

МОДЕЛЬ DLA В КОНТИНУАЛЬНОМ СРЕДНЕПОЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А. Б. Рябов^а, Е. Б. Постников^б, А. Ю. Лоскутов^{а*}

^а *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия*

^б *Курский государственный университет
305000, Курск, Россия*

Поступила в редакцию 15 марта 2005 г.

В рамках среднеполевого приближения представлен новый подход к описанию роста фрактальных структур, формирующихся в результате процесса диффузионно ограниченной агрегации. Он основан на введении огрубления по временной шкале, которое учитывает дискретный характер таких структур. Полученная система уравнений позволяет численно определить фрактальную размерность и значение плотности кластера в зависимости от расстояния до его центра. Результаты достаточно хорошо согласуются с величинами, найденными прямым численным моделированием.

PACS: 61.43.Nv

1. ВВЕДЕНИЕ

Диффузионно ограниченной агрегацией (Diffusion Limited Aggregation — DLA) называется процесс формирования кластера в результате присоединения к нему случайно блуждающих частиц. Данная модель была впервые рассмотрена в работе [1] и вплоть до настоящего времени продолжает привлекать внимание (см., например, обзоры [2, 3]). Этот интерес вызван прежде всего тем, что DLA служит удобной моделью ряда физических процессов, таких как пробой диэлектрика, рост агрегата в растворе, формирование колонии бактерий и т. д. Кроме того, самостоятельный математический интерес представляет изучение DLA-кластера как объекта, имеющего фрактальную размерность.

На данный момент проведено достаточно детальное численное моделирование роста DLA-кластеров и исследованы его масштабные свойства. В частности, установлен фрактальный характер распределения плотности, что выражается в виде степенной зависимости его массы от линейных размеров (с показателем степени $d = 1.71$ в двумерном континуальном варианте и $d = 2.50$ — в трехмерном, см. [4]).

Кроме того, в ряде работ проанализирова-

ны статистические свойства отдельной ветви DLA-кластера при квазиодномерном блуждании частицы, когда продольный размер области роста фрактала существенно превышает поперечный. Обзор ранних работ по данной тематике можно найти в обобщающей статье [5]. Для направления, вдоль которого распределение имеет степенной характер, найден показатель степени $d = 0.66$. Детальные численные эксперименты последних лет [6] уточнили это значение: $d = 0.72$. Таким образом, к настоящему времени процесс диффузионно ограниченного роста (без введения дополнительных условий взаимодействия частиц и внешних силовых полей) является достаточно изученным объектом компьютерного моделирования и может служить тестовым образцом для разработки численных методов [7].

С точки зрения теоретического обоснования значения фрактальной размерности наибольший успех достигнут с ренормализационной позиции, но только для дискретных моделей [8, 9]. Здесь можно выделить два основных подхода. В первом из них (см. обзор [8]) рассматривается решеточная модель роста и ищется параметр, оставляющий масштабно-инвариантным распределение заполненных узлов, соответствующих агрегированным частицам. Во втором [9] — на каждом шаге используется кон-

*E-mail: loskutov@chaos.phys.msu.ru

формное отображение единичной окружности, отображающее блуждающую частицу в случайную точку кривой, соответствующей поверхности растущего кластера. Модификация последнего метода также была использована в работе [6] для моделирования одномерного роста кластера в канале.

Однако до сих пор остается открытым вопрос о возможности континуального описания процесса роста DLA-кластера на языке дифференциальных уравнений. Впервые этот подход был предложен в работе [10], где использовалась среднеполевая модель, связывающая динамику изменения непрерывного распределения плотности агрегата с плотностью вероятности обнаружения свободно блуждающих частиц, поступающих из бесконечности. Для построения модели использовалось разложение в ряд по степеням плотности кластера. В последующей работе [11] была использована более точная среднеполевая модель. Однако, несмотря на качественное объяснение процесса, полученное значение размерности было существенно ниже наблюдаемого. Поэтому в последующих публикациях предлагались различные модификации среднеполевого подхода.

