

МЕХАНИЗМ КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БИНАРНОЙ СМЕСИ

*Л. Х. Ингель**

*Научно-производственное объединение «Тайфун»
249038, Обнинск, Калужская обл., Россия*

Поступила в редакцию 31 января 2005 г.

Даже весьма медленные фоновые вертикальные движения могут существенно влиять на конвективную устойчивость стратифицированной жидкости в поле силы тяжести. Показано, что в поле таких движений возможен неизвестный ранее механизм конвективной неустойчивости бинарной смеси.

PACS: 44.25.+f, 47.27.Te

Как хорошо известно, бинарные смеси обладают некоторыми парадоксальными, на первый взгляд, гидротермодинамическими свойствами (см., например, [1, 2]). В частности, конвективная неустойчивость в таких средах может возникать, вопреки интуитивным представлениям, при устойчивой фоновой стратификации, т. е. когда плотность среды убывает с высотой [1, 3]. Принципиальную роль при этом обычно играет различие значений коэффициентов переноса для двух гидродинамических компонент — тепла и примеси (так называемый эффект двойной, или дифференциальной, диффузии, *double-diffusive convection* [1]). Считается, что конвекция, обусловленная двойной диффузией, возникает в ситуациях, когда термическая стратификация среды устойчива, а слабо диффундирующая примесь (например, морская соль) вносит в стратификацию плотности дестабилизирующий вклад. Хотя этот вклад может быть относительно малым, благодаря упомянутым эффектам, его может быть достаточно для дестабилизации устойчиво стратифицированной (по плотности) системы. В настоящей статье обращается внимание на возможность возникновения неустойчивости при качественно иных ситуациях, в частности, когда слабо диффундирующая примесь, напротив, вносит стабилизирующий вклад в стратификацию плотности, причем этот вклад может сильно превышать по абсолютной величине термическую неустойчивость. На первый взгляд, такая возможность выглядит еще более парадоксальной, поскольку, благодаря эффектам двойной диффузии,

медленно диффундирующая примесь при прочих равных условиях обычно гораздо сильнее влияет на конвективную неустойчивость, чем более быстро переносимое тепло (коэффициенты обмена входят в знаменатель соответствующих критериев Рэлея).

Ниже рассматриваются ситуации, когда в среде имеет место медленное фоновое движение в направлении силы тяжести. Задачи о конвекции в поле медленных (по сравнению с характерной скоростью изучаемых конвективных движений) фоновых вертикальных движений представляют интерес, в частности, в связи с известными геофизическими приложениями (см., например, [4, 5]). Конвекция в атмосфере и океане нередко происходит на фоне процессов существенно более крупных горизонтальных масштабов (например, атмосферных циклонов, антициклонов), для которых характерны средние вертикальные движения, на несколько порядков более медленные, чем те, которые возникают при развитии конвективной неустойчивости. Нетривиально, что, согласно данным натуральных экспериментов, даже медленное фоновое оседание среды эффективно подавляет конвекцию. Природа подобных эффектов мало исследована.

Рассмотрим следующую модификацию классической задачи Рэлея – Бенара о конвективной устойчивости жидкости между двумя горизонтальными пластинами [1, 6]. Предполагаем, что в фоновом состоянии задано медленное нисходящее движение. Для простоты будем считать, что скорость этого движе-

*E-mail: lingel@obninsk.com

ния $-W < 0$ не зависит¹⁾ от вертикальной координаты z , отсчитываемой вверх от нижней границы $z = 0$.

Рассматриваем сначала однокомпонентную среду, плотность которой зависит только от температуры T (пренебрегаем эффектами стратификации примеси). На нижней границе считаем заданной температуру T_d , на верхней — температуру T_u ; их разность $T_d - T_u$ обозначим через ΔT . В фоновом состоянии уравнение переноса тепла имеет вид

$$-W \frac{dT}{dz} = \kappa \frac{d^2 T}{dz^2}, \quad (1)$$

где κ — коэффициент температуропроводности. Решение для указанных выше краевых условий можно записать в виде

$$\Theta(z) = \frac{\exp(-\xi) - \exp(-w)}{1 - \exp(-w)}. \quad (2)$$

Здесь $\Theta(z) = [T(z) - T_u]/\Delta T$ — безразмерное отклонение температуры, $\xi = z/h$ — безразмерная высота; $h = \kappa/W$ — масштаб высоты, связанный с фоновым вертикальным движением (при его отсутствии он обращается в бесконечность); важнейший безразмерный параметр задачи $w = H/h = W(H/\kappa)$, H — толщина рассматриваемого горизонтального слоя среды. При отсутствии фонового вертикального движения (в пределе $W \rightarrow 0$, $h \rightarrow \infty$, $w \rightarrow 0$) получаем, как и следовало ожидать, линейный профиль $\Theta = 1 - z/H$ — состояние, исследуемое на устойчивость в стандартной задаче Рэлея.

