращенной волны, чем предсказываемые теорией [6]. Несмотря на это, как показывают оценки, жидкая суспензия прозрачных микросфер — искусственно созданная гетерогенная среда, каждая из компонент которой в отдельности не про-

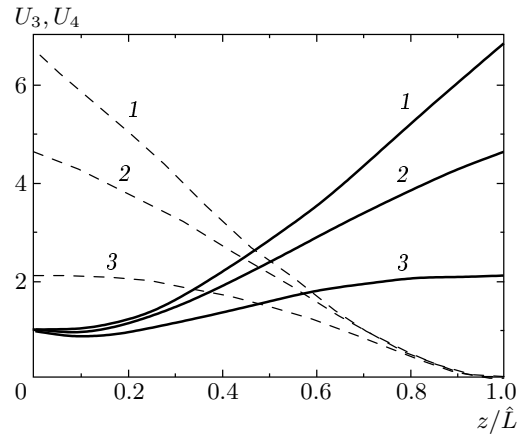


Рис. 8. Стационарные распределения интенсивностей сигнальной  $U_3$  (сплошные линии) и обращенной  $U_4$  (штриховые линии) волн для различных размеров  $a$  микросфер: 1 — 0.1 мкм; 2 — 0.11 мкм; 3 — 0.12 мкм

являет нелинейно-оптических свойств, может служить перспективным широкополосным материалом для обращения волнового фронта низкоинтенсивного излучения непрерывных лазеров. Полученные нами теоретические результаты с хорошей степенью точности согласуются с экспериментально измеренными [3] зависимостями коэффициента отражения  $\eta$  обращенной волны и времени установления  $\tau_1$  концентрационной решетки от интенсивности опорных волн.

На рис. 8 приведены пространственные распределения интенсивностей сигнальной  $U_3$  и обращенной  $U_4$  волн, полученное в результате численного моделирования совместной системы волновых (18) и кинетических (14) уравнений для четырехволнового смешения излучения аргонового лазера ( $E_{10}(t) = E_{20}(t) = E_0$  при  $t \geq 0$ ,  $E_{30}(t) = 1$ ) в водной суспензии латексных микросфер [3] при комнатной температуре:  $n_0 = 1.59$ ,  $\bar{n} = 1.33$ ,  $N_0 = 6.5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $L = 10^{-2} \text{ см}$ ,  $\theta = 3.2^\circ$ ,  $D = 2.2 \cdot 10^{-13} a^{-1} \text{ см}^2/\text{с}$  и интенсивностей опорных волн  $I = 7.5 \cdot 10^4 \text{ Вт}/\text{см}^2$ . На рис. 8 видно, что в области выбранных значений параметров эффективность процесса четырехволнового смешения весьма чувствительна к размеру микросфер. В данном случае увеличение радиуса микросфер на 20% приведет к росту коэффициента отражения  $\eta$  обращенной волны примерно в три раза.

В данной работе по аналогии с работой [6] ослабление излучения вследствие рэлеевского рассеяния учитывается феноменологически, добавлением линейного коэффициента потерь  $\rho \propto N_0$  в волно-

вых уравнениях (18). Строго говоря, пространственная модуляция микросфер действующим излучением приводит к зависимости коэффициента потерь от интенсивности,  $\rho = \rho(|E|^2)$ . Строгий учет нелинейности коэффициента потерь обеспечивается соответствующей модификацией формулы (17), которая в общем случае имеет вид

$$P = \frac{\alpha_0 V}{2} N(x, z, t) \left\{ 1 + i \frac{8}{3} k \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \alpha_0 V \right\} \times \sum_{l=1}^4 E_l \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.}$$

Отсюда следует, что вследствие процессов рэлеевского рассеяния, вообще говоря, модулируется также и мнимая часть диэлектрической проницаемости суспензии, т.е. в ней индуцируются амплитудно-фазовые решетки, амплитудную компоненту которых необходимо принимать во внимание при условии  $|\alpha_0|V \geq k^{-3}$ .

При относительно больших интенсивностях взаимодействующих волн даже в разреженной суспензии высокие концентрации микросфер в пучностях (узлах) интерференционного поля могут приводить к образованию кластеров [3], что, естественно, качественным образом будет изменять процесс четырехволнового смешения. Кроме того, при этом следует принимать во внимание также конечный объем микросфер, ограничивающий предельно достижимую концентрацию  $N_{lim} = 1/V$ .

В связи с этим дальнейшее развитие теории четырехволнового смешения в жидких суспензиях прозрачных микросфер должно проводиться с учетом как нелинейности мнимой части диэлектрической проницаемости суспензии, так и процесса образования кластеров из микросфер, а также эффекта насыщения амплитуд концентрационных решеток вследствие конечности объема микросфер.

Работа поддержана МНТЦ (грант № В-479).