Например, в работе [12] задавалась скорость роста кластера, пропорциональная не плотности блуждающих частиц, а ее градиенту. В другом подходе [13] для введения эффективного обрезания растущего фронта кластера было предложено использовать возведение моделируемых переменных в феноменологически подбираемый показатель степени, больший единицы. Это приводит к существенному уменьшению малых величин и, соответственно, замедлению роста кластера. Такое замедление позволяет накапливать плотность числа частиц на периметре кластера и тем самым получать большее значение фрактальной размерности. С точки зрения физического обоснования последней модели в работе [14] было показано, что скорость роста оказывается пропорциональной второй степени по комбинациям плотности и ее производных в предположении равенства вероятности взаимодействия свободных частиц и кластера. Результат получен путем перехода от больцмановского кинетического интеграла к системе дифференциальных уравнений.

Таким образом, определенный прогресс, достигнутый в рамках среднеполевого подхода, хотя и позволил добиться некоторого понимания кинетики DLA, однако не привел к окончательному решению задачи. В данной работе показано, каким образом можно развить среднеполевое приближение, чтобы получить адекватное описание масштабных свойств системы.

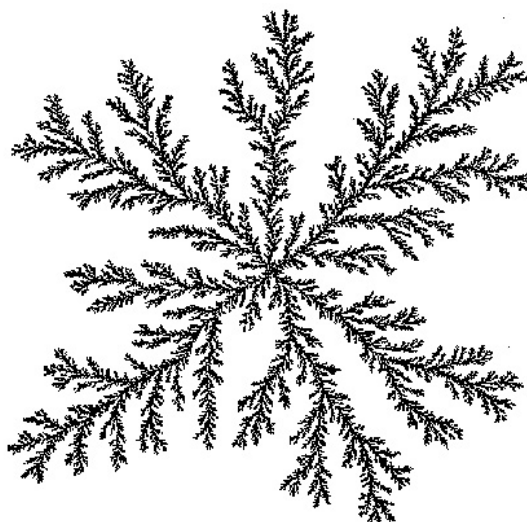


Рис. 1. Типичный вид DLA-кластера

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В данной части приводится среднеполевое описание модели DLA, основанное на уравнениях, предложенных в работе [11]. Дается полный вывод системы и показано, как можно внести огрубление временного масштаба.

2.1. Предпосылки модели

В двумерном случае модель DLA формулируется, как правило, следующим образом. Пусть в начальный момент времени в начале координат находится неподвижная «затравочная» частица диаметром a и на некотором расстоянии R от нее появляется другая частица, блуждающая случайным образом внутри круга радиуса R . Если частица выходит за пределы круга, то вместо нее появляется другая. При столкновении блуждающей частицы с «затравочной» она прилипает к ней. После этого на расстоянии R появляется новая частица, которая также движется случайно до столкновения с одной из двух слипшихся. И так далее. Таким образом, в процессе агрегации новые частицы могут прилипать к любой частице кластера. Кроме того, чтобы исключить влияние краевых эффектов, радиус R первоначального нахождения частицы берется много больше характерного размера растущего кластера.

Типичной чертой строения DLA-кластера, отвечающей его фрактальной природе, является наличие чрезвычайно разветвленной структуры, на периметре которой и происходит осаждение новых час-

тиц (см. рис. 1). В среднеполевом приближении такая структура смазывается; кроме того, возникает сложный вопрос о корректном усреднении периметра кластера в окрестности данной точки.

Для описания роста кластера используем следующий подход. Пусть $\hat{\rho}(r, \phi)$ — характеристическая функция кластера. Она равна единице в тех точках, где есть частицы, и нулю в остальной области. Аналогично $\hat{u}(r, \phi)$ — характеристическая функция свободной частицы. В среднеполевом приближении необходимо, во-первых, провести усреднение по ансамблю систем и, во-вторых, используя аксиальную симметрию задачи, допустить, что распределение частиц не зависит от угловой координаты. В результате получим функции $\rho(r)$ и $u(r)$, характеризующие плотность вероятности нахождения частиц кластера и свободных частиц на расстоянии r от центра.

Разобьем всю плоскость на квадратные ячейки величиной a^2 , где a — характерный размер частицы. Тогда, если в определенной ячейке с вероятностью 1 есть частица, то $\rho = 1/a^2$ (чтобы интеграл по всей ячейке был равен единице). Однако удобнее принять другую нормировку и считать, что ρ или u в этих областях равны единице. Для этого проведем замену $\rho \rightarrow a^2 \rho$, $u \rightarrow a^2 u$. Таким образом, при подсчете числа частиц необходимо делать обратную замену, так что число частиц в кластере будет выражаться как

$$N = \frac{1}{a^2} \int_D \rho ds, \tag{1}$$

где ds — элемент площади, а D — область, занятая кластером.