На рис. 1 представлены вертикальные профили $\Theta(z)$ при $w = 0$ и $w = 10$. Видно, что фоновое оседание среды «прижимает» практически весь вертикальный перепад температур ΔT к нижней границе; он сосредоточен в слое толщиной порядка $h = \kappa/W$. Строгое исследование на устойчивость стационарного состояния с криволинейным профилем температуры и фоновым оседанием — достаточно трудная и громоздкая задача. Но физические соображения позволяют сделать простую и весьма правдоподобную оценку. Представляется достаточно очевидным, что устойчивость состояния 2 на рис. 1 определяется конвективной устойчивостью нижнего «подслоя» толщиной порядка $h = \kappa/W$, в котором сосредоточен практически весь вертикальный перепад темпе-

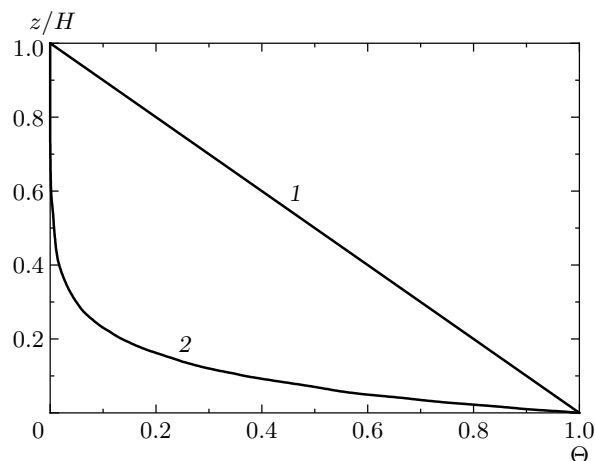


Рис. 1. Пример деформации фонового вертикального профиля температуры нисходящими движениями среды: 1 — случай отсутствия фонового вертикального движения; 2 — профиль при $w = H/h = 10$

ратур ΔT . Эффективное число Рэлея для такого подслоя

$$\text{Ra} \sim \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\kappa \nu} \sim \frac{\alpha g \Delta T \kappa^2}{\nu W^3}, \quad (3)$$

где α — коэффициент термического расширения среды, ν — коэффициент кинематической вязкости, g — ускорение свободного падения.

Из выражения (3) видно, что эффективное число Рэлея сильно зависит от фоновых вертикальных движений. Это и понятно, поскольку от них зависит толщина подслоя, содержащего практически весь перепад температур. Отметим также, что эффективное число Рэлея (3) быстро растет с ростом коэффициента температуропроводности κ (классическое число Рэлея, напротив, убывает с κ). Обозначим через Ra_{cr} значение эффективного числа Рэлея, соответствующее потере устойчивости. Тогда скорость оседания, достаточная для того, чтобы предотвратить возникновение конвективной неустойчивости выражается формулой

$$W_{cr} \sim \left(\frac{\alpha g \Delta T \kappa^2}{\nu \text{Ra}_{cr}} \right)^{1/3}. \quad (4)$$

Пусть, например, $\kappa = \nu = 1 \text{ м}^2/\text{с}$ (эффективные значения коэффициентов турбулентного обмена, характерные для пограничного слоя атмосферы), $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $\Delta T = 0.1 \text{ К}$, $\text{Ra}_{cr} = 10^3$. Получаем $W_{cr} \sim 10^{-2} \text{ м/с}$. Такое оседание на два-три порядка медленнее характерной скорости конвективных движений в атмосфере. Но, тем не менее, согласно данным натуральных экспериментов и результатам

¹⁾ Предположение о постоянстве вертикальной скорости означает отказ от условия непротекания на горизонтальных границах $z = 0$ и $z = H$ для фонового движения. Подобные ситуации можно практически реализовать, прокачивая жидкость в вертикальном направлении через пористые горизонтальные границы. Упомянутое предположение, не будучи принципиальным, существенно упрощает расчеты.

численного моделирования, такое оседание действительно эффективно подавляет конвекцию.