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Подстановкой  $N_n = \hat{N}_n \exp(-4\Gamma t)$  система уравнений (23) сводится к уравнению второго порядка для  $\hat{N}_1$ :

$$\frac{d^2 \hat{N}_1}{dt^2} - 3\Gamma \frac{d\hat{N}_1}{dt} + 2|A|^2 \hat{N}_1 = 4\Gamma A N_0 \exp(4\Gamma t), \quad (\text{A.1})$$

решение которого при  $\lambda^2 = 9\Gamma^2 - 8|A|^2 > 0$  имеет вид

$$\hat{N}_1(t) = \exp\left(\frac{3\Gamma}{2}t\right) \left\{ C_+ \exp\left(\frac{\lambda}{2}t\right) + C_- \exp\left(-\frac{\lambda}{2}t\right) + 8\frac{\Gamma}{\lambda} A N_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{3\Gamma}{2}t'\right) \times \text{sh}\left[\frac{\lambda}{2}(t-t')\right] dt' \right\}, \quad (\text{A.2})$$

где  $C_{\pm}$  — постоянные интегрирования. Из начального условия  $\hat{N}_1(0) = 0$  следует соотношение  $C_+ = -C_-$ . Значение коэффициента  $C_+$  находится из условия, что при  $A \rightarrow 0$

$$\hat{N}_2 \rightarrow 0, \quad \hat{N}_1 \rightarrow \frac{A N_0}{\Gamma} [1 - \exp(-\Gamma t)] \exp(4\Gamma t).$$

Легко показать, что такой предельный переход достигается при  $C_+ = N_0 A / 3\Gamma$ . С учетом этого из (A.2) находим

$$N_1(t) = \frac{2A N_0}{3\Gamma} \exp\left(-\frac{5\Gamma}{2}t\right) \times \left\{ \text{sh}\left(\frac{\lambda}{2}t\right) + \frac{3\Gamma^2}{2\Gamma^2 + |A|^2} \times \left[ \exp\left(\frac{5\Gamma}{2}t\right) - \text{ch}\left(\frac{\lambda}{2}t\right) - 5\frac{\Gamma}{\lambda} \text{sh}\left(\frac{\lambda}{2}t\right) \right] \right\}. \quad (\text{A.3})$$

Соответственно для  $N_2(t)$  из второго уравнения (23) следует

$$N_2(t) = 2A \int_0^t N_1(t') \exp[-4\Gamma(t-t')] dt'. \quad (\text{A.4})$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ В

При  $\rho \neq 0$  из первых двух уравнений (27) для амплитуд опорных волн следуют уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dz} &= i\gamma \left( 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} V_0 |E_2|^2 \right) E_1 - \rho E_1, \\ -\frac{dE_2}{dz} &= i\gamma \left( 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} V_0 |E_1|^2 \right) E_2 - \rho E_2, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

решение которых имеет вид

$$E_1(\hat{z}) = E_{10} \exp \left\{ (i\gamma - \rho)\hat{z} + i\gamma \frac{\alpha_0 b}{2D} V_0 |E_{20}|^2 \times \right. \\ \left. \times \exp \left( -2\rho \hat{L} \right) \int_0^{\hat{L}} \exp(2\rho z) dz \right\}, \quad (B.2)$$

$$E_2(\hat{z}) = E_{20} \exp \left\{ (i\gamma - \rho) (\hat{L} - \hat{z}) - i\gamma \frac{\alpha_0 b}{2D} \times \right. \\ \left. \times V_0 |E_{10}|^2 \int_{\hat{L}}^{\hat{z}} \exp(-2\rho z) dz \right\}.$$

Подстановка решений (B.2) в два последних уравнения (28) дает

$$\frac{dE_3}{d\hat{z}} = i \{ \bar{\kappa}_3(\hat{z}) + \beta E_{10} E_{20} E_4^* \times \\ \times \exp [ (i\gamma - \rho)\hat{z} + i\varphi(\hat{z}) ] \} - \rho E_3, \quad (B.3)$$

$$- \frac{dE_4^*}{d\hat{z}} = -i \{ \bar{\kappa}_4(\hat{z}) + \beta E_{10}^* E_{20}^* E_3 \times \\ \times \exp [ -(i\gamma + \rho)\hat{z} - i\varphi(\hat{z}) ] \} - \rho E_4^*,$$