Для описания роста DLA-кластера в работе [11] была предложена и физически обоснована следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= u (\rho + a^2 \Delta \rho), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \Delta u - u (\rho + a^2 \Delta \rho). \end{aligned} \tag{2}$$

Она соответствует тому, что на расстоянии R , значительно превышающем характерный радиус кластера, есть бесконечный источник свободных частиц. (Правое граничное условие имеет вид $u(R, t) = c$.) Динамика их функции распределения описывается вторым уравнением и состоит из диффузии (первое слагаемое) и поглощения при столкновении с частицами кластера. Сам рост кластера описывается первым уравнением. В первом приближении он равен произведению $u\rho$, т. е. вероятности встречи свобод-

ной частицы с частицей кластера. Наличие слагаемого $a^2 \Delta \rho$ позволяет учесть нелокальность взаимодействия: частицы присоединяются к кластеру, благодаря чему происходит его рост в стороны.

Ввиду того что диффузия частиц происходит намного быстрее роста кластера, как правило, принимают $u_t = 0$. Тогда система переписывается как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = u (\rho + a^2 \Delta \rho),$$

$$0 = a^2 \Delta u - u (\rho + a^2 \Delta \rho).$$

Как уже говорилось во Введении, такой подход, с учетом главных особенностей модели, не дает правильного значения размерности, поскольку не учитывает дискретную структуру кластера.

В подтверждение этому можно привести ряд численных исследований, описанных в работах [15, 16]. Модель, рассмотренная в этих статьях, сводится к следующему. Разобьем кластер на концентрические кольца шириной a . Пусть n -е кольцо имеет радиус r_n . Будем характеризовать его парой чисел M_n и N_n , где M_n — максимальное число частиц, которые могут поместиться в кольце (его можно оценить как $M_n \sim 2\pi r_n a/a^2$), а N_n — истинное число частиц в кольце. Вероятность адсорбции одной частицы на таком кольце равна N_n/M_n . Находясь в n -м слое (кольце), частица может быть адсорбирована на $n - 1$, $n + 1$ и n -м слоях. Если $N_n/M_n \ll 1$, то суммарная вероятность адсорбции приблизительно равна

$$\sum_{k=-1}^1 \frac{N_{n+k}}{M_{n+k}}.$$

При адсорбции частица остается в n -м слое и значение N_n увеличивается на единицу. В противном случае она переходит в один из двух соседних слоев с вероятностью $1/2 \pm a/r_n$. Здесь слагаемое $\pm a/r_n$ учитывает увеличение/уменьшение кольца по мере изменения его радиуса (знак «+» соответствует переходу частицы на внешнее кольцо).

Данная модель, в отличие от прямого численного эксперимента, упрощает моделирование, поскольку здесь используется осевая симметрия кластера и сохраняется информация о числе частиц в каждом слое. При этом, несмотря на сделанные допущения, данный подход позволяет получить значения фрактальной размерности, близкие к действительным: 1.65 [15] и 1.72 [16].

Вернемся к среднеполевому приближению и учтем дискретную структуру кластера. Пусть $u(r, \tau)$ — плотность вероятности обнаружить частицу на расстоянии r от центра кластера в момент

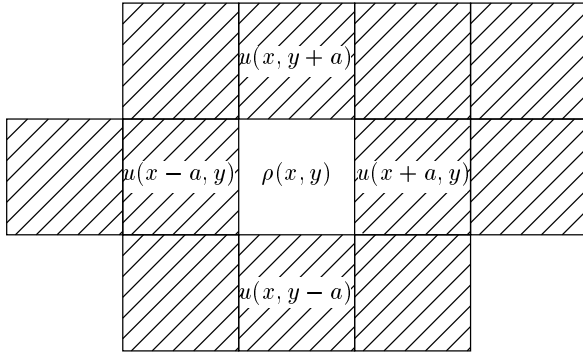


Рис. 2. Решеточная модель

времени τ . Кроме того, зададим начальное распределение $u(r, 0)$ и условие непроницаемости стенок $u_r|_{r=0,R} = 0$. Чтобы различить два масштаба времени, используем переменную τ для времени жизни частицы и дискретное время n для роста кластера. Очевидно, что адсорбция одной частицы не приведет к глобальным изменениям в структуре кластера, т.е. эти масштабы несоизмеримы между собой.