Перейдем к случаю двухкомпонентной среды. Для определенности можно говорить, например, о соленой воде, вклад в плотностную стратификацию которой вносят вертикальные распределения температуры $T(z)$ и концентрации соли (солености) $s(z)$. Пользуясь обычно используемым приближением [1, 7, 8], предполагаем линейную зависимость плотности ρ от температуры и концентрации примеси:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(s - s_0)]. \quad (5)$$

Смысл положительного коэффициента β очевиден (в океанологии его называют коэффициентом соленостного сжатия). Индексом нуль обозначены постоянные («отсчетные») значения соответствующих величин. В качестве отсчетных можно принять, например, значения величин на верхней границе рассматриваемого слоя. Стационарное уравнение для концентрации примеси $s(z)$ имеет вид, аналогичный уравнению (1):

$$-W \frac{ds}{dz} = \chi \frac{d^2 s}{dz^2}, \quad (6)$$

где χ — соответствующий коэффициент переноса. Предполагаем для определенности, что краевые условия для концентрации примеси аналогичны рассмотренным выше: $s = s_d$, s_u соответственно при $z = 0, H$. Тогда вид решения для s аналогичен (2):

$$\sigma(z) = \frac{\exp(-\xi_s) - \exp(-w_s)}{1 - \exp(-w_s)}. \quad (7)$$

Здесь

$$\sigma = (s - s_u)/\Delta s, \quad \Delta s = s_d - s_u, \quad \xi_s = z/h_s, \\ h_s = \chi/W, \quad w_s = H/h_s = W(H/\chi).$$

При различии значений коэффициентов переноса χ и κ существует количественная разница между безразмерными функциями (2) и (7). Например, в случае соленой воды $\chi/\kappa \approx 10^{-2}$; соответственно, масштаб высоты h_s в сто раз меньше h . Если сравнивать профиль концентрации примеси с кривой 2 на рис. 1, то, хотя качественно профили T и s одинаковы, весь перепад солености может быть сосредоточен в слое, гораздо более тонком, чем слой, в котором происходит перепад температуры. Покажем, что это может приводить к нетривиальным эффектам в том, что касается конвективной устойчивости рассматриваемого слоя.

Будем анализировать профиль безразмерной плавучести $b(z)$ в фоновом состоянии:

$$b(z) = -\frac{\Delta\rho(z)}{\rho_0} = \alpha\Delta T\Theta(z) - \beta\Delta s\sigma(z). \quad (8)$$

В зависимости от знаков полных перепадов величин ΔT и Δs в принципе возможны четыре качественно различные ситуации.

1) $\Delta T < 0$, $\Delta s > 0$ (стратификации обеих субстанций устойчивы). В этом случае, как нетрудно видеть, фоновое оседание лишь количественно меняет устойчивую стратификацию плотности (оно «прижимает» перепады обеих субстанций к нижней границе). Знак выражения (8) всюду остается отрицательным. Таким образом, оседание не влияет на конвективную устойчивость, которая в данном случае не вызывает сомнений.

2) Стратификация плотности при отсутствии вертикальных движений неустойчива благодаря достаточно неустойчивой стратификации хотя бы одной субстанции. Как показано выше для случая однокомпонентной среды, фоновое оседание приводит к уменьшению эффективного числа Рэлея (уменьшает толщину слоя, в котором заключен практически весь неустойчивый перепад плотности) и, тем самым, может предотвращать возникновение конвективной неустойчивости. Отметим, что особенно легко подавляется неустойчивость, связанная с неустойчивой стратификацией медленно диффундирующей субстанции (соли), поскольку в критериях типа (3), (4) соответствующий коэффициент обмена находится в числителе. Под влиянием даже медленного вертикального движения такая субстанция концентрируется в тонком слое у границы, так что эффективное значение числа Рэлея оказывается малым.

3) $\beta\Delta s > \alpha\Delta T > 0$ (неустойчивая стратификация температуры при отсутствии вертикальных движений с избытком компенсируется устойчивой стратификацией примеси). Этот случай представляется наиболее содержательным, поскольку даже весьма слабое оседание может приводить к изменению знака выражения (8) в значительной части слоя, т. е. дестабилизировать систему, которая «в среднем» достаточно устойчиво стратифицирована по плотности. Это видно из рис. 2, где построены вертикальные профили плавучести (8), нормированной на $\alpha\Delta T$, и обеих ее составляющих — «термической» и «соленостной». При отсутствии вертикальных движений с большим запасом доминирует устойчивая стратификация солености (прямая 1). Температура стратифицирована неустойчиво, но она вносит лишь относительно небольшой вклад в плавучесть (прямая 2). При наличии медленного ($w = 0.2$) оседания профиль температуры в рассматриваемом примере меняется очень мало (левее прямой 2 видна почти совпадающая с ним кривая). Но профиль солености радикально деформируется (кривая 3). В результа-