где

$$\bar{\kappa}_3(\hat{z}) = \gamma \left\{ 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} \left[ V_x |E_{10}|^2 \exp(-2\rho\hat{z}) + \right. \right. \\ \left. \left. + V_z |E_{20}|^2 \exp \left( -2\rho (\hat{L} - \hat{z}) \right) \right] \right\},$$

$$\bar{\kappa}_4(\hat{z}) = \gamma \left\{ 1 + \frac{\alpha_0 b}{2D} \left[ V_x |E_{10}|^2 \exp(-2\rho\hat{z}) + \right. \right. \\ \left. \left. + V_z |E_{20}|^2 \exp \left( -2\rho (\hat{L} - \hat{z}) \right) \right] \right\},$$

$$\varphi(\hat{z}) = \gamma \frac{\alpha_0 b}{2D} V_0 \left[ |E_{20}|^2 \exp(-2\rho\hat{L}) \int_0^{\hat{z}} \exp(2\rho z) dz - \right. \\ \left. - |E_{10}|^2 \int_0^{\hat{z}} \exp(-2\rho z) dz \right].$$

Подстановкой

$$E_3(\hat{z}) = \mathcal{E}_3(\hat{z}) \exp \left( -\rho\hat{z} + i \int_0^{\hat{z}} \bar{\kappa}_3 dz \right), \quad (B.4)$$

$$E_4^*(\hat{z}) = \mathcal{E}_4^*(\hat{z}) \exp \left( -\rho(L - \hat{z}) + i \int_{\hat{L}}^{\hat{z}} \bar{\kappa}_4 dz \right)$$

система уравнений (B.3) сводится к уравнению второго порядка для амплитуды  $\mathcal{E}_3(\hat{z})$ :

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_3}{d\hat{z}^2} - [2\rho + i\Delta(\hat{z})] \frac{d\mathcal{E}_3}{d\hat{z}} + \\ + \beta^2 |E_{10}|^2 |E_{20}|^2 \exp \left( -2\rho\hat{L} \right) \mathcal{E}_3 = 0, \quad (B.5)$$

где

$$\Delta(\hat{z}) = \gamma \frac{\alpha_0 b}{2D} \bar{V}(\theta) \left\{ |E_{20}|^2 \exp \left[ -2\rho (\hat{L} - \hat{z}) \right] - \right. \\ \left. - |E_{10}|^2 \exp \left( -2\rho\hat{z} \right) \right\}.$$

Из (B.5) следует, что при  $\bar{V}(\theta) = 0$  корни соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2\rho\lambda + \beta^2 |E_{10}|^2 |E_{20}|^2 \exp \left( -2\rho\hat{L} \right) = 0 \quad (B.6)$$

имеют вид

$$\lambda_{\pm} = \rho \pm i \sqrt{\beta^2 |E_{10}|^2 |E_{20}|^2 \exp \left( -2\rho\hat{L} \right) - \rho^2} \equiv \\ \equiv \rho \pm i\hat{\Gamma}. \quad (B.7)$$

Используя граничные условия  $E_3(0) = E_{30}$  и  $E_4^*(\hat{L}) = 0$ , находим постоянные интегрирования  $C_{\pm}$  системы уравнений (B.3):

$$C_{\pm} = \pm E_{30} \frac{\lambda_{\mp} \exp \left( \mp i\hat{\Gamma}\hat{L} \right)}{\lambda_{-} \exp \left( -i\hat{\Gamma}\hat{L} \right) - \lambda_{+} \exp \left( i\hat{\Gamma}\hat{L} \right)}. \quad (B.8)$$

Из условия  $\lambda_{-} \exp \left( -i\hat{\Gamma}\hat{L} \right) - \lambda_{+} \exp \left( i\hat{\Gamma}\hat{L} \right) = 0$  следует формула (35).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Аскаръян, ЖЭТФ **42**, 1567 (1962).
2. А. Ashkin, Phys. Rev. Lett. **25**, 1321 (1970).
3. Р. W. Smith, А. Ashkin, and W. J. Tomlinson, Opt. Lett. **6**, 284 (1981).
4. А. J. Palmer, Opt. Lett. **5**, 54 (1980).
5. А. Ярив, *Квантовая электроника*, Сов. Радио, Москва (1980).
6. D. Rogovin and O. Sari, Phys. Rev. A **31**, 2375 (1985).
7. Г. Ван де Хюлст, *Рассеяние света малыми частицами*, Изд-во иностр. лит., Москва (1961).
8. P. Zemánek, А. Jonáš, and M. Liška, J. Opt. Soc. Amer. A **19**, 1025 (2002).

9. С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин, *Физическая оптика*, Изд-во МГУ, Москва (1998).
10. A. Rohrbach and E. N. K. Stelzer, *J. Opt. Soc. Amer. A* **18**, 839 (2001).
11. А. А. Афанасьев, А. Н. Рубинов, Ю. А. Курочкин и др., *КЭ* **33**, 250 (2003).
12. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1973).
13. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
15. Б. Я. Зельдович, Н. Ф. Пилипецкий, В. В. Шкунов, *Обращение волнового фронта*, Наука, Москва (1985).
16. Б. Я. Зельдович, Т. В. Яковлева, *КЭ* **8**, 1891 (1981).