При выводе кинетического уравнения для функции $u(r, \tau)$ будем использовать для простоты ячеичную модель на плоскости с координатами x и y . Пусть задана вероятность $\rho(x, y)$ обнаружить частицы кластера в точке с координатами x, y и вероятности $u(x \pm a, y \pm a, \tau)$ обнаружить свободную частицу в соседних ячейках (рис. 2). Рассмотрим независимо два процесса:

- 1) диффузию броуновской частицы с ее поглощением в поле кластера,
- 2) изменение плотности кластера за счет поглощения новой частицы.

Таким образом, мы фактически пренебрегаем изменением плотности кластера за время жизни свободной частицы. Тогда разностное уравнение для $u(x, y, \tau)$ можно записать как

$$u(x, y, \tau + 1) = (1 - \rho(x, y)) [u(x - a, y, \tau) + u(x + a, y, \tau) + u(x, y - a, \tau) + u(x, y + a, \tau)] / 4. \quad (3)$$

Теперь, вводя малое приращение времени с условием $\delta\tau \sim a^2$ и пользуясь разложением в ряд Тейлора, из (3) получим

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a^2}{4} \Delta u - \rho \left(u + \frac{a^2}{4} \Delta u \right), \quad (4)$$

где лапласиан вычисляется в декартовых координатах. При переходе к аксиально-симметричному случаю

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

С точностью до членов второго порядка малости это уравнение близко ко второму уравнению системы (2). Однако, в отличие от него, такая форма, с одной стороны, позволяет учесть нелокальность поглощения, а с другой является условием, что при полном заполнении некоторой части пространства (т.е. при $\rho_n(r) = 1$) диффузия сквозь нее будет равна нулю. В то же время случайное блуждание в область, не содержащую кластера ($\rho_n = 0$), происходит свободно. Такая форма уравнений, на наш взгляд, является более точной.

2.2. Общая характеристика модели

Полученное уравнение является уравнением диффузии с поглощением, асимптотическое решение которого имеет вид

$$u(\tau) \leq \exp(-\rho\tau).$$

Следовательно, существует и конечная функция

$$U(r) = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} u(r, \tau) d\tau,$$

которая с точностью до нормировки дает усредненное по времени распределение свободных частиц в пространстве. Интегрируя обе части уравнения (4) по τ от нуля до некоторого характерного времени жизни свободной частицы T^* и учитывая, что $u(T^*) = 0$, получим следующее уравнение:

$$-u(r, 0) = \frac{a^2}{4} \Delta U(r) - \rho \left(U(r) + \frac{a^2}{4} \Delta U(r) \right),$$

для которого граничные условия можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial r} U(r)|_{r=0,R} = 0.$$

Это соответствует отсутствию потока через границы.

Обратимся теперь к уравнению для плотности кластера ρ . Его можно представить в виде (см. первое уравнение системы (2))

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = C U(\rho + \Delta\rho),$$

где C — некоторая нормировочная константа, а n — номер итерации. В стандартном среднеполевом подходе добавление одной частицы к границе кластера равносильно ее «размазыванию» тонким слоем

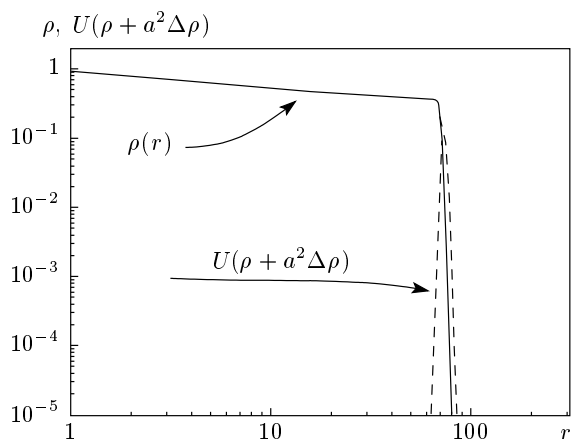


Рис. 3. Зависимости плотности кластера ρ и плотности адсорбированных за одну итерацию частиц