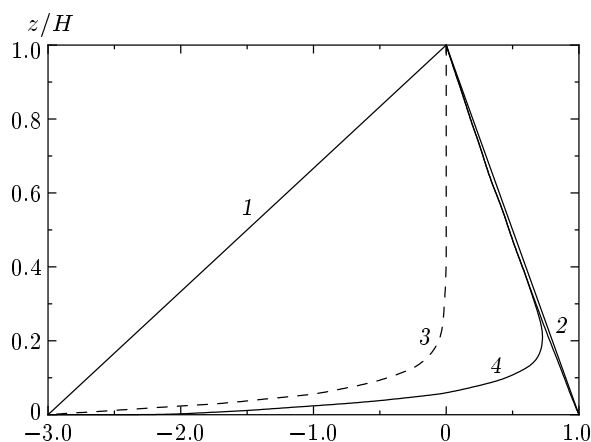


Рис. 2. Пример возникновения неустойчивого профиля плотности при нисходящем движении в двухкомпонентной среде ($w = 0.2$, $w_s = 20$, $\Delta T > 0$, $\beta\Delta s/\alpha\Delta T = 3$): 1, 2 — профили плавучести двух субстанций при отсутствии фонового вертикального движения (1 — вклад солёности, по оси абсцисс отложена величина $-\beta\Delta s\sigma(z)/\alpha\Delta T$; 2 — вклад температуры, величина $\Theta(z)$); 3 — деформация профиля 1 при нисходящем движении; 4 — профиль суммарной плавучести (величина $b(z)/\alpha\Delta T$) при наличии оседания

те того что примесь (соль), в отличие от тепла,носится вертикальным движением вниз, ее стратификация в большей части слоя перестает компенсировать неустойчивую температурную стратификацию, так что суммарный профиль плавучести в большей части слоя становится неустойчивым (кривая 4). Отметим, что при более интенсивных фоновых нисходящих движениях деформируется и температурный профиль. Это, как показано выше, может стабилизировать систему. Таким образом, область неустойчивости соответствует некоторой промежуточной области значений скорости оседания.

4) $\alpha\Delta T < \beta\Delta s < 0$. Стратификация примеси неустойчива, но при отсутствии вертикального движения система стабилизируется устойчивой стратификацией температуры²⁾. Нетрудно видеть, что и в этом случае даже медленное оседание может приводить к возникновению конвективно неустойчивого состояния. В самом деле, как следует из изложенного выше, при оседании в нижней части рассматриваемого слоя увеличивается вертикальный градиент

²⁾ Условие устойчивости такой системы при неодинаковых значениях коэффициентов обмена для разных субстанций сложнее, чем в случае обычной задачи Рэлея [1, 8, 9]. В частности, оно может быть гораздо жестче. Предполагаем здесь, что при отсутствии вертикальных движений оно выполнено.

концентрации примеси, т. е. усиливается изначально неустойчивая стратификация примеси. При $w_s > 1$ этот эффект может быть значительным. В то же время величина w может быть много меньше единицы, так что температурная стратификация практически не меняется и перестает компенсировать усиливающуюся неустойчивую стратификацию примеси.

Таким образом, фоновые вертикальные движения в некоторых ситуациях могут предотвращать возникновение конвективной неустойчивости, а в двухкомпонентных средах, напротив, приводят к дестабилизации слоя среды. Существенно, что упомянутые эффекты, вообще говоря, возможны при очень малых скоростях вертикальных движений. Например, в перечисленных выше случаях 3 и 4 важнейшим условием дестабилизации слоя среды является

$$w_s = WH/\chi \geq 1, \quad W \geq \chi/H.$$

В морской воде $\chi \approx 1.5 \cdot 10^{-9}$ м²/с; при $H = 0.1$ м получаем, что для потери устойчивости в принципе достаточны совершенно незначительные, на первый взгляд, вертикальные движения с $W \sim 10^{-8}$ м/с. В известном смысле, речь идет о новом типе неустойчивости. Правда, при малых скоростях W времена эволюции системы к неустойчивому состоянию (времена установления рассмотренных выше стационарных состояний) могут быть достаточно большими.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-05-64027) и ISTC (грант № G-553).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Тернер, *Эффекты плавучести в жидкостях*, Мир, Москва (1977) (J. S. Turner, *Buoyancy Effects in Fluids*, University Press, Cambridge (1973)).
2. Л. Х. Ингель, УФН **172**, 691 (2002).
3. Л. Х. Ингель, ЖЭТФ **122**, 1019 (2002).
4. R. C. J. Somerville and T. G. Chen, *J. Atmos. Sci.* **36**, 805 (1979).
5. Т. Б. Глуховская, А. Е. Орданович, *Метеорол. и гидрол.* № 3, 31 (1984).
6. А. В. Гетлинг, *Конвекция Рэлея-Бенара*, Эдиториал УРСС, Москва (1999).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
8. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
9. G. Walin, *Tellus* **16**, 389 (1964).