по всему периметру, что соответствует небольшому увеличению кластера во все стороны. В нашей модели добавление одной частицы будет соответствовать такому изменению плотности, при котором (см. (1))

$$\int [\rho(n+1) - \rho(n)] 2\pi r dr / a^2 = 1.$$

Следовательно,

$$C_0 = \frac{a^2}{2\pi \int U(\rho + \Delta\rho) r dr}.$$

Численное решение системы уравнений в этом случае совпадает с результатами работы [11] и дает единицу в качестве фрактальной размерности 2D-кластера (см. п. 3.1).

В реальной модели, однако, прибавление единственной частицы к границе пренебрежимо мало влияет на вероятность прилипания частиц в других частях кластера. Таким образом, можно ввести следующее огрубление по времени. Будем считать, что плотность кластера меняется только после того, как свободные частицы адсорбировались по всему периметру, т. е. полностью заполнили граничный слой кластера. В этом случае

$$C = \frac{2\pi R_b}{a} C_0 = \frac{2\pi R_b}{a} \frac{a^2}{2\pi \int U(\rho + \Delta\rho) r dr}, \quad (5)$$

где R_b — характерное расстояние от центра до границы кластера.

На рис. 3 приведен характерный вид зависимости плотности кластера и график $U(\rho + \Delta\rho)$, характеризующий положение адсорбированных частиц. Как

следует из графика, последняя величина имеет ярко выраженный пик в окрестности границы кластера и практически равна нулю во всех остальных областях. Следовательно, в выражении (5) в первом приближении можно просто заменить R_b на r . Тогда окончательно система примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &= \rho_n + CU(\rho + \Delta\rho), \\ -u(r, 0) &= \Delta U(r) - \rho_n(r) \left(U(r) + \frac{a^2}{4} \Delta U(r) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$C = \frac{2\pi r}{a} \frac{a^2}{2\pi \int U(\rho + \Delta\rho) r dr},$$

а n — номер итерации, соответствующий заполнению очередного слоя кластера и сдвигу границы на величину порядка размера частицы.

3. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

В этом разделе проведен анализ полученной системы уравнений в двумерном случае. Получены как численные, так и аналитические решения.

3.1. Численный подход

При численном анализе начальное распределение плотности выбиралось в виде функции

$$\rho_0(r) = \exp(-2r/a).$$

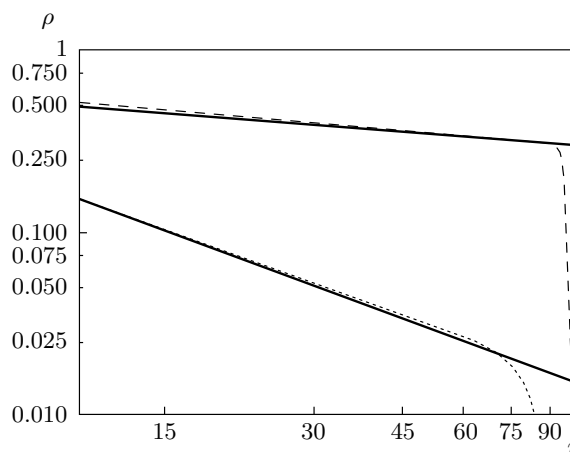


Рис. 4. Зависимость плотности кластера от радиуса в модели [11] (пунктир) и модели с временным огрублением (6) (штриховая линия). Фрактальная размерность равна 1 в первом случае и 1.78 во втором

Система (6) решалась последовательными итерациями, соответствующими шагам приращения кластера. На каждом из них, используя разбиение интервала по координате на 10^5 точек, мы численно (явная разностная схема) искали решение второго дифференциального уравнения системы (6) с распределением $\rho_n(r)$, полученным на предыдущем шаге. Правая часть уравнения выбиралась в виде функции

$$u_0(r) = \exp(-(r - R)^2/a^2).$$

Полученное решение использовалось для вычисления нормированного приращения плотности вероятности распределения кластера (первое уравнение в (6)). Приращение в точке $r = 0$ бралось нулевым, что соответствует непроницаемости области, заполненной затравочной частицей.

Результат численного интегрирования системы (6) для двумерного случая представлен на рис. 4 (штриховая линия). Видно, что в логарифмических координатах решение выходит на прямолинейный участок с тангенсом угла наклона, равным -0.22 ± 0.02 . Этому отвечает фрактальная размерность кластера $d = 1.78 \pm 0.02$. Для сравнения на этом же рисунке приведена пунктирная линия, соответствующая среднеполевому подходу без округления по времени [11]. Как следует из рис. 4, такое допущение приводит к занижению размерности агрегата ($d = 1$).

3.2. Аналитическое решение

В силу того, что система (6) допускает итеративный подход, нетрудно найти ее аналитическое решение путем использования конечного преобразования Ханкеля:

$$U(p_i, t) = \frac{1}{R^2} \int_0^R U(r, t) J_0\left(p_i \frac{r}{R}\right) r dr,$$

где $J(p_i)$ — функция Бесселя. Искомое решение представимо в виде ряда:

$$U(r, t) = 2 \sum_i U(p_i, t) \frac{J_0\left(p_i \frac{r}{R}\right)}{J_0^2(p_i)},$$

где p_i — корни уравнения $J_1(p_i) = 0$.

Считая, что в начальный момент свободная частица сосредоточена на внешнем радиусе резервуара,

$$u(r, 0) = \delta(r - R) / 2\pi(r/R),$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial}{\partial r} U(r) |_{r=0, R} = 0$$

приходим к бесконечной алгебраической системе, которой удовлетворяет функция $U(p_i, t)$:

$$U(p_i) + \sum_{p_k} U(p_k) K(p_k, p_i) = \frac{2R^2}{\pi a^2} \frac{J(p_i)}{p_i^2},$$

где

$$K(p_k, p_i) = \frac{8 \left(1 - \frac{a^2}{4R^2} p_k^2\right)}{a^2 p_i^2 J_0^2(p_k)} \times \int_0^R \rho(r) J_0\left(p_i \frac{r}{R}\right) J_0\left(p_k \frac{r}{R}\right) r dr.$$

Она является аналогом дискретизации интегрального уравнения Фредгольма второго рода [17] и имеет точное решение, представляемое через резольвенту:

$$U(p_i) = \frac{2R^2}{\pi a^2} \left[\frac{J(p_i)}{p_i^2} + \frac{1}{D} \sum_k \frac{J(p_k)}{p_k^2} D(p_i, p_k) \right], \quad (7)$$

где

$$D = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\alpha_1=1}^{\infty} \sum_{\alpha_m=1}^{\infty} \begin{vmatrix} K(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_1}) & \cdots & K(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(p_{\alpha_m}, p_{\alpha_1}) & \cdots & K(p_{\alpha_m}, p_{\alpha_m}) \end{vmatrix},$$

$$D(p_i, p_k) = K(p_i, p_k) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\alpha_1=1}^{\infty} \sum_{\alpha_m=1}^{\infty} \begin{vmatrix} K(p_i, p_k) & K(p_i, p_{\alpha_1}) & \cdots & K(p_i, p_{\alpha_m}) \\ K(p_{\alpha_1}, p_k) & K(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_1}) & \cdots & K(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(p_{\alpha_m}, p_k) & K(p_{\alpha_m}, p_{\alpha_1}) & \cdots & K(p_{\alpha_m}, p_{\alpha_m}) \end{vmatrix}.$$

Теперь, продифференцировав полученное таким образом решение и подставив его в исходную систему, получим искомое решение, описывающее рост кластера, в виде рекуррентной процедуры. Следует, однако, отметить, что полученное решение является слишком громоздким (в силу относительно слабой сходимости рядов и необходимости вычислять интегралы, содержащие функции Бесселя) по сравнению с численным решением. Поэтому его непосредственное использование для оценки значения фрактальной размерности затруднительно.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в рамках среднеполевого приближения представлен новый подход к описанию роста фрактальных структур, формирующихся в результате DLA-процесса. Как и в предыдущих исследованиях (см., например, [11, 14, 15]), в его основе лежит предположение об осевой симметрии агрегата. Основное отличие предложенного подхода состоит в том, что он позволяет учесть дискретную структуру кластера путем введения огрубления по временной шкале. Это огрубление предполагает, что после перехода от дискретного к непрерывному распределению плотности кластера и усреднения по углу присоединения одной частицы не должно сказываться на континуальной радиальной функции распределения. Для учета этого было сделано предположение, что плотность кластера изменяется скачками лишь после того, как новые частицы полностью заполнили доступный периметр. В результате уравнение, описывающее приращение агрегата, принимает дифференциально-разностную форму с дискретным шагом по времени. Кроме того, подобный вид уравнения обуславливает появление нормировочного множителя C , пропорционального длине доступного периметра кластера.

В зависимости от размерности пространства, где происходит рост агрегата, значение нормировочного множителя будет разным. В модели роста кластера на поверхности цилиндра вдоль его образующей [5, 18] $C = \text{const}$, так как в этом случае фрактальная размерность вычисляется вдоль направления роста агрегата и задача является квазидвумерной. В двумерном случае этот множитель пропорционален длине окружности, а в трехмерном — объему шарового слоя (с характерной толщиной в одну частицу), в которых происходит активный рост кластера. Благодаря тому что в среднеполевым приближении плотность кластера имеет резкий спад на границе

(см. рис. 3), соотношение $\rho + \Delta\rho$ имеет вид, близкий к δ -функции, что позволяет выделить область активного роста и найти нормировочный множитель.

В двумерном случае развитый подход позволяет получить значение фрактальной размерности кластера 1.78, что хорошо совпадает с результатами, полученными прямым численным экспериментом. Кроме того, были рассмотрены квазиодномерная и трехмерная модели DLA. В первом случае решение предложенной системы уравнений приводит к значению 0.80 ± 0.02 и удовлетворительно согласуется с результатом прямого численного моделирования [5, 18]. С ростом пространственной размерности от трех и выше предположение об изотропности становится все более грубым (хотя и физически допустимым) и влечет за собой систематическое завышение расчетной фрактальной размерности кластера.

В заключение следует отметить, что описанный подход допускает естественное обобщение на случай агрегации в системе частиц различных типов. В частности, при наложении условия слипания частиц одного сорта нормировочный множитель в каждом из уравнений, составляющих систему для всех видов частиц, будет пропорционален максимально допустимому относительному объему частиц данного вида в текущем шаровом слое.

Авторы приносят благодарность Н. Бриллианто-ву за плодотворные обсуждения в ходе выполнения данного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. A. Witten, Jr. and L. M. Sander, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1400 (1981).
2. T. Halsey, *Phys. Today* **53**, 36 (2000).
3. V. I. Roldughin, *Russ. Chem. Rev.* **72**, 823 (2003).
4. P. Meakin, *Physica D* **86**, 104 (1995).
5. A. Arneodo, J. Elezgaray, M. Tabbard et al., *Phys. Rev. E* **53**, 6200 (1996).
6. E. Somfai, R. Ball, J. Devita et al., *Phys. Rev. E* **68**, 020401 (2004).
7. D. Tillberg and J. Machta, *Phys. Rev. E* **69**, 051403 (2004).
8. A. Erzan, L. Pietronero, and A. Vespignani, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 545 (1995).
9. M. Hastings, *Phys. Rev. E* **55**, 135 (1997).

10. T. A. Witten, Jr. and L. M. Sander, *Phys. Rev. B* **27**, 5686 (1983).
11. R. Ball, M. Nauenberg, and T. A. Witten, Jr., *Phys. Rev. A* **29**, 2017 (1984).
12. K. Ohno, K. Kikuchi, and H. Yasunara, *Phys. Rev. A* **46**, 3400 (1992).
13. H. Levine and Yu. Tu, *Phys. Rev. A* **45**, 1053 (1992).
14. V. A. Bogoyavlenskiy and N. A. Chernova, *Phys. Rev. E* **61**, 5422 (2000).
15. H. Sakaguchi, *J. Phys. Soc. Jap.* **68**, 61 (1999).
16. A. Loskutov, D. Andrievsky, V. Ivanov et al., *Macromol. Symp.* **160**, 239 (2000).
17. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
18. C. Evertsz, *Phys. Rev. A* **41**, 1830 (1990).